الباب الأول

(الرياضيات)

الجبــــر

المنطق الرياضي

- تكون العبارة المركبة $أ \wedge ب$ صائبة في حالة واحدة فقط وهي الحالة التي تكون فيها العبارة أ والعبارة ب صائبتين في وقت واحد.
- تكون العبارة المركبة $أ \vee ب$ خاطئة في وحالة واحدة فقط وهي الحالة التي تكون فيها العبارة أ والعبارة ب خاطئتين في وقت واحد
- $\sim (أ \wedge ب) \equiv \sim أ \vee \sim ب$ أيضاً $\sim (أ \vee ب) \equiv \sim أ \wedge \sim ب$

المجموعات

- $س \cap ص = \{أ : أ \in س \wedge أ \in ص\}$
- $س \cup ص = \{أ : أ \in س \vee أ \in ص\}$
- $س - ص = \{أ : أ \in س \wedge أ \notin ص\}$
- $\bar{س} = \{أ : أ \in ش \wedge أ \notin س\}$ حيث ش هي المجموعة الشاملة
- $\overline{(س \cup ص)} = \bar{س} \cap \bar{ص}$ ، $\overline{(س \cap ص)} = \bar{س} \cup \bar{ص}$ (قانونا دي مورجان)

مثـال

إذا كانت $ش = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$ ، $س = \{١، ٢، ٥\}$ ، $ص = \{٢، ٤، ٦\}$

أوجد $س \cap ص$ ، $س \cup ص$ ، $س - ص$ ، $ص - س$ ، $\bar{س}$

الحـل:

$س \cap ص = \{٢\}$ (العناصر المشتركة)

$س \cup ص = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$ (كل العناصر بدون تكرار للعنصر أكثر من مرة)

$س - ص = \{١، ٥\}$ (العناصر التي تنتمي إلى س ولا تنتمي إلى ص)

$ص - س = \{٤، ٦\}$ (العناصر التي تنتمي إلى ص ولا تنتمي إلى س)

$\bar{س} = \{٣، ٤، ٦\}$ (العناصر التي تنتمي إلى ش ولا تنتمي إلى س)

تطبيق

التطبيق المحصل للتطبيقين: $د_{1}$: س ← ص ، $د_{2}$: ص ← ع

هو التطبيق $د_{2} \circ د_{1}$: س ← ع المعرف بالقاعدة $د_{2} \circ د_{1}$ (س) = $د_{2}$ ($د_{1}$ (س))

يسمى التطبيق د : س ← ص تطبيقاً تقابلاً إذا كان متبايناً وشاملاً

مثال

إذا كان التطبيق د : ح ← ح معرفاً بالقاعدة د(س) = ٢ س + ٣

أوجد د(١) ، د$^{-1}$(١)

الحل:

د(١) = ٢ × ١ + ٣ = ٥ عوضنا في القاعدة عن س = ١

د$^{-1}$(١) نساوي القاعدة بـ ١ ونحل المعادلة ٢س + ٣ = ١   ٢ س = -٢ $\boxed{\text{س} = -١}$

∴ د$^{-1}$(١) = -١

المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد أس^{2} + ب س + جـ = ٠ ، حيث أ ≠ ٠

- القانون العام لجذري المعادلة هو $\text{س} = \dfrac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{2} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$
- مميز المعادلة ز = ب^{2} - ٤ أ جـ
  - موجب المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان
  - صفر المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان كل منهما = $\dfrac{-\text{ب}}{٢\,\text{أ}}$
  - سالب المعادلة ليس لها جذور حقيقية

تكوين المعادلة من الدرجة الثانية إذا علم جذراها

س^{2} – (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

مثال (١) أوجد المعادلة من الدرجة الثانية والتي جذراها ٣ ، ٤

الحل:

س^{2} – (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

س^{2} – ٧ س + ١٢ = ٠ مجموع الجذرين = ٣ + ٤ = ٧ حاصل ضرب الجذرين = ٣ × ٤ = ١٢

مثـال (٢)

أوجد عدد جذور المعادلة س^{٢} − س − ١ = ٠

الحـل:

أ = ١ ب = -١ جـ = -١

المميز ز = ب^{٢} − ٤ أ جـ = ١ -٤×١×(-١) = ١ + ٤ = ٥ (موجب)

∴ عدد الجذور جذران حقيقيان مختلفان

الأسس

- أ^{م} = أ × أ × أ × ... م من المرات • أ^{٠} = ١ لكل أ ∌ خ
- أ^{م} × أ^{ن} = أ$^{م+ن}$ في حالة ضرب الأساسات المتشابهة نجمع الأسس
- أ^{م} ÷ أ^{ن} = أ$^{م-ن}$ في حالة قسمة الأساسات المتشابهة نطرح الأسس
- (أ × ب)^{م} = أ^{م} × ب^{م}
- $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$
- أ$^{-م}$ = $\frac{١}{أ^{م}}$ العدد بأس سالب يعني ١ مقسوم على العدد بأس موجب
- (أ^{م})^{ن} = أ$^{م ن}$ أي عدد عليه أس وفوق الأس أس آخر نكتب الأساس ونضرب الاثنين
- $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-م} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{م}$ أي كسر وعليه أس سالب نقلب الكسر ونجعل الأس موجب

(بحيث لا ينعدم أي مقدار يقع بالمقام كما لا ينعدم أي مقدار مرفوع إلى الأس صفر)

مثـال (١) حل المعادلة ٢$^{س+١}$ = $\frac{١}{٨}$

الحـل:

٢$^{س+١}$ = $\frac{١}{٢^{٣}}$ = ٢$^{-٣}$ (∵ الأساس = الأساس ∴ الأس = الأس)

س + ١ = -٣ س = -٣ -١ $\boxed{س = -٤}$

مثال (٢)

حل المعادلة $٣^{س-٢} = ١$

الحل:

$٣^{س-٢} = ٣^{٠}$ (أولاً نجعل ١ هو الأساس الأيمن بأس صفر ثم نطبق القاعدة في مثال (١))

$س - ٢ = ٠$ $\boxed{س = ٢}$

اللوغاريتمات

- $لو_{أ} أ = ١$
- $لو_{أ} ١ =$ صفر

$لو_{أ}$ (أي عدد أصغر من أو يساوي صفر) غير معروف

- $لو_{أ} (ب \times جـ) = لو_{أ} ب + لو_{أ} جـ$
- $لو_{أ} \left(\frac{ب}{جـ}\right) = لو_{أ} ب - لو_{أ} جـ$
- $لو_{أ} ب^{ن} = ن \; لو_{أ} ب$
- إذا كان $لو_{أ} ب = لو_{أ} جـ$ فإن $ب = جـ$

الجذور

- $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ \times ب}$
- $\sqrt[ن]{أ} \div \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ \div ب}$ $ب \neq ٠$
- $\sqrt[ن]{أ^{م}} = أ^{\frac{م}{ن}}$
- $\sqrt{أ^{٢}} = |أ|$
- $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}} \neq أ + ب$
- $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$ ($أ \geq ٠ ، ب \geq ٠$ في حالة ن زوجياً)
- $\sqrt{أ} \pm \sqrt{ب} = \sqrt{أ + ب \pm ٢\sqrt{أ \times ب}}$ (طريقة أبي كامل المصري)

- تسمى اللوغاريتمات التي أساسها ١٠ اللوغاريتمات العشرية أو اللوغاريتمات المعتادة
- $لو ١٠ = ١$ $لو ١٠٠ = ٢$ $لو ١٠٠٠ = ٣$
- $لو ٠,١ = -١$ $لو ٠,٠١ = -٢$ $لو ٠,٠٠١ = -٣$

العدد البياني إذا كان $س = ب \times ١٠^{ن}$ $ن \in ص$ ، $١ < ب < ١٠$

فإن $لو س = لو ب + ن$ يسمى ن العدد البياني

مثــال (١)

إذا كان لو ٢ = ٠,٣٠١ ، لو٣ = ٠,٤٧٧ أوجد لو٦، لو٨

الحـل:

لو٦ = لو(٢×٣) = لو٢ + لو٣ = ٠,٣٠١ + ٠,٤٧٧ = ٠,٧٧٨

لو٨ = لو$٢^{٣}$ = ٣لو٢ = ٣ × ٠,٣٠١ = ٠,٩٠٣

مثــال (٢)

طبق طريقة أبي كامل المصري لإيجاد ناتج جمع $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

الحـل:

$$\sqrt{أ} + \sqrt{ب} = \sqrt{أ+ب+٢\sqrt{أب}} = \sqrt{(٣+٢) + ٢\sqrt{٣\times٢}} = \sqrt{٥+٢\sqrt{٦}}$$

مثــال (٣)

أوجد ناتج $\sqrt[٣]{\sqrt{٧٢٩}}$

الحـل:

$$\sqrt[٣]{\sqrt{٧٢٩}} = \left((٣^{٦})^{\frac{١}{٢}}\right)^{\frac{١}{٣}} = (٣^{٦})^{\frac{١}{٦}} = ٣^{١} = ٣$$

مثــال (٤)

حل المعادلة لو$_{س}$ ٨ = ٣

الحـل:

نوجد الصورة الأسية س^{٣} = ٨ (الجذر التكعيبي) $\boxed{س = ٢}$

مثــال (٥)

اختصر $\dfrac{٣^{ن} + ٣^{ن-١}}{٣^{ن} - ٣^{ن-١}}$

الحـل: $\dfrac{٣^{ن-١}[٣+١]}{٣^{ن-١}[٣-١]} = \dfrac{٣^{ن-١} \times ٤}{٣^{ن-١} \times ٢} = ٢$ (أخذنا المشترك بأصغر أس)

مثـــال (٦)

حل المعادلة $\log_{\sqrt{5}} ١٢٥ = س$

الحـل:

$(\sqrt{5})^{س} = ١٢٥$ نحولها للصورة الأسية

$(\sqrt{5})^{س} = ٥^{٣} = (\sqrt{5})^{٦}$ لاحظ $أ^{ن} = (\sqrt{أ})^{٢ن}$

$\boxed{س = ٦}$

الزمرة

- يسمى النظام (سـ ، ✱) زمرة إذا كان يحقق الأربعة شروط

(١) مغلقاً (٢) تجميعياً (٣) به عنصراً محايداً (٤) لكل عنصر نظير

- العنصر المحايد في النظام $(ص_ن ، \oplus)$ هو الصفر
- $ص_ن = \{٠ ، ١ ، ٢ ، .... ، ن - ١\}$ ، $ص_ن^{*} = \{١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن - ١\}$
- نسمي النظام (سـ ، ✱) زمرة دائرية إذا وجد عنصر واحد على الأقل يولدها

مثـــال (١)

لتكن $\otimes$ عملية ثنائية معرفة على المجموعة ط بحيث $أ \otimes ب = أ(أ+ب)$

أوجد قيمة $٣ \otimes (٤ \otimes ٦)$

الحـل:

أولاً: نوجد $٤ \otimes ٦ = ٤(٤ + ٦) = ٤ \times ١٠ = ٤٠$

$\therefore ٣ \otimes (٤ \otimes ٦) = ٣ \otimes ٤٠ = ٣(٣ + ٤٠) = ٣ \times ٤٣ = ١٢٩$

مثال (٢)

في النظام (صه* ، ⊙) أوجد $٤^{٣}$

الحل:

صه* = {١، ٢، ٣، ٤} ، ⊙ باقي القسمة أ × ب على ٥

$٤^{٣} = ٤ \odot ٤ \odot ٤ = ٤ \odot (٤ \odot ٤) = ٤ \odot ١ = ٤$

مثال (٣)

في النظام (صه* ، ⊙) حل المعادلة ٣ ⊙ س = ٥

الحل:

نكون جدول ٣

$\boxed{\text{س} = ٧}$

ويمكن الحل ذهنياً

المصفوفات

عند تساوي مصفوفتين يجب أن يكونا من نفس النوع وتتساوى العناصر المتناظرة فيهما.

جمع أو طرح مصفوفتين ممكن إذا كانتا من نفس النوع.

ضرب مصفوفتين ممكن إذا كان عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية.

دائماً عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية

مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيسي فيها مساوية الواحد والباقي أصفار مثل

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix}$ هي $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}$

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{bmatrix}$ موجود بشرط $\Delta \neq ٠$ ويكون النظير الضربي $= \frac{١}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$

مثـال (١)

أوجد قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & س \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي

الحـل: المصفوفة ليس لها نظير $\therefore \Delta = ٠$

$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & س \end{vmatrix} = ٠$ ٢س − ١٨ = ٠ ٢س = ١٨ $\boxed{س = ٩}$

مثـال (٢)

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢\text{أ} & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ١ & ب \end{bmatrix}$ أوجد أ ، ب

الحـل: نساوي العناصر المتناظرة: ٢ أ = ٦ ⇐ أ = ٣ ، $\boxed{ب = ٤}$

مثـال (٣)

أوجد س . ص (إن أمكن) إذا كان س = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \\ ١- & ٥ \end{bmatrix}$

الحـل:

س من النوع ٢ × ٣ ، ص من النوع ٣ × ٢

عملية الضرب غير ممكنة لأن عدد أعمدة س ≠ عدد صفوف ص

الأعداد المركبة

- الصيغة الديكارتية للعدد المركب هي ع = س + ت ص
- الصيغة المثلثية للعدد المركب هي ع = | ع | (جتاهـ + ت جاهـ)

نظرية دي موافر (De Moivre)

إذا كان ع = | ع | (جتاهـ + ت جاهـ) فإن $ع^{ن}$ = $| ع |^{ن}$ (جتان هـ + ت جان هـ)

- مرافق العدد المركب ع = س + ت ص هو $\bar{ع}$ = س − ت ص
- ع . $\bar{ع}$ = $س^٢ + ص^٢$ ، −ع = −س − ت ص ، | ع | = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$
- $ع^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} - ت \frac{ص}{س^٢ + ص^٢}$

قوى العدد التخيلي

- $ت = \sqrt{-1}$ $ت^2 = -1$ $ت^3 = -ت$ $ت^4 = 1$

لاحظ أن كل ت مرفوعة لأس يقبل القسمة على ٤ تساوي ١

$ت^{20} = 1$ $ت^{100} = 1$ $ت^{400} = 1$

مثال (١)

إذا كان ع = ٣ + ٤ ت أوجد $\bar{ع}$ ، | ع | ، $ع^{-1}$

الحل:

س = ٣ ص = ٤ $\bar{ع} = ٣ - ٤ ت$

$$|ع| = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$ع^{-1} = \frac{س}{س^2 + ص^2} - ت \frac{ص}{س^2 + ص^2} = \frac{3}{25} - \frac{4ت}{25}$$

كثيرات الحدود

- عند تساوي كثيرتيّ حدود فإننا نساوي المعاملات المتناظرة والأسس المتناظرة

في العمليات على كثيرات الحدود عند:
- الجمع والطرح درجة كثيرة الحدود الناتجة هي الدرجة الأعلى أو أقل
- الضرب درجة كثيرة الحدود الناتجة هي مجموع درجتي كثيرتيّ الحدود
- القسمة درجة كثيرة الحدود الناتجة هي الفرق بين درجتي كثيرتيّ الحدود

عند قسمة كثيرة حدود د(س) على كثيرة حدود هـ (س) = س - ٩ فإن باقي القسمة هو د(٩).

كثيرة الحدود د(س) تقبل القسمة على كثيرة الحدود هـ (س) = س - ٩ إذا كان د(٩) = صفر.

إذا كانت د(س) كثيرة حدود درجتها ن $\geq$ ١ فإن لها على الأكثر ن من الجذور الحقيقية المختلفة.

أي كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لابد أن يكون لها جذر مركب واحد على الأقل.

إذا كانت ٩ $\in$ ك جذراً لكثيرة حدود د(س) فإن مرافق ٩ هو أيضاً جذراً لكثيرة الحدود د(س).

- إذا كانت د(س) كثيرة حدود درجتها ن عدد فردي فإن د(س) لابد أن يكون لها على الأقل جذر حقيقي واحد

دالة الصحيح [ ]

طالبات فقط

$د(س) = [س] = ن \Leftrightarrow ن \leqslant س < ن + ١$ حيث $ن \in ص$

$د(س) = [س]$ معرفة لكل $س \in ح$ ، متصلة $س \in ح - ص$

وغير قابلة للاشتقاق لكل $س \in ح - ص$

تذكري

$[٣] = ٣$ $[٢,٥] = ٢$ $[-٣,٥] = -٤$

مثال (١)

إذا كانت $٣س^٢ + أس - ٥ = ٣س^ب + ٨س - ٥$ أوجد أ، ب

الحل:

تساوي المعاملات $\boxed{أ = ٨}$ تساوي الأسس $\boxed{ب = ٢}$

مثال (٢)

إذا كان العدد ٢ جذراً لكثيرة الحدود $د(س) = س^٢ + ٢س + ك$ أوجد ك ؟

الحل:

العدد ٢ جذراً يعني $د(٢) = ٠$ عوض عن كل $س = ٢$ والناتج $= ٠$

$٢^٢ + ٢ \times ٢ + ك = ٠$

$٤ + ٤ + ك = ٠$

$\boxed{ك = -٨}$

مثال (٣)

أوجد باقي قسمة $س^٣ + ٣س^٢ - ٢س - ٤$ على $س + ١$

الحل:

تبعاً لنظرية الباقي فإن الباقي = د(-١)

$د(-١) = (-١)^٣ + ٣(-١)^٢ - ٢(-١) - ٤$

$= -١ + ٣ \times ١ + ٢ - ٤$

$= -١ + ٣ + ٢ - ٤ = ٥ - ٥ =$ صفر

$\therefore$ $س^٣ + ٣س^٢ - ٢س - ٤$ تقبل القسمة على $س + ١$

ويكون $س + ١$ عاملاً للمقدار $س^٣ + ٣س^٢ - ٢س - ٤$

ويكون -١ جذراً لكثيرة الحدود $س^٣ + ٣س^٢ - ٢س - ٤$

التباديل

$^{ك}ل_ر = ك(ك-١)(ك-٢) \times .... \times (ك - ر + ١)$

$^{ك}ل_ك = ك\,!$

$^{ك}ل_٠ = ١$

$$^{ك}ل_ر = \frac{ك\,!}{(ك - ر)\,!}$$

$ك\,! = ك(ك-١)(ك-٢) \times .... \times ٣ \times ٢ \times ١$

$^{ن+١}ل_{ر+١} \div {}^{ن}ل_ر = ن + ١$

التوافيق

$$\binom{ك}{ر} = \frac{ك\,!}{ر\,!\,(ك - ر)\,!}$$

$$\binom{ك}{ك} = ١$$

$$\binom{ك}{1} = ك$$

$$\binom{ك}{٠} = ١$$

$$\binom{ك}{ر} = \binom{ك}{ك - ر}$$

$$\binom{ك}{ر} \div \binom{ك}{ر-1} = \frac{ك - ر + ١}{ر}$$

$$\binom{ك}{ر} + \binom{ك}{ر-1} = \binom{ك+1}{ر}$$

مجموعة القوة للمجموعة

المجموعة التي عناصرها المجموعات الجزئية لمجموعة س تسمى مجموعة القوة للمجموعة س ونرمز لها بـالرمز ق(س) وإذا كان ن(س) = ك فإن ن(ق(س)) = $٢^{ك}$

نظرية ذات الحدين

- $(س + ص)^{ن} = س^{ن} + \binom{ن}{١} س^{ن-١} ص^{١} + \binom{ن}{٢} س^{ن-٢} ص^{٢} + ... + ص^{ن}$
- عدد حدود المنشور $(س + ص)^{ن}$ يساوي ن + ١ أي عدد الحدود = الأس + ١
- قانون الحد العام $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \times س^{ن-ر} \times ص^{ر}$ يستخدم لإيجاد أي حد
- أي $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \times (الأول)^{ن-ر} \times (الثاني)^{ر}$

رتبة الحد الأوسط إذا كان ن زوجي فإن رتبة الحد الأوسط هو ($\frac{ن}{٢} + ١$).

- رتبتا الحدان الأوسطان إذا كان ن فردي فإن ترتيب الحدان الأوسطان ($\frac{ن+١}{٢}$ و $\frac{ن+٣}{٢}$)

لإيجاد الحد الخالي من س نكتب قانون الحد العام ونساوي أس س بالصفر ومنها نوجد ر.

مثـال (١)

أكمل

(١) $^{١٠}ل_{٣}$ = ...

(٢) $\binom{١٠}{٣}$ = ...

(٣) $\binom{١٠}{١٠}$ = ...

(٤) $\binom{٢٠}{١٨} = \binom{٢٠}{.....}$

(٥) إذا كان : ن ! = ١٢٠ فإن ن = ...

(٦) عدد المجموعات الجزئية لمجموعة مكونة من ٤ عناصر هو ....

