المملكة العربيّة السّعوديّة
وزارة التعليم
MINISTRY OF EDUCATION

وفوق كل ذي علم عليم

هام

لكل المهتمين و المهتمات
بدروس و مراجع الجامعية

مدونة المناهج السعودية eduschool40.blog

الفصل الأول: التبرير والبرهان

التخمين الرياضي

المقصود به	إصدار ادعاء عام « بهدف تعليمي » يرتكز على معطيات ومعلومات معروفة
التبرير الاستقرائي	عملية يتم من خلالها اختبار عدة مواقف محددة للوصول إلى ادعاء عام
المثال المضاد	• لنفي ادعاء أو تخمين يكفي إعطاء مثال يكون الادعاء فيه غير صحيح. • المثال الذي يكون فيه الادعاء غير صحيح يسمى **مثالاً مضاداً**.

العبارة

<table>
<tr><td>تعريفها</td><td colspan="2">{ جملة خبرية إما صحيحة فقط « T » وإما خاطئة فقط « F » }</td></tr>
<tr><td>رمزها</td><td colspan="2">يرمز لها بأحد الرموز ... p , q , A , B</td></tr>
<tr><td>نفي العبارة</td><td colspan="2">• نفي العبارة الصائبة عبارة خاطئة، ونفي العبارة الخاطئة عبارة صائبة.
• إذا كان رمز عبارة ما p فإن رمز نفيها p~ « تُقرأ نفي p ».</td></tr>
<tr><td rowspan="3">نوعا العبارات</td><td>بسيطة</td><td>مركبة</td></tr>
<tr><td>تحوي خبراً واحداً فقط</td><td>تحوي أكثر من خبر</td></tr>
<tr><td>قياس الزاوية المستقيمة 180°</td><td>للمربع أربعة أضلاع ومجموع قياس زواياه الداخلية 360°</td></tr>
</table>

قيم الصدق وجدول الصدق

قيم الصدق لعبارة

قيم الصدق الممكنة لأيّ عبارة هي الصواب « T » أو الخطأ « F »

p
T
F

جدول الصدق لعبارتين

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

جدول الصدق لعبارة ونفيها

p	~p
T	F
F	T

عبارتا الوصل والفصل

المقصود بعبارتي الوصل والفصل

العبارة	أداة الربط	المثال	بالرموز
عبارة الوصل	وَ	الشمس غائبة وَ الوقت ليل	$p \wedge q$
عبارة الفصل	أو	الشمس غائبة أو الوقت ليل	$p \vee q$

جدولا الصدق لهما

عبارة الوصل تكون صائبة في حالة واحدة فقط .. عندما p و q صائبتان معاً

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارة الفصل تكون خاطئة في حالة واحدة فقط .. عندما p و q خاطئتان معاً

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

العبارة الشرطية

المقصود بها	العبارة « إذا كان ... فإن ... » تسمى عبارة شرطية
رمزها	« $p \rightarrow q$ » وتقرأ إذا كان p فإن q »
الفرض والنتيجة	الجملة التي بعد « إذا كان » تسمى الفرض، والجملة التي بعد « فإن » تسمى النتيجة
مثال توضيحي	إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإن زواياه متطابقة

جدول الصدق للعبارة الشرطية

تكون خاطئة في حالة واحدة فقط إذا كان الفرض صحيحاً و النتيجة خاطئة

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

العبارات الشرطية المرتبطة

العبارة	مكوناتها	الرمز	مثال
الشرطية	فرض معطى ونتيجة	$p \to q$	إذا تساوى قياس زاويتين فإنهما متطابقتان
العكس	تبديل الفرض والنتيجة	$q \to p$	إذا تطابقت زاويتان فإن لهما القياس نفسه
المعكوس	نفي كل من الفرض والنتيجة	$\sim p \to \sim q$	إذا كان قياسا زاويتين غير متساويين فإنهما غير متطابقتين
المعاكس الإيجابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية	$\sim q \to \sim p$	إذا كانت الزاويتان غير متطابقتين فإن قياسيهما غير متساويين

العبارة الشرطية الثنائية

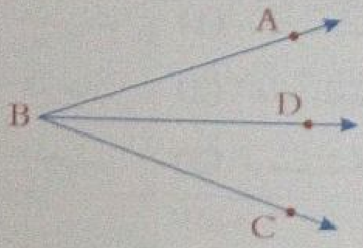
المقصود بها	ربط بين عبارة شرطية وعكسها بأداة الربط وَ
رمزها	$(p \to q) \wedge (q \to p)$ واختصاراً $(p \leftrightarrow q)$ وتقرأ « p إذا وفقط إذا q »
قيمة الصدق	تكون العبارة الشرطية الثنائية **صائبة** عندما تكون العبارة الشرطية وعكسها **صائبتين**
مثال توضيحي	تتطابق الزاويتان إذا وفقط إذا كان لهما القياس نفسه

التبرير الاستنتاجي

تعريفه	**{ عملية الاستنتاج باستخدام حقائق أو قواعد أو تعاريف للوصول إلى نتائج منطقية }**
مثال توضيحي	عملية الاستنتاج التي يتبعها الأطباء في تحديد عيار الجرعة من الدواء للمرضى
من أنواع التبرير الاستنتاجي	• قانون الفصل المنطقي. • قانون القياس المنطقي.

قانون الفصل المنطقي

استعماله	يُستعمل للحصول على النتائج من عبارات شرطية صحيحة
القانون	إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صحيحة والفرض p صحيحاً فإن النتيجة q صحيحة وبالرموز .. $[(p \to q) \wedge p] \to q$

مثال توضيحي	لتكن العبارة الشرطية « إذا كان نصف المستقيم منصفاً لزاوية فإنه يقسمها إلى زاويتين متطابقتين » صحيحة فحدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أو خاطئة بناءً على المعطيات .. **المعطيات:** $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$. **النتيجة:** $\angle ABD \cong \angle CBD$. **الحل:** النتيجة صحيحة؛ لأن العبارة الشرطية المعطاة صحيحة والفرض صحيح. 

قانون القياس المنطقي

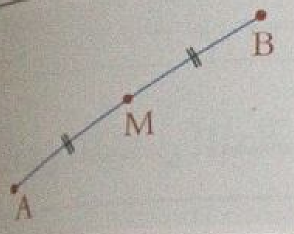
استعماله	يُستعمل للحصول على النتائج، وهو يشبه أن علاقة المساواة متعدية
القانون	إذا كانت العبارتان الشرطيتان $q \to r$ و $p \to q$ صحيحتين فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صحيحة وبالرموز .. $[(p \to q)\wedge(q \to r)] \to (p \to r)$
مثال توضيحي	إذا كان $2x = 14$ فإن $x = 7$ وإذا كان $x = 7$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$ ومنه فإنه .. إذا كان $2x = 14$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$

المسلمات

المسلمة	عبارة تقبل على أنها صحيحة
مسلمات النقاط والمستقيمات والمستويات	(1) كل نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد. (2) كل ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد يمر بها مستوى واحد. (3) كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل. (4) كل مستوى يحوي على الأقل ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة. (5) إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بالنقطتين يقع كلياً في المستوى. (6) إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإن تقاطعهما نقطة واحدة. (7) إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما مستقيم.

البرهان الحر

النظرية	تستخدم لإثبات صحة عبارة أو تخمين باستعمال المفردات المعرفة والمسلمات والخصائص الجبرية للمساواة

البرهان	دليل منطقي تُكتب فيه كل عبارة مُبررة بعبارة سبق إثبات صحتها
البرهان الحر	كتابة فقرة يُوضح فيها لماذا يكون التخمين لوضع معطى صحيحاً
خطوات البرهان الجيد	(1) نكتب التخمين المراد إثباته. (2) نحدد المعطيات. (3) نرسم شكلاً توضيحياً للمعطيات إن أمكن. (4) نحدد المطلوب إثباته. (5) نبني البرهان بالتبرير الاستنتاجي.
نظرية نقطة المنتصف	إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ فإن .. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ 

البرهان ذو العمودين

المقصود به	برهان يحوي العبارات مرتبة في عمود والتبريرات مرتبة في عمود موازٍ له
المناقشة الاستنتاجية	**{ مجموعة الخطوات الجبرية التي تُستعمل لحل المسائل والمعادلات باستخدام خصائص علاقة المساواة }**

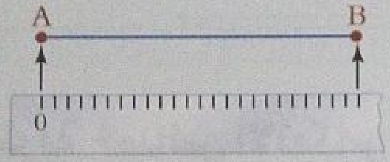
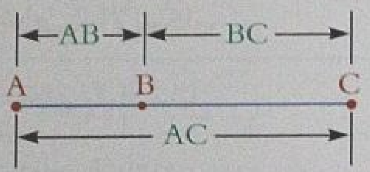
بعض خصائص الأعداد الحقيقية

خاصية الانعكاس	$a = a$
خاصية التماثل	إذا كان $a = b$ فإن $b = a$
خاصية التعدي	إذا كان $a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$
خاصية الجمع	إذا كان $a = b$ فإن $a+c = b+c$
خاصية الطرح	إذا كان $a = b$ فإن $a-c = b-c$
خاصية الضرب	إذا كان $a = b$ فإن $c.a = c.b$
خاصية القسمة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$ فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
خاصية التعويض	إذا كان $a = b$ فإن a تحل مكان b في أي معادلة أو أي مقدار جبري
خاصية التوزيع	$a(b+c) = ab+ac$
تنبيه	• الخصائص السابقة صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c . • البرهان الهندسي: برهان يستخدم خصائص الأعداد الحقيقية في إثبات العلاقات بين قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة.

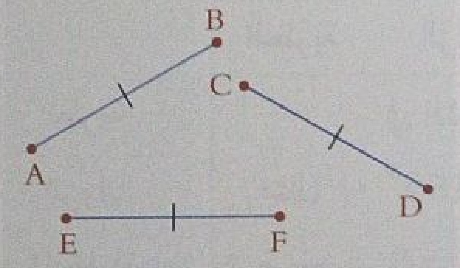
خصائص أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا

الخاصية	أطوال القطع المستقيمة	قياسات الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$ فإن $CD = AB$	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ فإن $m\angle 2 = m\angle 1$
التعدي	إذا كان $AB = CD$ و $CD = EF$ فإن $AB = EF$	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$ فإن $m\angle 1 = m\angle 3$

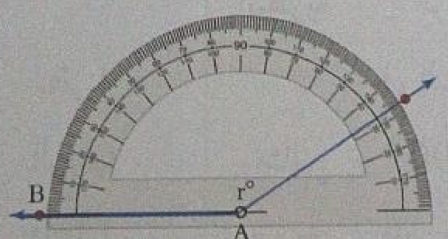
مسلمتا المسطرة وجمع القطع المستقيمة

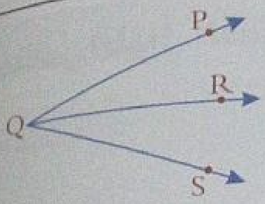
مسلمة المسطرة	النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية، بحيث تقابل النقطة A ـ مثلاً ـ الصفر، بينما تقابل النقطة الثانية B عدداً حقيقياً موجباً	
مسلمة جمع القطع المستقيمة	إذا وقعت النقاط A , B , C على استقامة واحدة وكانت النقطة B بين A , C فإن $AB+BC = AC$ والعكس صحيح	

نظرية خواص تطابق القطع المستقيمة

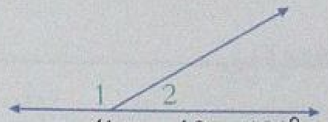
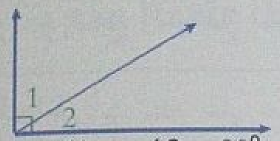
خاصية الانعكاس	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$	
خاصية التماثل	إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$	
خاصية التعدي	إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$	

مسلمتا المنقلة وجمع الزوايا

مسلمة المنقلة	إذا كان $\overrightarrow{AB}$ نصف مستقيم معطى والعدد r بين 0 و 180 فإنه يوجد نصف مستقيم وحيد طرفه النقطة A ويقع في إحدى جهتي $\overrightarrow{AB}$ بحيث أن قياس الزاوية المتكونة يساوي r	

مسلمة جمع الزوايا	إذا وقعت النقطة R داخل $\angle PQS$ فإن .. $m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$ والعكس صحيح.	

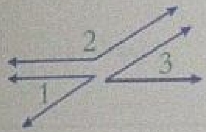
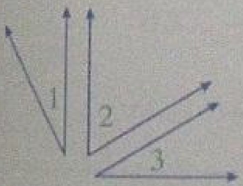
نظريات الزوايا المتكاملة والزوايا المتتامة

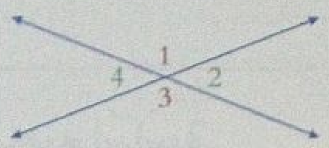
تكامل الزوايا	تتام الزوايا
إذا كانت زاويتان متجاورتان على مستقيم فإنهما متكاملتان	إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة فإن الزاويتين متتامتان
 $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$	 $m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$

نظرية خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للزوايا

خاصية الانعكاس	$\angle 1 \cong \angle 1$
خاصية التماثل	إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ فإن $\angle 2 \cong \angle 1$
خاصية التعدي	إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\angle 2 \cong \angle 3$ فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

نظريات تطابق الزوايا

نظرية الزوايا المتكاملة	النظرية	الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين	
	مثال توضيحي	في الشكل المجاور: إذا كان .. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 180^\circ$ فإن .. $\angle 1 \cong \angle 3$	
نظرية الزوايا المتتامة	النظرية	الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين	
	مثال توضيحي	في الشكل المجاور: إذا كان .. $m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 90^\circ$ فإن .. $\angle 1 \cong \angle 3$	

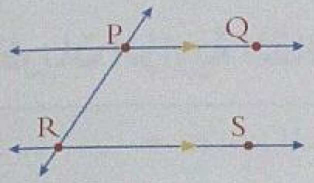
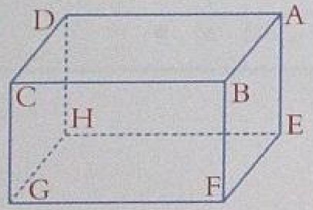
نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس	**النظرية**	الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان	
	مثال توضيحي	في الشكل المجاور .. $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$	

نظريات الزاوية القائمة

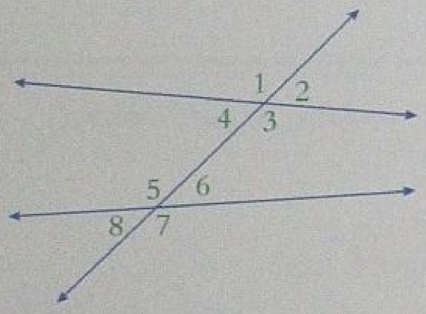
نظريات الزاوية القائمة	• تتقاطع المستقيمات المتعامدة وتُشكِّل أربع زوايا **قائمة**. • جميع الزوايا **القائمة** متطابقة. • المستقيمات **المتعامدة** تُشكِّل زوايا متجاورة ومتطابقة. • إذا كانت الزاويتان متطابقتين ومتكاملتين فإنهما **قائمتان**. • إذا كانت الزاويتان المتطابقتان متجاورتين على مستقيم فإنهما **قائمتان**.

الفصل الثاني: التوازي والتعامد

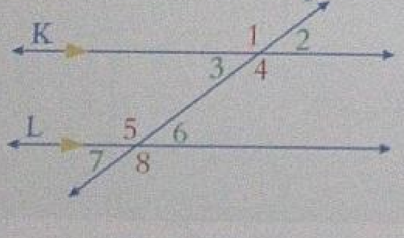
مفاهيم أساسية

المستقيمان المتوازيان	هما مستقيمان في مستوى واحد لا يتقاطعان أبداً؛ ففي الشكل المجاور $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ مستقيمان متوازيان وبالرموز $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$	
المستقيم المستعرض « القاطع »	مستقيم يقطع مستقيمين متوازيين « أو غير متوازيين » أو أكثر في مستوى واحد؛ وبالرموز $\overleftrightarrow{PR}$ مستقيم مستعرض للمستقيمين $\overleftrightarrow{RS}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$	
المستويان المتوازيان	مستويان لا يتقاطعان	
مثال توضيحي	المستوى ABCD يوازي المستوى EFGH	
المستقيمان المتخالفان	مستقيمان لا يقعان في مستوى واحد وغير متقاطعين	
مثال توضيحي	$\overleftrightarrow{AE}$ و $\overleftrightarrow{GF}$ مستقيمان متخالفان	

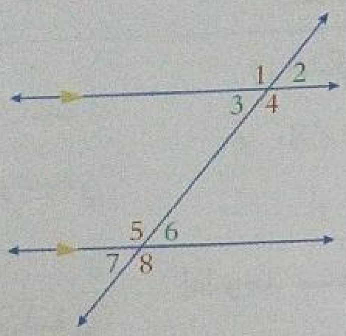
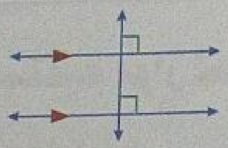
المستقيمات المستعرضة والزوايا

الاسم	الزوايا	الرسم
الزوايا الخارجية	$\angle 8$ و $\angle 7$ و $\angle 2$ و $\angle 1$	
الزوايا الداخلية	$\angle 6$ و $\angle 5$ و $\angle 4$ و $\angle 3$	
الزاويتان الداخليتان المتخالفتان	$\angle 4$ و $\angle 5$ أو $\angle 3$ و $\angle 6$	
الزاويتان الخارجيتان المتبادلتان	$\angle 2$ و $\angle 8$ أو $\angle 1$ و $\angle 7$	
الزاويتان الداخليتان المتبادلتان	$\angle 4$ و $\angle 6$ أو $\angle 3$ و $\angle 5$	
الزاويتان المتناظرتان	$\angle 5$ و $\angle 1$ أو $\angle 6$ و $\angle 2$	

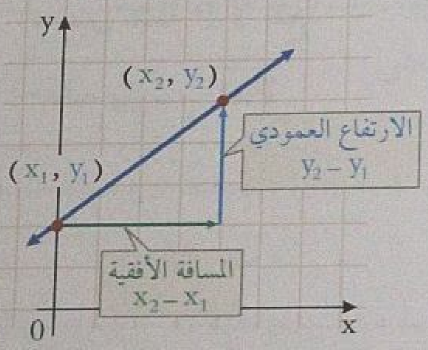
مسلمة الزاويتان المتناظرتان

المسلمة	إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتين	
توضيح بالرموز	إذا كان $K \parallel L$ و P قاطع لهما فإن $\angle 5 \cong \angle 1$ و $\angle 6 \cong \angle 2$ و $\angle 7 \cong \angle 3$ و $\angle 8 \cong \angle 4$	

نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

النظرية	الأمثلة	النموذج
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين متبادلتين متطابقتان	$\angle 4 \cong \angle 5$ $\angle 3 \cong \angle 6$	
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين متخالفتين متكاملتان	$\angle 6$ و $\angle 4$ متكاملتان $\angle 3$ و $\angle 5$ متكاملتان	
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين خارجيتين متبادلتين متطابقتان	$\angle 1 \cong \angle 8$ $\angle 2 \cong \angle 7$	
نظرية القاطع المستعرض العمودي: في مستوى؛ إذا كان المستقيم عمودياً على أحد مستقيمين متوازيين فإنه يكون عمودياً على الآخر		

ميل المستقيم

تعريفه	{ نسبة ارتفاعه العمودي إلى المسافة الأفقية }	
إيجاده بمعلومية نقطتين عليه	$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ , x_2 \neq x_1}$	
فائدتان	• ميل المستقيم الرأسي غير مُعرَّف. • ميل المستقيم الأفقي يساوي الصفر.	

