الاختبار الأول في النهايات والاستمرار — **المدة : ساعتان**

التاريخ : 2016 – 9 – 18 — **للثالث الثانوي العلمي - دورة عام 2017** — **الدرجة : 300**

السؤال الأول :

عين فيما يأتي مجموعة تعريف التابع f , ثم ادرس في كل حالة نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار :

① $f(x)=\sin 2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ② $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}$ ③ $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}$

السؤال الثاني : حل التمارين الآتية :

التمرين الأول : ادرس نهاية التابع $f: x\mapsto 2-x\cdot\cos\dfrac{1}{x}$ عند الصفر .

التمرين الثاني : f تابع معرف على $]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$ ويحقق عليه العلاقة :

$\dfrac{x\cdot\sin x}{1-\cos x}\le f(x)\le\dfrac{4(1-\cos x)}{x\cdot\sin x}$. احسب نهاية التابع f عند الصفر .

التمرين الثالث : احسب نهاية التابع $f: x\mapsto\dfrac{E(x)}{x-1}$ عند $+\infty$ (E هو تابع الجزء الصحيح)

التمرين الرابع : ليكن f التابع المعرف على المجال $]2,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{2x}{2-x}$

1) احسب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$, واستنتج $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(f(x))$.

2) أعد حساب $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x .

السؤال الثالث :

ليكن التابع f المعرف على $R\setminus\{2\}$ وفق العلاقة $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-2)^2}$

1) أوجد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه .

2) عين عدداً α يحقق الشرط :

إذا كان x عنصراً من المجال $]2-\alpha,2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 , كان $f(x)>10^4$

المدرسان : عبـــد الحميـــد السيـــد – محمـــد خالـــد غـــزول

السؤال الرابع :

نتأمل التابع f المعرف على $R\backslash\{-2\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{2-x}{x+2}$ خطه البياني C_f

1) احسب نهاية التابع f عند $+\infty$, أعطِ عدداً A يحقق الشرط :

إذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه -1 ونصف قطره 0.04 .

2) احسب نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه . ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني C_f وبين وضع الخط البياني C_f بالنسبة إلى مقارباته الأفقية .

انتهت الأسئلة

المدرسان : عبــد الحميــد السيــد – محمــد خالــد غــزول

حلول الاختبار الأول في النهايات والاستمرار

المدة : ساعتان

التاريخ : 2016 – 9 – 27 **للثالث الثانوي العلمي ـ دورة عام 2017** **الدرجة : 300**

السؤال الأول :

عين فيما يأتي مجموعة تعريف التابع f , ثم ادرس في كل حالة نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار :

① $f(x)=\sin 2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$ ② $f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x}}$ ③ $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}$

① التابع $f(x)=\sin 2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$ معرف على $]0,+\infty[$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

بما أن : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ والتابع sin دوري وليس ثابت فلا توجد نهاية للتابع f عند $+\infty$

② التابع $f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x}}$ معرف عندما $x\geq 0$ و $\sqrt{x}\neq 1$

وبالتالي $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$ وضمنها يكون :

$$f(x)=-\frac{x-1+1}{\sqrt{x}-1}=-\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+1}{\sqrt{x}-1}=-\sqrt{x}-1-\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ $\boxed{\text{ليس للتابع نهاية عند } 1}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

③ التابع $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}$ معرف على المجال $[1,+\infty[$

إن : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$

نكتب : $f(x)=\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}=\frac{-4}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}}$

إذن : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

المدرسان : عبـد الحميـد السيـد ـ محمـد خالـد غـزول

السؤال الثاني :

التمرين الأول : ادرس نهاية التابع $f : x \mapsto 2 - x \cdot \cos \frac{1}{x}$ عند الصفر .

لدينا : $f(x) - 2 = -x \cdot \cos \frac{1}{x}$

وبالتالي : $|f(x) - 2| = |x| \cdot \left|\cos \frac{1}{x}\right|$

وأياً تكن x من $R \setminus \{0\}$ فإن : $\left|\cos \frac{1}{x}\right| \leq 1$

وبالتالي : $|f(x) - 2| \leq |x|$, ولكن : $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة الثانية نجد : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

التمرين الثاني : f تابع معرف على $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ ويحقق عليه العلاقة :

$\frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} \leq f(x) \leq \frac{4(1 - \cos x)}{x \cdot \sin x}$. احسب نهاية التابع f عند الصفر .