الحلول بالترتيب هي (١) ٧٢٠ (٢) ١٢٠ (٣) ١ (٤) ٢ (٥) ٥ (٦) ١٦

المتتابعات

المتتابعة الحسابية

- الحد العام هو $ح_ن = ٩ + (ن - ١)\,ء$

$ح_ن$ قيمة الحد   ٩ الحد الأول   ء أساس المتتابعة   ن رتبة الحد

ء = (أي حد – الحد السابق له مباشرة)

- الوسط الحسابي لعددين أ ، ب = $\frac{٩ + ب}{٢}$

- عدد الأوساط = عدد الحدود – ٢

- مجموع ن من الحدود $جـ_ن = \frac{ن}{٢}\,[٢\,٩ + (ن - ١)\,ء]$ متى علم ٩، ء

أو $جـ_ن = \frac{ن}{٢}\,[٩ + ح_ن]$ متى علم الحد الأول ٩ والحد الأخير $ح_ن$

المتتابعة الهندسية

- الحد العام $ح_ن = ٩\,ر^{ن-١}$ $ح_ن$ قيمة الحد،   ٩ الحد الأول،

ر أساس المتتابعة ،   ن رتبة الحد   ر= (أي حد ÷ ما قبله مباشرة)

- الوسط الهندسي لعددين ٩ ، ب = $\pm\sqrt{٩ \times ب}$ بشرط ٩ ، ب لهما نفس الإشارة

- مجموع ن من الحدود هو $جـ_ن = \frac{٩\,(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ $ر \neq ١$

- مجموع عدد غير منته من الحدود $جـ_{\infty} = \frac{٩}{١ - ر}$ بشرط $|ر| < ١$

مثــال (١)

أوجد الحد النوني للمتتابعة (-٤، -١، ٢، ٥، ....)

الحـل:

أ = -٤   ء = ٣   (أي حد - ما قبله مباشرة)

$ح_ن$ = أ + (ن - ١) ء = -٤ + (ن - ١) × ٣ = -٤ + ٣ن - ٣ = ٣ن - ٧

مثــال (٢)

إذا كان س وسطاً حسابياً بين (س + ١)، (٢س - ٥) أوجد س

الحـل:

$$\frac{س + ١ + ٢س - ٥}{٢} = س \Leftarrow \frac{٣س - ٤}{٢} = س \Leftarrow ٣س - ٤ = ٢س \text{ ومنها } س = ٤$$

مثــال (٣)

متتابعة حسابية فيها $ح_٢ + ح_{١٢} = ٣٠$ أوجد $ح_٧$

الحـل:

أ + ء + أ + ١١ء = ٣٠

٢أ + ١٢ء = ٣٠ بالقسمة على ٢ ⟸ أ + ٦ء = ١٥ ∴ $ح_٧ = ١٥$

مثــال (٤)

إذا كان (٥، س، ....، ٤٥، ٥س) متتابعة حسابية أوجد س

الحـل:

المتتابعة حسابية ∴ س - ٥ = ٥س - ٤٥

س - ٥ = - ٤٥ + ٥

- ٤ س = - ٤٠ ومنها $\boxed{س = ١٠}$

مثــال (٥)

إذا كانت (ك، ٢ك، ٣ك + ١ ....) متتابعة هندسية أوجد ك

الحـل:

∴ المتتابعة هندسية $$\frac{٢\cancel{ك}}{\cancel{ك}} = \frac{٣ك + ١}{٢ك} \Leftarrow \frac{٢}{١} = \frac{٣ك + ١}{٢ك}$$

٤ك = ٣ك + ١ ومنها $\boxed{ك = ١}$

مثال (٦)

في المتتابعة (٢٧، ٩، ٣، ....) أوجد ح٩

الحل:

واضح أن المتتابعة هندسية $\text{أ} = ٢٧$ $\text{ر} = \frac{١}{٣}$

$$\text{ح}_{٩} = \text{أ}\ \text{ر}^{٨} = ٢٧ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٨} = ٣^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٨} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥} = \frac{١}{٢٤٣}$$

يمكن الحل بتتابع الأعداد (٢٧، ٩، ٣، ١، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٩}$، $\frac{١}{٢٧}$، $\frac{١}{٨١}$، $\frac{١}{٢٤٣}$،........)

ومنها $\text{ح}_{٩} = \frac{١}{٢٤٣}$

مثال (٧)

أوجد عدد حدود المتتابعة الهندسية (٣٨٤، ١٩٢،.....، $\frac{٣}{٢}$)

الحل:

$\text{أ} = ٣٨٤$ $\text{ر} = \frac{١}{٢}$

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ}\ \text{ر}^{\text{ن}-١} \Leftarrow \frac{٣}{٢} = ٣٨٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن}-١} \Leftarrow \frac{\cancel{٣}^{\,١}}{٢} \times \frac{١}{\underset{١٢٨}{\cancel{٣٨٤}}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن}}$$

$$\frac{١}{٢٥٦} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن}} \Leftarrow \left(\frac{١}{٢}\right)^{٨} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{ن}} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = ٨}$$

يمكن الحل بكتابة الحدود حتى تصل $\frac{٣}{٢}$

المجال

- مجال كثيرة الحدود ودالة المقياس | | هو ح
- مجال الدالة الكسرية هو ح − {أصفار المقام}
- مجال الدالة الجذرية √د(س) هو مجموعة حل المتباينة د(س) ≥ ٠
- مجال جذر دليله فردي ن√د(س) هو ح مثل ٣√ ، ٥√ وهكذا.
- مجال الدالة اللوغاريتمية لو د(س) هو مجموعة حل المتباينة د(س) > ٠

الدالة الزوجية والدالة الفردية

- إذا كانت د(− س) = د(س) ∀ س، − س ∈ ف فإن الدالة تكون **زوجية** ويكون منحناها متماثل حول محور ص.
- إذا كانت د(− س) = − د(س) ∀ س، س ∈ ف فإن الدالة تكون **فردية** ويكون منحناها متماثل حول نقطة الأصل.

التزايد والتناقص

إذا كانت س$_1$ ، س$_2$ ∈ المجال بحيث س$_1$ < س$_2$ فإن الدالة تكون

الدالة تزايدية	الدالة تناقصية	الدالة ثابتة
إذا كان د(س$_1$) < د(س$_2$)	د(س$_1$) > د(س$_2$)	د(س$_1$) = د(س$_2$)

الدوال الدورية

دالة الجيب د(س) = جاس دالة دورية ودورها ٢ ط

دالة جيب التمام د(س) = جتاس دالة دورية ودورها ٢ ط

دالة الظل د(س) = ظاس دالة دورية ودورها ط

الدوال المحدودة

إذا كانت د(س) مجالها ف فإننا نقول إن الدالة

محدودة من أعلى	محدودة من أسفل	محدودة
إذا وجد عدد ل ∋ ح بحيث	إذا وجد عدد م ∋ ح بحيث	إذا كانت محدودة من أعلى
د (س) ≤ ل لكل س ∋ ف	د (س) ≥ م لكل س ∋ ف	ومحدودة من أسفل
		ونكتب م ≤ د(س) ≤ ل

مثال (١)

عين مجال الدوال الآتية:

(١) د(س) = $س^٣$ - ٥س + ٤ (٢) د(س) = $\frac{س - ٧}{س + ١}$ (٣) د(س) = $\sqrt{س - ٢}$

(٤) د(س) = $\sqrt[٣]{س^٢ - ٥ س + ٢}$ (٥) د(س) = لو(س -٤)

الحل

(١) الدالة كثيرة حدود ∴ مجالها هو ح أيضاً رقم ٤ مجالها هو ح ؟؟؟

(٢) الدالة كسرية نوجد أصفار المقام س+١= ٠ س= -١ ∴ المجال هو ح -{-١}

(٣) الدالة جذرية ما بداخل الجذر ≤ ٠ س - ٢ ≤ ٠ س ≤ ٢ ∴ المجال هو [٢، ∞)

(٥) الدالة اللوغاريتمية س - ٤ > ٠ س > ٤ ∴ المجال هو (٤، ∞)

مثال (٢)

بين نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك (مجالها جميعاًهو ح)

(١) د(س) = $س^٢$ |س| (٢) د(س) = ٧ (٣) د(س)= $س^٣$ جتاس

الحل

(١) د(- س) = $(- س)^٢$ | - س | = $س^٢$ | س| = د(س) ∴ الدالة زوجية

(٢) د(- س) = ٧ = د(س) ∴ الدالة زوجية

(٣) د(- س) = $(- س)^٣$ جتا(- س) = - $س^٣$ × جتاس = - د(س) ∴ الدالة فردية

مثال (٣)

ابحث اطراد الدوال الآتية على مجالها

(١) د(س) = ٢ س − ٧ (٢) د(س) = ٥ − ٢س

الحل

(١) د(س) من الدرجة الأولى ومعامل س موجب ∴ الدالة تزايدية على مجالها

(٢) د(س) من الدرجة الأولى ومعامل س سالب ∴ الدالة تناقصية على مجالها

مثال (٤)

أثبت أن الدالة د(س) = ٣ س + ١ محدودة في [١ ، ٢]

الحل

س ∈ [١ ، ٢]

١ ⩽ س ⩽ ٢ بالضرب × ٣

٣ ⩽ ٣س ⩽ ٦ بإضافة ١ للأطراف

٤ ⩽ ٣س + ١ ⩽ ٧ ٤ ⩽ د(س) ⩽ ٧

الدالة محدودة ومداها [٤ ، ٧]، ٤ يسمى أكبر حد سفلي للدالة ، ٧ يسمى أصغر حد علوي للدالة

مثال (٥)

ابحث تزايد وتناقص الدالة د(س) = س^{٢} − ٤س + ١

الحل

الدالة من الدرجة الثانية نوجد رأس المنحنى ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د($\frac{-ب}{٢أ}$))

$\frac{-ب}{٢أ}$ = ٢ رأس المنحنى (٢ ، د(٢))

∴ الدالة تزايدية في [٢ ، ∞) وتناقصية في الفترة (− ∞ ، ٢]

التشابه

- تسمى نسبة ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين (نسبة التشابه) .
- إذا تشابه مضلعان فإن نسبة محيطيهما تساوى نسبة التشابه .
- يتشابه المثلثان إذا تناسبت أضلاعهما .
- يتشابه المثلثان إذا تساوت زوايا أحدهما مع زوايا الآخر المناظرة لها .
- إذا تشابه مثلثان فإن نسبة ارتفاعين متناظرين أو نسبة طولي منصفي زاويتين داخلتين متناظرتين فيهما تساوى نسبة التشابه .
- إذا تشابه مضلعان فإن نسبة مساحتيهما تساوى مربع نسبة التشابه .

المضلعات

- قياس الزاوية في مضلع منتظم عدد أضلاعه ن = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠}{ن}$
- مساحة المضلع المنتظم تساوى نصف حاصل ضرب طول محيطه في عامده
- طول عامد المربع = $\frac{نق \sqrt{٢}}{٢}$ طول عامد المثلث المتساوي الأضلاع = $\frac{نق}{٢}$

طول عامد السداسي المنتظم = $\frac{نق \sqrt{٣}}{٢}$

- العلاقة بين القياس الدائري والقياس الستيني هي $\frac{س^{\circ}}{١٨٠} = \frac{د}{ط}$

س الزاوية بالدرجات ، د الزاوية بالراديان

- إذا كانت (م ، نق) دائرة وكان ل طول قوس الدائرة المحصور بين ضلعي زاوية مركزية قياسها د راديان فإن ل = د × نق
- في الدائرة (م ، نق) مساحة القطاع الدائري الذي طول قوسه ل تساوى $\frac{١}{٢}$ ل نق

مثال (١) أوجد قياس زاوية الخماسي المنتظم ؟

الحل ن = ٥ قياس زاوية الخماسي = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠}{ن} = \frac{٣ \times ١٨٠}{٥} = ١٠٨^{\circ}$

مثال (٢)

مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥ ومساحة الأصغر ٢٠سم^{٢} ، أوجد مساحة الأكبر

الحل $\frac{م_١}{م_٢} = (\frac{٢}{٥})^{٢} \Longleftarrow \frac{٢٠}{م_٢} = \frac{٤}{٢٥} \Longleftarrow م_٢ = \frac{٢٠ \times ٢٥}{٤} = ١٢٥$ سم^{٢}

مثال (٣) أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٢ راديان في دائرة نصف قطرها ٥ سم

الحل ل = د × نق = ٢ × ٥ = ١٠ سم

الخط المستقيم

- معادلة الخط المستقيم هي ص = م س + د حيث م الميل ، د الجزء المقطوع من محور ص
- ميل الخط المستقيم م = $\dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$
- إذا كانت معادلة مستقيم ل_1 هي ص = م_1 س + جـ_1 ، ومعادلة مستقيم ثاني ل_2 هي ص = م_2 س + جـ_2

  فإن $\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$ إذا كان $\text{م}_1 = \text{م}_2$ ، $\text{ل}_1 \perp \text{ل}_2$ إذا كان $\text{م}_1 \times \text{م}_2 = -1$
- بُعد نقطة ن (س_1 ، ص_1) عن المستقيم ل (أ س + ب ص + جـ = ٠) يساوى $\dfrac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$
- معادلة الدائرة التي مركزها (أ ، ب) ونصف قطرها نق هي $(\text{س} - \text{أ})^2 + (\text{ص} - \text{ب})^2 = \text{نق}^2$

مثال (١) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (١ ، ٧)

الحل الميل = $\dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \dfrac{7-3}{1-2} = \dfrac{4}{1-}= -4$

مثال (٢) أوجد بعد النقطة (١ ، ٢) عن المستقيم ٣ س − ٤ ص + ٦ = ٠

الحل أ = ٣ ، ب = −٤ ، جـ = ٦ ، س_1 = ١ ، ص_1 = ٢

البعد = $\dfrac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} = \dfrac{|3 - 8 + 6|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{|1|}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

المتجهات

إذا كانت أ (س_1 ، ص_1) ، ب (س_2 ، ص_2) فإن :

- ميل أ ب = $\dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \dfrac{\text{ص}_1 - \text{ص}_2}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$
- $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = ب − أ = ($\text{س}_2 - \text{س}_1$ ، $\text{ص}_2 - \text{ص}_1$) = $\begin{bmatrix} \text{س}_2 - \text{س}_1 \\ \text{ص}_2 - \text{ص}_1 \end{bmatrix}$
- البعد بين النقطتين أ ، ب = $|\text{أ ب}| = \sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

مثال (١) إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، −١) ، أوجد ميل أ ب ، |أ ب|

الحل

ميل أ ب = $\dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \dfrac{-1-2}{4-1} = \dfrac{-3}{3} = -1$

$|\text{أ ب}| = \sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

الهندسة الفراغية

يتعين المستوى بـ

مستقيمين متقاطعين أو مستقيمين متوازيين أو ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة أو مستقيم ونقطة خارجه عنه .

- إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما مستقيم .
- نقول أن مستويين س ، ص متوازيان إذا كان $\text{س} \cap \text{ص} = \varnothing$
- إذا تقاطع مستقيم مع مستو لا يحتويه فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة .
- إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين عند نقطة تقاطعهما فإنه عمودي على المستوى الذي يعينانه .
- طول قطر مكعب طول حرفه ل = $\sqrt{3}$ ل
- طول قطر متوازي مستطيلات أبعاده س ، ص ، ع هو $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2}$
- المسافة بين نقطة م ومستوى س هي طول القطعة العمودية من م إلى س
- إذا وازى المستقيم ل المستوى س فكل مستقيم ك $\subset$ س إما يوازى ل أو يخالفه
- إذا وازى المستقيم ل الذي لا يقع في المستوى س مستقيما ك محتو في س ، فإن ل يوازى س
- إذا قطع مستو أحد مستقيمين متوازيين في نقطة فهو يقطع الآخر في نقطة واحدة
- إذا وازى كل من مستقيمين في الفراغ مستقيما ثالثا فالمستقيمان متوازيان
- إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر
- إذا عامد مستو أحد مستقيمين متوازيين فهو يعامد الآخر
- إذا عامد مستقيم ك مستقيمين متقاطعين فإنه يعامد المستوى الذي يعينانه
- أى مستقيمين عمودين على مستو واحد متوازيان
- إذا عامد مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يعامد الآخر
- أى مستقيمين في مستوٍ واحد عمودين على مستقيم واحد متوازيان
- إذا كان المستقيم ل لا يعامد المستوى س فإننا نعرف الزاوية بينهما على أنها الزاوية بين ل ومسقطه العمودي على س
- إذا كان لنصفي مستويين حد مشترك فإننا نسمى اتحادهما مع الحد المشترك زاوية زوجية .
- جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متطابقة
- إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د نقاطا فى المستوى الإحداثي عندئذ :

$$\overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{جـ د}} \iff \text{ب} - \text{أ} = \text{د} - \text{جـ}$$

- فى اى مثلث أ ب جـ يكون $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{أ جـ}}$
- إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \text{ك} \, (\overleftarrow{\text{جـ د}})$ (أى أن $\overleftarrow{\text{أ ب}} // \overleftarrow{\text{جـ د}}$) ، فإن $|\overleftarrow{\text{أ ب}}| = |\text{ك}| \cdot |\overleftarrow{\text{جـ د}}|$
- يسمى $\overleftarrow{\text{س}}$ متجه الوحدة في اتجاه محور السينات ، $\overleftarrow{\text{س}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ويسمى $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجه الوحدة في اتجاه محور الصادات $\overleftarrow{\text{ص}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- إذا كان $\overleftarrow{أب} = \begin{bmatrix} س_1 \\ ص_1 \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{جـ د} = \begin{bmatrix} س_2 \\ ص_2 \end{bmatrix}$ ، فإن : $\overleftarrow{أب} . \overleftarrow{جـ د} = س_1 س_2 + ص_1 ص_2$
- إذا كان $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ متجهان غير صفريين ، فإن $\overleftarrow{أب} \perp \overleftarrow{جـ د}$ إذا كان $\overleftarrow{أب} . \overleftarrow{جـ د} =$ صفر
- المعادلة المتجهة للمستقيم ل الذى يمر بالنقطة ب ويوازى المستقيم م أ هى (س ، ص) = ك . أ + ب
- الزاوية بين متجهين $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ قياسها هـ فإن جتا هـ = $\dfrac{\overleftarrow{أب} . \overleftarrow{جـ د}}{|\overleftarrow{أب}| . |\overleftarrow{جـ د}|}$

مثال (١)

أوجد قياس الزاوية هـ بين المتجهين $\overleftarrow{أب} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{جـ د} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$

الحل

جتا هـ = $\dfrac{\overleftarrow{أب} . \overleftarrow{جـ د}}{|\overleftarrow{أب}| . |\overleftarrow{جـ د}|} = \dfrac{٠ + ٩}{\sqrt{٩ + ٩} \times \sqrt{٩}} = \dfrac{٩}{\sqrt{١٨} \times ٣} = \dfrac{٣}{\sqrt{١٨}} = \dfrac{٣}{٣\sqrt{٢}} = \dfrac{١}{\sqrt{٢}} \Leftarrow$ (هـ) = ٤٥

مثال (٢)

اختر الإجابة الصحيحة :

◎ إذا كان أ = (٢ ، ١) ، ب = (١ ، ١) ، فإن ٣ (أ ، ب) = ...

(أ) (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٣) (ب) (٣ ، ٣) ، (٦ ، ٣) (ج) (٦ ، ٣) ، (٣ ، ٣) (د) (٥ ، ٤) ، (٤ ، ٤)

◎ إذا كان $\overleftarrow{أب} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{جـ د} = \begin{bmatrix} ك \\ ١ \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{أب} // \overleftarrow{جـ د}$ ، فإن ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

◎ فى اى مثلث أ ب جـ يكون $\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ب جـ} =$ .. ..

(أ) $\overleftarrow{أب}$ (ب) $\overleftarrow{ب جـ}$ (ج) $\overleftarrow{ب أ}$ (د) $\overleftarrow{أ جـ}$

◎ إذا كان $\overleftarrow{أب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{جـ د} = \begin{bmatrix} ك \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{أب} \perp \overleftarrow{جـ د}$ ، فإن ك = ...