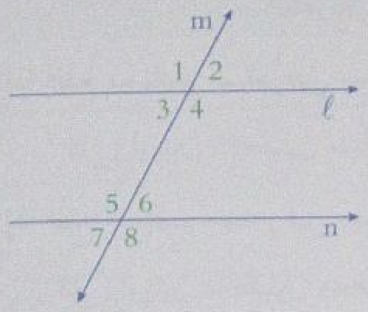
مسلمتا المستقيمات المتوازية والمتعامدة

مسلمة 1	يكون للمستقيمين غير الرأسيين **الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين**
مسلمة 2	يكون المستقيمان غير الرأسيين **متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما = −1**

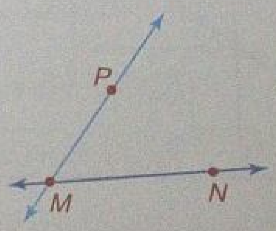
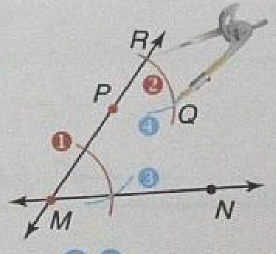
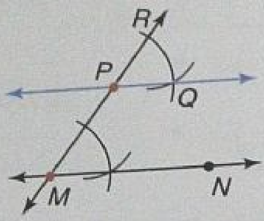
معادلة المستقيم

بمعلومية الميل والمقطع الصادي	$\boxed{y = mx + b}$	m ميل المستقيم b المقطع الصادي
بمعلومية الميل ونقطة عليه	$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$	m ميل المستقيم (x_1, y_1) نقطة يمر بها المستقيم
بمعلومية نقطتين عليه	$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$	(x_2, y_2) و (x_1, y_1) نقطتان يمر بهما المستقيم

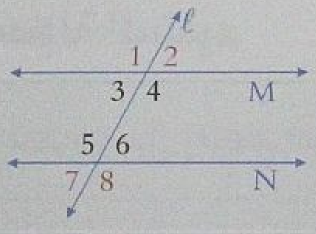
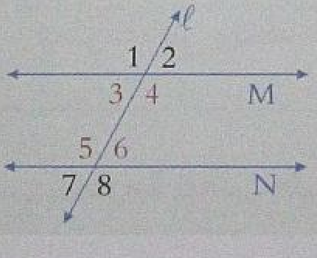
توازي المستقيمات

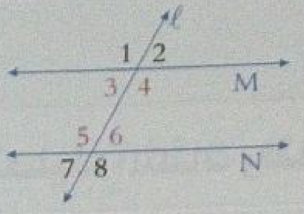
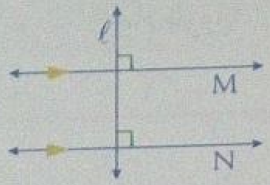
مسلمة 1	إذا قطع قاطع مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت الزوايا المتناظرة متطابقة فإن المستقيمين متوازيان	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور إذا كان $m\angle 3 \cong m\angle 7$ أو $m\angle 4 \cong m\angle 8$ أو $m\angle 2 \cong m\angle 6$ أو $m\angle 1 \cong m\angle 5$ فإن $\ell \parallel n$	
مسلمة 2	إذا وجد مستقيم معلوم ونقطة لا تقع عليه فإنه يوجد مستقيم واحد **فقط** يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم	

رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم ويمر بنقطة لا تقع عليه

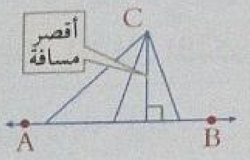
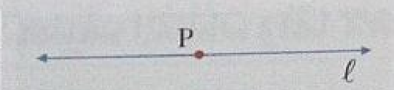
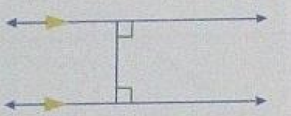
الخطوة 1	الخطوة 2	الخطوة 3
نرسم $\overleftrightarrow{MN}$ بالمسطرة ثم نعين نقطة P لا تقع عليه ونرسم $\overleftrightarrow{PM}$	ننقل $\angle PMN$ بحيث تكون النقطة P رأس الزاوية الجديدة ونسمي نقطتي التقاطع Q و R	نرسم $\overleftrightarrow{PQ}$ ؛ وبما أن $\angle RPQ \cong \angle PMN$ وهما متناظرتان فإن $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{MN}$
	 ❶❷ نفس قياس الفرجار، ❸❹ نفس قياس الفرجار	

نظريات إثبات توازي مستقيمان

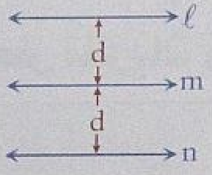
النظرية	أمثلة	شكل توضيحي
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى، وكانت زاويتان خارجيتان متبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 8$ أو $\angle 2 \cong \angle 7$ فإن $M \parallel N$	
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى، وكانت زاويتان داخليتان متخالفتان متكاملتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كانت $\angle 5$ و $\angle 3$ متكاملتين أو $\angle 6$ و $\angle 4$ متكاملتين فإن $M \parallel N$	

إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى، وكانت زاويتان داخليتان متبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كان $\angle 6 \cong \angle 3$ أو $\angle 4 \cong \angle 5$ فإن $M \parallel N$	
في المستوى؛ إذا كان مستقيمان عمودين على مستقيم واحد فإنهما متوازيان	إذا كان $\ell \perp M$ و $\ell \perp N$ فإن $M \parallel N$	

مفاهيم أساسية على الأعمدة والمسافات

البُعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه	{ طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة }	
تنبيه	إذا كانت النقطة P تقع على المستقيم ℓ فإن البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ يساوي الصفر	
البُعد بين مستقيمين متوازيين	{ البعد بين أحد المستقيمين المتوازيين وأي نقطة على المستقيم الآخر }	

نظرية المستقيمين المتوازيين

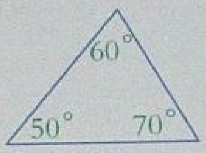
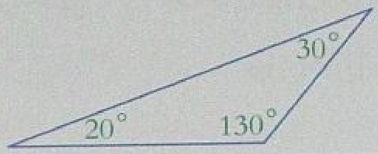
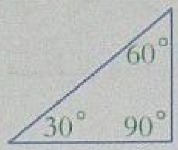
نظرية	في المستوى: المستقيمان اللذان يبعد كل منها بعداً ثابتاً عن مستقيم ثالث يكونان متوازيان	
وبالرموز	إذا كان بُعد كل من المستقيمين n و ℓ عن المستقيم m يساوي d فإن $\ell \parallel n$	

لشروط الضرورية الكافية

الشرط الضروري	يكون الشرط A ضرورياً للشرط B إذا وفقط إذا كان خطأ الشرط A أو عدم توافره يؤدي إلى خطأ الشرط B أو عدم توافره
مثال توضيحي	أن يكون الشكل رباعياً شرط ضروري لكي يكون الشكل مستطيلاً
الشرط الكافي	يكون الشرط A كافياً للشرط B إذا وفقط إذا كانت صحة الشرط A أو توافره تؤدي إلى صحة الشرط B أو توافره
مثال توضيحي	أن يكون العدد أقل من 15 شرط كافٍ لكي يكون العدد أقل من 20

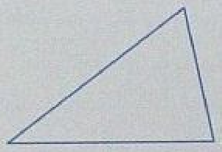
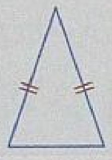
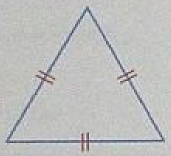
الفصل الثالث: تطابق المثلثات

تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

حاد الزوايا	منفرج الزاوية	قائم الزاوية
		
زواياه كلها حادة	يحوي زاوية واحدة منفرجة	يحوي زاوية واحدة قائمة
قياس كل زاوية أقل من 90°	**قياسها أكبر من 90°**	**قياسها يساوي 90°**

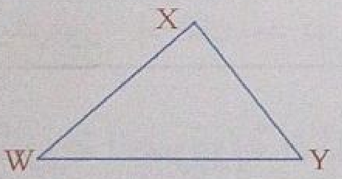
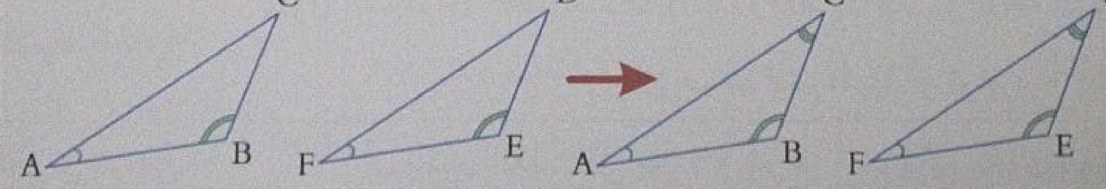
فائدة: إذا كان المثلث حاد الزوايا وجميع زواياه متطابقة فإنه يُسمى مثلثاً **متطابق الزوايا**، وقياس كل زاوية من زواياه 60° .

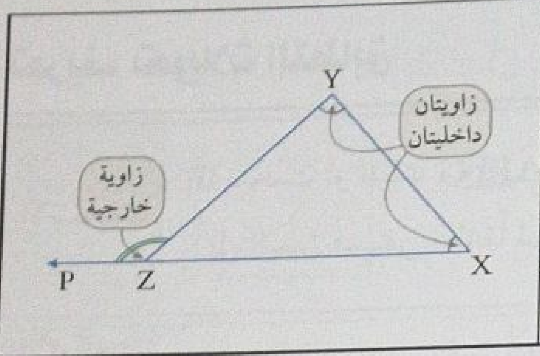
تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

مختلف الأضلاع	متطابق الضلعين	متطابق الأضلاع
		
الأضلاع غير متطابقة	يوجد على الأقل ضلعان متطابقان	الأضلاع متطابقة كلها

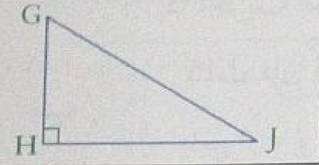
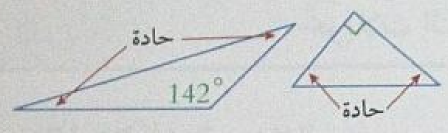
فائدة: المثلث متطابق الأضلاع جميع زواياه متطابقة وقياس كل زاوية 60° .

بعض نظريات زوايا المثلث

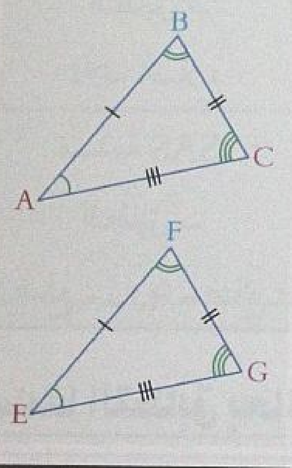
نظرية مجموع زوايا المثلث	مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180°	
مثال توضيحي	$m\angle W+m\angle X+m\angle Y = 180^\circ$	
نظرية الزاوية الثالثة	إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر	
مثال توضيحي	إذا كانت $\angle A \cong \angle F$ و $\angle B \cong \angle E$ فإن $\angle C \cong \angle D$ 	

الزاوية الخارجية	كل زاوية في المثلث لها زاوية خارجية تتكون من ضلع في المثلث مع امتداد ضلع آخر	
نظرية الزاوية الخارجية	قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين	
مثال توضيحي	$m\angle X+m\angle Y = m\angle YZP$	

نتائج

نتيجة 1	الزاويتان الحادتان في المثلث قائم الزاوية متتامتان	
مثال توضيحي	$m\angle G+m\angle J = 90^{\circ}$	
نتيجة 2	في أي مثلث توجد على الأكثر زاوية قائمة واحدة أو زاوية منفرجة واحدة	

تطابق المثلثات

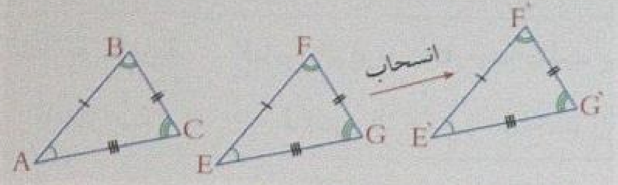
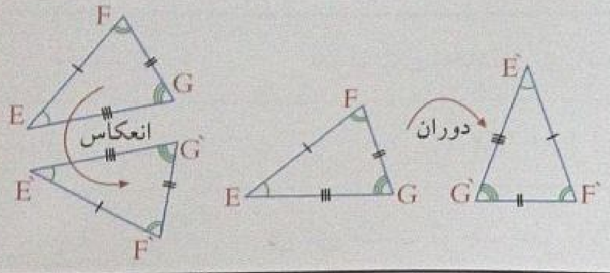
تطابق مثلثين	يتطابق المثلثان إذا وفقط إذا تطابقت أجزاؤهما المتناظرة	
مثال توضيحي	إذا كان ΔABC يطابق ΔEFG فإن رؤوس المثلثين تتناظر حسب ترتيبها ويمكن تحديد الأضلاع والزوايا المتناظرة المتطابقة وذلك باتباع الأحرف حسب ترتيبها كالتالي:	

الزوايا	$\angle C \cong \angle G$	$\angle B \cong \angle F$	$\angle A \cong \angle E$
الأضلاع	$\overline{AC} \cong \overline{EG}$	$\overline{BC} \cong \overline{FG}$	$\overline{AB} \cong \overline{EF}$

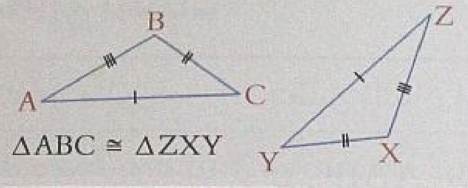
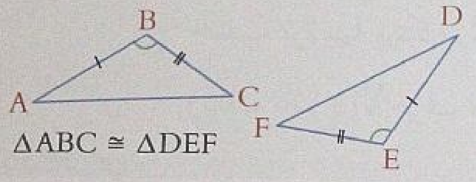
خصائص تطابق المثلثات

الانعكاس	$\Delta JKL \cong \Delta JKL$
التماثل	إذا كان $\Delta JKL \cong \Delta PQR$ فإن $\Delta PQR \cong \Delta JKL$
التعدي	إذا كان $\Delta JKL \cong \Delta PQR$ و $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ فإن $\Delta JKL \cong \Delta XYZ$

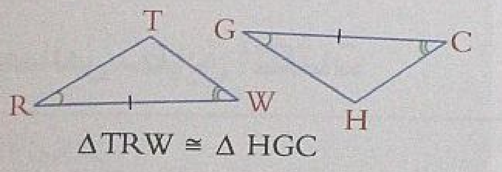
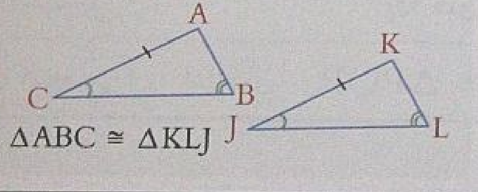
تعريف تحويلات التطابق

الانسحاب	إذا سحبْتَ أو نقلْتَ ΔEFG إلى أعلى ثم إلى اليمين فسيبقى مطابقاً لـ ΔABC	
الانعكاس	لا يتأثر تطابق المثلثين بتحويل الانعكاس	
الدوران	لا يتأثر تطابق المثلثين بتحويل الدوران	
تنبيه	إذا أجريتَ انسحاباً أو انعكاساً أو دوراناً لمثلث فإن قياسات المثلث وشكله لا يتغيران، وتسمى التحويلات الثلاثة **تحويلات التطابق**	

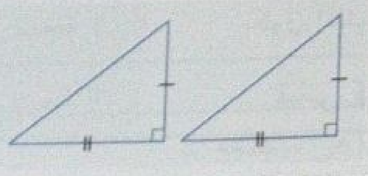
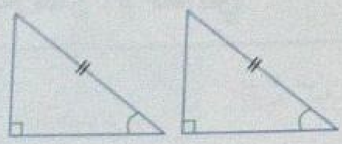
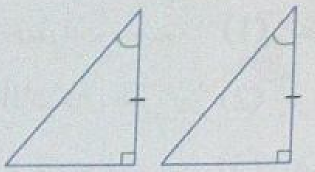
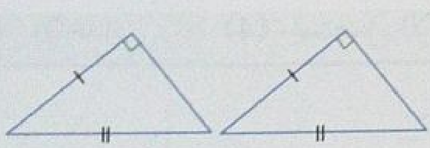
مسلمتا التطابق بحالتي SSS و SAS

مسلمة SSS التطابق بـ « ثلاثة أضلاع »	إذا تطابقت أضلاع مثلث مع أضلاع مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان	
مسلمة SAS التطابق بـ « ضلع ـ زاوية ـ ضلع »	إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان	

