ليكن f تابعاً مُعرَّفاً واشتقاقيّاً على $R \setminus \{1\}$ ، C_f خطّه البياني ، جدول تغيّراته هو الآتي . **المطلوب :**

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1) جِدْ نهاية التابع عند أطراف مجموعة تعريفه ، ثمَّ استنتج معادلة كلّ مقارب أفقي أو شاقولي لخطّه البياني C_f ، وهلْ يوجد للخطّ C_f مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ ؟ علّل إجابتك .

2) استنتج حلول كلّاً من المتراجحات الآتية : $f(x) < 0$ وَ $f(x) \geq 0$ وَ $f'(x) \leq 0$.

3) جِدْ كلّاً من النهايات الآتية : $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)}$ وَ $\lim\limits_{x\to 0} f[f(x)]$ وَ $\lim\limits_{x\to -\infty} ln(f(x))$.

4) قارن بين $f(2022)$ وَ $f(2023)$.

الحل :

(1

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = e$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

$y=e$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي .

لا يوجد مقارب مائل للخط C_f في جوار $-\infty$ ؛ وذلك لوجود المقارب الأفقي $y=e$ في جوار $-\infty$.

(2

حلول $f(x)<0$: $x\in]1,3[\cup]3,+\infty[$

حلول $f(x)\geq 0$: $x\in]-\infty,1[\cup\{3\}$

حلول $f'(x)\leq 0$: $x\in]-\infty,0]\cup[3,+\infty[$

(3

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = \boxed{\frac{1}{0^-}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f[f(x)] = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} ln(f(x)) = ln(e) = 1$

4) التابع f متناقص تماماً على المجال $]3,+\infty[$ فهو متناقص تماماً على المجال $[2022,2023]$:

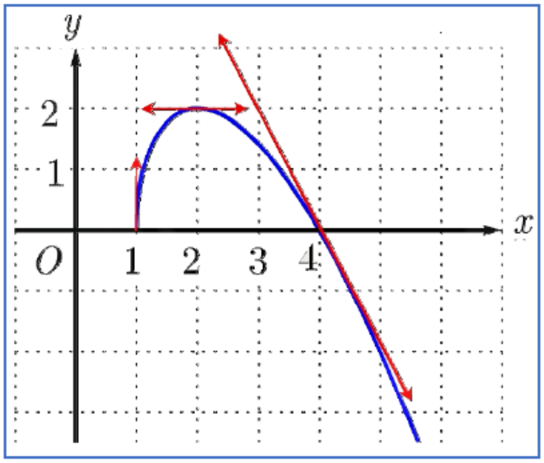
$2022 < 2023 \Rightarrow$
$f(2022) > f(2023)$

محمود المحمود

#MeEn Math Team

X_Math Bac

f تابعٌ مُعرَّفٌ على $[1\,,+\infty[$ خطّه البياني C_f المرسوم في الشكل المجاور . **المطلوب :**



1) هلْ f اشتقاقي عند $x=1$ ؟ علّل إجابتك .

2) احسب كلّاً من $f(2)$ وَ $f'(2)$ وَ $f(4)$ وَ $f'(4)$.

3) اكتب معادلة المماس للخطّ C_f في نقطة منه فاصلتها $x=4$.

4) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ ؟

5) ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$.

6) نظّم جدولاً بتغيّرات التابع f .

الحل :

1) لا ، لأنه يقبل مماساً شاقولياً عندها.

2) $f(2)=2$ و $f'(2)=0$ و $f(4)=0$

$f'(4)=m_\Delta$

حيث: Δ هو المماس للتابع في النقطة التي فاصلتها $x=4$

Δ يمر من: $A(4,0)$ و $B(3,2)$

$$m_\Delta=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-0}{3-4}=-2$$

3) $y-y_A=m_\Delta(x-x_A)$

$y-0=-2(x-4)\Rightarrow$

$$\boxed{\Delta:\ y=-2x+8}$$

X-Math Bac

4) $x\in\,]1,4[$

5) $x\in[2,+\infty[$

6)

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

محمود المحمود

#MeEn MathTeam

X_MathBac

ليكن f التابع المُعرَّف على R^* وفق : $f(x)=\frac{(1-x)E(x)}{x}$. **المطلوب :**

1) اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلّة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$) على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

2) هلْ f مستمر عند $x=1$ ؟ علّل إجابتك .

3) هلْ f مستمر على المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ ؟ علّل إجابتك .

4) ادرس نهاية التابع f عند $+\infty$.

الحل : $f(x)=\frac{(1-x)E(x)}{x}$

(1

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; x\in[\frac{1}{2},1[\\ \frac{1-x}{x} & ; x\in[1,2[\\ -1 & ; x=2\end{cases}$$

(2 ندرس الاستمرار عند $x=1$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=0$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=0$

$\Leftarrow \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=0$

f مستمر عند $x=1$.