(أ) ٨ (ب) - ٨ (ج) ٦ (د) - ٦

مثال (٣)

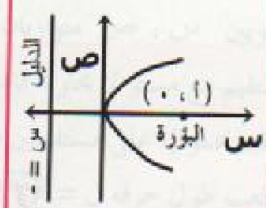
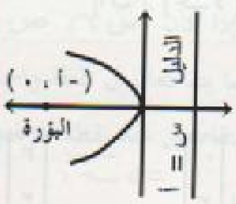
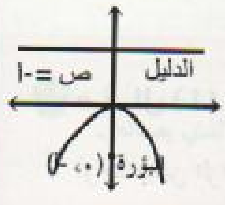
أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم ل الذى يمر بالنقطة ب = (٢ ، ٥) ويوازى المستقيم م أ حيث أ = (- ٢ ، ١)

الحل القانون (س ، ص) = ك . أ + ب

(س ، ص) = ك (- ٢ ، ١) + (٢ ، ٥) = (٢ - ٢ ك ، ٥ + ك)

أولاً: القطع المكافئ

الصور القياسية للقطع المكافئ الذى رأسه (٠ ، ٠) :

	محور التناظر ينطبق على محور **س**		محور التناظر ينطبق على محور ص	
الشكل الهندسي				
المعادلة القياسية	$ص^2 = ٤ أ س$	$ص^2 = - ٤ أ س$	$س^2 = ٤ أ ص$	$س^2 = - ٤ أ ص$
إحداثيات البؤرة	(أ ، ٠)	(- أ ، ٠)	(٠ ، أ)	(٠ ، - أ)
الدليل	يوازى محور الصادات		يوازى محور السينات	
معادلة الدليل	س = - أ	س = أ	ص = - أ	ص = أ
محور التناظر	ينطبق على محور السينات ومعادلته ص = ٠		ينطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠	
اتجاه الفتحة	مفتوح يميناً جهة **س +**	مفتوح يساراً جهة **ص -**	مفتوح لأعلى جهة **ص +**	مفتوح لأسفل جهة **ص -**

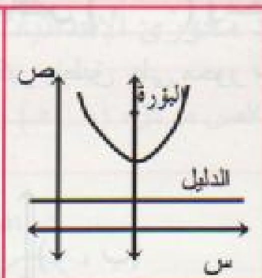
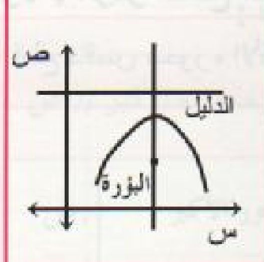
مثال (١) استنتج صفات القطع $ص^2 = ٨ س$

الحل $ص^2 = ٨ س$ $ص^2 = ٤ أ س$

٤ أ = ٨   ∴ $\boxed{أ = ٢}$

- إحداثيات البؤرة (٢ ، ٠)
- الدليل يوازى محور الصادات
- معادلة الدليل س = - أ ⟵ س = - ٢
- محور التناظر ينطبق على محور السينات ومعادلته س = ٠.
- اتجاه الفتحة مفتوح يمينا جهة س +
- البعد بين البؤرة والدليل = ٢ أ = ٤

الصور القياسية للقطع المكافئ الذى رأسه (ء ، هـ) :

	محور التناظر يوازى محور السينات		محور التناظر يوازى محور الصادات	
الشكل الهندسي				
المعادلة القياسية	$(ص - هـ)^2 = ٤ أ (س - ء)$	$(ص - هـ)^2 = - ٤ أ (س - ء)$	$(س - ء)^2 = ٤ أ (ص - هـ)$	$(س - ء)^2 = - ٤ أ (ص - هـ)$
الرأس	(ء ، هـ)		(ء ، هـ)	
إحداثيات البؤرة	(ء + أ ، هـ)	(ء − أ ، هـ)	(ء ، هـ + أ)	(ء ، هـ - أ)
الدليل	يوازى محور الصادات		يوازى محور السينات	
معادلة الدليل	س = ء − أ	س = ء + أ	ص = هـ - أ	ص = هـ + أ
محور التناظر	يوازى محور السينات ومعادلته ص = هـ		يوازى محور الصادات ومعادلته س = ء	
اتجاه الفتحة	مفتوح يمينا جهة س +	مفتوح يساراً جهة س -	مفتوح لأعلى جهة ص +	مفتوح لأسفل جهة ص -

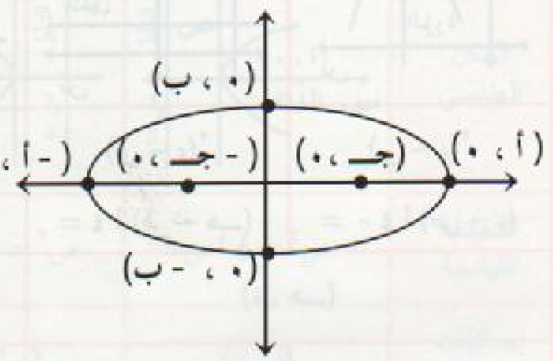
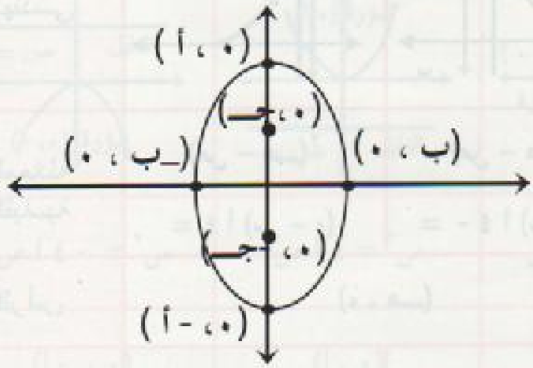
مثال (١) استنتج صفات القطع $(س - ٢)^2 = ١٢ (ص + ١)$

الحل ء = ٢ ، هـ = - ١ ، أ = ٣

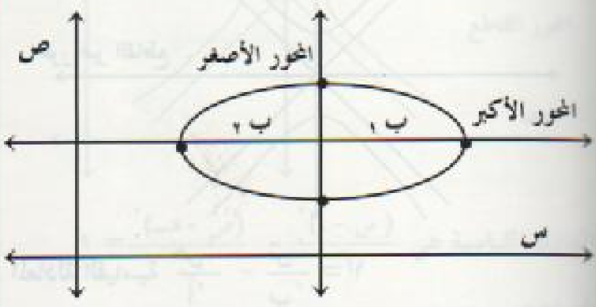
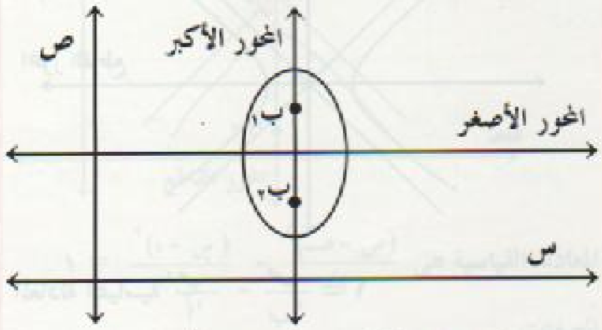
- الرأس (ء ، هـ) = (٢ ، - ١)
- إحداثيات البؤرة (ء ، هـ + أ) = (٢ ، ٢)
- الدليل يوازى محور السينات
- معادلة الدليل ص = هـ ـ أ ص = - ٤
- محور التناظر يوازى محور الصادات ومعادلته س = ٢
- اتجاه الفتحة مفتوح لأعلى جهة ص+

ثانياً: القطع الناقص

أولاً : مركز القطع الناقص (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر ينطبق على أحد المحورين

قطع ناقص محوره الأكبر ينطبق على محور س	قطع ناقص محوره الأكبر ينطبق على ص
 	
المعادلة القياسية	المعادلة القياسية
الصفات	الصفات
(١) المركز (٠ ، ٠)	(١) المركز (٠ ، ٠)
(٢) البؤرتين (± جـ ، ٠)	(٢) البؤرتين (٠ ، ± جـ)
(٣) نهايتى المحور الأكبر (± أ ، ٠)	(٣) نهايتى المحور الأكبر (٠ ، ± أ)
(٤) نهايتى المحور الأصغر (٠ ، ± ب)	(٤) نهايتى المحور الأصغر (± ب ، ٠)
(٥) المحور الأكبر ينطبق على محور س ومعادلته ص = ٠	(٥) المحور الأكبر ينطبق على محور ص ومعادلته س = ٠
(٦) المحور الأصغر ينطبق على محور ص ومعادلته س = ٠	(٦) المحور الأصغر ينطبق على محور س ومعادلته ص = ٠

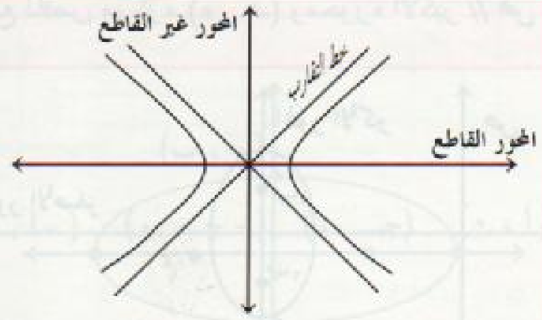
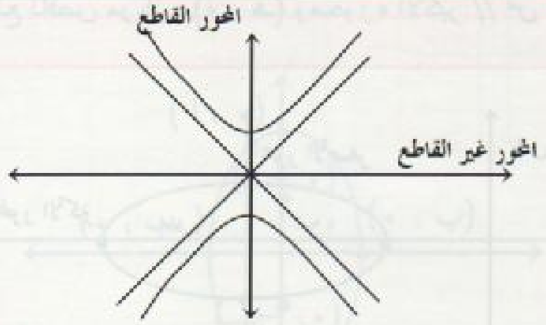
ثانيا : مركز القطع (ء ، هـ) ومحوره الأكبر يوازى أحد محورى الإحداثيات :

قطع ناقص مركزه (ء ، هـ) ومحوره الأكبر // س	قطع ناقص مركزه (ء ، هـ) ومحوره الأكبر // ص
	
$\frac{(س - ء)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$	$\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - ء)^2}{ب^2} = ١$
الصفات (١) المركز (ء ، هـ) (٢) البؤرتين (ء ± جـ ، هـ) (٣) نهايتى المحور الأكبر (ء ± أ ، هـ) (٤) نهايتى المحور الأصغر (ء ، هـ ± ب) (٥) المحور الأكبر // س ومعادلته ص = هـ وطوله ٢ أ (٦) المحور الأصغر // ص ومعادلته س = ء وطوله ٢ ب	**الصفات** (١) المركز (ء ، هـ) (٢) البؤرتين (ء ، هـ ± جـ) (٣) نهايتى المحور الأكبر (ء ، هـ ± أ) (٤) نهايتى المحور الأصغر (ء ± ب ، هـ) (٥) المحور الأكبر // ص ومعادلته س = ء وطوله ٢ أ (٦) المحور الأصغر // س ومعادلته ص = هـ وطوله ٢ ب

لاحظ : $جـ^2 = أ^2 - ب^2$

ثالثاً: القطع الزائد

أولاً : مركز القطع الزائد (٠ ، ٠) ومحوره القاطع ينطبق على أحد محورين

قطع زائد محوره القاطع ينطبق على محور س	قطع زائد محوره القاطع ينطبق على محور ص
	
المعادلة القياسية $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$	المعادلة القياسية $\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$
الصفات (١) المركز (٠ ، ٠) (٢) المحور القاطع ينطبق على س وطوله ٢ أ (٣) المحور غير القاطع ينطبق على ص (٤) البؤرتان (± جـ ، ٠) (٥) الرأسان (± أ ، ٠) (٦) معادلتا خطي التقارب ص = ± $\frac{ب}{أ}$ س	الصفات (١) المركز (٠ ، ٠) (٢) المحور القاطع ينطبق على ص وطوله ٢ أ (٣) المحور غير القاطع ينطبق على س (٤) البؤرتان (٠ ، ± جـ) (٥) الرأسان (٠ ، ± أ) (٦) معادلتا التقارب ص = ± $\frac{أ}{ب}$ س

لاحظ : • $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

• معادلتا خطي التقارب ص = ± $\sqrt{\frac{\text{ما تحت ص}^٢}{\text{ما تحت س}^٢}}$. س

مثال (١) ضع المعادلة ٤ $س^٢$ − ٢٥ $ص^٢$ = ١٠٠ على الصورة القياسية ، ثم أوجد صفات القطع

الحل

$\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{٤} = ١$ قسمنا المعادلة على ١٠٠

أ = ٥ ب = ٢ جـ = $\sqrt{أ^٢ + ب^٢} = \sqrt{٢٥ + ٤} = \sqrt{٢٩}$

الصفات :

(١) المركز (٠ ، ٠) (٢) المحور القاطع ينطبق على محور س معادلته ص = ٠

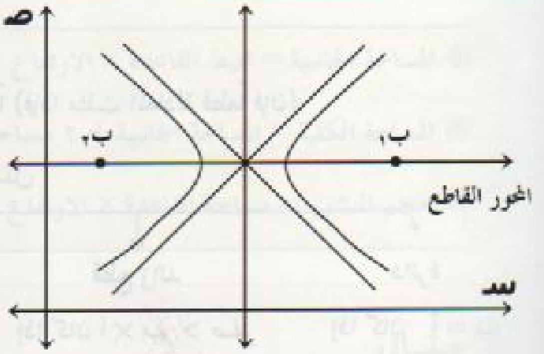
(٣) المحور غير القاطع ينطبق على محور ص ومعادلته س = ٠

(٤) البؤرتان (± جـ ، ٠) = (± $\sqrt{٢٩}$ ، ٠) (٥) الرأسان (± أ ، ٠) = (± ٥ ، ٠)

(٦) معادلتا خطي التقارب ص = ± $\frac{ب}{أ}$ س ، ص = ± $\frac{٢}{٥}$ س

ثانيا : مركز القطع (ء ، هـ) ومحوره القاطع يوازى أحد محورى الإحداثيات :

قطع زائد مركزه (ء ، هـ) ومحوره القاطع // س



المعادلة القياسية هي $\frac{(\text{س} - \text{ء})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = ١$

الصفات

(١) المركز (ء ، هـ)

(٢) المحور القاطع // س ، ومعادلته ص = هـ

(٣) المحور غير القاطع // ص ، ومعادلته س = ء

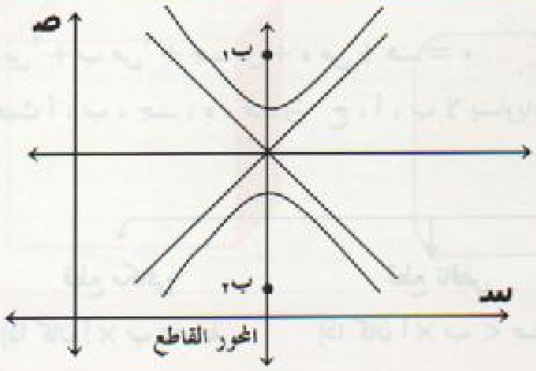
(٤) البؤرتان (ء ± جـ ، هـ)

(٥) الرأسان (ء ± أ ، هـ)

(٦) معادلتا خطى التقارب

$(\text{ص} - \text{هـ}) = \pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}} (\text{س} - \text{ء})$

قطع زائد مركزه (ء ، هـ) ومحوره القاطع //ص



المعادلة القياسية هي $\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{س} - \text{ء})^2}{\text{ب}^2} = ١$

الصفات

(١) المركز (ء ، هـ)

(٢) المحور القاطع // ص ومعادلته س = ء

(٣) المحور غير القاطع // س ومعادلته ص = هـ

(٤) البؤرتان (ء ، هـ ± جـ)

(٥) الرأسان (ء ، هـ ± أ)

(٦) معادلتا خطى التقارب

$(\text{ص} - \text{هـ}) = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ب}} (\text{س} - \text{ء})$

مثال (١) استنتج صفات القطع $\frac{(\text{س} - ١)^2}{١٦} - \frac{(\text{ص} + ٢)^2}{٩} = ١$

الحل

أ = ٤ ، ب = ٣ ، جـ = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ ، ء = ١ ، هـ = - ٢

(١) المركز (١ ، - ٢)

(٢) المحور القاطع // س ، ومعادلته ص = - ٢

(٣) المحور غير القاطع // ص ، ومعادلته س = ١

(٤) البؤرتان (ء ± جـ ، هـ) (٦ ، - ٢) ، (٠ ، - ٢)

(٥) الرأسان (ء ± أ ، هـ) (٥ ، - ٢) ، (- ٣ ، - ٢)

(٦) معادلتا خطى التقارب $(\text{ص} - \text{هـ}) = \pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}} (\text{س} - \text{ء})$

$(\text{ص} + ٢) = \pm \frac{٣}{٤} (\text{س} - ١)$

رابعاً: القطوع المخروطية و معادلة الدرجة الثانية

تصنيف نوع القطع المخروطي من معادلة الدرجة الثانية

أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + ء ص + هـ = ٠

حيث أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ∈ ح ، أ ، ب لا يساويان الصفر معاً (فإذا مثلت المعادلة قطعاً فإن)

المعادلة تمثل

قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد	دائرة
إذا كان أ × ب = صفر	إذا كان أ × ب > صفر	إذا كان أ × ب < صفر	إذا كان أ = ب

مثـــال (١)

صنف المعادلات التالية من حيث نوع القطع المخروطى الذى تمثله إذا كان :

(١) ص^{٢} − ٢ س + ٧ ص − ٥ = ٠   (٢) ٣ ص^{٢} − ٣ س^{٢} + ٧ س − ٢ ص + ٦ = ٠

(٣) ٢ س^{٢} + ص^{٢} − ٧ س − ٢ ص + ٦ = ٠   (٤) ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ٢ س − ٤ ص − ١ = ٠

الحـل

(١) أ = ٠	ب = ١	أ × ب = صفر	المعادلة تمثل قطع مكافئ
(٢) أ = -٣	ب = ٣	أ × ب = -٩	المعادلة تمثل قطع زائد
(٣) أ = ٢	ب = ١	أ × ب = ٢	المعادلة تمثل قطع ناقص
(٤) أ = ٢	ب = ٢	أ × ب = ٤	المعادلة تمثل دائرة لأن أ = ب

تدريب اختر الإجابة الصحيحة فيما يلى :

(١) المعادلة (أ − ١) س^{٢} + ص^{٢} + س = ٥ ، تمثل قطع مكافئ إذا كانت :

(أ) أ > ١   (ب) أ < ١   (ج) أ = ١   (د) أ = ٢

(٢) المعادلة ك س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ٢ س + ٨ ص + ٧ = ٠ ، تمثل قطعا ناقصا إذا كانت ك ∈ ....

(أ) (٠ ، ∞)   (ب) (− ∞ ، ٠)   (ج) { ٠ }   (د) ح*

(٣) المعادلة ٧ س^{٢} + ك ص^{٢} = ٤٩ ، تمثل دائرة عندما ك = ...

(أ) − ٧   (ب) صفر   (ج) ٤٩   (د) ٧

المنشور

بنين فقط

أولا : المنشور القائم :

- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ مساحة القاعدة
- حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

مثـال

احسب المساحة الجانبية والمساحة الكلية وكذا حجم منشور سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

الحـل محيط القاعدة = ١٠ × ٦ = ٦٠ سم

مساحة القاعدة = $\frac{ن}{٤}$ ل^{٢} × ظا (٩٠ - $\frac{١٨٠}{ن}$) = $\frac{٦}{٤}$ × ١٠٠ × ظا (٩٠ - $\frac{١٨٠}{٦}$)

= $\frac{٦}{٤}$ × ١٠٠ × ظا ٦٠ = ٦ × ٢٥ × $\sqrt{٣}$ = ١٥٠ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

مساحة أى مضلع منتظم = $\frac{ن}{٤}$ ل^{٢} × ظا (٩٠ - $\frac{١٨٠}{ن}$)

مساحة السداسي المنتظم = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ل^{٢}

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٦٠ × ١٢ = ٧٢٠ سم^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ مساحة القاعدة = ٧٢٠ + ٢ × ١٥٠ $\sqrt{٣}$

= ٧٢٠ + ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ١٥٠ $\sqrt{٣}$ × ١٢ = ١٨٠٠ $\sqrt{٣}$ سم^{٣}

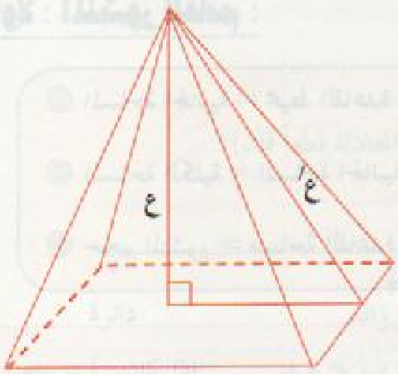
ثانيا : المنشور المائل

- المساحة الجانبية = محيط المقطع القائم × طول الحرف الجانبي
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + (٢ × مساحة القاعدة)
- حجم المنشور = مساحة المقطع القائم × طول الحرف الجانبي

الهــرم

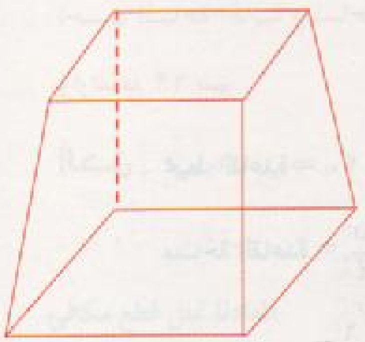
بنين فقط

أولا : الهرم القائم



- المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × ارتفاع الوجه الجانبي
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
- الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

ثانيا : الهرم الناقص



هرم ناقص متوازى

- المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ مجموع محيط القاعدتين × الارتفاع الجانبي
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
- الحجم = $\frac{1}{3}$ ع × $[\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \sqrt{\text{ق}_1 \, \text{ق}_2}]$

ق_1 ، ق_2 مساحتا قاعدتيه ، ع طول ارتفاعه

نظرية هامة :

إذا قطع الهرم بمستوٍ يوازى القاعدة ويبعد عن الرأس مسافة ك ، فإن : $\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \frac{\text{ك}^2}{\text{ع}^2}$

حيث ق_1 مساحة المقطع ، ق_2 مساحة القاعدة ، ع ارتفاع الهرم

مثـال قطع هرم مساحة قاعدته ١٠٠ سم^2 بمستوٍ يوازى القاعدة ويبعد عن الرأس مسافة ٣ سم ، فإذا كانت مساحة المقطع الناتج ٣٦ سم^2 . احسب ارتفاع الهرم

الحـل نطبق النظرية $\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \frac{\text{ك}^2}{\text{ع}^2}$

$$\frac{36}{100} = \frac{9}{\text{ع}^2}$$

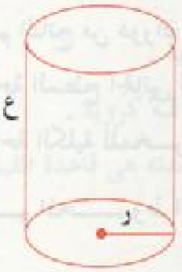
$$\text{ع}^2 = \frac{100 \times 9}{36} \Longleftarrow \text{ع}^2 = 25 \Longleftarrow \text{ع} = 5 \text{ سم}$$

الأسطوانة الدائرية القائمة

بنين فقط

هى الجسم الناتج من طى مستطيل حول أحد بعديه

أو هى الجسم الناتج من دوران المستطيل حول أحد بعديه



- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ ط ر ع
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ مساحة القاعدة = ٢ ط ر ع + ٢ ط ر^{٢}
- حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع = ط ر^{٢} ع

حيث (ر) نصف قطر القاعدة ، (ع) الارتفاع

مثـال (١)

أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم ، وارتفاعها ١٠ سم ، أوجد مساحتها الكلية وحجمها .