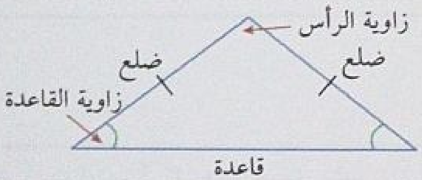
مسلمتا التطابق بحالتي ASA و AAS

مسلمة ASA التطابق بـ « زاوية ـ ضلع ـ زاوية »	إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان	
مسلمة AAS التطابق بـ « زاوية ـ زاوية ـ ضلع »	إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين	

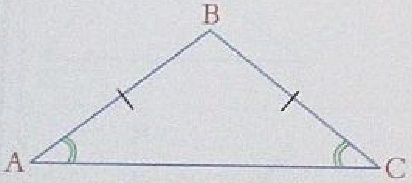
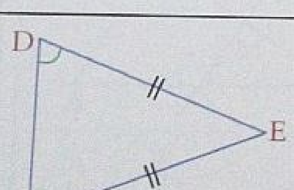
نظريات تطابق المثلثات القائمة الزاوية

نظرية التطابق بـ « ساق - ساق » « LL »	إذا تطابق ساقا مثلث قائم الزاوية مع ساقي مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين	
نظرية التطابق بـ « وتر - زاوية » « HA »	إذا تطابق وتر وإحدى الزاويتين الحادتين في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين	
نظرية التطابق بـ « ساق - زاوية » « LA »	إذا تطابق ساق وإحدى الزاويتين الحادتين في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين	
مسلمة التطابق بـ « وتر - ساق » « HL »	إذا تطابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين	

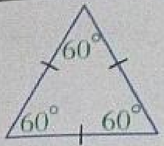
خصائص المثلث متطابق الضلعين

زاوية الرأس	الزاوية المكونة من الضلعين المتطابقين	
زاوية القاعدة	الزاوية المكونة من القاعدة وأحد الضلعين المتقابلين	

نظريات المثلث متطابق الضلعين

نظرية 1	إذا تطابق ضلعان في مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان	
مثال توضيحي	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ فإن $\angle A \cong \angle C$	
نظرية 2	إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان	
مثال توضيحي	إذا كانت $\angle D \cong \angle F$ فإن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$	

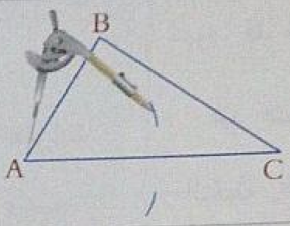
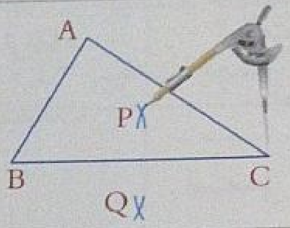
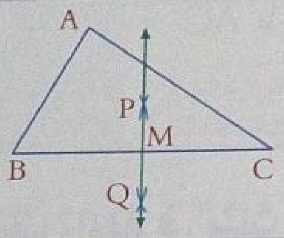
خصائص المثلث متطابق الأضلاع

نتيجة 1	يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا	
نتيجة 2	قياس كل زاوية في المثلث متطابق الأضلاع يساوي 60°	

البرهان الإحداثي

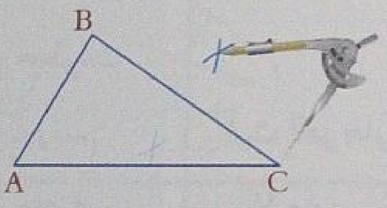
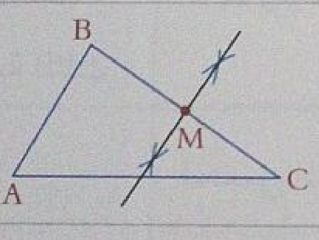
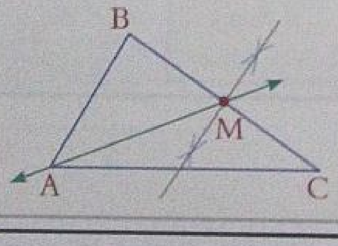
المقصود به	نوع من البراهين يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية والخطوة الأولى فيه هي رسم الشكل على المستوى الإحداثي
خطوات رسم الأشكال على المستوى الإحداثي	(1) نضع رأس المضلع أو مركزه عند نقطة الأصل. (2) نرسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المضلع على أحد المحورين. (3) نضع المضلع في الربع الأول من المستوى الإحداثي إن أمكن. (4) نستعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث

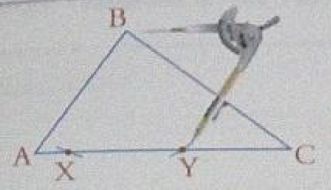
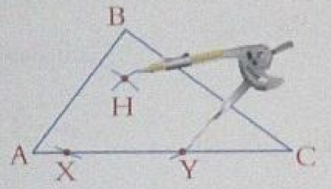
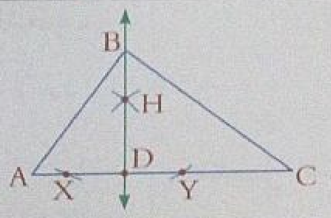
المقصود به	خط مستقيم عمودي على أحد أضلاع المثلث من منتصفه	
خطوات رسم العمود المنصف لأحد أضلاع المثلث	ارسم مثلثاً ABC ثم افتح الفرجار بفتحة أكبر من $\frac{1}{2}$AB وثبته عند الرأس A وارسم قوساً أعلى $\overline{AC}$ وآخر أسفله	
	استعمل الفتحة نفسها للفرجار وثبته عند الرأس C وارسم قوسين يقطعان القوسين السابقين، سمِّ نقطتي تقاطع القوسين P وQ	
	استعمل المسطرة لرسم $\overleftrightarrow{PQ}$ ، سمِّ نقطة تقاطع $\overline{AC}$ مع $\overleftrightarrow{PQ}$ بالحرف M « نقطة التنصيف »	

فائدة: تستعمل هذه الطريقة لتنصيف أي قطعة مستقيمة.

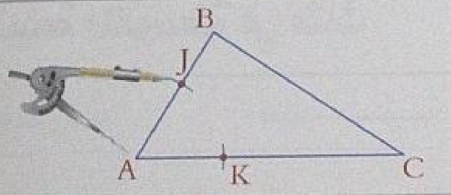
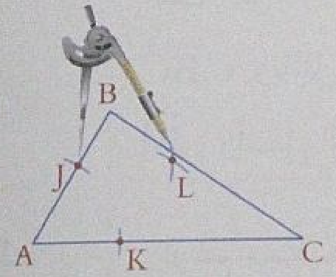
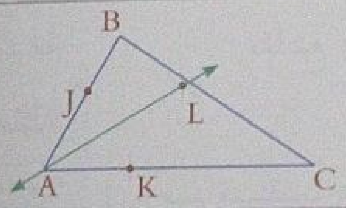
القطعة المتوسطة في مثلث

المقصود به	قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع لذلك الرأس	
خطوات رسم القطعة المستقيمة المتوسطة للمثلث	ثبت الفرجار عند B وارسم قوسين أعلى وأسفل الضلع $\overline{BC}$ ، وبالمثل ثبت الفرجار عند النقطة C وارسم قوسين أعلى وأسفل الضلع $\overline{BC}$ يتقاطعان مع القوسين السابقين	
	ارسم مستقيماً يمر بنقطتي تقاطع الأقواس ثم عيِّن نقطة تقاطع ذلك المستقيم مع $\overline{BC}$ وسمِّها M	
	ارسم مستقيماً يمر بالنقطتين A و M فتكون قطعة متوسطة للمثلث ABC	

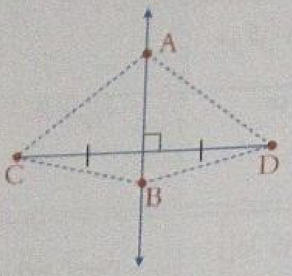
ارتفاع المثلث

المقصود به	عمود ساقط من أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل	
خطوات رسم ارتفاع المثلث	ثبت الفرجار في الرأس B وارسم قوسين يقطعان $\overline{AC}$ ، ثم سمٍّ نقطتي التقاطع X و Y تنبيه: قد تحتاج لمد $\overline{AC}$ إذا كان أقصر من دائرة الفرجار.	
	غير فتحة الفرجار إلى فتحة أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبته في النقطة X وارسم قوساً أعلى $\overline{AC}$ ، ثم استعمل الفرجار بالفتحة نفسها وثبته في النقطة Y وارسم قوساً آخر أعلى ليقطع القوس الأول في نقطة سمّها H	
	استعمل المسطرة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$ وسمٍّ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BH}$ مع $\overline{AC}$ بالحرف D ، فتكون $\overline{BD}$ هي ارتفاع المثلث ABC وعمودية على $\overline{AC}$	

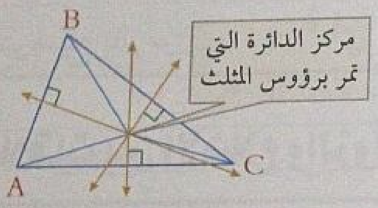
منصف زاوية في مثلث

المقصود به	نصف مستقيم يقسم زاوية المثلث إلى زاويتين متطابقتين	
خطوات رسم منصف زاوية المثلث	ثبت الفرجار في الرأس A وارسم قوساً يقطع $\overline{AB}$ في K وقوساً آخر يقطع $\overline{AC}$ في J	
	ثبت الفرجار في J وارسم قوساً ثم ثبت الفرجار في K وارسم قوساً آخر يقطع القوس الأول في L	
	استعمل المسطرة لرسم $\overrightarrow{AL}$ ، فيكون $\overrightarrow{AL}$ منصفاً للزاوية ABC	

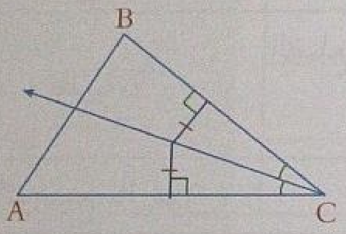
النقاط على الأعمدة المنصفة

نظرية 1	كل نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ و $\overline{AB}$ تنصف $\overline{CD}$ فإن AC = AD و BC = BD	
نظرية 2	كل نقطة تبعد بعدين متساويين عن طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصف لتلك القطعة	
التوضيح بالرموز	إذا كان AC = AD فإن النقطة A تقع على العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{CD}$ وإذا كان BC = BD فإن النقطة B تقع على العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{CD}$	

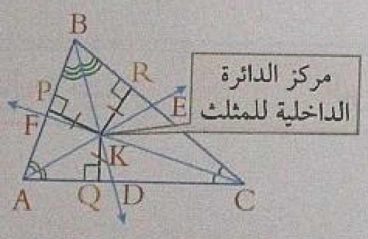
الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

ماذ يقصد بها؟	دائرة تمر برؤوس المثلث ومركزها نقطة تلاقي الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث	
نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث	مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث يبعد أبعاداً متساوية عن رؤوس المثلث	

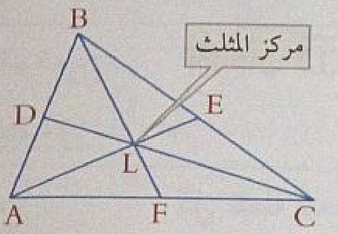
نظريات النقاط التي تقع على منصفات الزوايا

نظرية 1	كل نقطة تقع على منصف الزاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية	
نظرية 2	كل نقطة تقع على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية تقع على منصف الزاوية	

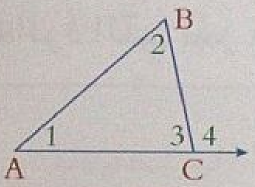
الدائرة الداخلية للمثلث

ماذا يقصد بها؟	دائرة تمس أضلاع المثلث من الداخل	
نظرية الدائرة الداخلية للمثلث	مركز الدائرة الداخلية للمثلث يكون على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث	
التوضيح بالرموز	إذا كان K مركز الدائرة الداخلية للمثلث PQR فإن KQ = KR = KP	

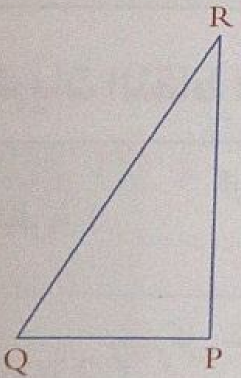
القطع المتوسطة ومركز المثلث

مركز المثلث	{ نقطة تقاطع متوسطات المثلث }	
النظرية	مركز المثلث يبعد عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المتوسطة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المجاور	
التوضيح بالرموز	إذا كان L مركز المثلث ABC فإن $AL = \frac{2}{3}AE$ و $BL = \frac{2}{3}BF$ و $CL = \frac{2}{3}CD$	

متباينة الزاوية الخارجية

النظرية	قياس الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من قياس كلٍ من قياس الزاويتين الداخليتين البعيدتين المناظرتين لها	
التوضيح بالرموز	أي أن $m\angle 4 > m\angle 2$ و $m\angle 4 > m\angle 1$	

العلاقات بين الأضلاع والزوايا في المثلث

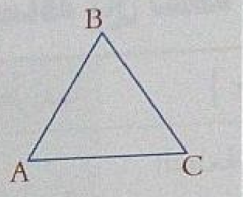
نظرية 1	الزاوية المقابلة للضلع الأطول في أي مثلث قياسها أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأصغر فيه	
التوضيح بالرموز	إذا كان $RP > PQ$ فإن $m\angle Q > m\angle R$	
نظرية 2	الضلع المقابل للزاوية الكبرى في أي مثلث يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى فيه	
التوضيح بالرموز	إذا كان $m\angle Q > m\angle R$ فإن $RP > PQ$	

البرهان غير المباشر

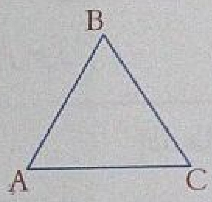
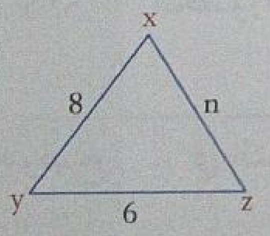
المقصود به	أحد أنواع البراهين؛ ونبدأ فيه بفرض أن النتيجة « المطلوب إثباتها » خاطئة ثم نثبت أن هذا الفرض يتناقض مع المعطيات أو أي حقيقة سابقة
مثال توضيحي	البرهان غير المباشر للعبارة $AB = MN$ يبدأ بالفرض $AB \neq MN$

خطوات كتابة البرهان غير المباشر	(1) نفرض أن النتيجة « المطلوب إثباتها » خاطئة. (2) نثبت أن هذا الافتراض يتناقض مع المعطيات. (3) نشير إلى أنه بسبب افتراض خطأ المطلوب حصلنا على عبارة غير صحيحة؛ لذا يجب أن يكون المطلوب صحيحاً.

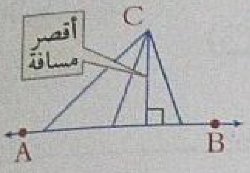
نظرية متباينة المثلث

النظرية	مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث	
التوضيح بالرموز	$AB+BC > AC$ $AC+BC > AB$ $AB+BC > AC$	
تنبيه	يمكن استخدام هذه النظرية في تحديد ما إذا كانت ثلاثة قطع مستقيمة يمكن أن تكوِّن مثلثاً أم لا	
مثال توضيحي	• الأعداد 2 و 5 و 4 تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن .. $5+2 > 4$ و $5+4 > 2$ و $4+2 > 5$ • الأعداد 8 و 4 و 3 لا تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن: $4+3 \not> 8$.	
فائدة	للوصول للحل بأسرع طريقة نقارن مجموع طولي أصغر ضلعين بطول الضلع الثالث	

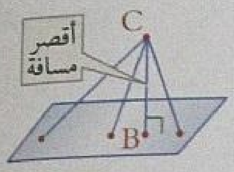
تحديد الطول المحتمل لضلع مثلث

التعبير اللفظي	طول أي ضلع في مثلث أكبر من الفرق الموجب بين طولي الضلعين الآخرين وأصغر من مجموع طوليهما	
التعبير الرمزي	$AB-AC < BC < AB+AC$	
تنبيه	لابد من تحقق المتباينة السابقة لجميع الأضلاع	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور .. $8-6 < n < 8+6$ $2 < n < 14$ $\therefore$ الطول المحتمل $n \in (2,14)$	

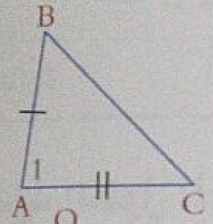
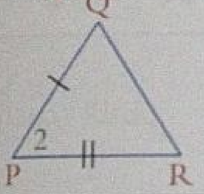
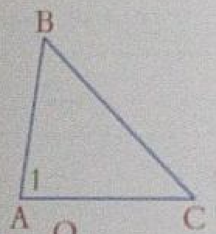
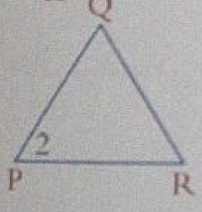
المسافة بين نقطة ومستقيم

تعريفها	{ طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم }	
النظرية	القطعة المستقيمة العمودية من نقطة إلى مستقيم هي أقصر قطعة من تلك النقطة إلى ذلك المستقيم	
تنبيه	إذا كانت النقطة تقع على المستقيم فإن المسافة بين النقطة والمستقيم تساوي الصفر	

المسافة بين نقطة ومستوى

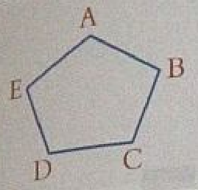
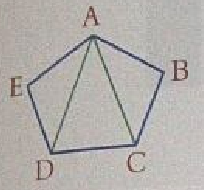
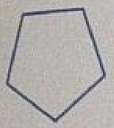
تعريفها	{ طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستوى }	
النتيجة	القطعة المستقيمة العمودية من نقطة إلى مستوى هي أقصر قطعة من تلك النقطة إلى ذلك المستوى	
تنبيه	إذا كانت النقطة تقع في المستوى فإن المسافة بين النقطة والمستوى تساوي صفر	

علاقة الأضلاع بالزاوية

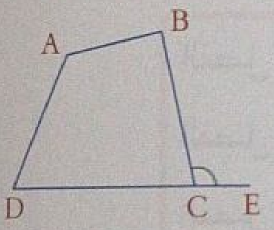
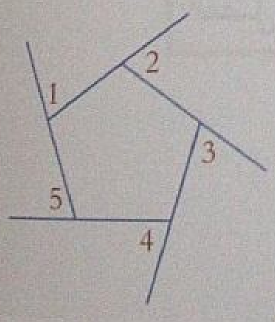
متباينة SAS	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين في مثلث آخر وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني	
التوضيح بالرموز	في الشكل المجاور: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ و $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ و $m\angle 1 > m\angle 2$ فإن $BC > QR$	
متباينة SSS	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين في مثلث آخر وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني فإن قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني	
التوضيح بالرموز	في الشكل المجاور: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ و $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ و $BC > QR$ فإن $m\angle 1 > m\angle 2$	

الفصل الخامس: الأشكال الرباعية

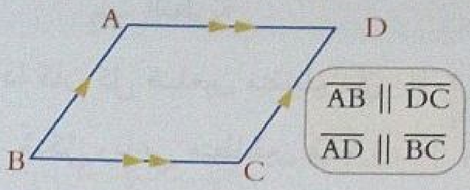
أساسيات عن المضلع

المقصود به	مجموعة قطع مستقيمة متقاطعة في نهايتها بحيث تُكَوِّن شكلاً مغلقاً	
مثال على المضلع	الشكل ABCDE يسمى مضلعاً خماسياً	
قطر المضلع	{ قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين }	
مثال على القطر	في الشكل المجاور $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ قطران للمضلع الخماسي ABCDE	
نظرية مجموع قياسات زوايا المضلع الداخلية	إذا كان n عدد أضلاع مضلع محدب و S مجموع قياسات زواياه الداخلية فإن .. $\boxed{S = 180^\circ\times(n-2)}$	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور n = 5 ؛ ومنه فإن .. $S = 180^\circ\times(n-2) = 180^\circ\times(5-2) = 540^\circ$	
فائدة	$\boxed{\text{قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم} = \frac{180^\circ\times(n-2)}{n}}$ حيث n عدد أضلاع المضلع.	