لدينا : $\frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \frac{x \cdot \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{x}{\sin x}(1 + \cos x)$

إذن : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = 1(1 + 1) = 2$

ولدينا : $\frac{4(1 - \cos x)}{x \cdot \sin x} = \frac{4(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \cdot \sin x (1 + \cos x)} = 4 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(1 + \cos x)}$

إذن : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4(1 - \cos x)}{x \cdot \sin x} = 4(1)\frac{1}{2} = 2$

حسب مبرهنة الإحاطة نجد : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

المدرسان : محمــد خالــد غــزول ـ عبــد الحميــد السيــد

التمرين الثالث : احسب نهاية التابع $f : x \mapsto \frac{E(x)}{x-1}$ عند $+\infty$ (E هو تابع الجزء الصحيح)

نتذكر أن $E(x)$ هو العدد الصحيح الوحيد الذي يحقق : $E(x) \le x < E(x)+1$

ومنه : $x-1 < E(x) \le x$

ومن أجل $x > 1$ فإن : $1 < \frac{E(x)}{x-1} \le \frac{x}{x-1}$

ولأن $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$

فحسب مبرهنة الإحاطة تكون : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

التمرين الرابع : ليكن f التابع المعرف على المجال $]2,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x}{2-x}$

1) احسب $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$, واستنتج $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(f(x))$.

2) أعد حساب $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x .

1) إن : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -2$

وبالتالي : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{u \longrightarrow -2} f(u) = f(-2) = -1$

2) لدينا : $f(f(x)) = f\left(\frac{2x}{2-x}\right) = \frac{\frac{4x}{2-x}}{2 - \frac{2x}{2-x}} = \frac{4x}{4-4x} = \frac{x}{1-x}$

إذن : $f(f(x)) = \frac{x}{1-x}$

وبالتالي : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(f(x)) = -1$

المدرسان : عبـد الحميـد السيـد – محمـد خالـد غـزول

السؤال الثالث :

ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{2\}$ وفق العلاقة $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-2)^2}$

1) أوجد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه .

2) عين عدداً α يحقق الشرط :

إذا كان x عنصراً من المجال $]2-\alpha,2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 , كان $f(x)>10^4$

1) النهايات : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)=0$

2) إذا كانت $x\in]2-\alpha,2+\alpha[\backslash\{2\}$

نأخذ $x>2-\alpha$ وهي تكافئ $2x>4-2\alpha$ وتكافئ $2x-1>3-2\alpha$ فيكون :

$$f(x)=\frac{2x-1}{(x-2)^2}>\frac{3-2\alpha}{\alpha^2}$$

لنأخذ $\alpha=0.01$ فيكون : $f(x)>\dfrac{3-0.02}{10^{-4}}=\dfrac{2.98}{10^{-4}}>\dfrac{1}{10^{-4}}=10^4$

- طريقة ثانية :

البسط $2x-1$ يقترب من 3 عندما تقترب x من 2

بفرض $2x-1>1$ (مثلاً) أي : $x>1$ و $x\neq 2$

نجد أن : $\dfrac{2x-1}{(x-2)^2}>\dfrac{1}{(x-2)^2}$

نفترض المتراجحة : $\dfrac{1}{(x-2)^2}>10^4$

وهي تكافئ $(x-2)^2<10^{-4}$ وتكافئ $|x-2|<10^{-2}$

إذن لنأخذ $\alpha=0.01$ عندئذٍ إذا كانت $x\in]2-\alpha,2+\alpha[\backslash\{2\}$ كان :

$$f(x)=\frac{2x-1}{(x-2)^2}>\frac{2(2-\alpha)-1}{\alpha^2}=\frac{3-2\alpha}{\alpha^2}=\frac{2.98}{10^{-4}}>\frac{1}{10^{-4}}=10^4$$

المدرسان : محمـــد خالـــد غـــزول – عبـــد الحميـــد السيـــد

(حلول الاختبار الأول في النهايات والاستمرار)

السؤال الرابع :

نتأمل التابع f المعرف على $R\setminus\{-2\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{2-x}{x+2}$ خطه البياني C_f

1) احسب نهاية التابع f عند $+\infty$, أعطِ عدداً A يحقق الشرط :

إذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه -1 ونصف قطره 0.04 .

2) احسب نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه . ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني C_f وبين وضع الخط البياني C_f بالنسبة إلى مقارباته الأفقية .

1) لدينا : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=-1$

ينتمي $f(x)$ إلى المجال المفروض إذا وفقط إذا تحققت المتراجحة : $|f(x)+1|<0.04$ ..(1)

لدينا : $f(x)+1=\dfrac{2-x}{x+2}+1=\dfrac{4}{x+2}$

المتراجحة (1) تكافئ $\dfrac{4}{|x+2|}<\dfrac{4}{100}$ ومنه : $|x+2|>100$

ولما كانت النهاية تحسب عند $+\infty$ نفرض $x>-2$ فيكون : $x+2>100$ ومنه : $x>98$

لذا يمكن أن نأخذ $A=98$ (أو أي عدد أكبر منه)

2) إن : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\longrightarrow(-2)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow(-2)^+} f(x)=+\infty$ ليس للتابع نهاية عند -2

المستقيم d الذي معادلته $x=-2$ مقارب (شاقولي) للخط البياني C_f .

المستقيم Δ الذي معادلته : $y=-1$ مقارب (أفقي) للخط C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

وجدنا : $g(x)=f(x)+1=\dfrac{2-x}{x+2}+1=\dfrac{4}{x+2}$

x	$-\infty$ $\quad -2$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$+$
C_f	تحت Δ	فوق Δ

المدرسان : عبـد الحميـد السيـد ـ محمـد خالـد غـزول