الحـل ر = ٧ سم ع = ١٠ سم

المساحة الكلية = ٢ ط ر ع + ٢ ط ر^{٢} = ٢ ط × ٧ × ١٠ + ٢ ط × ٤٩ = ٢٣٨ ط سم^{٢}

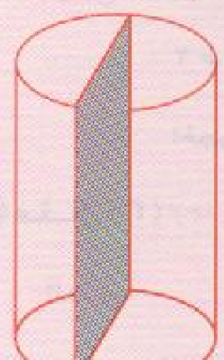
حجم الأسطوانة = ط ر^{٢} ع = ط × ٤٩ × ١٠ = ٤٩٠ ط سم^{٣}

مثـال (٢)

طويت ورقة مستطيله بعداها ٢٠ سم ، ٤٤ سم ، حيث أصبحت أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ سم .

احسب حجمها ومساحة سطحها الجانبي ، وإذا قُطعت الأسطوانة بمستوٍ يحتوى محورها فما مساحة المقطع الناتج ؟

الحـل



$\boxed{\text{ع = ٢٠ سم}}$ ٢ ط ر = ٤٤

ط ر = ٢٢ $\frac{٢٢}{٧}$ ر = ٢٢ $\boxed{\text{ر = ٧ سم}}$

الحجم = ط ر^{٢} ع = ط × ٤٩ × ٢٠ = ٩٨٠ ط سم^{٣}

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٤٤ × ٢٠ = ٨٨٠ سم^{٢}

مساحة المقطع = طول القطر × الارتفاع

= ٢ ر × ع

= ٢ × ٧ × ٢٠ = ٢٨٠ سم^{٢}

بنين فقط

المخروط

هو الجسم الناتج من دوران مثلث قائم حول أحد ضلعي القائمة.

◎ مساحة السطح الجانبى للمخروط الدائرى القائم = ط ر ل

◎ المساحة الكلية للمخروط الدائرى القائم = ط ر ل + ط ر^{٢}

◎ حجم المخروط الدائرى القائم = $\frac{١}{٣}$ ط ر^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

نظرية هامة :

إذا قطعنا مخروطاً ارتفاعه ع بمستوٍ يوازى القاعدة ويبعد ك عن رأس المخروط فالمقطع الناتج قرص دائرى

ويكون $\frac{\text{مساحة المقطع}}{\text{مساحة القاعدة}} = \frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ع}^{٢}}$ مثل الهرم

ملاحظة :

إذا قطع المخروط بمستوٍ يمر بمحوره فالمقطع الناتج مثلث متطابق الساقين ومساحته = ر ع

مثـال (١) احسب حجم المخروط الدائرى القائم الذى محيط قاعدته ٤٤ سم ، وارتفاعه ١٢ سم (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

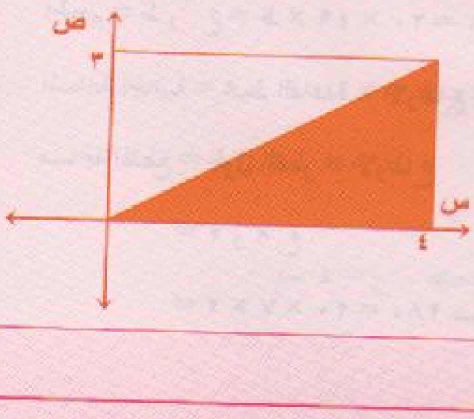
الحـل

محيط القاعدة = ٤٤

٢ ط ر = ٤٤ $\frac{٢٢}{٧}$ × ر = ٢٢ $\boxed{\text{ر = ٧ سم}}$

الحجم = $\frac{١}{٣}$ ط ر^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ × ١٢ = ٦١٦ سم^{٣}

مثـال (٢) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة فى الشكل المرسوم دورة كاملة حول محور السينات .



الحـل

الجسم الناتج يكون مخروط دائرى قائم

ع = ٤ سم ، ر = ٣ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ ط ر^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ ط × ٩ × ٤ = ١٢ ط سم^{٣}

الكـــرة

بنين فقط

مقطع الكرة

(١) إذا قطعت الكرة بمستويين متوازيين فإننا نسمى الجزء المحصور فى الكرة بين المقطعين منطقة كروية .

(٢) إذا قطعت الكرة بمستويين متوازيين أحدهما مماس للكرة فإننا نسمى الجزء المحصور بين المستويين قبة كروية .

(٣) القطاع الكروى يعنى به الجسم المحصور بقبة كروية ومخروط دائرى قائم رأسه مركز الكرة وقاعدته هى قاعدة القبة .

- مساحة الكرة = ٤ ط $\text{نق}^{٢}$
- حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط $\text{نق}^{٣}$ **(نق طول نصف قطر الكرة)**
- مساحة القبة الكروية = ٢ ط ر ع $\boxed{\text{(٢ عطر)}}$

(ر) نصف قطر الكرة (ع) ارتفاع القبة

- حجم القبة الكرية = $\frac{\text{ط}}{٣}$ $\text{ع}^{٢}$ (٣ ر − ع)
- حجم القطاع الكروى = $\frac{٢}{٣}$ ط $\text{ر}^{٢}$ ع
- مساحة القطاع الكروى = ٢ ط ر ع + ط ر $\sqrt{\text{ر}^{٢} - (\text{ر} - \text{ع})^{٢}}$

مثـــال (١) إذا كانت مساحة كرة ٣٦ ط $\text{سم}^{٢}$ ، أوجد حجم الكرة

الحـل مساحة الكرة = ٣٦ ط

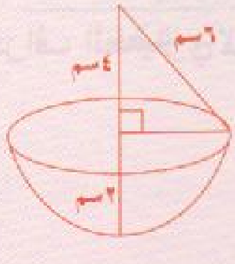
٤ ط $\text{نق}^{٢}$ = ٣٦ ط ⟵ $\text{نق}^{٢}$ = ٩ ⟵ نق = ٣ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط $\text{نق}^{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ × ط × ٢٧ = ٣٦ ط $\text{سم}^{٣}$

مثـــال (٢)

قبة كروية ارتفاعها ٢ سم ، من كرة طول نصف قطرها ٦ سم ، أوجد حجم ومساحة القبة .

الحـل



ع = ٢ سم ر = ٦ سم

حجم القبة = $\frac{\text{ط}}{٣}$ $\text{ع}^{٢}$ (٣ ر − ع)

= $\frac{\text{ط}}{٣}$ × ٤ (١٨ − ٢) = $\frac{٦٤ \text{ط}}{٣}$ $\text{سم}^{٣}$

مساحة القبة = ٢ ع ط ر = ٢ × ٢ × ط × ٦ = ٢٤ ط $\text{سم}^{٢}$

الإحصاء و الاحتمالات

مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الأدنى للفئة + الحد الأعلى للفئة}}{٢}$

القطاعات الدائرية

زاوية القطاع = $\frac{\text{قيمة (تكرار) الجزء الممثل بالقطاع}}{\text{مجموع القيم (التكرارات)}} \times ٣٦٠^\circ$

المتوسطات

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

الوسط الحسابي لتوزيع تكراري $\bar{س} = \frac{\sum س\,ك}{\sum ك}$

(س مراكز الفئات) ، (ك التكرارات المناظرة)

الوسيط لمجموعة من القيم :

هو القيمة العددية التي تقسم البيانات إلى مجموعتين متساويتين بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

ملاحظة : إذا كان عدد القيم فردياً فإن الوسيط هو القراءة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$

وإذا كان عدد القيم زوجياً فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقراءتين اللتين

ترتيبهما : $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$

المنوال لمجوعة من القيم هو القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً .

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^٢}{ن}}$$

التباين هو الفرق بين الوسط الحسابي لمربعات القراءات ومربع الوسط الحسابي للقراءات

$$ع^٢ = \frac{١}{ن} \sum س^٢ - \bar{س}^٢$$

مثال أوجد التباين للقراءات : ١٥ ، ١٢ ، ١٠ ، ٩ ، ١٤ .

الحل

س	١٥	١٢	١٠	٩	١٤	$\sum$ س = ٦٠
س٢	٢٢٥	١٤٤	١٠٠	٨١	١٩٦	$\sum$ س٢ = ٧٤٦

التباين هو الفرق بين الوسط الحسابي لمربعات القراءات ومربع الوسط الحسابي للقراءات

$$\text{التباين}\quad ع^{٢} = \frac{١}{ن}\sum س^{٢} - \bar{س}^{٢} = \frac{١}{٥} \times ٧٤٦ - \left(\frac{٦٠}{٥}\right)^{٢}$$

$$= ١٤٩٫٢ - (١٢)^{٢} = ١٤٩٫٢ - ١٤٤ = ٥٫٢$$

لاحظ : الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

فضاء العينة لاختبار ما هو : مجموعة النواتج الممكنة لهذا الاختبار ورمزه **ش**

الحادثة هي : أي مجموعة جزئية من فضاء العينة .

أنواع الحوادث

١ حدث بسيط
عدد عناصره واحد

٢ حدث مؤكد = ش
ح (ش) = ١

٣ حدث مستحيل = $\varnothing$
ح ($\varnothing$) = صفر

احتمال أي حادثة (أ) هو ح (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ش}} = \frac{\text{عدد العناصر المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

مسلمات نظرية الاحتمال :

(١) إذا كانت $ أ \subset ف $ فإن $ ح(أ) \geq $ صفر

(٢) $ ح(ف) = ١ $

(٣) إذا كانت أ ، ب حادثتين متنافيتين (أي كانت $ أ \cap ب = \varnothing $

فإن $ ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) $

- لأي حادثة أ يكون $ ٠ \leq ح(أ) \leq ١ $
- إذا كانت $ أَ $ هي الحادثة المكملة للحادثة أ فإن $ ح(أَ) = ١ - ح(أ) $
- إذا كانت $ أ \subset ب $ فإن $ ح(أ) \leq ح(ب) $
- إذا كانت أ ، ب أي حادثتين فإن : $ ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب) $

الاحتمالات المشروطة

$$ ح(أ / ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)} \Leftarrow ح(أ \cap ب) = ح(أ / ب) \cdot ح(ب) $$

الحوادث المستقلة :

إذا كانت أ ، ب حادثتان مستقلتان فإن : $ ح(أ \cap ب) = ح(أ) \cdot ح(ب) $

مثال (١) في تجربة إلقاء حجر متجانس كتبت على أوجهه ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ مرتين وملاحظة الوجه العلوي في كل مرة أوجد احتمال الحصول على عددين متشابهين .

الحل $ ن(ف) = ٦^٢ = ٣٦ $.

$ أ = \{(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦)\} $

$ ح(أ) = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦} $

مثال (٢) إذا كان : $ ح(أ) = ٠٫٠٤ $ ، $ ح(ب) = ٠٫٠٥ $ ، $ ح(أ \cap ب) = ٠٫٠٣ $

فأوجد $ ح(أ \cup ب) $.

الحل $ ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب) $.

$ = ٠٫٠٤ + ٠٫٠٥ - ٠٫٠٣ = ٠٫٠٦ $

مثال (٣) أكمل :

(١) احتمال الحادثة المستحيلة = ...

(٢) إذا كان احتمال نجاح طالب هو $ \frac{٧}{٩} $ ، فإن احتمال رسوبه هو ....

(٣) إذا كانت أ ، ب حادثتين مستقلتين ، $ ح(أ) = ٠٫٠٤ $ ، $ ح(ب) = ٠٫٠٣ $ فإن $ ح(أ \cap ب) = $ ......

حساب المثلثات

الزاوية الموجهة :

هي زاوية مكونة من زوج مرتب ((م أ ،) م ب)

(م أ ضلعها الابتدائي ،) م ب ضلعها النهائي .

القياس موجب : إذا كان الاتجاه عكس عقارب الساعة .

القياس سالب : إذا كان الاتجاه مع عقارب الساعة .

العلاقة بين القياس الستيني $س^\circ$ والقياس الدائري د راديان :

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{د}{ط}$$

مثال اوجد قياس زاوية السداسي المنتظم بالتقدير الدائري (الراديان)

الحل قياس زاوية السداسي = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ن} = \frac{٤ \times ١٨٠^\circ}{٦} = ١٢٠^\circ$ (قياس ستيني)

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{د}{ط}$$

$$د = \frac{١٢٠^\circ \times ط}{١٨٠^\circ} = \frac{٢ ط}{٣} \text{ راديان}$$

(تذكر) حساب طول قوس دائرة :

إذا كانت (م ، نق) دائرة وكان ل طول قوس الدائرة المحصور بين ضلعي زاوية مركزية قياسها د راديان فان : ل = د . نق .

مثال (١)

احسب طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ١,٤ راديان في دائرة نصف قطرها ٥ سم .

الحل

د = ١,٤ راديان ، نق = ٥ سم

ل = د . نق = ١,٤ × ٥ = ٧ سم

(**تذكر**) في الدائرة (م ، نق) مساحة القطاع الدائري الذي طول قوسه ل تساوي $\frac{1}{2}$ ل · نق .

مثال (٢) أوجد مساحة قطاع دائري زاويته المركزية ٦٠° في دائرة نصف قطرها ٨ سم

الحل مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

= $\frac{1}{2}$ د نق × نق (عوضنا عن ل = د نق)

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{\text{س}^\circ \times \text{ط}}{{}^\circ 180}$ × نق^2 حيث: د = $\frac{\text{س}^\circ \times \text{ط}}{{}^\circ 180}$

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{{}^\circ 60 \times \text{ط}}{{}^\circ 180}$ × ٦٤ = $\frac{32\ \text{ط}}{3}$ سم^2 .

الدوال المثلثية في المثلث القائم الزاوية

الدوال المثلثية في المثلث القائم الزاوية :

جا ع = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا ع = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

ظا ع = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{جا ع}}{\text{جتا ع}}$

أهم المتطابقات الأساسية :

١) جا^{2}ع + جتا^{2}ع = ١ ٢) ١ + ظا^{2}ع = قا^{2}ع ٣) ١ + ظتا^{2}ع = قتا^{2}ع

قا ع = $\frac{1}{\text{جتا ع}}$ ، قتا ع = $\frac{1}{\text{جا ع}}$ ، ظا ع = $\frac{\text{جا ع}}{\text{جتا ع}}$ ، ظتا ع = $\frac{\text{جتا ع}}{\text{جا ع}}$

لأي زاوية موجهة قياسها ع يكون: ـ ١ ≥ جا ع ≥ ١ وأيضا ـ ١ ≥ جتا ع ≥ ١

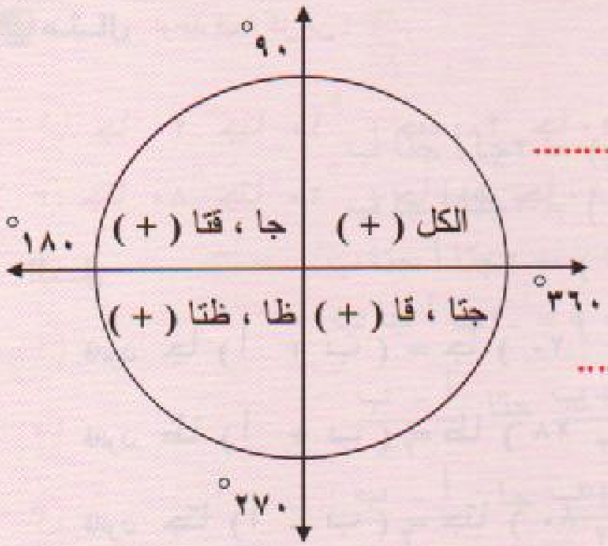
النسب المثلثية للزوايا الخاصة :

بالدرجات	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
بالراديان	٠	$\frac{ط}{٦}$	$\frac{ط}{٤}$	$\frac{ط}{٣}$	$\frac{ط}{٢}$	ط	$\frac{٣ط}{٢}$	٢ط
جا	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	١-	٠
جتا	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	١-	٠	١
ظا	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	∞	٠	٠	∞

مثال أوجد قيمة : جتا $\frac{ط}{٣}$ جا $\frac{ط}{٢}$ + جا ٣٠° ظا ٤٥°

الحل جتا٦٠° جا ٩٠° + جا ٣٠° ظا ٤٥° = $\frac{١}{٢} \times ١ + ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$

إشارات الدوال المثلثية :



لسهولة حفظ قاعدة الإشارات

كل ← الأول ، جار ← الثاني ، ظالم ← الثالث ، جته ← الرابع ....

أو :

كل ← الأول ، جميلة ← الثاني ، ظريفة ← الثالث ، جتها ← الرابع ....

تبسيط بعض قيم الدوال المثلثية

- جا أو جتا أو ظا (ط ± هـ) = جاهـ أو جتاهـ أو ظاهـ مع مراعاة قاعدة الإشارات .

مثلاً : جا (ط - هـ) = جاهـ لأن (ط - هـ) الربع الثاني والربع الثاني جا موجبة

جتا (ط + هـ) = - جتاهـ لأن (ط + هـ) الربع الثالث والربع الثالث جتا سالبة

- جا أو جتا أو ظا $\left(\frac{ط}{٢} \pm هـ\right)$ أو $\left(\frac{٣ط}{٢} \pm هـ\right)$

نحذف من النسبة حرف ت إذا كان موجوداً ونضع للنسبة حرف ت إذا كان غير موجوداً مع مراعاة قاعدة الإشارات .

فمثلاً : جا $\left(\frac{ط}{٢} - هـ\right)$ = جتاهـ وضعنا حرف ت مع مراعاة قاعدة الإشارات .

ظتا $\left(\frac{ط}{٢} + هـ\right)$ = ظاهـ حذفنا حرف ت مع مراعاة قاعدة الإشارات .

- جا (- هـ) = - جاهـ ، جتا (- هـ) = جتاهـ ، ظا (- هـ) = - ظاهـ

جتا زاوية سالبة = جتا نفس الزاوية بالموجب (جتا دالة زوجية)

الدوال الدائرية لمجموع زاويتين والفرق بينهما :

جا (أ ± ب) = جا أ جتاب ± جتا أ جا ب

جتا (أ ± ب) = جتا أ جتاب ∓ جا أ جا ب

$$ظا (أ \pm ب) = \frac{ظا أ \pm ظا ب}{١ \mp ظا أ ظا ب}$$

مثـال اوجد قيمة كل من :

١) جا ٢٠° جتا ١٠° + جتا ٢٠° جا ١٠°

٢) $\frac{ظا ٢٨° + ظا ١٧°}{١ - ظا ٢٨° ظا ١٧°}$

٣) جتا ٨٠° جتا ٢٠° + جا ٨٠° جا ٢٠°

الحـل

١) قانون جا (أ + ب) = جا (٢٠° + ١٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

٢) قانون ظا (أ + ب) = ظا (٢٨° + ١٧°) = ظا ٤٥° = ١

٣) قانون جتا (أ - ب) = جتا (٨٠° - ٢٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

تدريب اوجد قيمة كل من :

١) جا ٥٠° جتا ٢٠° - جتا ٥٠° جا ٢٠°

٢) جتا ٥٠° جتا ٢٠° + جا ٥٠° جا ٢٠°

٣) $\frac{ظا ٥٠° - ظا ٥°}{١ + ظا ٥٠° ظا ٥°}$

الدوال الدائرية لضعف الزاوية

١) جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ

٢) جتا ٢أ = جتا^{٢} أ - جا^{٢} أ
= ١ - ٢جا^{٢} أ
= ٢جتا^{٢} أ - ١

٣) ظا٢أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ أ}}$

مثال أوجد قيمة

١) ٢ جا ١٥° جتا ١٥°

٢) $\frac{\text{٢ ظا ٢٢ ٣٠}^{\circ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ ٢٢ ٣٠}^{\circ}}$

الحل

١) قانون جا ٢أ = جا ٢ × ١٥° = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

٢) قانون ظا ٢أ = ظا ٢ × ٣٠َ ٢٢° = ظا ٤٥° = ١

قوانين التحويل :

- جا (أ + ب) + جا (أ - ب) = ٢جا أ جتا ب
- جا (أ + ب) - جا (أ - ب) = ٢جتا أ جا ب
- جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب) = ٢جتا أ جتا ب
- جتا (أ + ب) - جتا (أ - ب) = -٢جا أ جا ب
- جا أ + جا ب = ٢ جا $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ - ب}}{٢}$
- جا أ - جا ب = ٢ جتا $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ جا $\frac{\text{أ - ب}}{٢}$
- جتا أ + جتا ب = ٢ جتا $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ - ب}}{٢}$
- جتا أ - جتا ب = -٢ جا $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$ جا $\frac{\text{أ - ب}}{٢}$ حيث أ > ب

مثال (١) اوجد قيمة : جا ٧٥° + جا ١٥°

الحل

قانون جا أ + جا ب = ٢ جا $\frac{أ + ب}{٢}$ جتا $\frac{أ - ب}{٢}$ = ٢ جا $\frac{٧٥° + ١٥°}{٢}$ جتا $\frac{٧٥° - ١٥°}{٢}$

= ٢ جا $\frac{٩٠°}{٢}$ جتا $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٢ جا ٤٥° جتا ٣٠°

= $\cancel{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{\cancel{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

مثال (٢) حول إلى حاصل ضرب : جتا ٨س + جتا ٢س

الحل

قانون جتا أ + جتا ب = ٢جتا $\frac{أ + ب}{٢}$ جتا $\frac{أ - ب}{٢}$ = ٢ جتا $\frac{٨س + ٢س}{٢}$ جتا $\frac{٨س - ٢س}{٢}$

= ٢ جا $\frac{١٠س}{٢}$ جتا $\frac{٦ س}{٢}$ = ٢ جا ٥ س جتا ٣ س

حل المعادلات المثلثية

حل معادلة مثلثية يجب تذكر النسب المثلثية للزوايا الخاصة وقاعدة الإشارات مع ملاحظة

أن جا س ∋ [-١، ١] ، جتا س ∋ [-١، ١] .