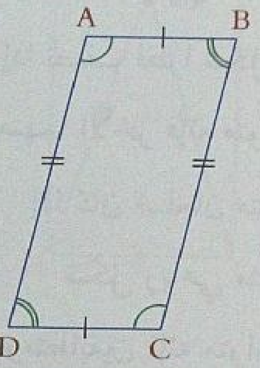
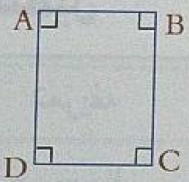
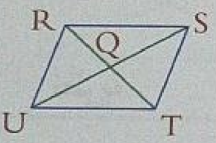
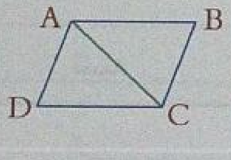
الزوايا الخارجية للمضلع

الزاوية الخارجية للمضلع	{ زاوية مكونة من أحد أضلاع المضلع وامتداد ضلع آخر }	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور .. $\angle BCE$ تسمى زاوية خارجية للمضلع ABCD	
نظرية مجموع قياسات زوايا المضلع الخارجية	إذا كان المضلع محدباً فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية ـ زاوية واحدة عند كل رأس ـ يساوي 360°	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور .. $m\angle1+m\angle2+m\angle3+m\angle4+m\angle5 = 360^\circ$	
تنبيه	الزاوية الخارجية والزاوية الداخلية لأي مضلع زاويتان متجاورتان على مستقيم	

متوازي الأضلاع

تعريفه	{ شكل رباعي كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان }	 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
التوضيح بالرسم	الشكل المجاور ABCD يسمى متوازي أضلاع ويرمز له بالرمز ▱ABCD	

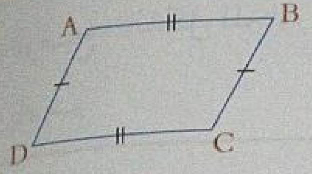
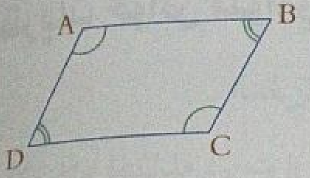
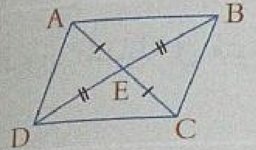
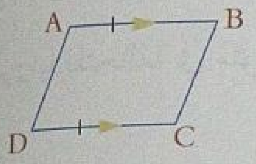
نظريات خواص متوازي الأضلاع

النظرية	التوضيح بالرموز	الرسم
الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة	$\overline{DC} \cong \overline{AB}$ و $\overline{DA} \cong \overline{CB}$	
الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة	$\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$	
الزوايا المتخالفة في متوازي الأضلاع متكاملة	$m\angle A+m\angle B = 180^\circ$ و $m\angle B+m\angle C = 180^\circ$ و $m\angle C+m\angle D = 180^\circ$ و $m\angle D+m\angle A = 180^\circ$	
إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قوائم	$m\angle G = 90^\circ$ و $m\angle H = 90^\circ$ و $m\angle J = 90^\circ$ و $m\angle K = 90^\circ$	
قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر	$\overline{RQ} \cong \overline{QT}$ و $\overline{SQ} \cong \overline{QU}$	
قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين	$\Delta ACD \cong \Delta ACB$	

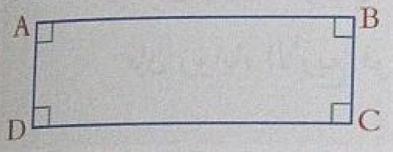
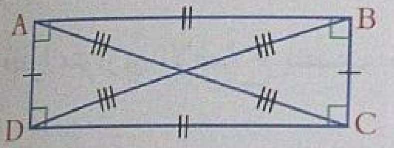
فائدة: إحداثي نقطة المتصف بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) يعطى بالعلاقة ..

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

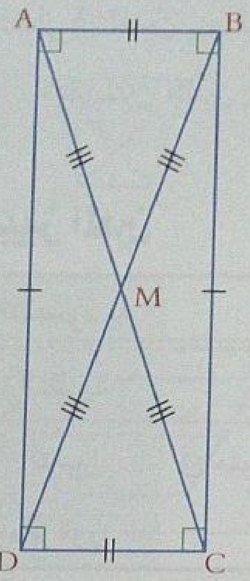
نظريات تمييز متوازي الأضلاع

النظرية	التوضيح بالرموز	الرسم
إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ فإن الشكل ABCD متوازي أضلاع	
إذا كانت كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي متطابقتين فإنه متوازي أضلاع	إذا كان $\angle ABC \cong \angle ADC$ و $\angle BAD \cong \angle BCD$ فإن .. الشكل ABCD متوازي أضلاع	
إذا نَصَّف قطرا شكل رباعي كل منهما الآخر فإنه متوازي أضلاع	إذا كان $AE = CE$ و $BE = DE$ فإن .. الشكل ABCD متوازي أضلاع	
إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإنه متوازي أضلاع	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ فإن .. الشكل ABCD متوازي أضلاع	

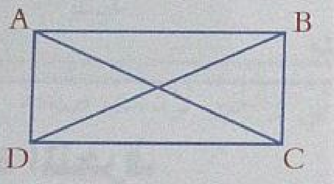
المستطيل

تعريفه	{ شكل رباعي زواياه الأربع قوائم }	
التوضيح بالرسم	الشكل المجاور ABCD يسمى مستطيلاً	
نظرية	إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً فإن قطريه متطابقان، أي أن .. $\overline{BD} \cong \overline{AC}$	
تنبيه	للمستطيل جميع خواص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى أن قطريه متطابقان	

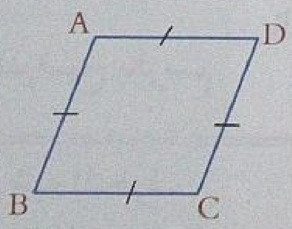
خصائص المستطيل

الخاصية	التوضيح بالرموز	الرسم
الأضلاع المتقابلة في المستطيل متطابقة ومتوازية	$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	
الزوايا المتقابلة في المستطيل متطابقة	$\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$	
الزوايا المتخالفة في المستطيل متكاملة	$m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ و $m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ و $m\angle C + m\angle D = 180^\circ$ و $m\angle D + m\angle A = 180^\circ$	
قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الآخر	$\overline{AC} \cong \overline{BD}$ و $BM = MD$ و $AM = MC$	
المستطيل زواياه الأربع قوائم	$m\angle A = 90^\circ$ و $m\angle B = 90^\circ$ و $m\angle C = 90^\circ$ و $m\angle D = 90^\circ$	

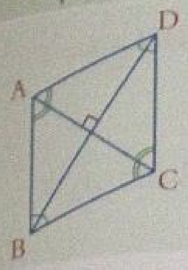
تمييز المستطيل

المقصود به	تحديد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً أم لا	
النظرية	إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنه مستطيل	
التعبير بالرموز	في متوازي الأضلاع ABCD المجاور .. إذا كان $\overline{BD} \cong \overline{AC}$ فإن ABCD مستطيل	

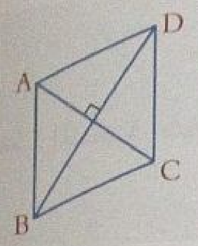
المعين

تعريفه	{ شكل رباعي جميع أضلاعه متطابقة }	
التوضيح بالرسم	الشكل المجاور ABCD يسمى معيناً	
تنبيه	المعين حالة خاصة من متوازي الأضلاع وله جميع خصائص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى خصائص أخرى	

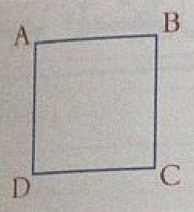
من خصائص المعين

الخاصية	التوضيح بالرموز	الرسم
قطرا المعين متعامدان	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$	
القطر في المعين ينصف الزاويتين المتقابلتين اللتين يمر بهما	$\angle DAC \cong \angle BAC \cong \angle DCA \cong \angle BCA$ و $\angle ABD \cong \angle CBD \cong \angle ADB \cong \angle CDB$	

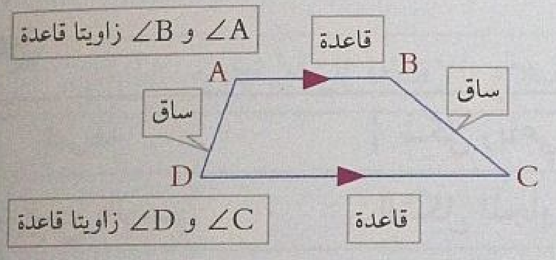
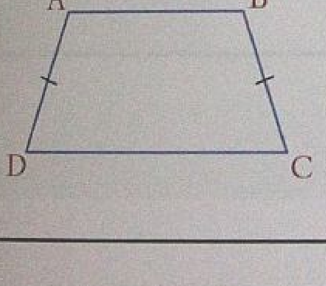
تمييز المعين

المقصود به	تحديد ما إذا كان متوازي الأضلاع معيناً أم لا	
النظرية	إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متعامدين فإنه معين	
التعبير بالرموز	في متوازي الأضلاع ABCD المجاور .. إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ فإن ABCD معين	

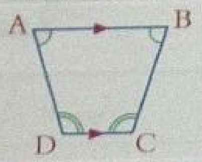
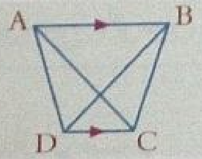
المربع

المقصود به	شكل رباعي يحقق خواص المستطيل والمعين في آن واحد	
التوضيح بالرسم	الشكل المجاور ABCD يسمى مربعاً	
تنبيه	المربع حالة خاصة من متوازي الأضلاع وله جميع خصائص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى خصائص المستطيل والمعين	

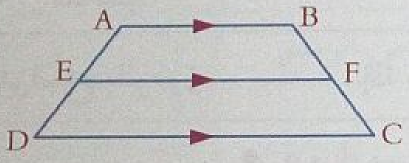
شبه المنحرف

تعريفه	{ شكل رباعي فيه فقط ضلعان متوازيان }	
التوضيح بالرسم	الشكل المجاور ABCD يسمى شبه منحرف	
شبه المنحرف متطابق الساقين	شبه منحرف فيه الضلعين غير المتوازيين متطابقان	
التوضيح بالرسم	الشكل المجاور ABCD يسمى شبه منحرف متطابق الساقين	

نظريات شبه المنحرف متطابق الساقين

النظرية	التوضيح بالرموز	الرسم
زاويتا كل قاعدة لشبه المنحرف متطابق الساقين متطابقتان	$\angle DAB \cong \angle CAB$ و $\angle ADC \cong \angle BCD$	
قطرا شبه المنحرف متطابق الساقين متطابقان	$\overline{AC} \cong \overline{BD}$	

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

المقصود بها	قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ساقي شبه المنحرف	
تنبيه	القطعة المتوسطة على بعدين متساويين من القاعدتين	
نظرية	القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلاً من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طوليهما	
التعبير الرمزي	$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$ و $EF = \frac{1}{2}(AB+DC)$	

البرهان الإحداثي

المقصود به	نوع من البراهين يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية
خطوات رسم الأشكال على المستوى الإحداثي	(١) نضع رأس المضلع أو مركزه عند نقطة الأصل. (٢) نرسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المضلع على أحد المحورين. (٣) نضع المضلع في الربع الأول من المستوى الإحداثي إن أمكن. (٤) نستعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

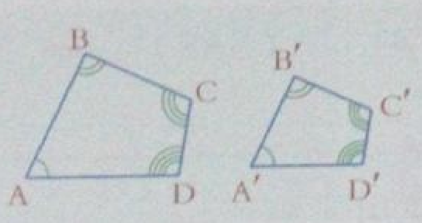
النسبة

النسبة	{ مقارنة بين كميتين باستعمال القسمة }
التوضيح بالرموز	نسبة a إلى b تُكتَب بالصورة $\frac{a}{b}$ أو بالصورة a : b حيث $b \neq 0$
مثال توضيحي	إذا كان عُمر أحمد 15 سنة وعُمر فهد 7 سنوات فإن نسبة عُمر أحمد إلى عُمر فهد تُكتب بإحدى الصورتين $\frac{15}{7}$ أو 15 : 7
تنبيهان	• يجب وضع النسبة في أبسط صورة؛ فمثلاً النسبة $\frac{8}{6}$ تكتب $\frac{4}{3}$ أو 4 : 3 . • النسبة التي مقامها الواحد تسمى نسبة الوحدة.

التناسب

التناسب	{ معادلة تنص على تساوي نسبتين }
التوضيح بالرموز	إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نسبتان متساويتين فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ يسمى تناسباً
تنبيهان	• a و d يسميان طرفا التناسب، أما c و b فيسميان وسطا التناسب. • حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين؛ أي أن .. $ad = cd$
شرط التناسب	لكل عددين a و c ولكل عددين غير صفريين b و d .. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $ad = cd$
مثال توضيحي	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ يُكوِّن تناسباً إذا وفقط إذا كان $3\times4 = 2\times6$
حل التناسب	إيجاد قيمة المتغير التي تجعل التناسب صحيحاً
مثال توضيحي	حَل التناسب $\frac{x}{2} = \frac{6}{4}$ هو .. $4x = 6\times2$ $4x = 12$ $x = \frac{12}{4} = 3$

التشابه

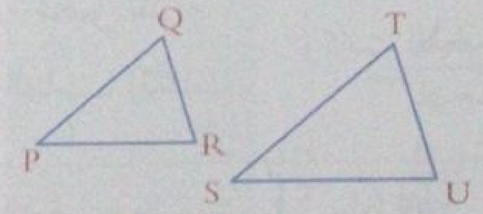
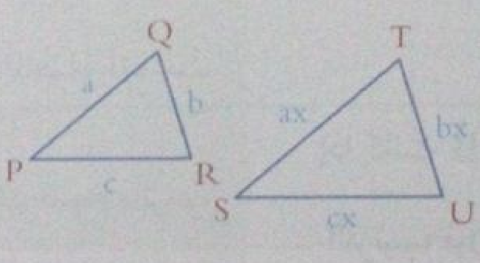
المقصود به	يتشابه المضلعان إذا كان لهما الشكل نفسه	
المضلعات المتشابهة	يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة	
التوضيح الرموز	$ABCD \sim A'B'C'D'$	
تنبيه	يجب ترتيب رؤوس المضلع في عبارة التشابه لتحديد الأضلاع والزوايا المتناظرة	

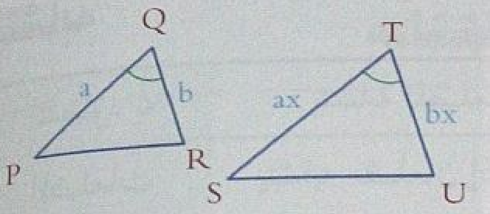
مثال توضيحي

عبارة التشابه	الزوايا المتناظرة	الأضلاع المتناظرة
$ABCD \sim EFGH$	$\angle A \cong \angle E$ و $\angle B \cong \angle F$ و $\angle C \cong \angle G$ و $\angle D \cong \angle H$	$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$

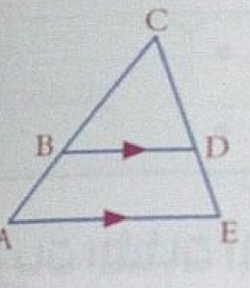
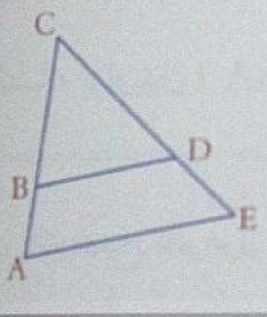
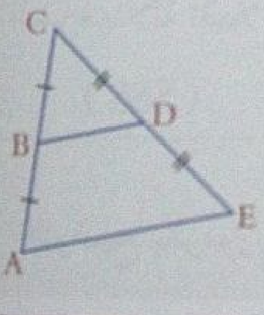
معامل التشابه	{ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين }
تنبيه	معامل التشابه يسمى أحياناً مقياس الرسم
فائدتان	• المضلعان المتطابقان متشابهان والعكس غير صحيح. • نسبة التشابه بين مضلعين متطابقين تساوي 1 : 1 .