(3 ندرس الاستمرار عند $x=2$

$\lim_{x\to2^-}f(x)=-\frac{1}{2}$

$f(2)=-1\neq\lim_{x\to2^-}f(x)$

$\Leftarrow$ f غير مستمر عند $x=2$ $\Leftarrow$

f غير مستمر على $[\frac{1}{2},2]$

(4 $x-1<E(x)\leq x$

نضرب بـ $(1-x)<0$:

$(x-1)(1-x)>(1-x)E(x)\geq x(1-x)$

نقسم على $x>0$:

$\frac{-(x-1)^2}{x}>\frac{(1-x)E(x)}{x}\geq 1-x$

$\frac{-x^2+2x-1}{x}>f(x)\geq 1-x$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+2x-1}{x}\right)=-\infty \Rightarrow$

حسب مبرهنة المقارنة تكون :

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

محمود المحمود

#MeEn Math Team

X_Math πac

لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المُعرَّفة وفق العلاقة التدريجيّة : $\begin{cases} U_0 = -1 \ , \ U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$. **المطلوب :**

1) لنُعرّف المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$.
أثبت أنَّ $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمَّ اكتب عبارة V_n بدلالة n .

2) لنُعرّف المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة $W_n = \frac{U_n}{V_n}$ ، بملاحظة أنَّ $U_{n+1} = V_n + \frac{1}{2}U_n$ وَ $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$.
أثبت أنَّ المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ حسابيّة أساسها $r = 2$ ، ثمَّ اكتب عبارة W_n بدلالة n .

3) استنتج أنَّ عبارة U_n بدلالة n هي $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$ ، ثمَّ ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$.

4) لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المُعرَّفة وفق : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.
أثبت بالتدريج أنّه أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$ كان $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

إعداد : محمود المحمود 0936 838 276

$u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$

$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$

(1) $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$

$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2} u_{n+1}$

$= u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{2} u_{n+1}$

$= \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$

$= \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \right) \Rightarrow$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} = q \Rightarrow$

v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول: $v_0 = u_1 - \frac{1}{2} u_0$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow v_0 = 1 \Rightarrow$

$v_n = v_0 \cdot q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow$

$$\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(2) $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ ، $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} u_n$

$w_{n+1} - w_n = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n}$

$= \frac{v_n + \frac{1}{2} u_n}{\frac{1}{2} v_n} - \frac{u_n}{v_n}$

$= \frac{2 v_n + u_n - u_n}{v_n}$

$= 2 \Rightarrow$

$w_{n+1} - w_n = 2 = r \Rightarrow$

w_n حسابية أساسها $r = 2$

وحدها الأول: $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$

$w_n - w_0 = (n - 0) r \Rightarrow$

$$\boxed{w_n = 2n - 1}$$

محمود المحمود

#MeEn Math Team

X_Math Bac

3) لدينا: $w_n = \dfrac{u_n}{v_n} \Leftarrow$

$u_n = w_n \times v_n$

$= (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow$

$$\boxed{u_n = \frac{2n-1}{2^n}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{2\times 2^n} - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\frac{2n+1}{2} - 2n+1\right]$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\frac{2n+1-4n+2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}(3-2n)$$

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}}}_{(+)}(3-2n)$$

$\Leftarrow$ إشارة الفرق من إشارة $(3-2n)$

n	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2n$	+ + +		0	− − −	

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \quad \forall n \geq 2$

$\Leftarrow$ u_n متناقصة تماماً بدءاً من $n=2$

4) نسمي القضية:

$$E(n): S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

- نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): S_0 = 2 - 3 = -1$

$S_0 = u_0 = -1$

محققة

- نفرض صحة القضية من أجل n:

$$E(n): S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

- نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$E(n+1): S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

لدينا: $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

S_n ← من الفرض، u_{n+1} ← من المعطيات

$$= 2 - \frac{2n+3}{\underset{(2)}{2^n}} + \frac{2n+1}{\underset{(1)}{2^{n+1}}}$$

$$= 2 + \frac{-4n-6+2n+1}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

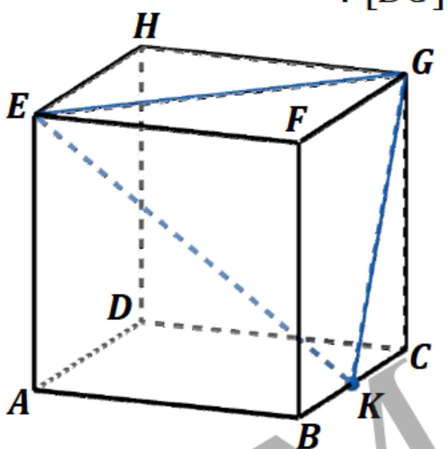
$$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$$

محققة من أجل $n+1$

محققة من أجل n.