مثال (١) أوجد مجموعة حل المعادلة جا س = $\frac{١}{٢}$ في [٠ ، ط] .

الحل جا س = $\frac{١}{٢}$

∵ جا س موجبة $\frac{١}{٢}$ (س في الربع الأول أوالربع الثاني)

الزاوية الحادة الموجبة = ٣٠° (زاوية الربع الأول)

س = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠° زاوية الربع الثاني

مجموعة الحل = { $\frac{ط}{٦}$ ، $\frac{٥ط}{٦}$ }أو مجموعة الحل = { ٣٠°، ١٥٠° }(تقدير ستيني)

مثال (٢) أوجد مجموعة حل المعادلة جتا س - ٣ = ٠ في ح .

الحل جتا س = ٣ ، ∵ جتا س ∋ [- ١ ، ١] .

م . ح = ∅

العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه

العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه :

أولا : قاعدة الجيوب :

تطبق هذه القاعدة إذا علم زاويتين وضلع في المثلث أو ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما ويكون

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$$

ثانيا : قاعدة جيوب التمام :

تستخدم هذه القاعدة إذا علم الثلاثة أضلاع للمثلث أو ضلعين وزاوية محصورة بينهما

$$\text{أَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - 2\,\text{بَ جَ جتا أ} \quad \text{ومنها} \quad \text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{أَ}^2}{2\,\text{بَ جَ}}$$

$$\text{بَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{جَ}^2 - 2\,\text{أَ جَ جتا ب} \quad \text{ومنها} \quad \text{جتا ب} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{جَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{أَ جَ}}$$

$$\text{جَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{أَ بَ جتا جـ} \quad \text{ومنها} \quad \text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{2\,\text{أَ بَ}}$$

ملاحظة :

مساحة أي مثلث $= \frac{1}{2}$ حاصل ضرب أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$= \frac{1}{2}\,\text{أَ بَ جا جـ} = \frac{1}{2}\,\text{أَ جَ جا ب} = \frac{1}{2}\,\text{بَ جَ جا أ}$$

أمثلة على قاعدة الجيوب وقاعدة جيوب التمام :

مثال (١) مثلث أ ب جـ فيه أَ = ٣ سم ، بَ = ٥ سم ، جَ = ٧ سم .
اوجد قياس $\hat{\text{جـ}}$.

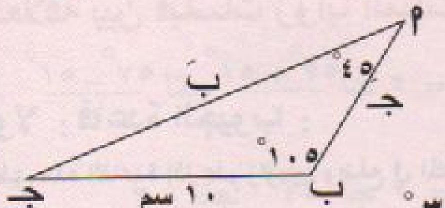
الحل

من قاعدة جيب التمام :

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2}{2\,\text{أَ بَ}} = \frac{9 + 25 - 49}{2 \times 3 \times 5} = \frac{-15}{30}$$

$$\text{جتا جـ} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad \hat{\text{جـ}} = 120^\circ$$

مثـال (٢) المثلث ﻫ ب جـ فيه $\hat{ﻫ}$ = ٤٥° ، $\hat{ب}$ = ١٠٥° ، ﻫَ = ١٠ سم . اوجد جـَ .



الحـل هنا زاويتين وضلع (قاعدة الجيوب)

أولاً : نوجد الزاوية الثالثة :

$\hat{جـ}$ = ١٨٠° - (٤٥° + ١٠٥°) = ٣٠°

بتطبيق قاعدة الجيوب

$$\frac{١٠}{جا ٤٥°} = \frac{جـَ}{جا ٣٠°} \Leftarrow جـَ = \frac{١٠ \times جا ٣٠°}{جا ٤٥°}$$

$$جـَ = \frac{١٠ \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = ٥ \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢} \text{ سم .}$$

مثـال (٣) اوجد مساحة المثلث س ص ع الذي فيه سَ = ٨ سم ، صَ = ١٠ سم ، $\hat{ع}$ = ٣٠° .

الحـل المعلوم سَ ، صَ نستخدم مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ سَ صَ جا ع

$$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ١٠ \times جا ٣٠°$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ١٠ \times \frac{١}{٢}$$

$$= ٢٠ \text{ سم}^٢$$

تدريب

ﻫ ب جـ مثلث فيه ﻫَ = ٥ سم ، بَ = ٤ سم ، جـَ = ٣ سم . اوجد قياس $\hat{ﻫ}$.

(يمكن الحل بمجرد النظر لاحظ الأعداد) (يمكن استخدام قاعدة جيب التمام)

التفاضل

متوسط التغير:

إذا كانت الدالة ص = د (س) معرفة على [أ ، ب] ، فإذا تغيرت س من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$

فإن ص تتغير من د $(س_١)$ إلى د $(س_١ + هـ)$ ويكون :

معدل التغير أو متوسط التغير = م = $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

🍏 **مثال** أوجد متوسط تغير الدالة د (س) = ٢س − ١ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢٫٤

الحل $س_١ = ٢$ ، $س_١ + هـ = ٢٫٤$ $هـ = ٠٫٤$

د (٢٫٤) = ٢ × ٢٫٤ − ١ = ٣٫٨ د (٢) = ٢ × ٢ − ١ = ٣

$م = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{د(٢٫٤) - د(٢)}{٠٫٤} = \frac{٣٫٨ - ٣}{٠٫٤} = \frac{٠٫٨}{٠٫٤} = ٢$

د (٢٫٤) = ٢ × ٢٫٤ − ١ = ٣٫٨ د (٢) = ٢ × ٢ − ١ = ٣

$م = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{د(٢٫٤) - د(٢)}{٠٫٤} = \frac{٣٫٨ - ٣}{٠٫٤} = \frac{٠٫٨}{٠٫٤} = ٢$

مشتقة الدالة : [$دَ(س)$ أو $\frac{ءص}{ءس}$ أو صَ أو $\frac{ء}{ءس}(د(س))$]

إذا كانت د (س) معرفة على] أ ، ب [وكانت $س_١ \in$] أ ، ب [فإذا كانت :

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ موجودة فإنها تسمى مشتقة الدالة عند $س_١$

التفسير الهندسي للمشتقة : $دَ(س)$ = ظا هـ = م حيث هـ هي الزاوية التي

يصنعها المماس عند النقطة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

م هي ميل المماس للمنحنى عند النقطة .

العلاقة بين اتصال الدالة عند نقطة وقابلية الاشتقاق عند هذه النقطة:

(١) إذا كانت الدالة متصلة عند $س_١$ فليس من الضرورة أن تكون قابلة للاشتقاق عند $س_١$

(٢) إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند $س_١$ فلابد أن تكون متصلة عند $س_١$

(٣) إذا كانت الدالة غير متصلة عند $س_١$ فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند $س_١$

معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ الواقعة على منحنى الدالة د (س) هي

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

معادلة العمودي للمنحنى عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة على منحنى الدالة د (س) هي

$$ص - ص_١ = \frac{-١}{م}(س - س_١)$$

لاحظ : إذا كان المماس للمنحنى يوازي محور السينات يعني المشتقة = صفر .

التطبيق الفيزيائي للمشتقة :

إذا تحرك جسيم على خط مستقيم فقطع مسافة ف بعد زمن مقداره ن فأن :

المسافة ف ← اشتقاق ← السرعة ع ← اشتقاق ← التسارع ت

$$ع = \frac{ءف}{ءن} \qquad ت = \frac{ءع}{ءن}$$

ملاحظات :

- السرعة الابتدائية للجسم عندما ن = ٠
- عندما يعود الجسيم إلى نقطة البدء (القذف) ف = ٠ ، ن ≠ ٠ .
- لإيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم نضع ع = ٠ نوجد ن ثم نعوض بها في ف .
- لإيجاد التسارع عند انعدام السرعة نضع ع = ٠ نوجد ن ثم نعوض بها في ت .

قوانين الاشتقاق

- إذا كانت كل من الدالتين ق ، ر قابلتان للاشتقاق عند س ، ر(س) $\neq$ ٠

الدالة د (س)	المشتقة دَ (س)
د (س) = جـ جـ ثابت	$\Longleftarrow$ دَ (س) = صفر
د (س) = أ س + ب	$\Longleftarrow$ دَ (س) = أ
د (س) = $س^{ن}$	$\Longleftarrow$ دَ (س) = ن $س^{ن-١}$
د (س) = $[\,ق(س)\,]^{ن}$	$\Longleftarrow$ دَ (س) = ن · $[\,ق(س)\,]^{ن-١}$ × قَ(س)

(الأس × القوس وعليه الأس ناقص واحد × مشتقة ما بداخل القوس)

- د (س) = ق(س) × ر(س) $\Longleftarrow$ دَ (س) = قَ(س) × ر(س) + ق(س) × رَ(س)

(مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الأولى × الثانية + الأولى × مشتقة الثانية)

- د (س) = $\dfrac{ق(س)}{ر(س)}$ $\Longleftarrow$ دَ (س) = $\dfrac{قَ(س) \times ر(س) - ق(س) \times رَ(س)}{(\,ر(س)\,)^{٢}}$

مشتقة خارج قسمة دالتين = $\dfrac{\text{مشتقة البسط × المقام − البسط × مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

- د (س) = $\dfrac{أ}{ق(س)}$ $\Longleftarrow$ دَ (س) = $\dfrac{-أ \times قَ(س)}{(\,ق(س)\,)^{٢}}$

- د (س) = $\sqrt{ق(س)}$ $\Longleftarrow$ دَ (س) = $\dfrac{قَ(س)}{٢\sqrt{ق(س)}}$

مشتقة جذر تربيعي = $\dfrac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{\text{٢ × الجذر نفسه}}$

- د (س) = $هـ^{س}$ $\Longleftarrow$ دَ (س) = $هـ^{س}$

- د (س) = $أ^{س}$ $\Longleftarrow$ دَ (س) = $أ^{س}$ × لو أ

الدالة د (س)		المشتقة دَ (س)
• د (س) = هـ$^{ق (س)}$	⟸	دَ (س) = هـ$^{ق (س)}$ × قَ (س)
• د (س) = أ$^{ق (س)}$	⟸	دَ (س) = أ$^{ق (س)}$ × قَ (س) × لو أ
• د (س) = لو$_{أ}$ ق (س)	⟸	دَ (س) = قَ(س) / (ق(س) × لو أ)

مشتقات الدوال الدائرية

- د (س) = جا س ⟸ دَ (س) = جتا س
- د (س) = جتا س ⟸ دَ (س) = ـ جا س
- د (س) = ظا س ⟸ دَ (س) = قا^{٢} س
- د (س) = قا س ⟸ دَ (س) = قا س ظا س
- د (س) = قتا س ⟸ دَ (س) = ـ قتا س ظتا س
- د (س) = ظتا س ⟸ دَ (س) = ـ قتا^{٢} س

المشتقات العليا

- المشتقة الثانية : صً أو دً (س) أو ء^{٢}ص / ءس^{٢}
- المشتقة الثالثة : صًّ أو دًّ (س) أو ء^{٣}ص / ءس^{٣} وهكذا

لاحظ : الدالة المثلثية التي بها حرف ت تكون مشتقتها سالبة

- مشتقة جا (زاوية) = جتا (الزاوية) × مشتقة الزاوية . وهكذا باقي الدوال
- مشتقة جا^{ن} [د (س)] = ن × جا$^{ن-1}$ [د (س)] جتا [د (س)] × دَ (س)

(تعاملها معاملة مشتقة قوس وعليه أس)

نهاية الدوال الحقيقية

لإيجاد نهاية دالة عند نقطة نعوض تعويض مباشر أولاً إذا كانت النتيجة أي عدد أو ∞ فهو النهاية أما إذا كان الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فإننا نستخدم إحدى الطرق .

(التحليل – المرافق – فك الأقواس)

- لإيجاد نهاية دالة عند نقطة يتغير عندها التعريف نوجد النهاية اليمنى ونوجد النهاية اليسرى ثم نقارن بينهما فإذا كانت النهايتين متساويتين ∴ النهاية موجودة أما إذا اختلفت النهايتين فإن النهاية غير موجودة.
- إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين معرفتين على الفترة ف بحيث
- $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}\ د_1(س) = \text{صفر}$ ، $د_2(س)$ محدودة $\forall$ س $\in$ ف فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}\ د_1(س) \times د_2(س) = \text{صفر}$
- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\text{جاس}}{س} = ١$ ، $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\text{ظاس}}{س} = ١$ (حيث س مقيسة بالتقدير الدائري)
- $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\text{جا } أس}{ب\ س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\text{ظا } أس}{ب\ س} = \frac{أ}{ب}$ (حيث س مقيسة بالتقدير الدائري)

اتصال الدالة

- بفرض أن الدالة د(س) معرفة عند س فإننا نقول إن د(س)

متصلة من اليمين إذا كان $\underset{س \leftarrow س_٠^+}{نهـا}\ د(س) = د(س_٠)$

متصلة من اليسار إذا كان $\underset{س \leftarrow س_٠^-}{نهـا}\ د(س) = د(س_٠)$

متصلة عند $س_٠$ إذا كان $\underset{س \leftarrow س_٠}{نهـا}\ د(س) = د(س_٠)$

نهاية الدالة عند اللانهاية $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{أ}{س} = \text{صفر}$

إذا كانت د(س)، ر(س) كثيرتي حدود فإن $\underset{س \leftarrow \pm\infty}{نهـا} \frac{د(س)}{ر(س)} =$

$\frac{\text{المعامل الرئيسي للبسط}}{\text{المعامل الرئيسي للمقام}}$	صفر	$\pm\infty$
إذا كانت درجة البسط = درجة المقام	إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام	إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام

إذا كان الناتج ∞ - ∞ فإننا نضرب في المرافق إذا كان بها جذر أو نوحد المقام ونجمع أو نطرح إذا كان بها كسرين.

- $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س}} = \text{صفر}$ حيث س مقيسة بالتقدير الدائري

- $\displaystyle \lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}} = \begin{cases} \text{صفر} & \text{إذا كان أ} < \text{ب} \\ \infty & \text{إذا كان أ} > \text{ب} \end{cases}$

- $\displaystyle \lim_{\text{س} \to -\infty} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}} = \begin{cases} \infty & \text{إذا كان أ} < \text{ب} \\ \text{صفر} & \text{إذا كان أ} > \text{ب} \end{cases}$

مثال (١) أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

(١) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2}$ (٢) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^3 - 27}{\text{س} - 3}$ (٣) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{\text{س} + 4} - 2}{\text{س}}$

الحل كل المسائل تعويض مباشر تعطى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

(١) واضح أن الحل بالتحليل $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 2)}{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} - 1)} = \frac{2 + 2}{2 - 1} = \frac{4}{1} = 4$

(٢) البسط تحليل مجموع مكعبين $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\cancel{(\text{س} - 3)}(\text{س}^2 + 3\text{س} + 9)}{\cancel{(\text{س} - 3)}} = 9 + 9 + 9 = 27$

(٣) مرافق $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{\text{س} + 4} - 2}{\text{س}} \cdot \frac{(\sqrt{\text{س} + 4} + 2)}{(\sqrt{\text{س} + 4} + 2)}$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س} + \cancel{4} - \cancel{4}}{\text{س}(\sqrt{\text{س} + 4} + 2)} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\sqrt{\text{س} + 4} + 2} = \frac{1}{4}$$

مثـال (٢) أوجد النهايات التالية (إن وجدت)

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٧ س^٢ + ٣}{٢ س^٢ - ٥}$ (٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٧ س + ٢}{س^٢ + ٨}$ (٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^٢}$ جاس

الحـل (١) بقسمة البسط والمقام على $س^٢$ الناتج = $\frac{٧}{٢}$ هنا درجة البسط = درجة المقام

(٢) بقسمة البسط والمقام على $س^٢$ الناتج = صفر هنا درجة البسط أصغر من درجة المقام

(٣) الدالة جاس محدودة $-١ \leqslant$ جاس $\leqslant ١$

$\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^٢}$ = صفر

∴ قيمة النهاية = صفر

(نهاية حاصل ضرب دالتين إحداهما محدودة والأخرى نهايتها تساوي صفر الناتج = صفر)

مثـال (٣) أوجد النهايات الآتية:

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{س}$ (٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س + ٥س}{٤س}$ (٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ + جاس}{س - ٢}$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٢س \, ظا٣س}{س^٢}$

الحـل (١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{س} = ٣$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س + ٥س}{٤س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{٤س} + \lim_{س \to ٠} \frac{٥س}{٤س} = \frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

(٣) لايجاد $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ + جاس}{س - ٢}$ نستخدم قاعدة مشهورة باسم قاعدة السندويتش

(حاول الحل بنفسك بأي طريقة)

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا٢س \, ظا٣س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٢س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{س}$

$= ٢ \times ٣ = ٦$

أمثـــلة على المشتقات

مثـال (١) إذا كانت : $\text{ص} = \frac{٨}{\text{س}^{٢}}$ أوجد دَ (١)

الحـل

$$\text{دَ (س)} = \frac{-٨ \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{-١٦\text{س}}{\text{س}^{٤}} = \frac{-١٦}{\text{س}^{٣}}$$

$$\text{دَ (١)} = \frac{-١٦}{(١)^{٣}} = -١٦$$

القاعدة $\text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{ق(س)}}$

$$\text{صَ} = \frac{-\text{أ} \times \text{قَ(س)}}{(\text{ق(س)})^{٢}}$$

مثـال (٢) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كان $\text{ص} = \text{لو}\ (\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٣)$

الحـل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٣}$$

مشتقة لو(دالة) هي $\frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة}}$

مثـال (٣) يتحرك جسيم في خط مستقيم فيقطع مسافة ف متراً بعد زمن ن ثانية بالعلاقة

$\text{ف} = \text{ن}^{٣} - ٥\text{ن}^{٢} + ٧\text{ن} + ٢$ أوجد السرعة الابتدائية للجسيم .