نظريات المثلثات المتشابهة

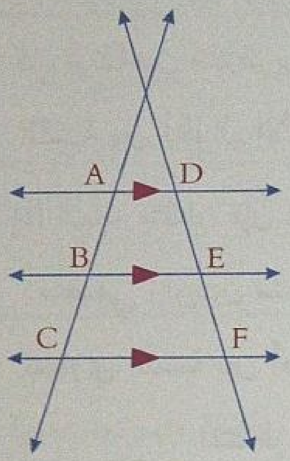
التشابه بزاويتين (AA)	إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر فإن المثلثين متشابهان	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\angle Q \cong \angle T$ و $\angle P \cong \angle S$ فإن $\triangle PQR \sim \triangle STU$	
التشابه بثلاثة أضلاع (SSS)	إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متناسبة فإن المثلثين متشابهان	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU} = \frac{RP}{US}$ فإن $\triangle PQR \sim \triangle STU$	

التشابه بضلعين وزاوية محصورة (SAS)	إذا كان طولا ضلعين في مثلث متناسبين مع طولي الضلعين المناظرين في مثلث آخر والزاويتان المحصورتان متطابقتين فإن المثلثين متشابهان	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TU}$ و $\angle T \cong \angle Q$ فإن .. $\Delta PQR \sim \Delta STU$	
من خصائص التشابه	تشابه المثلثات علاقة انعكاسية ومتماثلة ومتعدية	
التوضيح بالرموز	• **الانعكاس**: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$. • **التماثل**: إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ فإن $\Delta DEF \sim \Delta ABC$. • **التعدي**: إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ و $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ فإن .. $\Delta ABC \sim \Delta GHI$	

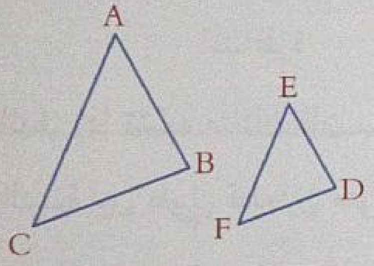
نظريات الأجزاء المتناسبة للمثلثات

نظرية التناسب للمثلث	إذا وازى مستقيم ضلعاً من أضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين فإنه يقسم هذين الضلعين إلى قطع متناسبة الأطوال	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ فإن $\frac{CB}{BA} = \frac{CD}{DE}$	
عكس نظرية التناسب للمثلث	إذا قطع مستقيم ضلعين لمثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة وكانت الأطوال المتناظرة منها متناسبة فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث للمثلث	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\frac{CB}{BA} = \frac{CD}{DE}$ فإن $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$	
نظرية القطعة المنصفة للمثلث	القطعة المنصفة للمثلث توازي ضلعاً للمثلث، وطولها نصف طوله	
التوضيح بالرموز	إذا كانت B و D نقطتي منتصف $\overline{CA}$ و $\overline{EC}$ على الترتيب فإن $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ و $BD = \frac{1}{2}AE$	

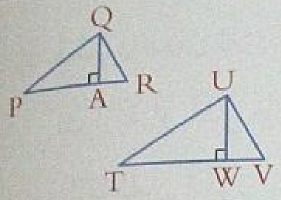
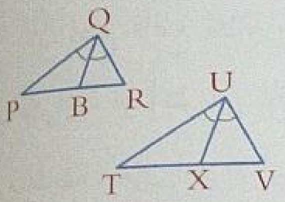
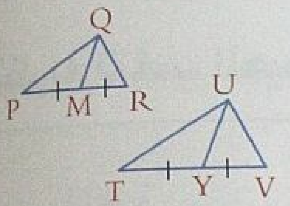
نتائج المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

النتيجة	التوضيح بالرموز	الرسم
إذا قطع قاطعان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أجزاء القاطعين تكون متناسبة	إذا كان $\overleftrightarrow{DA} \parallel \overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{FC}$ فإن .. $\frac{AC}{BC}=\frac{DF}{EF}$ و $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ $\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$ و	
إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر، وكانت أجزاؤه متطابقة، فإن أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ فإن .. $\overline{DE} \cong \overline{EF}$	

نظرية تناسب المحيطين

النظرية	إذا كان المثلثان متشابهين فإن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ فإن .. $\frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle EDF}=\frac{AB}{ED}=\frac{CB}{FD}=\frac{AC}{EF}$	
مثال توضيحي	إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle EDF$ ومحيط $\triangle ABC$ يساوي 18 ومحيط $\triangle EDF$ يساوي 12 و $AB = 6$ فإن .. $\frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle EDF}=\frac{AB}{ED}$ $\frac{18}{12}=\frac{6}{ED} \Rightarrow ED=\frac{12\times 6}{18}=4$	
فائدة	إذا كان المثلثان المتشابهان متطابقين فإن النسبة بين محيطيهما تساوي الواحد	

نظريات القطع المستقيمة الخاصة لمثلثين متشابهين

النظرية	التوضيح بالرموز	الرسم
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي كل ارتفاعين متناظرين فيهما تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة	إذا كان $\Delta PRQ \sim \Delta TVU$ فإن .. $\frac{QA}{UW} = \frac{PR}{TV} = \frac{QR}{UV} = \frac{PQ}{TU}$	
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي منصفي زاويتين متناظرتين فيهما تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة	إذا كان $\Delta PRQ \sim \Delta TVU$ فإن .. $\frac{QB}{UX} = \frac{PR}{TV} = \frac{QR}{UV} = \frac{PQ}{TU}$	
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي قطعتين متوسطتين متناظرتين فيهما تساوي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة	إذا كان $\Delta PRQ \sim \Delta TVU$ فإن .. $\frac{QM}{UY} = \frac{PR}{TV} = \frac{QR}{UV} = \frac{PQ}{TU}$	

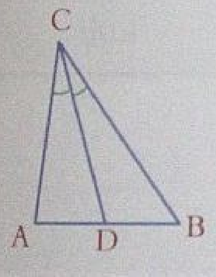
فائدة: إذا تشابه مثلثان فإن ..

النسبة بين طولي قطعتين متوسطتين متناظرتين = النسبة بين ارتفاعين متناظرين = النسبة بين طولي قطعتين متناظرتين = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين

وبالرموز ..

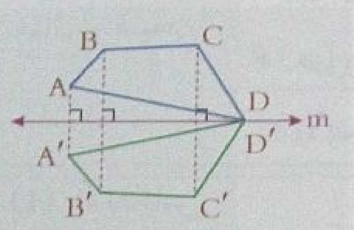
$$\frac{QA}{UW} = \frac{QB}{UX} = \frac{QM}{UY} = \frac{PR}{TV}$$

نظرية منصف الزاوية

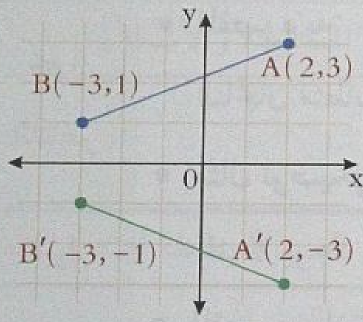
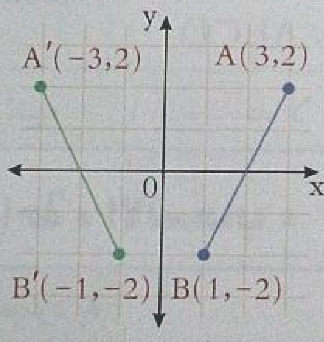
النظرية	منصف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين	
التوضيح بالرموز	إذا كانت $\overline{CD}$ منصفة لـ $\angle ACB$ فإن .. $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$ ← القطعتان المشتركتان بالرأس A ← القطعتان المشتركتان بالرأس B	

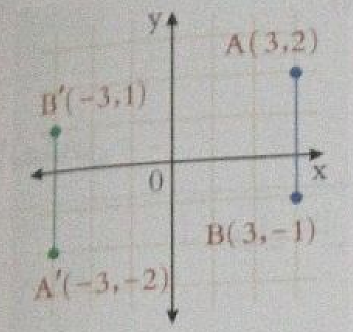
الفصل السابع: التحويلات الهندسية

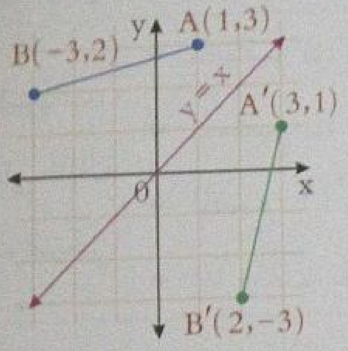
الانعكاس

تعريفه	{ تحويل يمثل قلب الشكل في نقطة أو في خط مستقيم أو في مستوى }	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور: $A'B'C'D'$ يمثل انعكاساً للشكل $ABCD$ في المستقيم m	
تنبيهات على المثال التوضيحي	- المستقيم m يسمى خط الانعكاس. - المستقيم m ينصف القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطة وصورتها ويكون عمودياً عليها. - المضلع $A'B'C'D' \cong$ المضلع $ABCD$. - إذا وقعت نقطة على خط الانعكاس فإن صورتها هي النقطة نفسها.	
فائدة	الانعكاس يحافظ على المسافات وقياسات الزوايا والقطع المستقيمة والأشكال	

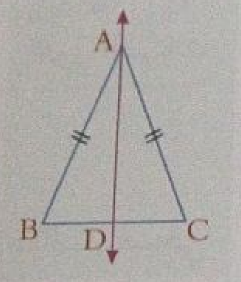
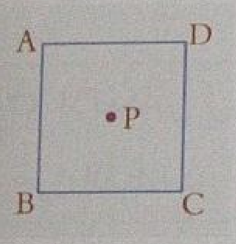
الانعكاسات في المستوى الإحداثي

(١) الانعكاس في محور السينات	صورة النقطة (a,b) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة $(a,-b)$	
مثال توضيحي	- صورة النقطة $(2,3)$ بالانعكاس في محور السينات هي النقطة $(2,-3)$. - صورة النقطة $(-3,1)$ بالانعكاس في محور السينات هي النقطة $(-3,-1)$.	
(٢) الانعكاس في محور الصادات	صورة النقطة (a,b) بالانعكاس في محور الصادات هي النقطة $(-a,b)$	
مثال توضيحي	- صورة النقطة $(3,2)$ بالانعكاس في محور الصادات هي النقطة $(-3,2)$. - صورة النقطة $(1,-2)$ بالانعكاس في محور الصادات هي النقطة $(-1,-2)$.	

(٣) الانعكاس حول نقطة الأصل	صورة النقطة $A(a,b)$ بالانعكاس حول نقطة الأصل هي النقطة $A'(-a,-b)$	
مثال توضيحي	• صورة النقطة $A(3,2)$ بالانعكاس حول نقطة الأصل هي النقطة $A'(-3,-2)$. • صورة النقطة $B(1,-2)$ بالانعكاس حول نقطة الأصل هي النقطة $B'(-1,2)$.	

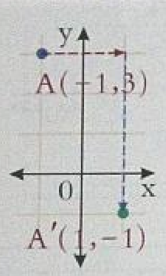
(٤) الانعكاس حول المستقيم $y = x$	صورة النقطة $A(a,b)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$ هي النقطة $A'(b,a)$	
مثال توضيحي	• صورة النقطة $A(1,3)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$ هي النقطة $A'(3,1)$. • صورة النقطة $B(-3,2)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$ هي النقطة $B'(2,-3)$.	

محاور ونقاط التناظر

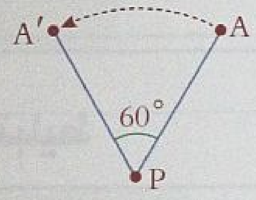
محور التناظر	• **المقصود به:** خط مستقيم يمكن طي الشكل عليه بحيث يكون الجزآن الناتجان متطابقين. • **مثال توضيحي:** في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{AD}$ محور تناظر لـ ΔABC .	
تنبيه	قد لا يوجد للشكل محور تناظر وقد يوجد له أكثر من محور تناظر	
نقطة التناظر	• **المقصود بها:** نقطة تنعكس عليها جميع نقاط الشكل. • **مثال توضيحي:** في الشكل المجاور النقطة P هي نقطة تناظر للمربع ABCD .	
تنبيه	قد لا يوجد للشكل نقطة تناظر وإذا وجدت فهي وحيدة	

الإزاحة « الانسحاب »

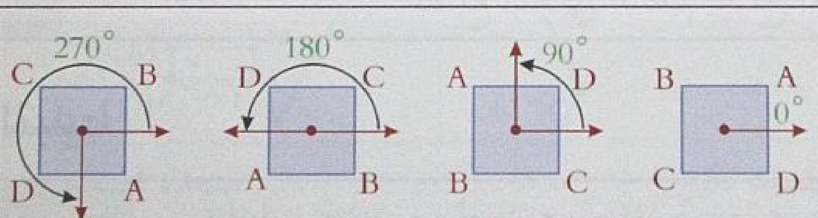
المقصود به	تحويل ينقل جميع نقاط الشكل مسافات متساوية وفي الاتجاه نفسه
التوضيح بالرموز	صورة النقطة $P(x,y)$ بالإزاحة هي النقطة $P'(x+a,y+b)$ حيث: a مقدار الإزاحة الأفقية و b مقدار الإزاحة الرأسية.

تنبيهات	• إذا كانت a موجبة تكون الإزاحة لليمين. • إذا كانت b موجبة تكون الإزاحة لأعلى. • إذا كانت a سالبة تكون الإزاحة لليسار. • إذا كانت b سالبة تكون الإزاحة لأسفل.	
مثال توضيحي	صورة النقطة $A(-1,3)$ بإزاحة قدرها وحدتين لليمين و 4 وحدات لأسفل هي .. $A(-1,3) \xrightarrow[\text{4 وحدات لأسفل}]{\text{وحدتان لليمين}} A'(-1+2,3-4) = A'(1,-1)$	
فائدة	الإزاحة تحافظ على المسافات وقياسات الزوايا والقطع المستقيمة والأشكال	

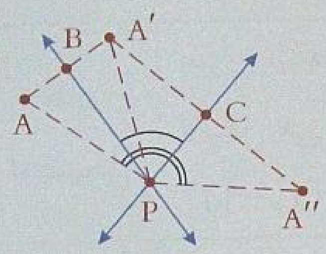
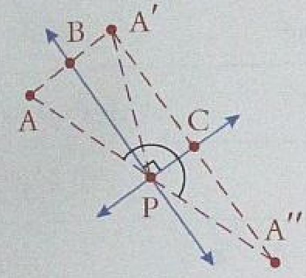
الدوران

المقصود به	تحويل تدور به كل نقطة من نقاط الشكل بزاوية معينة واتجاه معين حول نقطة ثابتة	
مركز الدوران	النقطة الثابتة التي تدور حولها نقاط الشكل	
زاوية الدوران	الزاوية التي تدور بها نقاط الشكل حول مركز الدوران	
مثال توضيحي	• A' هي صورة A . • P هي مركز الدوران. • $\angle APA'$ هي زاوية الدوران.	
تنبيه	زاوية الدوران إما أن تكون في اتجاه حركة عقارب الساعة أو عكس اتجاه حركة عقارب الساعة	
فائدة	الدوران يحافظ على المسافات وقياسات الزوايا والقطع المستقيمة والأشكال	

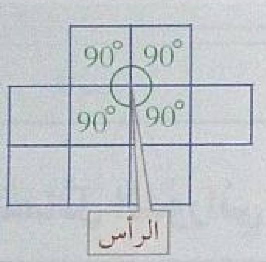
التماثل الدوراني

المقصود به	دوران الشكل حول نقطة بزاوية أقل من $360°$ لتكون الصورة مطابقة للأصل تماماً
رتبة التماثل الدوراني	عدد الزوايا التي تعطي للشكل التماثل الدوراني
مقدار التماثل الدوراني	يساوي $360°$ مقسومة على رتبة التماثل الدوراني
مثال توضيحي	 • التماثل الدوراني للمربع من الرتبة الرابعة. • $\frac{360°}{4} = 90°$ = مقدار التماثل الدوراني للمربع.