$ABCDEFGH$ مكعّب طول حرفه يساوي 1 ولتكن لدينا النقطة K منتصف $[BC]$.

ولنختر معلماً متجانساً $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$. **المطلوب :**



1) جِدّ إحداثيّات النقاط E وَ F وَ G و K .

2) أثبت أنَّ $\vec{n}(2\,,-2\,,1)$ ناظم على المستوي (EGK) .

3) أثبت أنَّ معادلة المستوي (EGK) هي : $2x-2y+z-1=0$.

4) أثبت أنَّ بُعد النقطة F عن المستوي (EGK) يساوي $\frac{2}{3}$ ، ثمَّ تَحقَّق أنَّ المسقط القائم للنقطة F على المستوي (EGK) هي النقطة $L(\frac{5}{9}\,,\frac{4}{9}\,,\frac{7}{9})$.

5) احسب مساحة المثلّث EFG واستنتج حجم رباعي الوجوه $EFGK$ ، ثمَّ استنتج مساحة المثلّث EGK .

(1 $E(0,0,1)$ ، $F(1,0,1)$

$G(1,1,1)$ ، $K(1,\frac{1}{2},0)$

(2 $\overrightarrow{EG}(1,1,0)$

$\overrightarrow{EK}(1,\frac{1}{2},-1)$

$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{\frac{1}{2}} \neq \frac{0}{-1}$

المركبات غير متناسبة ⇐ الشعاعان

$\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EK}$ غير مرتبطين خطياً.

$\vec{n}(2,-2,1)$

$\vec{n}.\overrightarrow{EG} = (2,-2,1)(1,1,0)$

$= 2-2+0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{EG}$

$\vec{n}.\overrightarrow{EK} = (2,-2,1)(1,\frac{1}{2},-1)$

$= 2-1-1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{EK}$

$\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين

خطياً من المستوي (EGK)

فهو عمودي على هذا المستوي

⇐ $\vec{n}(2,-2,1)$ ناظم على (EGK)

(3 نعوّض إحداثيات النقاط

E و G و K في معادلة المستوي:

$E(0,0,1) \Rightarrow 0-0+1-1=0 \Rightarrow$

$E \in (EGK)$

$G(1,1,1) \Rightarrow 2-2+1-1=0 \Rightarrow$

$G \in (EGK)$

$K(1,\frac{1}{2},0) \Rightarrow 2-1+0-1=0 \Rightarrow$

$K \in (EGK)$

$\Rightarrow \boxed{(EGK): 2x-2y+z-1=0}$

(4

$dis(F,(EGK)) = \frac{|2-0+1-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{9}}$

$\boxed{dis(F,(EGK)) = \frac{2}{3}}$

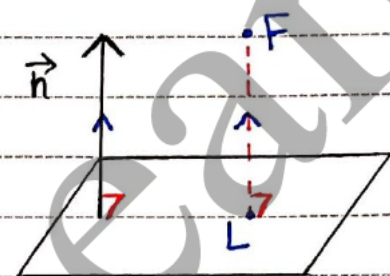
محمود المحمود

#MeEnMathTeam

X_Math Bac

حتى تكون L مسقطاً F على
المستوي (EGK) يجب أن
تتحقق الشرطان :

$1)\ L \in (EGK)\ ,\ 2)\ \vec{n} = \alpha \overrightarrow{FL}$



نعوّض L في معادلة المستوي (EGK)

$L\left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right) \Rightarrow \frac{10}{9} - \frac{8}{9} + \frac{7}{9} - 1 = 0$

الشرط الأول محقق: $L \in (EGK)$

$\vec{n}(2, -2, 1)$

$\overrightarrow{FL}\left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{2}{9}\right)$

$$\frac{2}{-\frac{4}{9}} = \frac{-2}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{-\frac{2}{9}} = -\frac{9}{2} \Rightarrow$$

الشرط الثاني محقق: $\vec{n} = -\frac{9}{2}\overrightarrow{FL}$

$\Leftarrow$ L هي مسقط F على المستوي (EGK)

5)

$$S_{EFG} = \frac{1}{2} FE \times FG = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{S_{EFG} = \frac{1}{2}}$$

$$V_{EFGK} = \frac{1}{3} \underbrace{S_{EFG}}_{S_{EFG} = \frac{1}{2}} . \underbrace{h}_{h = 1}$$

بُعد K عن EFG
بُعد الأرض عن السقف

$$V_{EFGK} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\boxed{V_{EFGK} = \frac{1}{6}}$$

باعتبار (EGK) هي قاعدة رباعي الوجوه $\Leftarrow$

$$V_{EFGK} = \frac{1}{3} S_{EGK} . h$$

$$h = dis(F, (EGK)) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times S_{EGK} \times \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{S_{EGK} = \frac{3}{4}}$$