الحـل

$$\text{ع (ن)} = \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = ٣\text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} + ٧$$ السرعة عند أي لحظة ن

$$\text{ع (صفر)} = ٠ - ٠ + ٧ = ٧ \ \text{م / ث}$$ السرعة الابتدائية نضع ن = ٠

مثـال (٤) اوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى :

$\text{ص} = \text{س}^{٢} - \text{س} + ٢$ عند $\text{س} = ١$

الحـل نفرض الزاوية قياسها هـ

$\text{ظا هـ} = \text{صَ} = ٢\text{س} - ١$ عند $\text{س} = ١$ $\quad \text{ظا هـ} = ٢ - ١ = ١$

$$\text{ق(هـ)} = ٤٥^{\circ} = \frac{\text{ط}}{٤}$$

قاعدة التسلسل : إذا كان ص = د(ع) ، ع = د(س) فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

مثال إذا كانت ص = $\text{ع}^{٢}$ + ٣ ع ، ع = $\text{س}^{٢}$ + ٧ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = (٢ع + ٣) (٢س)

= (٢ ($\text{س}^{٢}$ + ٧)) + ٣)(٢س)

= (٢$\text{س}^{٢}$ + ١٤ + ٣)(٢س) = (٢$\text{س}^{٢}$ + ١٧)(٢س) = ٤$\text{س}^{٣}$ + ٣٤ س

تابع مسائل على المشتقات

مثال إذا كانت ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٢}$ اوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٢

الحل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} - ١}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٢}}$ ← $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{\text{٢ × الجذر نفسه}}$

س = ٢ ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤ - ١}{٢\sqrt{٤ - ٢ + ٢}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٤}}$

$= \frac{٣}{٢ \times ٢} = \frac{٣}{٤}$

مثال اوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال :

(١) ص = جا ٣س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا ٣س × ٣ = ٣ جتا ٣س

(٢) ص = $\text{س}^{٣}$ جا س — هنا مشتقة حاصل ضرب دالتين

ص َ = ٣ $\text{س}^{٢}$ جا س + $\text{س}^{٣}$ جتا س

(٣) ص = $\text{جتا}^{٣}$ س — لاحظ $\text{جتا}^{٣}$س هي $(\text{جتا س})^{٣}$ ≠ جتا $\text{س}^{٣}$

ص َ = ٣ $\text{جتا}^{٢}$س ٠ (ـ جا س) = ـ ٣ جا س $\text{جتا}^{٢}$ س

(٤) إذا كانت ص = جا س اثبت أن ص⁗ = ص

ص َ = جتا س و ص ً = ـ جا س

ص ً َ = ـ جتا س و ص⁗ = جا س = ص

اوجد مشتقة الدوال الآتية :

(١) د (س) = $\sqrt[3]{س^{2} + ٣س + ٧}$ لاحظ $\sqrt[ن]{د (س)} = (د (س))^{\frac{1}{ن}}$

الحل د (س) = $(س^{2} + ٣س + ٧)^{\frac{1}{3}}$

دَ (س) = $\frac{1}{3}(س^{2} + ٣س + ٧)^{\frac{-2}{3}}(٢س + ٣)$

(٢) د (س) = جا^{2} س (جا^{2} س هي (جا س)^{2})

الحل دَ (س) = ٢ جا س جتا س استخدمنا قانون مشتقة قوس وعليه أس

دَ (س) = جا٢س من قوانين حساب المثلثات ٢ث (جا٢س = ٢ جا س جتا س)

(٣) حاول الحل بنفسك

تابع مسائل على المشتقات

مثال إذا كانت ص = ظا س اوجد ص ً

الحل ص َ = قا^{2} س

ص ً = ٢ قا س × قا س ظا س

= ٢ قا^{2} س ظا س

= ٢ قا^{2} س × ص لاحظ ص = ظا س الدالة المعطاة

تدريب اوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال :

(١) ص = جتا^{2} س (٢) ص = $\sqrt{س^{2} + ١}$ (٣) ص = $\frac{1}{س^{2} + ٣}$

تدريب إذا كانت ص = جتا س هل ص = ص⁗

مثـال (١) إذا كانت $ص = ع^{٤}$ ، $ع = س^{٢} - ١$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحـل

الحل الأول (بالتعويض عن ع)

$ص = ع^{٤} = (س^{٢} - ١)^{٤}$

مشتقة قوس وعليه أس

$\frac{ءص}{ءس} = ٤ \times (س^{٢} - ١)^{٣} (٢س)$

$= ٨ س (س^{٢} - ١)^{٣}$

الحل الثاني (باستخدام قاعدة التسلسل)

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

$= ٤ع^{٣} \times (٢س)$

$= ٨ س (س^{٢} - ١)^{٣}$

مثـال (٢) إذا كانت $ص = س^{٢} + ١$ ، $ع = \sqrt{س^{٢} - ١}$ اثبت أن: $\frac{ءص}{ءع} = ٢ع$

الحـل

$ع = \sqrt{س^{٢} - ١}$ بالتربيع $ع^{٢} = س^{٢} - ١$ $\therefore$ $س^{٢} = ع^{٢} + ١$

$ص = س^{٢} + ١ = ع^{٢} + ١ + ١ = ع^{٢} + ٢$

$\frac{ءص}{ءع} = ٢ع$ (يمكن الحل بطريقة أخرى حاول بنفسك)

مثـال (٣) إذا كان $ص = \sqrt{ع}$ ، $ع = ١ - ل^{٢}$ ، $ل = ٢س$

اثبت أن : $ص \times \frac{ءص}{ءس} + ٢ ل = صفر$

الحـل ابدأ التعويض من النهاية : $ع = ١ - ل^{٢} = ١ - (٢س)^{٢} = ١ - ٤س^{٢}$

$ص = \sqrt{ع} = \sqrt{١ - ٤س^{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}} = \frac{-٨ س}{٢\sqrt{١ - ٤س^{٢}}} = \frac{-٤ س}{\sqrt{١ - ٤س^{٢}}}$

$ص \times \frac{ءص}{ءس} + ٢ ل = \cancel{\sqrt{١ - ٤س^{٢}}} \times \frac{-٤ س}{\cancel{\sqrt{١ - ٤س^{٢}}}} + ٢ \times ٢س$

$= -٤ س + ٤ س = صفر$

مثـال (٤) إذا كانت $ص = جتا س$ اثبت أن : $(صَ)^{٢} - ص صً = ١$

الحـل $ص = جتا س$ $صَ = - جا س$ $صً = - جتا س$

$\therefore (صَ)^{٢} - ص صً = (- جا س)^{٢} - جتا س \times (- جتا س)$

$= جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١$

تطبيقات حساب التفاضل

النقط الحرجة للدالة

إذا كانت د دالة معرفة على فترة فأن النقط الحرجة للدالة على الفترة المفتوحة هي تلك النقط التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق أو المشتقة عندها تساوي صفراً .

أي دَ (س) = صفراً أو دَ (س) غير معرفة

فترات التزايد والتناقص

لتكن د دالة متصلة على [أ ، ب] :

(١) إذا كانت دَ (س) > صفر لكل س ∈ (أ ، ب) فإن : د متزايدة على [أ ، ب]

(٢) إذا كانت دَ (س) < صفر لكل س ∈ (أ ، ب) فإن : د متناقصة على [أ ، ب]

نظرية رول إذا كانت : (١) د متصلة على [أ ، ب] (٢) د قابلة للاشتقاق على الفترة (أ ، ب)
(٣) د (أ) = د (ب)

فأن هنالك على الأقل نقطة واحدة جـ ∈ (أ ، ب) تحقق دَ (جـ) = صفراً

مثال (١) اوجد قيمة جـ التي تعينها نظرية رول للدالة

د (س) = س^{٢} − ٤س + ٣ ، ف = [٠ ، ٤]

الحل

(١) د متصلة على [٠ ، ٤] (٢) د قابلة للاشتقاق على الفترة (٠ ، ٤)

(٣) د (٠) = ٠ − ٠ + ٣ = ٣ ، د (٤) = ١٦ − ١٦ + ٣ = ٣

د (٠) = د (٤)

دَ (س) = ٢س − ٤ دَ (جـ) = ٢جـ − ٤

٢جـ − ٤ = ٠ ٢جـ = ٤ $\boxed{\text{جـ} = ٢}$

لاحظ : [د (س) من الدرجة الثانية الحل بمجرد النظر جـ = متوسط حدي الفترة]

تدريب

حقق شروط نظرية رول للدالة د (س) = $س^2$ − ٦س + ٨ على ف = [١ ، ٥]
واوجد قيمة جـ التي تعينها النظرية متى توفرت الشروط .

نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل

إذا كانت : (١) د متصلة على [أ ، ب]
(٢) د قابلة للاشتقاق على الفترة (أ ، ب)

فإن هنالك نقطة واحدة على الأقل جـ ∈ (أ ، ب) تحقق : دَ (جـ) = $\frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$

مثـال قرر إن كان يتوافر للدالة د شرطا نظرية القيمة المتوسطة على الفترة ف واحسب جـ مقتضى النظرية متى توافر الشرطان : د(س) = $س^2$ − ٢س − ٣ ، ف = [٠ ، ٣]

الحـل (١) د متصلة على [٠ ، ٣] لأنها كثيرة حدود

(٢) د قابلة للاشتقاق على الفترة (٠ ، ٣)

دَ(س) = ٢س − ١ دَ(جـ) = ٢جـ − ١

د(أ) = د(٠) = ٠ − ٠ − ٣ = −٣ ،

د(ب) = د(٣) = ٩ − ٣ − ٣ = ٣

$$٢جـ − ١ = \frac{٣ − (−٣)}{٣ − ٠} = \frac{٦}{٣}$$

٢جـ − ١ = ٢ ٢جـ = ٣ جـ = $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥

لاحظ : (يمكن الحل مباشرة د(س) من الدرجة الثانية جـ = متوسط حدي الفترة)

التقعر

لتكن د قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة (أ ، ب)

(١) إذا كانت د̎(س) > صفر لكل س ∈ (أ ، ب) فإن : د مقعرة لأعلى على (أ ، ب)

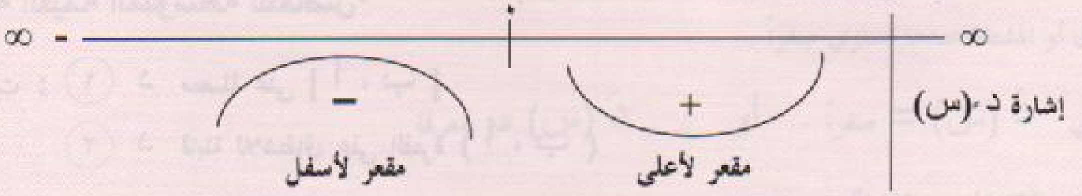
(٢) إذا كانت د̎(س) < صفر لكل س ∈ (أ ، ب) فإن : د مقعرة لأسفل على (أ ، ب)

وإذا كانت جـ نقطة في مجال الدالة د وكان بالقرب من جـ اتجاه تقعر د عن يسار جـ يختلف عنه عن يمينها فأننا نسمي النقطة (جـ ، د (جـ)) نقطة انعطاف (انقلاب) .

مثـال ادرس تقعر المنحنى ص = $س^{٣}$ ـ ٣س + ١ واوجد نقطة الانعطاف (إن وجدت)

الحـل صَ = ٣ $س^{٢}$ ـ ٣ صً = ٦س

٦ س = ٠ منها س = ٠



في (٠ ، ∞) المنحنى مقعر لأعلى

في (- ∞ ، ٠) المنحنى مقعر لأسفل

(٠ ، د (٠)) نقطة انقلاب (٠ ، ٠)

تصنيف النقاط الحرجة

اختبار المشتقة الأولى

لتكن جـ نقطة حرجة للدالة د وافرض أن د متصلة عند جـ

(١) إذا وجدنا بالقرب من جـ أن دَ (س) < صفر عن يسار جـ و دَ (س) > صفر عن يمينها فأن د (جـ) قيمة صغرى محلية .

(٢) إذا وجدنا بالقرب من جـ أن دَ (س) > صفر عن يسار جـ و دَ (س) < صفر عن يمينها فأن د (جـ) قيمة عظمى محلية .

(٣) إذا وجدنا بالقرب من جـ أن إشارة دَ (س) لا تختلف عن يمين جـ وعن يسارها فأن د (جـ) ليست قيمة قصوى محلية .

اختبار المشتقة الثانية

لتكن جـ نقطة حرجة للدالة د

(١) إذا كانت دً (جـ) > صفر فإن : د (جـ) قيمة صغرى محلية

(٢) إذا كانت دً (جـ) < صفر فإن : د (جـ) قيمة عظمى محلية

لاحظ أن : إذا كانت دً (س) = صفر أو دً (س) غير موجودة فأن اختبار المشتقة الثانية لا يصلح هنا

مثـال صنف النقاط الحرجة للدالة د (س) = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س

الحـل دَ (س) = ٣س^{٢} − ١٢س + ٩   نساويها بالصفر ونحل المعادلة

٣س^{٢} − ١٢س + ٩ = ٠   ÷ ٣   س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

(س − ٣) (س − ١) = ٠   س = ٣ ، س = ١

ختبار المشتقة الأولى :

∞ ——— ٣ ——— ١ ——— − ∞

إشارة دَ (س)   موجبة   سالبة   موجبة

تزايدية   تناقصية   تزايدية

منها : عند س = ١ للدالة قيمة عظمى أو د(١) قيمة عظمى محلية

عند س= ٣ للدالة قيمة صغرى أو د(٣) قيمة صغرى محلية

ختبار المشتقة الثانية : دً (س) = ٦س − ١٢

دً (٣) = ٦ × ٣ − ١٢ = ٦   د(٣) قيمة صغرى محلية

دً (١) = ٦ × ١ − ١٢ = −٦   د(١) قيمة عظمى محلية

لاحظ : إذا طلب التقعر أو نقط الانقلاب الحل عن طريق المشتقة الثانية

تعين خطوط التقارب (توجد في الدوال الكسرية فقط)   بنات فقط

(١) إذا كان مجال الدلة هو ح − { أ } فإن س = أ هو خط التقارب الرأسي .

مثـال اوجدي معادلة خط التقارب الرأسي للدالة د(س) = $\frac{-٣}{س − ٢}$

الحـل المجال هو ح − { ٢ }   معادلة خط التقارب الرأسي هو: س = ٢

(٢) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام فإن هنالك خط تقارب أفقي هو

ص = $\frac{\text{معامل س مرفوعة لأكبر أس}}{\text{معامل س مرفوعة لنفس أس}}$ ولا يوجد خط تقاربي مائل .

مثـال عين خطوط التقارب للدالة $ص = \frac{٢س + ٣}{س - ٤}$

الحـل أصفار المقام $س - ٤ = ٠$ $س = ٤$

المجال هو $ح - \{٤\}$

$س = ٤$ خط تقاربي رأسي للدالة

درجة البسط = درجة المقام

$\therefore ص = \frac{\text{معامل س مرفوعة لأكبر أس}}{\text{معامل س مرفوعة لنفس أس}} = \frac{٢}{١} = ٢$ خط تقاربي أفقي للدالة

(٣) إذا كانت درجة البسط < درجة المقام فإن خط التقارب الأفقي هو $ص =$ صفراً
ولا يوجد خط تقاربي مائلاً

(٤) إذا كانت درجة البسط > درجة المقام بدرجة واحدة فإن:
خارج قسمة البسط على المقام هو خط تقاربي مائل ولا يوجد خط تقاربي أفقي بشرط أن يكون خارج القسمة مقدار من الدرجة الأولى ، وإذا لم يكن كذلك فليس هناك خط تقاربي مائل أو أفقي .

مثـال عين خطوط التقارب للدالة $د(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٣}{س - ١}$

الحـل $س = ١$ خط تقاربي رأسي للدالة

$ص = س - ٢$ خط تقاربي مائل

لا يوجد خط تقاربي أفقي

التكامل

الدالة الأصلية

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة $ف \subset ح$ فان كل دالة ل تحقق العلاقة $ل'(س) = د(س)$
لكل $س \in ف$ تسمي دالة أصلية أو تكامل أو (معكوس المشتقة) للدالة د على ف .

- إذا كانت الدالة $د'(س)$ تساوي صفر على $[أ ، ب]$ فان د تكون ثابتة في الفترة $[أ ، ب]$
- لتكن الدالة د معرفة على الفترة ف إذا كانت $ل_١$ ، $ل_٢$ دالتين أصليتين للدالة د على الفترة ف فإنه يوجد $ث \in ح$ بحيث :

$$ل_١(س) - ل_٢(س) = ث \qquad \text{لكل } س \in ف$$

قواعد التكامل

① $\int$ ك . ء س = ك س + ث

② $\int$ $س^{ن}$. ء س = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث   نزيد الأس واحد ونقسم على الأس الجديد

③ $\int$ $[د(س)]^{ن}$. دَ(س) ء س = $\frac{[د(س)]^{ن+1}}{ن+1}$ + ث

④ $\int$ $e^{د(س)}$. دَ(س) ء س = $e^{د(س)}$ + ث

⑤ $\int$ $أ^{د(س)}$. دَ(س) ء س = $\frac{أ^{د(س)}}{لو أ}$ + ث

⑥ $\int$ $\frac{دَ(س)}{د(س)}$ ء س = لو |د(س)| + ث

تكاملات الدوال المثلثية

① $\int$ جا أس ء س = − $\frac{1}{أ}$ جتا أس + ث

② $\int$ جتا أس ء س = $\frac{1}{أ}$ جا أس + ث

③ $\int$ $قا^{2}$ أس ء س = $\frac{1}{أ}$ ظا أس + ث

④ $\int$ $قتا^{2}$ أس ء س = − $\frac{1}{أ}$ ظتا أس + ث

⑤ $\int$ قا أس ظا أس ء س = $\frac{1}{أ}$ قا أس + ث

⑥ $\int$ قتا أس ظتا أس ء س = − $\frac{1}{أ}$ قتا أس + ث

أمثلة على قواعد التكامل

اوجد التكاملات التالية

(١) $\int (\text{٦س}^{٢} - \text{٢س} + \sqrt{\text{س}})\, \text{ءس}$

(٢) $\int \text{٣}^{(\text{س}^{٢} - \text{س})} \cdot (\text{٢س} - \text{١})\, \text{ءس}$

(٣) $\int \dfrac{\text{٢س} + \text{٥}}{\text{س}^{٢} + \text{٥س} + \text{٧}}\, \text{ءس}$

الحل (١) $(\text{٦س}^{٢} - \text{٢س} + \text{س}^{\frac{١}{٢}}) = \dfrac{\text{٦س}^{٣}}{\text{٣}} - \dfrac{\text{٢س}^{٢}}{\text{٢}} + \dfrac{\text{٢س}^{\frac{٣}{٢}}}{\text{٣}} + \text{ث}$

$= \text{٢س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \dfrac{\text{٢}\sqrt{\text{س}^{٣}}}{\text{٣}} + \text{ث}$

(٢) نطبق القاعدة رقم (٢) $= \dfrac{\text{٣}^{(\text{س}^{٢} - \text{س})}}{\text{لو ٣}} + \text{ث}$ (لاحظ عدد وعليه أس × مشتقة الأس)

(٣) نطبق القاعدة رقم (٦) $= \text{لو} \,|\text{س}^{٢} + \text{٥س} + \text{٧}| + \text{ث}$ (لاحظ البسط مشتقة المقام)

لاحظ : لا يوجد تكامل $\text{جا}^{٢}\text{س}$ او $\text{جتا}^{٢}\text{س}$ ولكن نستخدم التحويلات

$\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(\text{١} - \text{جتا ٢س})$ ، $\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(\text{١} + \text{جتا ٢س})$

أيضاً نستخدم التحويل : $\text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{١} = \text{قا}^{٢}\text{س}$ ، $\text{ظتا}^{٢}\text{س} + \text{١} = \text{قتا}^{٢}\text{س}$

مثال اوجد التكاملات الآتية

(١) $\int \text{جا ٣س}\, \text{ءس}$ (٢) $\int \text{قا}^{٢}(\text{٢س} + \text{١})\, \text{ءس}$ (٣) $\int (\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{١})\, \text{ءس}$

(٤) $\int (\text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{٣})\, \text{ءس}$ (٥) $\int \text{قا ٧س ظا ٧س}\, \text{ءس}$

الحل

(١) نطبق القاعدة رقم (١) في الدوال المثلثية $\int \text{جا ٣س}\, \text{ءس} = -\frac{١}{٣}\, \text{جتا ٣س} + \text{ث}$

(٢) نطبق القاعدة رقم (٣) في الدوال المثلثية $\int \text{قا}^{٢}(\text{٢س} + \text{١})\, \text{ءس} = \frac{١}{٢}\, \text{ظا} (\text{٢س} + \text{١}) +$

تابع حل المثال السابق

(٣) $\int (\text{جا}^{٢}\text{س} + ١)\,\text{ءس}$ أولاً نستخدم التحويل $\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا } ٢\text{س})$

$$= \int (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا } ٢\text{س} + ١)\,\text{ءس}$$

$$= \int (-\frac{١}{٢}\text{جتا } ٢\text{س} + \frac{٣}{٢})\,\text{ءس}$$

$$= -\frac{١}{٤}\text{جا } ٢\text{س} + \frac{٣}{٢}\text{س} + \text{ث}$$

(٤) $\int (\text{ظا}^{٢}\text{س} + ٣)\,\text{ءس}$ نستخدم التحويل $\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١ = \text{قا}^{٢}\text{س}$

أو $\text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س} - ١$

$$\int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١ + ٣)\,\text{ءس} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢)\,\text{ءس}$$

$$= \text{ظاس} + ٢\text{س} + \text{ث}$$

(٥) نطبق القاعدة رقم (٥) $\int \text{قا } ٧\text{س ظا } ٧\text{س}\,\text{ءس} = \frac{١}{٧}\text{قا } ٧\text{س} + \text{ث}$

تطبيقات التكامل غير المحدودة

التطبيق الهندسي

إذا أعطينا المعادلة : $\text{م} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صَ}$ التي تمثل ميل المماس لمنحنى ما فإن:

$\int \text{م ءس} = \text{د(س)} + \text{ث}$ هو مجموعة المنحنيات التي ميلها م .

ولكي نحصل على منحنى معين من هذه المجموعة ينبغي أن نعين قيمة ثابت التكامل ث وذلك عن طريق اشتراط مرور المنحنى بنقطة معينة .

مثال إذا كان ميل منحنى عند أي نقطة (س ، ص) عليه هو $\text{صَ} = ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥$.

فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (ــ ١ ، ٥) .

الحل معادلة المنحنى :

$$\text{ص} = \int (٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥)\,\text{ءس} = \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٢\text{س}^{٢}}{٢} + ٥\text{س} + \text{ث}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٥\text{س} + \text{ث}$$

تابع حل المثال السابق

س = ـ ١ ، ص = ٥

ولإيجاد ثابت التكامل ث نعوض بالنقطة (ـ ١ ، ٥)

٥ = (ـ ١)^{٣} + (ـ ١)^{٢} + ٥(ـ١) + ث

٥ = ـ ١ + ١ ـ ٥ + ث

ث = ٥ + ١ ـ ١ + ٥ = ١٠

معادلة المنحنى هي : ص = س^{٣} + س^{٢} + ٥س + ١٠

التطبيق الفيزيائي

تذكر من المشتقات : ع = $\frac{ءف}{ءن}$ ، ت = $\frac{ءع}{ءن}$

وكتطبيق تكامل يكون : ف = $\int$ ع ءن ، ع = $\int$ ت ءن

مثال يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ت = ٦ن ـ ٤ حيث ن زمن بالثواني اوجد العلاقة بين السرعة والزمن علماً بأن سرعته بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة كانت ٢١ متراً / ثانية .