نظريات على الدوران

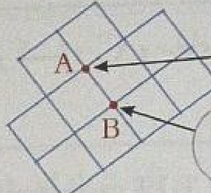
نظرية	إذا كانت A في أي دوران هي النقطة الأصلية ، و A'' هي الصورة الناتجة من دوران A حول مركز الدوران P ، يكون قياس زاوية الدوران $\angle APA''$ مساوياً ضعف قياس الزاوية الحادة أو القائمة الناتجة من تقاطع خطي الانعكاس	
التوضيح بالرموز	إذا كانت A'' هي صورة A بدوران مركزه نقطة تقاطع خطي الانعكاس المتقاطعين في P فإن .. $m\angle APA'' = 2m\angle BPC$	
نتيجة	إن نتيجة انعكاسين متعاقبين في خطين مستقيمين متعامدين تعادل دوراناً بزاوية قياسها 180° حول نقطة تقاطع هذين الخطين	
التوضيح بالرموز	إذا كانت A'' هي صورة A بدوران مركزه نقطة تقاطع خطي الانعكاس المتعامدين والمتقاطعين في P فإن .. $m\angle APA'' = 180^{\circ}$	

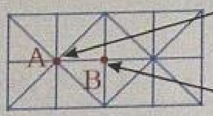
التبليط

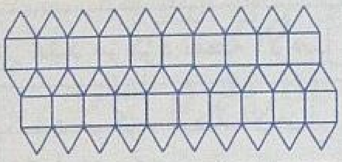
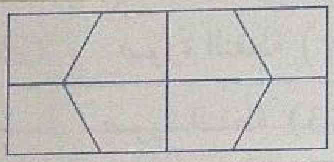
المقصود به	نمط يُستعمل لتغطية المستوى كاملاً بدون فراغات أو تقاطعات باستعمال شكل واحد وتحويلاته، أو مجموعة من الأشكال وتحويلاتها	
تنبيه	في التبليط يكون مجموع زوايا المضلعات المحيطة بأي نقطة 360°	
التبليط المنتظم	نوع من أنواع التبليط يتم باستخدام نوع واحد من المضلعات المنتظمة	
تنبيه	المضلع المنتظم يصلح للتبليط المنتظم إذا كان قياس زاويته الداخلية قاسماً للعدد 360	
مثال توضيحي	قياس زاوية المضلع الثلاثي المنتظم الداخلية 60° ، والعدد 60 قاسم للعدد 360 ؛ ومنه فإن .. المضلع الثلاثي المنتظم يصلح للتبليط المنتظم	

من أنواع التبليط

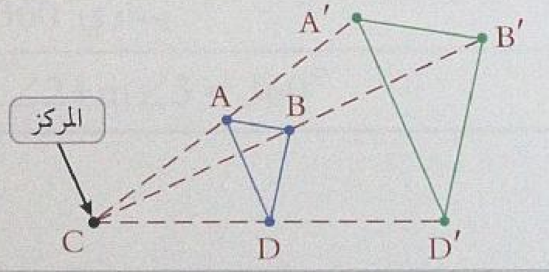
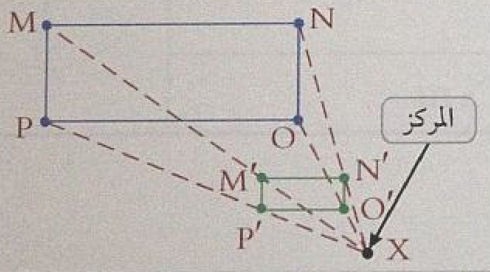
التبليط المتسق	تبليط يستخدم فيه أي نوع من المضلعات بحيث يحوي نفس الترتيبات للأشكال والزوايا عند كل رأس
التبليط غير المتسق	تبليط يستخدم فيه أي نوع من المضلعات بحيث **لا** يحوي نفس الترتيبات للأشكال والزوايا عند كل رأس

<table>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td><table><tr><th>متسق</th><th>غير متسق</th></tr><tr><td>

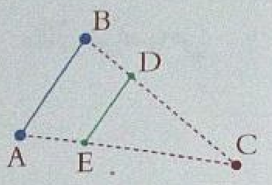
توجد أربع زوايا متطابقة عند الرأس A
توجد الزوايا الأربع المتطابقة نفسها عند الرأس B</td><td>

توجد ثماني زوايا متطابقة عند الرأس A
توجد أربع زوايا متطابقة عند الرأس B</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>التبليط شبه المنتظم</td><td>تبليط يستخدم فيه مضلعان منتظمان أو أكثر</td></tr>
<tr><td>التبليط غير المنتظم</td><td>تبليط يستخدم فيه مضلع غير منتظم أو أكثر</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td><table><tr><th>التبليط شبه المنتظم</th><th>التبليط غير المنتظم</th></tr><tr><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

التمدد

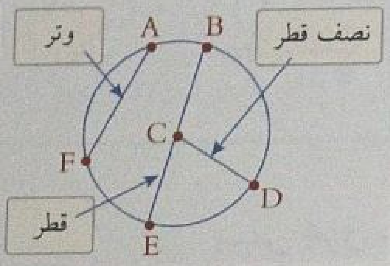
<table>
<tr><td>المقصود به</td><td>تحويل هندسي يحدث فيه تغير في قياسات الشكل</td></tr>
<tr><td>تحديد التمدد</td><td>يتحدد التمدد بمعرفة ..
• مركز التمدد.
• معامل التمدد r .</td></tr>
<tr><td>أنواع التمدد حسب قيمة r</td><td><table><tr><th>قيمة r</th><th>$|r| > 1$</th><th>$|r| < 1$</th><th>$|r| = 1$</th></tr><tr><td>نوع التمدد</td><td>تكبير</td><td>تصغير</td><td>تطابق</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td><table><tr><th>$r = 2$</th><th>$r = \frac{1}{2}$</th></tr><tr><td>
</td><td>
</td></tr><tr><td>التمدد تكبير</td><td>التمدد تصغير</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>تنبيه</td><td>إذا كان $r = 1$ فإن الصورة الناتجة تكون مطابقة للأصل</td></tr>
<tr><td>فائدة</td><td>$$\text{معامل التمدد} = \frac{\text{طول الصورة}}{\text{طول الأصل}}$$</td></tr>
</table>

نظريات على التمدد

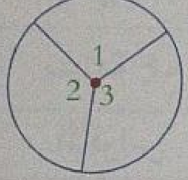
نظرية (1)	إذا كان التمدد الذي مركزه C ومعامله r ينقل A إلى E و B إلى D فإن .. $ED = \lvert r\rvert(AB)$ 
تنبيهان	• إذا كان $r > 0$ فإن A' تقع على $\overrightarrow{CA}$ ويكون $CA' = r\times CA$. • إذا كان $r < 0$ فإن A' تقع على $\overrightarrow{CA'}$ « الشعاع المعاكس لـ $\overrightarrow{CA}$ » ويكون $CA' = r\times CA$.
نظرية (2)	صورة النقطة $P(x,y)$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله r هي $P'(rx,ry)$
مثال توضيحي	صورة النقطة $P(1,3)$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 2 هي .. $P'(2\times1,2\times3) = P'(2,6)$

الفصل الثامن: الدائرة

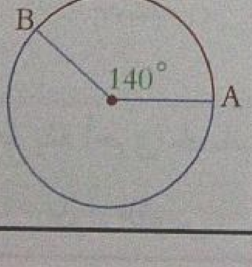
الدائرة ومحيطها

تعريفها	**{ المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوى التي تبعد مسافات متساوية عن نقطة ثابتة تدعى مركز الدائرة }**	
تنبيه	عادة تسمى الدائرة بمركزها؛ ففي الشكل التالي يُرمز للدائرة C بالرمز ⊙C	
الوتر	• **المقصود به:** أي قطعة مستقيمة يقع طرفاها على الدائرة. • **مثال توضيحي:** $\overline{AF}$ و $\overline{BE}$ وتران في الدائرة.	
القطر	• **المقصود به:** وتر يمر بمركز الدائرة. • **مثال توضيحي:** $\overline{BE}$ قطر في الدائرة.	
نصف القطر	• **المقصود به:** قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها في مركز الدائرة، والطرف الآخر على الدائرة. • **مثال توضيحي:** $\overline{CE}$ و $\overline{CB}$ و $\overline{CD}$ جميعها أنصاف أقطار في الدائرة.	
فائدة	قطر الدائرة يعدّ أطول وتر فيها	
محيط الدائرة	**إذا علم طول القطر d** $C = \pi d$ **إذا علم طول نصف القطر r** $C = 2\pi r$ حيث C محيط الدائرة.	

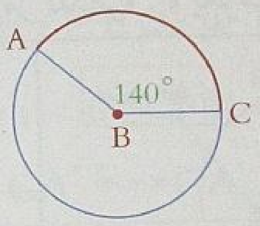
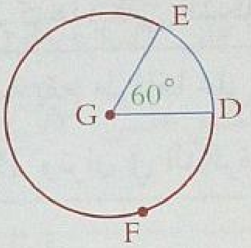
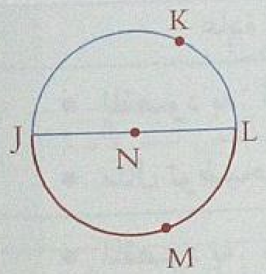
الزوايا المركزية

الزاوية المركزية	**{ زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة }**	
مجموع الزوايا المركزية	مجموع الزوايا المركزية في الدائرة والتي لا تحوي نقاطاً داخلية مشتركة يساوي 360°	
التوضيح بالرموز	$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$	

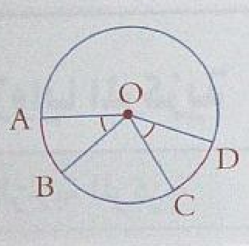
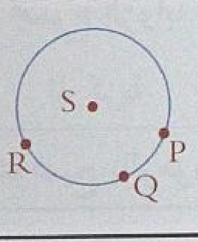
القوس

المقصود به	جزء من الدائرة	
قياسه	قياس القوس يساوي قياس زاويته المركزية	
التوضيح بالرموز	• $\overset{\frown}{AB}$: رمز القوس الأصغر الذي نهايتاه A و B . • $m\overset{\frown}{AB}$: رمز قياس القوس $\overset{\frown}{AB}$. • **مثال توضيحي:** $m\overset{\frown}{AB} = 140^\circ$.	

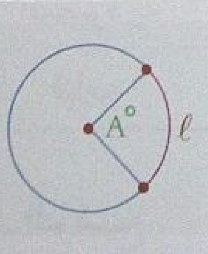
من أنواع أقواس الدائرة

	القوس الأصغر	القوس الأكبر	نصف الدائرة
المقصود به	القوس الذي قياسه أقل من 180°	القوس الذي قياسه أكبر من 180°	القوس الذي قياسه يساوي 180°
مثال			
تسميته	يسمى بحرفي نهايتيه $\overset{\frown}{AC}$	يسمى بحرفي نهايتيه ونقطة أخرى على القوس $\overset{\frown}{DFE}$	يسمى بحرفي نهايتيه ونقطة أخرى على القوس $\overset{\frown}{JML}$ و $\overset{\frown}{JKL}$
قياس القوس بالدرجات	$m\overset{\frown}{AC} = 140^\circ$	$m\overset{\frown}{DFE} = 360^\circ - 60^\circ$ $= 300^\circ$	$m\overset{\frown}{JML} = 180^\circ$ و $m\overset{\frown}{JKL} = 180^\circ$

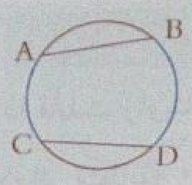
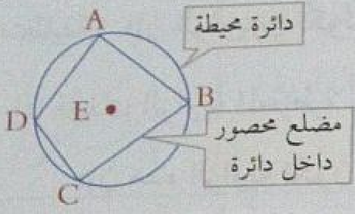
نظرية على أقواس الدائرة

النظرية	في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة يكون القوسان متطابقين إذا وفقط إذا كانت الزاويتان المركزيتان المناظرتان لهما متطابقتين	
التوضيح بالرسم	$\angle AOB \cong \angle DOC \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$	
مسلمة جمع الأقواس	القوس المكون من قوسين متجاورين يكون قياسه حاصل جمع قياسيهما	
التوضيح بالرموز	$m\overset{\frown}{PQ} + m\overset{\frown}{QR} = m\overset{\frown}{PQR}$	

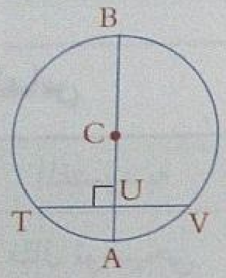
طول القوس

المقصود به	جزء من محيط الدائرة	
حسابه	طول القوس ← محيط الدائرة ← $\frac{A}{360} = \frac{\ell}{2\pi r}$ → قياس القوس بالدرجات → قياس الدائرة كاملة بالدرجات حيث: ℓ طول القوس ، A قياس القوس ، r نصف قطر الدائرة.	
طريقة أخرى لحساب طول القوس	$\boxed{\ell = C \times \frac{A}{360}}$	ℓ طول القوس C محيط الدائرة A قياس القوس

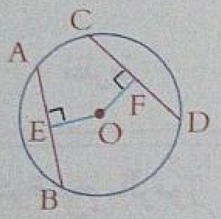
الأقواس والأوتار

نظرية	تتطابق الأقواس الصغرى في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة إذا وفقط إذا تطابقت الأوتار المناظرة لها	
التوضيح بالرموز	$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$	
الدائرة المحيطة بمضلع	• المقصود بها: دائرة تمر برؤوس المضلع. • مثال توضيحي: $\odot E$ تسمى دائرة محيطة بالمضلع ABCD .	

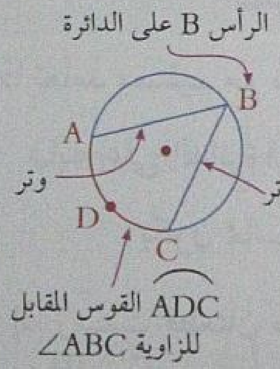
الأقطار والأوتار

نظرية	في الدائرة؛ إذا كان قطر الدائرة « أو نصف قطرها » عمودياً على وتر فيها فإنه ينصف الوتر وينصف قوسه أيضاً	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\overline{BA} \perp \overline{TV}$ فإن .. $\widehat{AT} \cong \widehat{AV}$ و $\overline{TU} \cong \overline{UV}$	

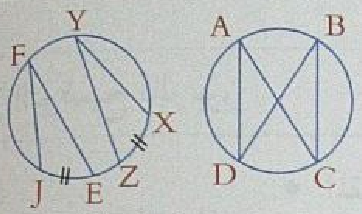
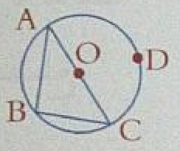
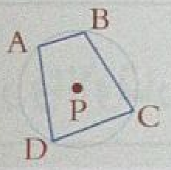
الأوتار المتطابقة والمسافة

نظرية	في الدائرة أو الدوائر المتطابقة: يكون الوتران متطابقين إذا وفقط إذا كان لهما البعد نفسه عن مركز الدائرة	
التوضيح بالرموز	$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow OE = OF$	

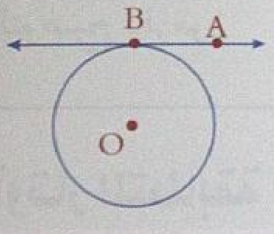
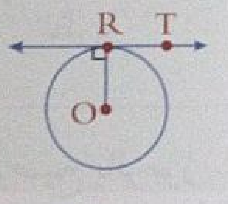
الزاوية المحيطية

المقصود بها	زاوية يقع رأسها على الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة	
التوضيح بالرموز	$\angle ABC$ تسمى **زاوية محيطية**	
قياسها	• نظرية: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها. • التوضيح بالرموز: $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{ADC}$.	

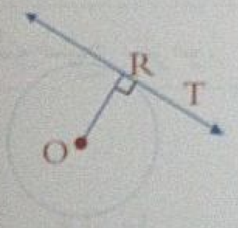
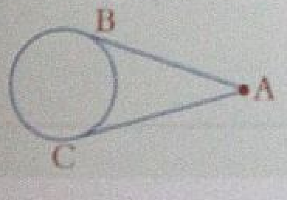
نظريات على الزوايا المحيطية

النظرية	التوضيح بالرموز	الرسم
إذا قابلت زاويتان محيطيتان في دائرة « أو دوائر متطابقة » القوس نفسه أو أقواساً متطابقة ؛ فإن الزاويتين تكونان متطابقتين	$\angle DAC \cong \angle DBC$ و $\angle JFE \cong \angle XYZ$	
إذا قابلت الزاوية المحيطية نصف دائرة فإن هذه الزاوية تكون قائمة	إذا كان $\widehat{ADC}$ نصف دائرة فإن .. $m\angle ABC = 90^\circ$	
إذا كان الشكل الرباعي محصوراً داخل دائرة فإن الزوايا المتقابلة تكون متكاملة	$\angle A$ و $\angle C$ متكاملتان و $\angle B$ و $\angle D$ متكاملتان	

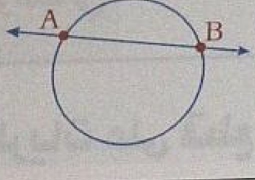
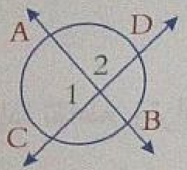
المماس

المقصود به	خط مستقيم يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة فقط	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور: $\overleftrightarrow{AB}$ يسمى مماساً للدائرة عند النقطة B	
نقطة التماس	• **المقصود بها**: النقطة المشتركة بين الدائرة والمماس. • **مثال توضيحي**: النقطة B تسمى نقطة التماس.	
نظرية	إذا كان مستقيم مماساً لدائرة فإنه يكون عمودياً على نصف القطر المار بنقطة التماس	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\overleftrightarrow{RT}$ مماساً فإن $\overleftrightarrow{RT} \perp \overleftrightarrow{OR}$	

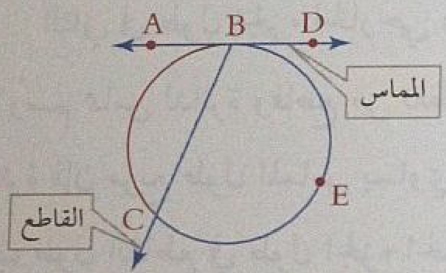
نظريات على المماسات

النظرية	التوضيح بالرموز	الرسم
إذا تعامد مستقيم مع نصف قطر دائرة عند نهايته على الدائرة؛ فإن هذا المستقيم يكون مماساً للدائرة	إذا كان $\overleftrightarrow{RT} \perp \overline{OR}$ فإن .. $\overleftrightarrow{RT}$ مماساً لـ $\odot O$ عند R	
إذا رسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان	إذا كانتا $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماستين فإن .. $\overline{AC} \cong \overline{AB}$	

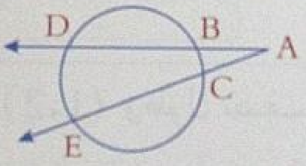
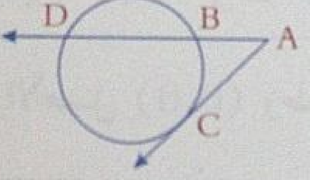
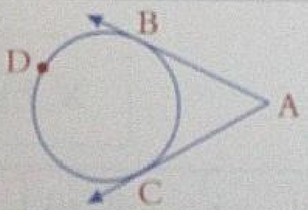
القاطع

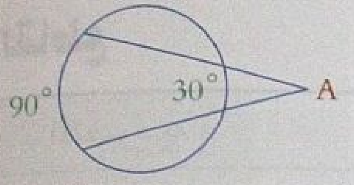
المقصود به	خط مستقيم يشترك مع الدائرة في نقطتين	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور: $\overleftrightarrow{AB}$ يسمى قاطعاً للدائرة عند النقطتين A و B	
نظرية	إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس أي من الزوايا المتكونة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس	
التوضيح بالرموز	$m\angle 1=\frac{1}{2}(m\widehat{AC}+m\widehat{BD})$ و $m\angle 2=\frac{1}{2}(m\widehat{AD}+m\widehat{BC})$	

نظرية الزاوية بين المماس والقاطع

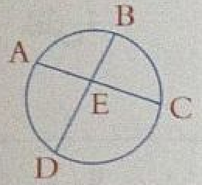
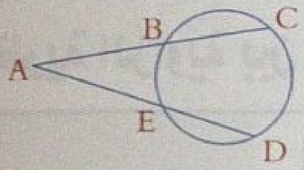
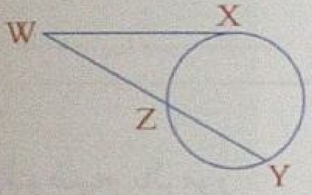
النظرية	إذا تقاطع قاطع ومماس عند نقطة التماس فإن قياس كل زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس الذي تقابله	
التوضيح بالرموز	$m\angle ABC=\frac{1}{2}m\widehat{BC}$ و $m\angle DBC=\frac{1}{2}m\widehat{BEC}$	

نظرية التقاطع خارج الدائرة

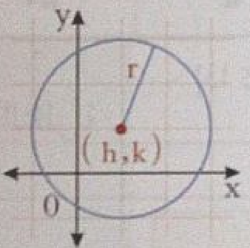
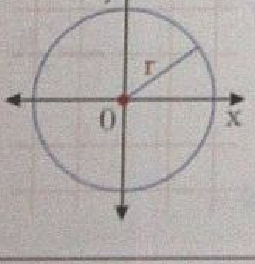
النظرية	إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان خارج دائرة فإن قياس الزاوية المتكونة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لهما		
التوضيح بالرسم	قاطعان		$m\angle A=\frac{1}{2}(m\widehat{DE}-m\widehat{BC})$
	مماس - قاطع		$m\angle A=\frac{1}{2}(m\widehat{DC}-m\widehat{BC})$
	مماسان		$m\angle A=\frac{1}{2}(m\widehat{BDC}-m\widehat{BC})$

مثال توضيحي	في الشكل المجاور .. $m\angle A = \frac{1}{2}(90^\circ - 30^\circ) = 30^\circ$	

نظريات على قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

النظرية	التوضيح بالرموز	الرسم
إذا تقاطع وتران داخل دائرة فإن حاصل ضرب طولي جزأي كل وتر متساويان	$AE \times EC = BE \times ED$	
إذا رُسم قاطعان إلى دائرة من نقطة خارجها فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه	$AC \times AB = AD \times AE$	
إذا رُسم مماس لدائرة وقاطع من نقطة خارج الدائرة فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه	$(WX)^2 = WY \times WZ$	

معادلة الدائرة

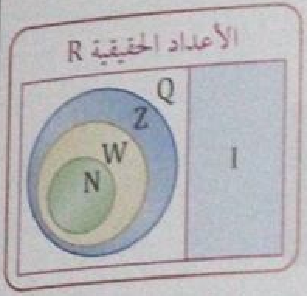
الصورة القياسية لمعادلة الدائرة	معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (h,k) وطول نصف قطرها r هي .. $\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$	
مثال توضيحي	معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $(1,2)$ وطول نصف قطرها 3 هي .. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$	
حالة خاصة لمعادلة الدائرة	معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل $(0,0)$ وطول نصف قطرها r هي .. $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$	
فائدة	ليس ضرورياً فك التربيع في معادلة الدائرة	

الفصل الأول: تحليل الدوال

الأعداد الحقيقية R

المجموعات الجزئية من R

الرمز	المجموعات	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 7, 18$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3, \ldots$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, \ldots$



الصفة المميزة	الصفة المميزة للمجموعة تستعمل لتعريف خصائص الأعداد ضمن المجموعة
مثال توضيحي	عبِّر عن الأعداد 2, 3, 4, 5, 6 بالصفة المميزة. $\{x \mid 2 \le x \le 6, x \in \text{W}\}$

الفترات

استعمالها	وصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

التعبير الرمزي

الرمزان [أو]	الرمزان (أو)	الرمزان $-\infty$ أو ∞
طرف الفترة ينتمي إليها	طرف الفترة لا ينتمي إليها	الفترة غير محدودة

نوعاها

فترات محدودة				
	$a \le x \le b$	$a < x < b$	$a \le x < b$	$a < x \le b$
	$[a, b]$	(a, b)	$[a, b)$	$(a, b]$

فترات غير محدودة					
	$x \ge a$	$x \le a$	$x > a$	$x \ge a$	$-\infty < x < \infty$
	$[a, \infty)$	$(-\infty, a]$	(a, ∞)	$[a, \infty)$	$(-\infty, \infty)$

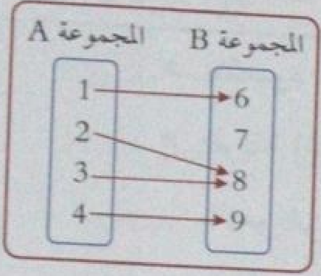
مثال توضيحي	اكتب المجموعة $-4 \le y < -1$ باستعمال رمز الفترة. $[-4, -1)$

الدالة

التعبير اللفظي	الدالة f من المجموعة A إلى المجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B

مثال توضيحي

في الشكل المجاور العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثلة في المخطط السهمي المجاور تمثل **دالة**.



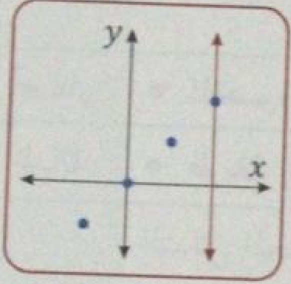
- تمثل المجموعة A **مجال الدالة** ورمزه D ..

$$D = \{1 , 2 , 3 , 4\}$$

- تتضمن المجموعة B **مدى الدالة** ورمزه R ..

$$R = \{6 , 8 , 9\}$$

اختبار الدالة

اختبار جدولة	اختبار الخط الرأسي
يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين	تُعرَّف الدالة هندسيًا إذا كان لا يمكن لنقطتين منها أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي
مثال توضيحي: في الجدول ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y .. ∴ العلاقة دالة	**مثال توضيحي:** **الخط الرأسي** في الشكل لم يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة .. ∴ مجموعة النقاط تمثل دالة 

y	x
5	−1
7	
9	1

مثال توضيحي

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$ فأوجد قيمة $f(12)$.

$$f(12) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1} = \frac{2(12)+3}{(12)^2-2(12)+1} = \frac{27}{121}$$

تحليل التمثيل البياني للدالة

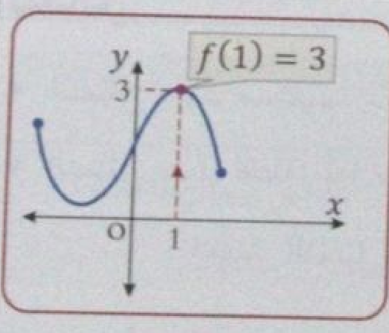
المقصود به

تقدير قيم الدالة وإيجاد مجالها ومداها ومقطعها مع محوري x , y وأصفارها

قيمة الدالة عند نقطة

- **المقصود بها:** طول العمود الواصل من النقطة على محور x إلى منحنى الدالة.
- **مثال توضيحي:** من الشكل المقابل لإيجاد قيمة الدالة عند $x = 1$ نجد أن ..

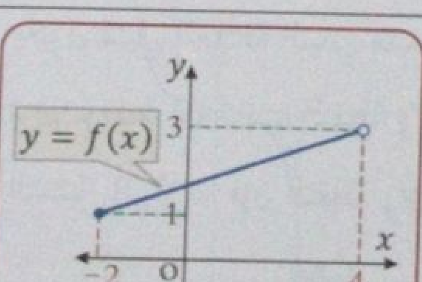
$$f(1) = 3$$



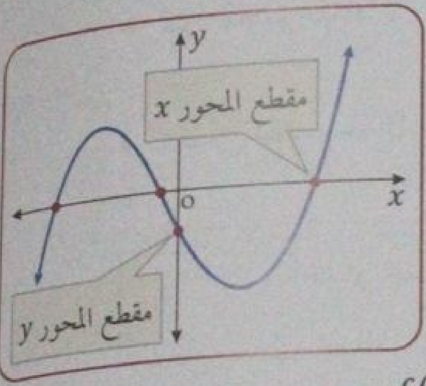
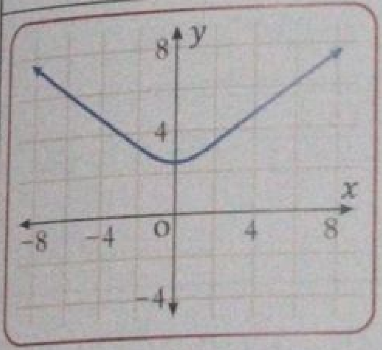
مجال ومدى الدالة

- **المجال:** نستعمل القيم على محور x لتحديد مجال الدالة.
- **المدى:** نستعمل القيم على محور y لتحديد مدى الدالة.
- **مثال توضيحي:** في الرسم المجاور ..

المجال هو $[-2, 4)$ ، **المدى هو** $[1, 3)$

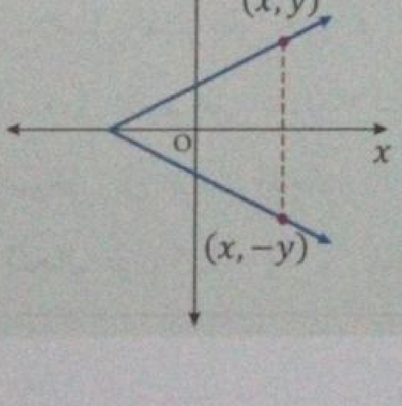


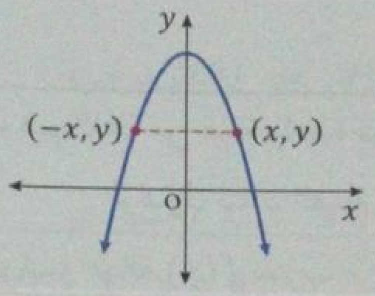
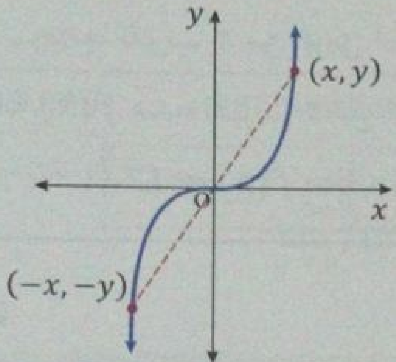
المقاطع وأصفار الدالة

المقاطع	• **المقصود بها**: النقاط التي يتقاطع عندها منحنى الدالة مع المحور x أو المحور y . • **طريقة إيجادها جبريًا**: يمكن الحصول على المقطع x بالتعويض $y = 0$ ، ولإيجاد المقطع y نُوجد $f(0)$. • **مثال توضيحي**: إيجاد المقطع x والمقطع y للدالة $f(x) = 3x + 5$ .. لإيجاد المقطع y نُوجد $f(0)$ .. $f(0) = 3(0) + 5 = 5$ ولإيجاد المقطع x نعوض عن $y = f(x) = 0$ ، أي نساوي الدالة بالصفر .. $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$ 
أصفار الدالة	• **المقصود بها**: نقاط تقاطع الدالة مع محور x . • **طريقة إيجادها**: نستعمل التمثيل البياني أو الحل الجبري لإيجاد أصفاره الدالة.
مثال توضيحي	الشكل المجاور يُبين التمثيل البياني للدالة $h(x) = \sqrt{x^2+6}$ ؛ أوجد قيمة تقريبية للمقطع y ثم أوجده جبريًا. بما أن المقطع y هو النقطة التي يتقاطع عندها منحنى الدالة مع المحور y فإن القيمة التقريبية للمقطع $y \approx 2.4$. نُوجد القيمة التقريبية للمقطع y جبريًا بالتعويض عن $x = 0$ .. $h(0) = \sqrt{(0)^2+6} \approx 2.4$ 

التماثل

- **التماثل حول مستقيم**: يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى.
- **التماثل حول نقطة**: إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها 180° حول النقطة فإنه لا يتغير.

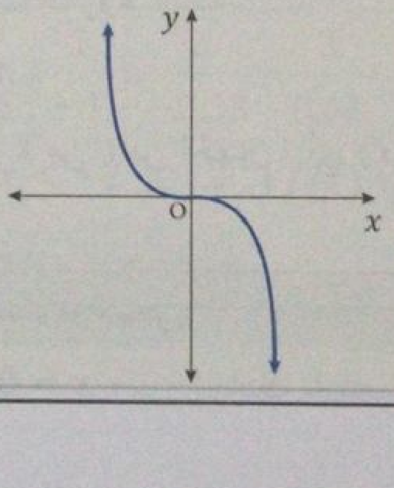
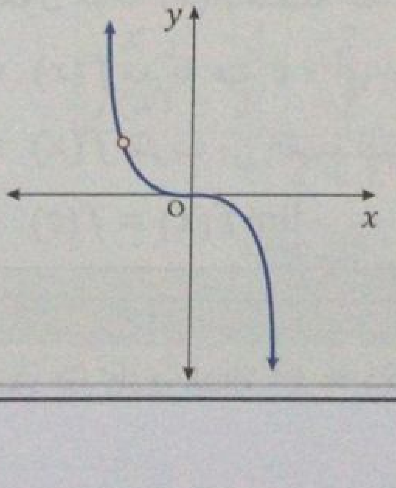
اختبار التمثيل البياني	النموذج	جبريًا
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة

يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x , -y)$ تقع عليه أيضًا		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة

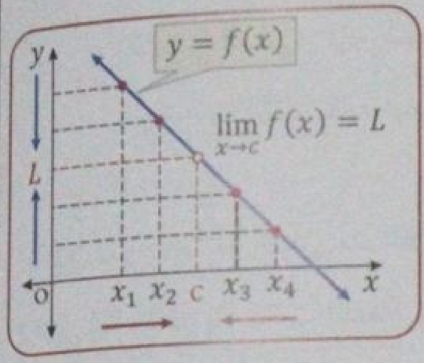
الدوال الزوجية والدوال الفردية

الدالة الزوجية	• **المقصود بها**: الدوال المتماثلة حول المحور y . • **الاختبار الجبري**: لكل x في مجال $f(x)$ يكون $f(-x) = f(x)$. • **مثال توضيحي**: لإثبات أن الدالة $f(x) = x^2$ زوجية .. $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Leftarrow$ الدالة زوجية
الدالة الفردية	• **المقصود بها**: الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل. • **الاختبار الجبري**: لكل x في مجال $f(x)$ يكون $f(-x) = -f(x)$. • **مثال توضيحي**: لإثبات أن الدالة $f(x) = x^3$ فردية .. $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \Leftarrow$ الدالة فردية

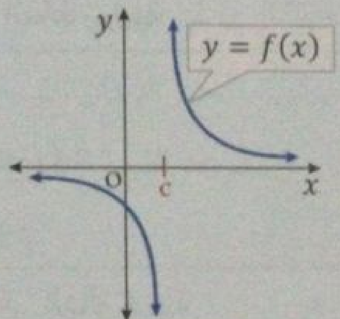
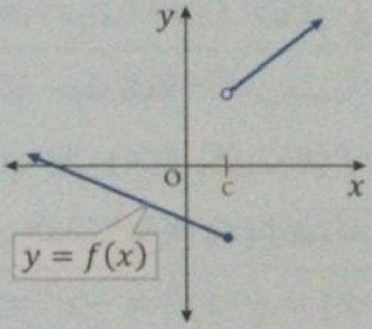
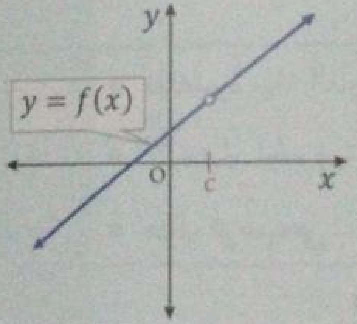
اتصال الدالة

المقصود به	عدم وجود أي انقطاع أو قفزة في مجموعة النقاط التي تُمثل الشكل البياني للدالة			
مثالان توضيحيان	**دالة متصلة**		**دالة غير متصلة**	

النهايات

المقصود بها	اقتراب قيم الدالة من قيمة واحدة دون الحاجة إلى الوصول لتلك القيمة	
المعنى الهندسي	إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين	
التعبير الرمزي	نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .. $\lim_{x \to c} f(x) = L$	

حالات عدم الاتصال

عدم اتصال لا نهائي	عدم اتصال قفزي	عدم اتصال نُقطي
عند $x = c$ .. إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار	عند $x = c$ .. إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين	عند $x = c$ .. إذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة في مجالها باستثناء $x = c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة « ○ »
		

اختبار الاتصال

اختبار الاتصال

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط التالية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ؛ أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين، أي $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

مثال توضيحي

حدد إذا كانت الدالة $f(x) = x^3$ متصلة عند $x = 0$ ؛ برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

- هل $f(0)$ موجودة؟

$$f(0) = (0)^3 = 0 \quad \Leftarrow \quad f(0)$$ موجودة

- هل $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة؟

نُكون جدولاً يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين ..

$f(x) = x^3, x > 0$				$f(x) = x^3, x < 0$			$f(x)$
0.1	0.01	0.001	0	−0.001	−0.01	−0.1	x
0.001	01 0.0	1 000 000 0		−0.000000001	−0.0001	−0.001	$f(x)$

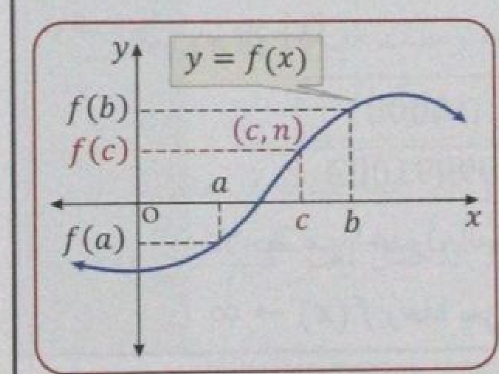
يُبين الجدول أنه عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 0 ..

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

- هل $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ؟

$$\lim_{x \to 0} x^3 = f(0) = 0 \quad \Leftarrow$$ الدالة متصلة عند $x = 0$

نظرية القيمة المتوسطة

استعمالها	تقريب أصفار الدوال المتصلة	
المعنى الهندسي	إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b بحيث أن $f(c) = n$	
موقع صفر الدالة	إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة؛ فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a ، b بحيث $f(c) = 0$ أي يوجد صفر للدالة بين a و b	

مثال توضيحي

ما الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = \frac{x^2-6}{x+4}$ في الفترة $[-3,4]$ ؟

نكون جدول القيم باستعمال الفترة $[-3,4]$ ..