الحل السرعة ع = $\int$ ت ءن = $\int$ (٦ن ـ ٤) ءن = $\frac{\cancel{٦}ن^{٢}}{\cancel{٢}}$ ـ ٤ن + ث

ع = ٣ن^{٢} ـ ٤ن + ث

ولتعيين ثابت التكامل ث

ضع ع = ٢١ ، ن = ٣

٢١ = ٣ × ٩ ـ ٤ × ٣ + ث ⟵ ٢١ = ٢٧ ـ ١٢ + ث

ث = ٢١ + ١٢ ـ ٢٧ = ٦

ع = ٣ن^{٢} ـ ٤ن + ٦ (العلاقة بين السرعة والزمن)

التكامل المحدّد

التجزيء المنتظم النوني

إذا قمنا بتجزيء الفترة [أ ، ب] وكانت المسافات بين نقط التجزيء متساوية سمي التجزيء الناتج التجزيء المنتظم النوني للفترة [أ ، ب]

$ت_ن$ (أ ، ب) = ($س_٠$ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$)

الفترة الجزئية الأولى [$س_٠$ ، $س_١$] ، الفترة الجزئية الثانية [$س_١$ ، $س_٢$] وهكذا

طول الفترة Δس $= \frac{ب - أ}{ن}$

$س_ر$ = أ + ر × Δس (منها يمكن إيجاد أي نقطة من نقاط التجزيء)

مثال أوجد التجزيء المنتظم النوني للفترة [٢ ، ٦] ، ثم أوجد $ت_٦$ (٢ ، ٦) .

الحل Δس $= \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٦ - ٢}{ن} = \frac{٤}{ن}$

$ت_ن$ (٢ ، ٦) = (٢ ، ٢ + $\frac{٤}{ن}$ ، ٢ + ٢ × $\frac{٤}{ن}$ ، .... ، ٦)

وضع ن = ٦

$ت_٦$ (٢ ، ٦) = (٢ ، ٢ + $\frac{٤}{٦}$ ، ٢ + ٢ × $\frac{٤}{٦}$ ، ٢ + ٣ × $\frac{٤}{٦}$ ، ٢ + ٤ × $\frac{٤}{٦}$ ، ٢ + ٥ × $\frac{٤}{٦}$ ، ٦)

$ت_٦$ (٢ ، ٦) = (٢ ، ٢$\frac{٢}{٣}$ ، ٣$\frac{١}{٣}$ ، ٤ ، ٤$\frac{٢}{٣}$ ، ٥$\frac{١}{٣}$ ، ٦)

لاحظ : عدد نقاط التجزيء = ن + ١

مجموع ريمان

لتكن د دالة معرفة ومحدودة في [أ ، ب] يعرف مجموع ريمان للدالة د المناظر للتجزيء $ت_ن$ (أ ، ب) بأنه :

$$\sum_{ر = ١}^{ن} د (ج_ر) \cdot \Delta س_ر$$

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

إذا كانت د متصلة على [أ ، ب] فإنه يوجد نقطة $س_٠$ $\in$] أ ، ب [بحيث :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ء س = (ب - أ)\, د(س_٠)$$

مثـال أوجد قيمة س. الذي تحققه نظرية القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{٠}^{٢} (٢س + ١)\, ءس$

الحل $\int_{٠}^{٢} (٢س + ١)\, ءس = (٢ - ٠) \times (٢س. + ١)$

$\left[\frac{٢س^٢}{٢} + س\right]_{٠}^{٢} = ٢ (٢س. + ١)$

$٦ = ٤س. + ٢ \Longleftarrow ٦ - ٢ = ٤س. \Longleftarrow ٤ = ٤س.$

$\Longleftarrow \boxed{س. = ١}$

- إذا كانت الدالة د متصلة على فترة فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة .

بعض خواص التكامل المحدد

(١) $\int_{أ}^{ب} ك\, د(س)\, ءس = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ حيث $ك \in ح$

(٢) $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = - \int_{ب}^{أ} د(س)\, ءس$

(٣) $\int_{أ}^{أ} د(س)\, ءس = صفر$

(٤) $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\, ءس + \int_{جـ}^{ب} د(س)\, ءس$ حيث $جـ \in [أ ، ب]$

- إذا كانت الدالة د(س) متصلة على [أ ، ب] وكانت ي هي الدالة المعرفة بواسطة :

$ي(س) = \int_{أ}^{س} د(ع)\, ءع$ لكل $س \in [أ ، ب]$ فأن $\frac{ء}{ءس} ي(س) = د(س)$

- إذا كانت الدالة د متصلة في [أ ، ب] وكانت ل دالة أصلية للدالة د على [أ ، ب]

فأن : $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = ل(ب) - ل(أ)$

لاحظ : $\frac{ء}{ءس} \int د(س) ءس = د(س)$ ، $\frac{ء}{ءس} \int_{أ}^{ب} د(س) ءس = صفر$

الدالة الأصلية للدالة الأسية

(منهج البنات)
e الأساس الطبيعي نفسه هـ

- $\int e^{س} ءس = e^{س} + ث$
- $\int e^{أس + ب} ءس = \frac{1}{أ} \times e^{أس + ب} + ث$
- $\int e^{د(س)} \cdot دَ(س) ءس = e^{د(س)} + ث$
- $\int أ^{ب س} ءس = \frac{أ^{ب س}}{ب لو أ} + ث$
- $\int أ^{ب س + جـ} ءس = \frac{أ^{ب س + جـ}}{ب لو أ} + ث$
- $\int أ^{ب س + جـ} ءس = \frac{أ^{ب س + جـ}}{ب لو أ} + ث$

لاحظ أن : $\int \frac{1}{س} ءس = لو|س| + ث$ • $\int \frac{دَ(س)}{د(س)} ءس = لو|د(س)| + ث$

مثال (١) اوجد التكاملات الآتية

① $\int e^{جاس} . جتا س ءس$ ② $\int e^{٣س + ٢} . ءس$

الحل ① $\int e^{جاس} . جتاس ءس = e^{جاس} + ث$ (لاحظ مشتقة جا س = جتا س)

② $\int e^{٣س + ٢} . ءس = \frac{1}{٣} \times e^{٣س + ٢} + ث$

مثال (٢) اوجد $\int_{١}^{٢} e^{لو(س + ٢)} \, ءس$

الحل

$e^{لو\, د(س)} = د(س)$

لاحظ

$e^{لو(س + ٢)} = س + ٢$

$$\int_{١}^{٢} e^{لو(س + ٢)} \, ءس = \int_{١}^{٢} (س + ٢) \, ءس = \left[\frac{س^{٢}}{٢} + ٢س \right]_{١}^{٢} = ٢ + ٤ = ٦$$

مثال (٣) اوجد التكاملات الآتية

① $\int (٢)^{٣س} \, ءس$ ② $\int \frac{١}{س + ٥} \, ءس$ ③ $\int \frac{جتا ٣س}{٥ + جا ٣س} \, ءس$

الحل

① $\int (٢)^{٣س} \, ءس = \frac{(٢)^{٣س}}{٣ \, لو ٢} + ث$

② $\int \frac{١}{س + ٥} \, ءس = لو|س + ٥| + ث$ (البسط هو مشتقة المقام)

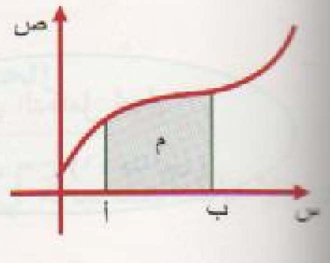
③ نحاول أولاً أن نجعل البسط هو مشتقة المقام $\frac{١}{٣} \int \frac{٣ جتا ٣س}{٥ + جا ٣س} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} لو|٥ + جا ٣س| + ث$

تطبيقات حساب التكامل المحدد

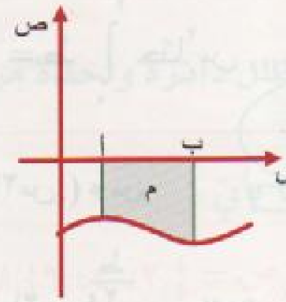
ولاً : مساحات بعض المناطق المستوية

لتكن د دالة معرفة ومحدودة على [أ ، ب] فان :



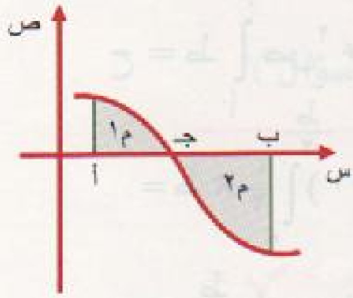
ساحة $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س}$

(حنى بأكمله فوق محور السينات)



المساحة $\text{م} = - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س}$

(المنحنى بأكمله تحت محور السينات)



المساحة $\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س) ء س} - \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س}$$

(المنحنى جزء منه فوق محور السينات وجزء تحت محور السينات)

بصفة عامة : فأن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = د(س) والمحور السيني والمستقيمين س = أ ، س = ب هي : $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{د(س)}| \text{ ء س}$

نيا : حجوم الأجسام الدورانية

إذا كان ح يساوي الحجم الحاصل من دورات المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص= د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات فأن هذه الحجم يعطى بالقانون : $\text{ح} = \text{ط} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{ د(س) }]^2 \text{ ء س}$

مثال (١) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = د(س) = س^2 ، ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ .

الحل الدالة د (س) = س^2 تقع بأكملها فوق محور السينات المساحة $\text{م} = \int_{0}^{3} \text{س}^2 \text{ ء س}$

$$= \left[\frac{\text{س}^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{0}{3} = 9 - 0 = 9$$ وحدات مربعة .

مثـال (٢) اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية الواقعة تحت المنحنى ص = د(س) = جتا س ، وفوق $[\,٠ ، \frac{ط}{٢}\,]$ دورة كاملة حول محور السينات .

الحـل

$$ح = ط \int_{أ}^{ب} ص^{٢}\, ءس = ط \int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} جتا^{٢}س$$

في التكامل نحول

$جتا^{٢}س = \frac{١}{٢}(١ + جتا٢س)$

$$= ط \times \frac{١}{٢} \int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} (\,١ + جتا٢س\,)\, ءس$$

$$= \frac{ط}{٢} \left[\, س + \frac{١}{٢}\, جا٢س \,\right]_{٠}^{\frac{ط}{٢}}$$

لاحظ $٢ \times \frac{ط}{٢} = ط = ١٨٠^{\circ}$

$$= \frac{ط}{٢} \left[\, \frac{ط}{٢} + \frac{١}{٢}\, جا١٨٠^{\circ} - ٠ + \frac{١}{٢}\, جا٠^{\circ} \,\right]$$

$$= \frac{ط}{٢} \left[\, \frac{ط}{٢} + \frac{١}{٢} \times ٠ \,\right] = \frac{ط}{٢} \times \frac{ط}{٢} = \frac{ط^{٢}}{٤}$$ وحدة مكعبة

تطبيقات على الميكانيك

تذكر

ف الإزاحة

ع السرعة

ت التسارع

اشتقاق

تكامل

مثـال يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب القانون ع (ن) = ٤ن + ٣ حيث ع(ن) تمثل السرعة متر/ ث اوجد إزاحة الجسيم من : ن = صفر إلى ن = ٢ .

$$\text{الإزاحة}\quad ف(ن) = \int_{٠}^{٣} ع(ن)\, ءن$$

$$= \int_{٠}^{٣} (\,٤ن + ٣\,)\, ءن$$

$$= \left[\, \frac{٤ن^{٢}}{٢} + ٣ن \,\right]_{٠}^{٢} = \left[\, ٢ن^{٢} + ٣ن \,\right]_{٠}^{٢}$$

$$= (\,٨ + ٦\,) - (\,٠ + ٠\,)$$

$$= ١٤ \quad \text{متر}$$

نموذج (الاختبار الأول)

الحل : (ظلل دائرة واحدة من كل سؤال)

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

١ إذا كانت س = {١، ٢، ٣} ، ص = { ٢، ٤، ٦} فإن س - ص =

أ { ٢ }　　ب {١، ٣}　　ج {٤، ٦}　　د {١، ٢، ٣، ٤، ٦}

٢ لو (٢ × ب) =

أ لو ٢ × لوب　　ب لو (٢ + ب)　　ج لو ٢ + لوب　　د لو ٢ - لوب

٣ إذا كان ر: ص ← ص بحيث ر(س) = ٢س + ١ فإن ر(٢)=

أ ٣　　ب ٤　　ج ٥　　د ٦

٤ المضلع المطابق لأحد مضلعين متشابهين ...... المضلع الآخر

أ يشابه　　ب يطابق　　ج يتناسب　　د يخالف

٥ $|\sqrt{٥} - ٢| =$

أ $-\sqrt{٥} - ٢$　　ب $-\sqrt{٥} + ٢$　　ج $\sqrt{٥} - ٢$　　د $٢ - \sqrt{٥}$

٦ إذا كان طولا ضلعين في مثلث ٣سم، ٤سم فإن طول الضلع الثالث ينتمي للفترة

أ (٣، ٤)　　ب (١، ٧)　　ج]١، ٧[　　د]٣، ٤[

٧ إذا كانت س مصفوفة من النوع ٢ × ٣ فإن عدد عناصرها

أ ٢　　ب ٣　　ج ٥　　د ٦

٨ إذا كان ع = ٤ + ٣ت فإن | ع | =

أ ٣　　ب ٤　　ج ٥　　د $\sqrt{٧}$

٩ $ت^{٣٢} =$

أ ١　　ب -١　　ج ت　　د - ت

١٠٠ $\binom{٨}{٢} =$

(أ) ٤ (ب) ١٠ (ج) ٢٨ (د) ٥٦

١٠١ عدد حدود مفكوك $(أ + ب)^{٦}$ هو ..... حدود

(أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ٥

١٠٢ قطعة مستقيمة طولها ٨سم وتوازي المستوى س فإن طول مسقطها على س=

(أ) ٨سم (ب) ٠ (ج) $٨\sqrt{٣}$سم (د) ١٦ سم

١٠٣ جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون ....

(أ) متتامة (ب) متكاملة (ج) متطابقة (د) مجموعها ١٢٠°

١٠٤ في النظام $(ص_{٤}، \oplus)$ يكون $١ \oplus ٣ =$

(أ) ٤ (ب) ١ (ج) ٣ (د) صفر

١٠٥ مسجد له ٥ أبواب فإن عدد الطرق المختلفة للدخول والخروج من بابين مختلفين يساوي

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ٢٠

١٠٦ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{س} =$ (حيث س مقيسة بالتقدير الدائري)

(أ) ٣ (ب) صفر (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) ∞

١٠٧ إذا كان $\int_{٠}^{٢} د(س)\, ء س = ٤$ ، $\int_{٢}^{٣} ٢\, د(س)\, ء س = ٤$ فإن $\int^{٣} د(س)\, ء س =$

(أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) صفر

١٠٨ إذا كانت د دالة زوجية فإن المنحنى البياني لها يكون متناظر حول

(أ) نقطة الأصل (ب) محور السينات (ج) محور الصادات (د) المستقيم ص = س

١٠٩ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} =$

(أ) ∞ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

١١٠ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٥}{٢س^{٢} + ٣} =$

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٥}{٣}$ (ج) صفر (د) ∞

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية جـ = $\sum_{ن=1}^{\infty}$ ٩ ر$^{ن-1}$ تكون متقاربة إذا كان

(أ) |ر| = ١ (ب) |ر| < ١ (ج) |ر| > ١ (د) |ر| ⩽ ١

بنات فقط

[١,٧] =

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ١٧

إذا كان $\int_{1}^{4}$ د(س)ء س = ١١ فإن $\int_{4}^{1}$ د(س)ء س = حيث د(س) دالة قابلة للتكامل

(أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ١٧ (د) -١١

إذا كانت ع هي سرعة تحرك جسيم فإن ∫ ع. ءن = (حيث ف المسافة، ت التسارع)

(أ) ف + ث (ب) ت + ث (ج) ع + ث (د) ن + ث

إذا كانت دَ (س) > صفر عندما س > ٩ فإن الدالة في (٩، ∞) تكون

(أ) مقعرة لأسفل (ب) مقعرة لأعلى (ج) تزايدية (د) تناقصية

د(س) = جاس فإن المشتقة الرابعة للدالة هي

(أ) جتاس (ب) - جتاس (ج) جاس (د) – جاس

القطع المكافئ الذي معادلته (ص -٢)^{2} = ٨ (س -١) رأسه هو

(أ) (١، ٢) (ب) (٢، ١) (ج) (-١، ٢) (د) (-٢، ١)

معادلتي الخطين المقاربين للقطع الزائد $\frac{س^{2}}{١٦} - \frac{ص^{2}}{٩} = ١$ هما

(أ) ص = ± $\frac{٤}{٣}$ س (ب) ص = ± $\frac{٣}{٤}$ س (ج) س = ± $\frac{٤}{٥}$ ص (د) س = ± $\frac{٣}{٤}$ ص

المعادلة س^{2} – ٤ص = ٨ تمثل معادلة

(أ) دائرة (ب) قطع زائد (ج) قطع ناقص (د) قطع مكافئ

طويت ورقة مستطيلة أبعادها ١٠سم، ٢٠سم فشكلت اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠سم فإن مساحتها الجانبية =

بنين فقط

(أ) ١٠٠سم^{2} (ب) ٤٠٠سم^{2} (ج) ٣٠سم^{2} (د) ٢٠٠سم^{2}

مفاتيح الإجابة

	أ	ب	ج	د
١	أ	**ب**	ج	د
٢	أ	ب	**ج**	د
٣	أ	ب	**ج**	د
٤	**أ**	ب	ج	د
٥	أ	ب	**ج**	د
٦	أ	**ب**	ج	د
٧	أ	ب	ج	**د**
٨	أ	ب	**ج**	د
٩	**أ**	ب	ج	د
١٠	أ	ب	**ج**	د
١١	أ	**ب**	ج	د
١٢	**أ**	ب	ج	د
١٣	أ	ب	**ج**	د
١٤	أ	ب	ج	**د**
١٥	أ	ب	ج	**د**

	أ	ب	ج	د
١٦	**أ**	ب	ج	د
١٧	أ	**ب**	ج	د
١٨	أ	ب	**ج**	د
١٩	أ	ب	ج	**د**
٢٠	**أ**	ب	ج	د
٢١	أ	ب	**ج**	د
٢٢	**أ**	ب	ج	د
٢٣	أ	ب	ج	**د**
٢٤	أ	**ب**	ج	د
٢٥	أ	**ب**	ج	د
٢٦	أ	ب	**ج**	د
٢٧	**أ**	ب	ج	د
٢٨	أ	**ب**	ج	د
٢٩	أ	ب	ج	**د**
٣٠	أ	ب	ج	**د**

نموذج (الاختبار الثاني)

الحل : (ظلل دائرة واحدة من كل سؤال)

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

إذا كانت المجموعة ش = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، س = { ٢، ٤ ، ٦ } فإنّ سَ =

(أ) { ٣ ، ٥ }   (ب) { ٢، ٤، ٦ }   (ج) ش   (د) ∅

حل المعادلة : لو$_{س}$ ٣٢ = ٥ هو س =

(أ) ١   (ب) ٢   (ج) ٥   (د) ٣٢

مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٤ : ٩ فإنّ نسبة مساحتيهما

(أ) ٤ : ٩   (ب) ٢ : ٣   (ج) ١٦ : ٨١   (د) ٤ : ٥

إذا كانت أ = (٢ ، ٣) ، ب = (- ١ ، - ١) فإنّ | أ ب | =

(أ) ٢   (ب) ٣   (ج) ٤   (د) ٥

الفئة المنوالية في الجدول التكراري هي

(أ) الفئة التي تقابل أصغر تكرار   (ب) الفئة التي تقابل أكبر تكرار

(ج) الفئة التي توجد في نهاية الجدول   (د) الفئة التي تتوسط الجدول

جا^{٢} ٢٠° + جتا^{٢} ٢٠° =

(أ) ٤٠   (ب) ٤٠٠   (ج) ١   (د) ١٠

المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ س & ٦ \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي عندما س =

(أ) ٤   (ب) ١٢   (ج) ٦   (د) - ٦

إذا كان : ن ! = ٧٢٠ فان : ن =

(أ) ٣   (ب) ٤   (ج) ٥   (د) ٦

في أي فضاء عينة يكون احتمال الحادثة المستحيلة مساوياً

(أ) ١   (ب) صفر   (ج) - ١   (د) $\frac{١}{٢}$

١٠٠ الدالة التي تمثل كثيرة حدود من الدوال المعطاة هي

(أ) $٥س^{٢} + ٢س^{٠.٥} - ١$ (ب) $-\frac{١}{٢}س^{٣} + ٧س + ٢$ (ج) $٣س^{٢-} + ٨س + ٧$ (د) $\frac{س^{٢} + ٧}{س} - ١$

١٠١ إذا كانت د(س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، هـ(س) كثيرة حدود من الدرجة الثانية فإنّ د(س)•هـ(س)

(أ) الخامسة (ب) الأولى (ج) السادسة (د) الرابعة

١٠٢ متوازى مستطيلات أبعاده : ٣سم ، ٤سم ، ١٢سم ، فإنّ طول قطره = ... سم

(أ) ١٩ (ب) ب ٥ (ج) ١٣ (د) ١٦

١٠٣ أي مستقيمين عموديين على مستوٍ واحد

(أ) متوازيان (ب) متعامدان (ج) متقاطعان (د) متخالفان

١٠٤ < ١ > في النظام (ص، ، ⊕) هي

(أ) { ١ } (ب) { ١، ٢ } (ج) { ١، ٢، ٣ } (د) { ٠، ١، ٢، ٣ }

١٠٥ إذا كان ع = ٣(جتا٩٠° + ت جا٩٠°) فإنّ $ع^{٢}$ =

(أ) ٩ (ب) ـ ٩ (ج) ٩ ت (د) ـ ٩ ت

١٠٦ مجال د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ١}$ هو

(أ) [-١، ١] (ب) (-∞، -١]∪[١، ∞) (ج) ح - [-١، ١] (د) ح

١٠٧ $\lim_{س \to \infty} \frac{٧}{س}$ جا ٣س =

(أ) ٧ (ب) صفر (ج) ٣ (د) ∞

١٠٨ الدالة د(س) = $س^{٢}$ جا س دالة

(أ) زوجية (ب) محدودة (ج) فردية (د) لا زوجية ولا فردية

١٠٩ إذا كان ٣١٢٥٠ هو أحد حدود المتتابعة (٢ ، ١٠ ، ٥٠ ، ....) فإنّ رتبته هي

(أ) ٧ (ب) ٨ (ج) ٩ (د) ١٠

١١٠ بؤرة القطع المكافئ $(س - ٣)^{٢} = ٨(ص - ٤)$ هي

(أ) (٣ ، ٤) (ب) (٣ ، ٨) (ج) (٣ ، ٦) (د) (٨ ، ٣)

٢١ المعادلة ٩ س^{٢} ـ ١٦ ص^{٢} ـ ٣٦ س + ٣٢ ص ـ ١٢٤ = ٠ تمثل معادلة

(أ) دائرة (ب) قطع مكافئ (ج) قطع ناقص (د) قطع زائد

٢٢ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{جا ٢س + ظا ٣س}{س}$ = (س مقيسة بالتقدير الدائري)

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٢ (د) ٣

٢٣ تتحرك نقطة على المنحنى ص = س^{٢} فإنّ الموضع الذي يكون عنده معدل التغير في الاحداثي السيني مساوياً معدل التغير في الاحداثي الصادي هو

(أ) (١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠) (ج) $(\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢})$ (د) $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$

٢٤ إذا كانت ص = جتا ٢س ، فإنّ دً ($\frac{ط}{٤}$) =

(أ) ٧ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٠

٢٥ معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} عند س = ١ هي

(أ) ص ـ ٢س = ـ ١ (ب) ص ـ ٢س = ١ (ج) ص ـ س = ٢ (د) ص ـ س = ـ ١

٢٦ أول حد سالب في المتتابعة (٥٧ ، ٥٠ ، ٤٣ ، ....) هو

(أ) ح$_{٨}$ (ب) ح$_{٩}$ (ج) ح$_{١٠}$ (د) ح$_{١١}$

٢٧ هرم رباعي قائم ارتفاعه ٣ سم وطول ضلع قاعدته ٨ سم فإنّ ارتفاعه الجانبي = بنين فقط

(أ) ١٣ سم (ب) ٨ سم (ج) ٤ سم (د) ٥ سم

٢٨ منشور ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه ١٠ سم فإنّ حجمه = بنين فقط

(أ) ٢١١ سم^{٣} (ب) ٥١٢ سم^{٣} (ج) ٩٠ $\sqrt{٣}$ سم^{٣} (د) ٣٠ ط سم^{٣}

٢٩ | ـ٣,٣| = بنات فقط

(أ) ـ٤ (ب) ـ ٣ (ج) ٣,٣ (د) ٣

٣٠ للدالة ص = $\frac{٢ س + ٣}{س ـ ١}$ معادلة خط التقارب الرأسي هي بنات فقط

(أ) ص = ١ (ب) ص = $\frac{-٣}{٢}$ (ج) س = ١ (د) س = $\frac{-٣}{٢}$

مفاتيح الإجابة

١	●	ب	ج	د
٢	أ	●	ج	د
٣	أ	ب	●	د
٤	أ	ب	ج	●
٥	أ	●	ج	د
٦	أ	ب	●	د
٧	●	ب	ج	د
٨	أ	ب	ج	●
٩	أ	●	ج	د
١٠	أ	●	ج	د
١١	●	ب	ج	د
١٢	أ	ب	●	د
١٣	●	ب	ج	د
١٤	أ	ب	ج	●
١٥	أ	●	ج	د

١٦	أ	ب	ج	●
١٧	أ	●	ج	د
١٨	أ	ب	●	د
١٩	●	ب	ج	د
٢٠	أ	ب	●	د
٢١	أ	ب	ج	●
٢٢	●	ب	ج	د
٢٣	أ	ب	●	د
٢٤	أ	ب	ج	●
٢٥	●	ب	ج	د
٢٦	أ	ب	●	د
٢٧	أ	ب	ج	●
٢٨	أ	ب	●	د
٢٩	●	ب	ج	د
٣٠	أ	ب	●	د

نموذج (الاختبار الثالث)

الحل : (ظلل دائرة واحدة من كل سؤال)

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1. إذا كان التطبيق ر: ح ← ح معرفاً بالقاعدة ر(س)= ٢س – ٣ فإنّ $ر^{-١}$(١) =

أ) ٢ ب) -٢ ج) ١ د) -١

2. طول العامد لمثلث متطابق الأضلاع مرسوم داخل دائرة قطرها ٨ سم يساوي

أ) ٢ ب) ٤ ج) $٢\sqrt{٣}$ د) $٤\sqrt{٣}$

3. الوسيط للأعداد ٣ ، ٧ ، ١١ ، ٥ ، ٩ هو

أ) ٣ ب) ٥ ج) ٧ د) ٩

4. مجموعة حل المتباينة | س – ١ | < ٣ هي

أ) { ٤ } ب) (-٢ ، ٤) ج) [-٢ ، ٤] د) (-∞ ، -٢)∪(٤ ، ∞)

5. قياس زاوية الخماسي المنتظم =

أ) ٩٠° ب) ١٢٠° ج) ١٥٠° د) ١٠٨°

6. $\sqrt{٨} - \sqrt{٢} =$

أ) ٢ ب) $\sqrt{٢}$ ج) $\sqrt{٦}$ د) ٤

7. إذا كانت * عملية ثنائية معرفة بالقاعدة س * ص = ٣س ص فإنّ العنصر المحايد لهذه العملية هو

أ) ٣ ب) -٣ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{-١}{٣}$

8. $ت^{١٠٠}$

أ) ١ ب) -١ ج) ت د) -ت

9. إذا كان $\overleftarrow{أب} = [\begin{smallmatrix}٨\\٢\end{smallmatrix}]$ ، $\overleftarrow{جـد}$ = ك $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ وكان $\overleftarrow{أب}$ // $\overleftarrow{جـد}$ فإنّ ك =

أ) ١٢ ب) ٢ ج) ٦ د) ٨

١٠٠ في مفكوك $(س + ١)^{٦}$ يكون $ح_{٥}$ =

أ) $٣٠ س^{٢}$ ب) $٣٠ س^{٣}$ ج) $١٥ س^{٢}$ د) $١٥ س^{٣}$

١٠١ مركز الدائرة التي معادلتها $(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٣٦$ هو

أ) (٦ ، ٦) ب) (−٦ ، ٦) ج) (−٣ ، ١) د) (٣ ، −١)

١٠٢ إذا وازى كل من مستقيمين في الفراغ مستقيماً ثالثاً فالمستقيمان

أ) متوازيان ب) متعامدان ج) متقاطعان د) متخالفان

١٠٣ إذا كان أ ، ب حدثان مستقلان وكان ح (أ) = ٠,٣ ، ح (ب) = ٠,٤ فإنّ ح (أ ∩ ب) =

أ) ٠,٧ ب) ٠,١ ج) ١,٢ د) ٠,١٢

١٠٤ جتا ٥٠° جتا ١٠° − جا ٥٠° جا ١٠° =

أ) جتا ٤٠° ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

١٠٥ مثلث أ ب جـ الذي فيه أ = ٨ سم ، ب = ٦سم ، جـ = ٣٠° فإنّ مساحة المثلث أ ب جـ = ...سم^{٢}

أ) ١٢ ب) ٢٤ ج) ٤٨ د) ٩٦

١٠٦ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٥ س + ٦}$

أ) ٥ ب) −٥ ج) ٦ د) −٦

١٠٧ إذا كانت الدالة د(س) = ٣ س + ١ محدودة في الفترة [١ ، ٢] فإنّ مداها

أ) [٤ ، ٧] ب) (٤ ، ٧) ج) [٥ ، ٦] د) (٥ ، ٦)

١٠٨ للقطع الناقص $٩ س^{٢} + ١٦ ص^{٢} = ١٤٤$ يكون طول المحور الأكبر مساوياً

أ) ٩ وحدات ب) ١٦ وحدة ج) ٦ وحدات د) ٨ وحدات

١٠٩ النقطة (٢ ، ٨) نقطة انقلاب للمنحنى د(س) = $س^{٣} + ك س^{٢} + ١٢ س$ فإنّ ك =

أ) −٦ ب) ٦ ج) ١٢ د) −١٢

١١٠ إذا كانت د(س) = $س^{٢} + ك س + ٦$ تحقق نظرية رول في [١ ، ٤] فإنّ ك =

أ) ٦ ب) −٦ ج) ٥ د) −٥

$\int$ ظا س قا^2 س ء س =

(أ) قا^2 س + ث (ب) $\frac{1}{2}$ ظا^2 س + ث (ج) ظتا س + ث (د) ظا س + ث

$\int_{2}^{2}$ (س^2 + ٣ س + ١)^3 ء س =

(أ) ١٢١ (ب) ١١ (ج) صفر (د) ١٠

حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س ومحور السينات على [٠ ، ٢] يساوي

(أ) $\frac{٨ ط}{٣}$ (ب) ٨ ط (ج) ٢ ط (د) ٤ ط

إذا كان : ص = جا ٢س فإنّ ٤(ص$'$)^2 − (ص$''$)^2 =

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (ج) ٤ (د) صفر

متتابعة هندسية لانهائية حدها الأول ٣ وأساسها $\frac{1}{4}$ فإنّ مجموعها يساوي

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

الأوساط الحسابية الثلاثة بين ٣ ، ٢٣ هي

(أ) ٧ ، ١٢ ، ١٧ (ب) ٨ ، ١٣ ، ١٨ (ج) ٩ ، ١٤ ، ١٩ (د) ٦ ، ١٢ ، ١٨

مساحة كرة قطرها ١٤ سم = بنين فقط

(أ) ١٥٤ سم^2 (ب) ٣٠٨ سم^2 (ج) ٦١٦ سم^2 (د) ٨٠٣ سم^2

مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ سم وطول راسمه ٥ سم فإن حجمه = بنين فقط

(أ) ٢١ ط سم^3 (ب) ١٢ ط سم^3 (ج) ١٢٢ ط سم^3 (د) ٣٠ ط سم^3

معادلة خط التقارب الأفقي للدالة ص = $\frac{٣ س - ١}{س - ٢}$ بنات فقط

(أ) ص = ٣ (ب) س = ٢ (ج) ص = ٢ (د) س = $\frac{1}{3}$

إذا كانت : د(س) المراد تكاملها تشمل على $\sqrt{ب^2 + أ^2 س^2}$ في البسط أو المقام أو ب^2 + أ^2 س^2 في المقام فإنّ التعويض المناسب لهذا التكامل هو بنات فقط

(أ) س = $\frac{ب}{أ}$ جا ص (ب) س = $\frac{أ}{ب}$ جا ص (ج) س = $\frac{ب}{أ}$ ظا ص (د) س = $\frac{ب}{أ}$ قا ص

مفاتيح الإجابة

١	●	ب	ج	د
٢	أ	●	ج	د
٣	أ	ب	●	د
٤	أ	●	ج	د
٥	أ	ب	ج	●
٦	أ	●	ج	د
٧	أ	ب	●	د
٨	●	ب	ج	د
٩	●	ب	ج	د
١٠	أ	ب	●	د
١١	أ	ب	ج	●
١٢	●	ب	ج	د
١٣	أ	ب	ج	●
١٤	أ	●	ج	د
١٥	●	ب	ج	د

١٦	أ	ب	●	د
١٧	●	ب	ج	د
١٨	أ	ب	ج	●
١٩	●	ب	ج	د
٢٠	أ	ب	ج	●
٢١	أ	●	ج	د
٢٢	أ	ب	●	د
٢٣	●	ب	ج	د
٢٤	أ	ب	ج	●
٢٥	أ	ب	●	د
٢٦	أ	●	ج	د
٢٧	أ	ب	●	د
٢٨	أ	●	ج	د
٢٩	●	ب	ج	د
٣٠	أ	●	ج	د

نموذج (الاختبار الرابع)

الحل : (ظلل دائرة واحدة من كل سؤال)

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١) $٤^{\frac{٣}{٢}} =$

(أ) ٦٤ (ب) ١٦ (ج) ٨ (د) ٢

٢) مميز المعادلة : $س^٢ - س - ١ =$ صفر يساوي

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٣ (د) صفر

٣) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} جا٩٠^\circ & جتا٩٠^\circ \\ جا٣٠^\circ & ظا٤٥^\circ \end{vmatrix} =$

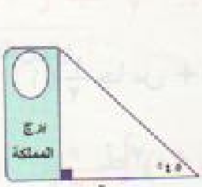
(أ) ـ١ (ب) صفر (ج) ٢ (د) ١

٤) مضلع محدب مجموع زواياه = ١٨٠٠° فإنّ عدد أضلاعه يساوي

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) ٩

٥) لأي زاووية موجهة س إذا كان : $ظا^٢ س = ٣$ فإنّ $قا^٢ س =$

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٥



٦) إذا كان طول ظل برج المملكة يساوي ٢٠٠م فأن ارتفاع البرج =

(أ) ٢٠٠م (ب) ١٠٠م (ج) ١٥٠م (د) ٥٠م

٧) التظير الضربي المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ هو المصفوفة

(أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix}$ (د) غير موجود

٨) إذا كانت ⊗ عملية ثنائية معرفة على ⊗ كما يلي $أ ⊗ ب = أ^٢ + ب^٢ - أ$ فإنّ $٣ ⊗ ٤ =$

(أ) ٧ (ب) ١٢ (ج) ٢٥ (د) ٢٢

٩) $\frac{ت^٤ + ٤ت + ت^{٢٢}}{٢ - ت - ٢ت^٢ - ت^٣} =$

(أ) ١ (ب) ت (ج) ـ١ (د) ـت

١٠٠ كم عدداً يتكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من عناصر المجموعة { ١،٢،٣،٤،٥}

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٦٠ (د) ١٢٠

١٠١ مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٩ = صفر في ك هي

(أ) {٣ت ، ـ٣ت} (ب) {٣ ، ـ٣} (ج) {٣ت} (د) $\varnothing$

١٠٢ إذا كانت س = {٢ ، ٤ ، ٦، ٨} فإنّ: ن (ق (س)) =

(أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) ١٦

١٠٣ إذا كان إحتمال سفر خالد $\frac{٢}{١٠}$ وإحتمال نجاح سعد $\frac{٦}{١٠}$ فإنّ إحتمال عدم سفر خالد وعدم نجاح سعد يساوي

(أ) $\frac{٣٢}{١٠٠}$ (ب) $\frac{١٢}{١٠٠}$ (ج) $\frac{٨}{١٠٠}$ (د) $\frac{٤٨}{١٠٠}$

١٠٤ $\binom{١٠٠٠}{٩٩٩}$ =

(أ) ١ (ب) ٩٩٩ (ج) ١٠٠٠ (د) ١٩٩٩

١٠٥ إذا كان $\binom{ك}{٢}$ = ١٠ فإنّ ك =

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ١٣

١٠٦ إذا كانت د(س) = س^{٢} ـ ٢ س ، س ∈ [ـ٢ ، ٣] فإنّ القيمة العظمى المطلقة للدالة هي

(أ) ٣ (ب) ٨ (ج) ١ (د) ـ ١

١٠٧ ∫ جا $\frac{س}{٢}$ جتا $\frac{س}{٢}$ ءس =

(أ) $\frac{١}{٢}$ جا س + ث (ب) $\frac{١}{٢}$ جتا س + ث (ج) ـ $\frac{١}{٢}$ جا س + ث (د) ـ $\frac{١}{٢}$ جتا س + ث

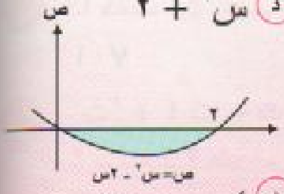
١٠٨ $\frac{ء}{ءس}$ ∫ (٢ س + ٣) ءس =

(أ) س^{٢} + ٣ س (ب) س^{٢} + ٣ س + ث (ج) ٢ س + ٣ (د) ٢

١٠٩ إذا كان : ص = ع^{٢} + ١ ، ع = $\sqrt{س^{٢} - ١}$ فإنّ $\frac{ءص}{ءس}$ =

(أ) ٢ س (ب) ٢ ع (ج) س^{٢} (د) س^{٢} + ٢

١١٠ مساحة المنطقة المظللة في الشكل المرسوم تساوي .... وحدة مربعة



(أ) ٨ (ب) ١٢ (ج) $\frac{٤}{٣}$ (د) ٤

٢١ إذا كان : $د(س) = س^٢ . ر(س)$ ، $ر(٣) = ٦$ ، $رَ(٣) = ٥$ فإنّ $دَ(٣) =$

(أ) ١١ (ب) ٣٦ (ج) ٤٥ (د) ٨١

٢٢ إذا كانت $د(س) = جا\ س$ فإنّ $دً(س) + د(س) =$

(أ) $جا^٢ س$ (ب) ١ (ج) صفر (د) -١

٢٣ معادلة القطع الناقص الذي نهايتا محوره الأكبر (٠ ، ± ٣) وبعده البؤري ٤ وحدات هي

(أ) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٥} = ١$ (ب) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$ (ج) $\frac{ص^٢}{٩} + \frac{س^٢}{٤} = ١$ (د) $\frac{ص^٢}{٩} + \frac{س^٢}{٥} = ١$

٢٤ إذا كانت $ص = لو\ س^٢$ ، فإنّ $صَ =$

(أ) $\frac{٢}{س}$ (ب) $\frac{٢}{س^٢}$ (ج) ٢ س (د) $س^٢$

٢٥ دالة الجيب $د(س) = جا\ س$ دالة دورية ودورها

(أ) ط (ب) $\frac{ط}{٢}$ (ج) $\frac{٢ط}{٣}$ (د) ٢ ط

٢٦ مجموع حدود المتتابعة الحسابية التي حدها الأول ٣ وحدها الأخير ٢١ وعددد حدودها ١٠ يساوي

(أ) ٦٣٠ (ب) ٤٨٠ (ج) ١٢٠ (د) ٥١

٢٧ المساحة الجانبية لهرم رباعي قائم ٦٠ $سم^٢$ وطول ضلع قاعدته ٦ سم فإنّ ارتفاعه = **بنين فقط**

(أ) ٦ سم (ب) ٥ سم (ج) ٤ سم (د) ١٠ سم

٢٨ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وطول راسمه ١٠ سم فإنّ حجمه =...... $سم^٣$ **بنين فقط**

(أ) ٧٢ ط (ب) ٩٦ ط (ج) ١٤٤ ط (د) ٢٠٠ط

٢٩ $\int \sqrt{ب^٢ - أ^٢ س^٢}\ ءس$ التعويض المناسب لهذا التكامل هو **بنات فقط**

(أ) $س = \frac{ب}{أ} جا\ ص$ (ب) $س = \frac{أ}{ب} جا\ ص$ (ج) $س = \frac{ب}{أ} قا\ ص$ (د) $س = \frac{ب}{أ} ظا\ ص$

٣٠ للدالة $ص = \frac{س^٢ - ٤}{س}$ معادلة الخط التقاربي المائل هي **بنات فقط**

(أ) $ص = س - ٤$ (ب) $ص = -س$ (ج) $ص = س$ (د) $ص = -٤$

مفاتيح الإجابة

١	أ	ب	●	د
٢	●	ب	ج	د
٣	أ	ب	ج	●
٤	أ	ب	●	د
٥	أ	●	ج	د
٦	●	ب	ج	د
٧	أ	ب	●	د
٨	أ	ب	ج	●
٩	●	ب	ج	د
١٠	أ	ب	●	د
١١	●	ب	ج	د
١٢	أ	ب	ج	●
١٣	●	ب	ج	د
١٤	أ	ب	●	د
١٥	أ	●	ج	د

١٦	أ	●	ج	د
١٧	أ	ب	ج	●
١٨	أ	ب	●	د
١٩	●	ب	ج	د
٢٠	أ	ب	●	د
٢١	أ	ب	ج	●
٢٢	أ	ب	●	د
٢٣	أ	ب	ج	●
٢٤	●	ب	ج	د
٢٥	أ	ب	ج	●
٢٦	أ	ب	●	د
٢٧	أ	ب	●	د
٢٨	أ	●	ج	د
٢٩	●	ب	ج	د
٣٠	أ	ب	●	د

يحتوي على ملخصات
وأختبارات تجريبية

إعداد:

أ.فهد عبدالله البابطين

أ.الجوهرة إبراهيم الشمري

سلسلة فهد التعليمية ...

تحصيل ٢

المساعد في اختبارات التحصيل «بنين – بنات»

للأقسام العلمية