4	3	2	1	0	−1	−2	−3	x
1.25	0.43	−0.33	−1	−1.5	−1.66	−1	3	$f(x)$

نُلاحظ تغير إشارة $f(x)$ في الفترتين $-3 < x < -2$ ، $2 < x < 3$ ..

$\therefore$ توجد أصفار حقيقية للدالة في هاتين الفترتين

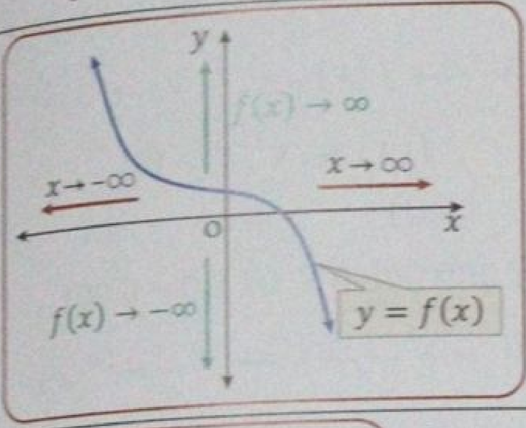
سلوك طرفي التمثيل البياني

المقصود به

وصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$

المعنى الهندسي

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

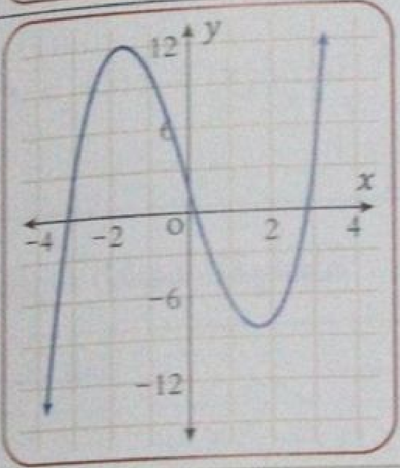


مثال توضيحي

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 9x + 2$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ بالنظر إلى اليمين، وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ بالنظر إلى اليسار.

التعزيز عدديًا: نُكوِّن جدولاً لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ ..



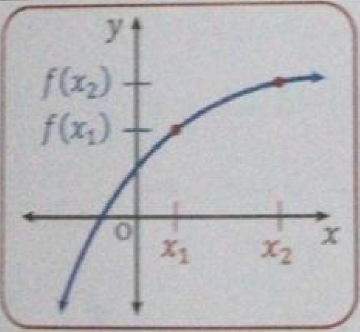
1000	100	0	−100	−1000	x
99991002	999102	2	−999098	−999990998	$f(x)$

نلاحظ من الجدول أنه عندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to -\infty$ ؛ وبالمثل عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to \infty$ وهذا يعزز الحل بمجرد النظر في التمثيل البياني السابق.

بعض خصائص الدوال

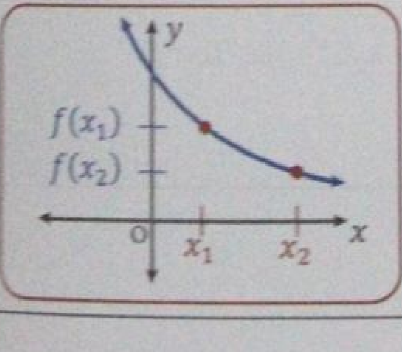
الدوال المتزايدة

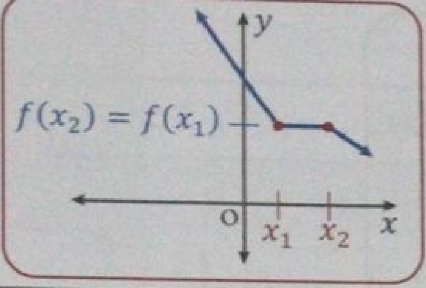
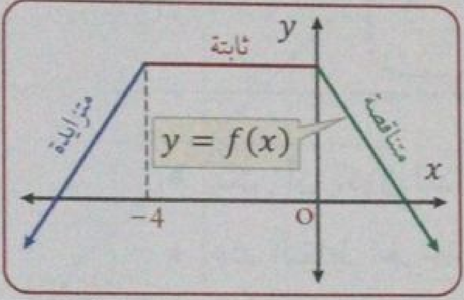
- **التعبير اللفظي:** تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.
- **التعبير الرمزي:** لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



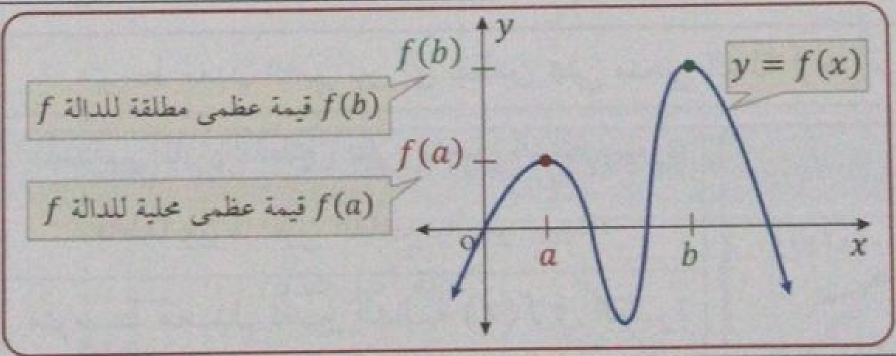
الدوال المتناقصة

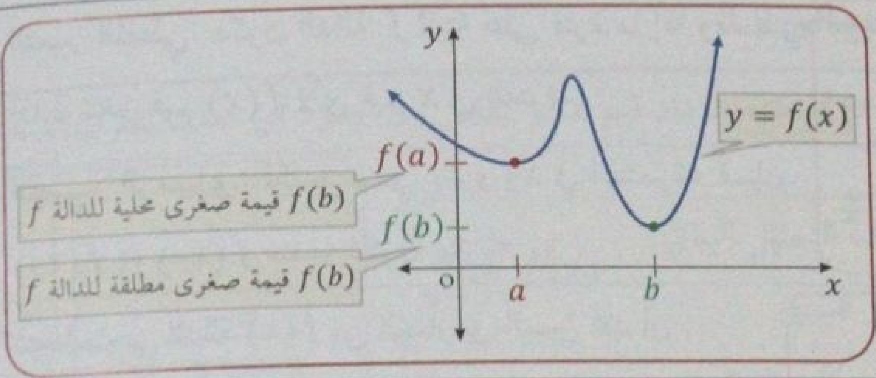
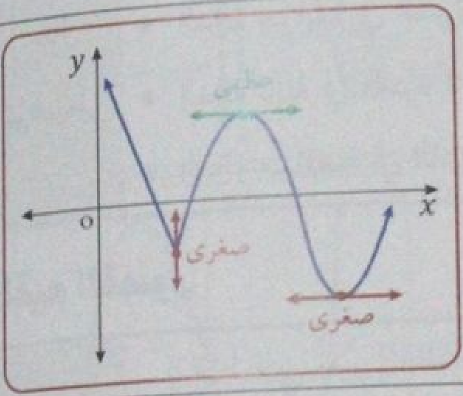
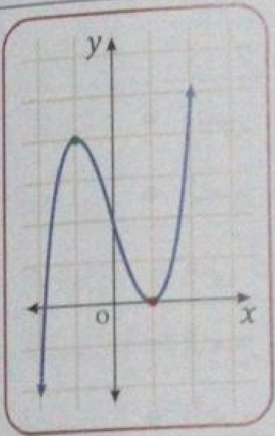
- **التعبير اللفظي:** تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.
- **التعبير الرمزي:** لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



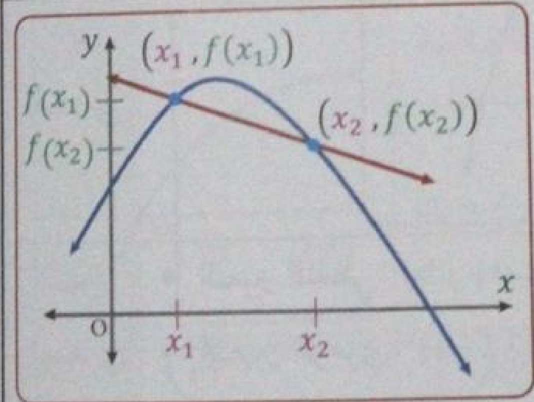
الدوال الثابتة	• **التعبير اللفظي**: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة. • **التعبير الرمزي**: لكل من x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$. 
مثال توضيحي	إذا تتبعنا منحنى الدالة $f(x)$ من اليسار إلى اليمين نجد أن .. • الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty, -4)$. • الدالة ثابتة في الفترة $(-4, 0)$. • الدالة متناقصة في الفترة $(0, \infty)$. 

القيم القصوى

المقصود بها	النقاط التي تُغيّر الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها مكونة قمة أو قاعًا في منحنى الدالة، وتسمى **نقاطًا حرجة**
القيمة العظمى المحلية	• **التعبير اللفظي**: إذا وجدت قيمة للدالة أكبر من كل القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة. • **التعبير الرمزي**: تكوّن $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.
القيمة العظمى المطلقة	• **التعبير اللفظي**: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها. • **التعبير الرمزي**: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.
المعنى الهندسي	
القيمة الصغرى المحلية	• **التعبير اللفظي**: إذا وجدت قيمة للدالة أصغر من كل القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة. • **التعبير الرمزي**: $f(a)$ تكوّن قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.
القيمة الصغرى المطلقة	• **التعبير اللفظي**: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها. • **التعبير الرمزي**: تكوّن $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \geq f(x)$.

المعنى الهندسي	
فائدتان	• يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم القصوى. • عند النقاط الحرجة يكون المماس المرسوم لمنحنى الدالة عند هذه النقاط إما أفقيًا « ميله صفر » أو عموديًا « ميله غير معرّف ». 
مثال توضيحي	في الشكل المجاور يمكننا تعيين القيم القصوى المحلية للدالة .. • القيمة العظمى المحلية عند النقطة $(-1,4)$ وتساوي 4 . • القيمة الصغرى المحلية عند النقطة $(1,0)$ وتساوي 0 . 

متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي	متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بالنقطتين	
المعنى الهندسي	المستقيم المار بالنقطتين على منحنى الدالة يُسمى **قاطعًا** ويرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}	
التعبير الرمزي	متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو .. $m_{sec} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	
مثال توضيحي	أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ على الفترة $[2,3]$. $m_{sec} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{2-(-4)}{1} = 6$	

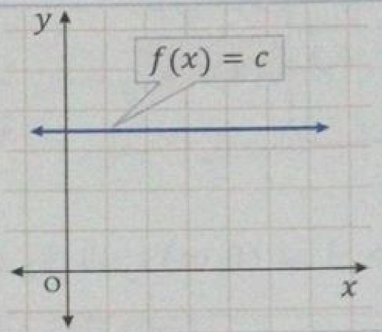
الدوال الرئيسة « الأم »

المقصود بها	أبسط دالة في مجموعة عائلة الدوال التي تشترك منحنياتها بصفة أو أكثر

الدوال الرئيسة « الأم » للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

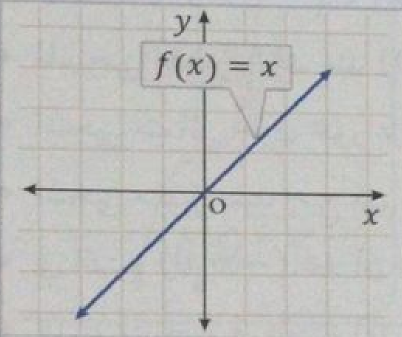
الدالة الثابتة:

$f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي وتُمثل بمستقيم أفقي



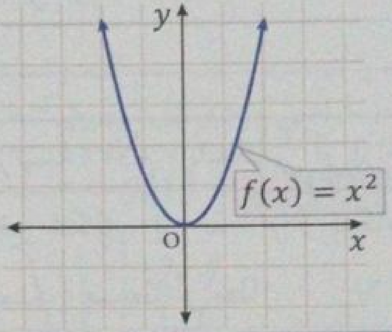
الدالة المحايدة:

$f(x) = x$ وهي تمثل بمستقيم يمر بكل النقاط (a, a)



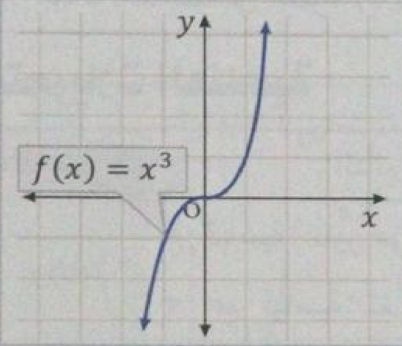
الدالة التربيعية:

$f(x) = x^2$ وتُمثل بقطع مكافئ شكل الحرف U



الدالة التكعيبية:

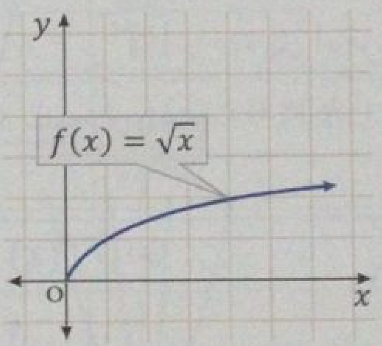
$f(x) = x^3$ وتمثل بمنحنى متماثل بالنسبة لنقطة الأصل



الدوال الرئيسة « الأم » لدالتي الجذر التربيعي والمقلوب

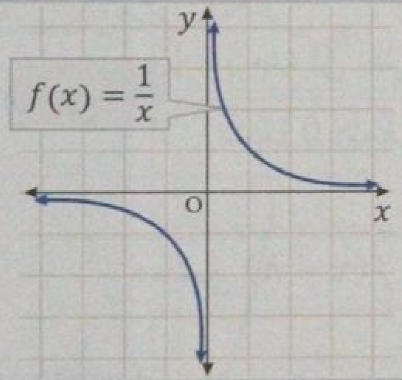
دالة الجذر التربيعي:

$f(x) = \sqrt{x}$



دالة المقلوب:

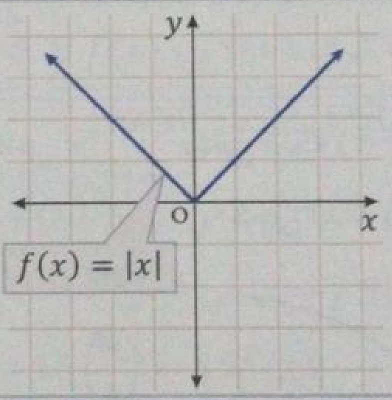
$f(x) = \frac{1}{x}$



الدوال الرئيسة « الأم » لدالتي القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح

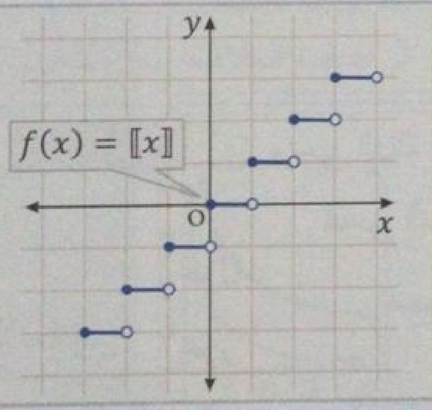
دالة القيمة المطلقة:

$f(x) = |x|$ ويأخذ المنحنى شكل حرف V



دالة أكبر عدد صحيح:

$f(x) = [\![x]\!]$ والتي تسمى الدالة الدرجية

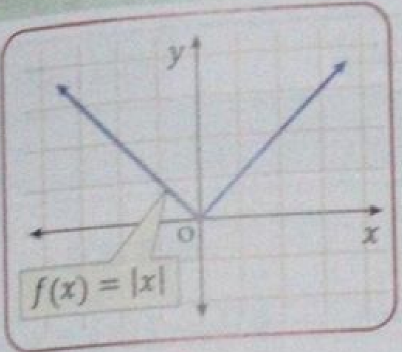


خصائص منحنى الدالة

المجال، المدى، المقطع x ، المقطع y ، التماثل، الاتصال ، سلوك طرفي التمثيل البياني، فترات التزايد والتناقص

مثال توضيحي

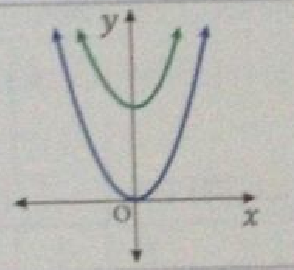
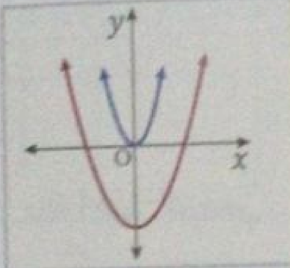
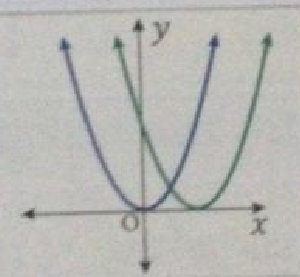
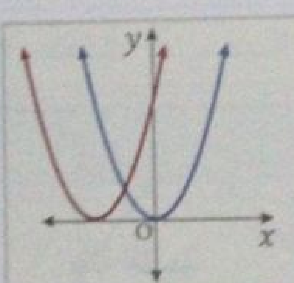
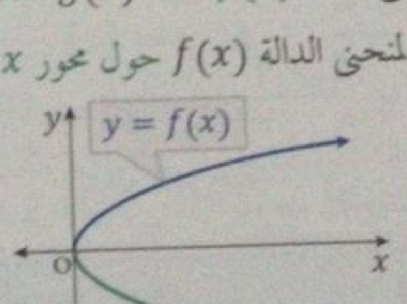
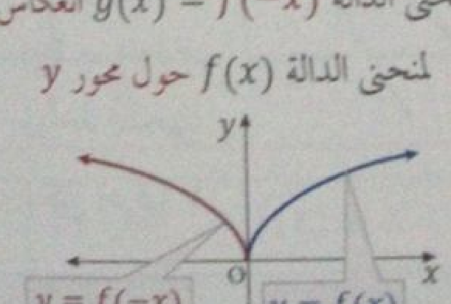
صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة « الأم » $f(x) = |x|$.



خصائص منحنى دالة القيمة المطلقة هي ..

- مجال الدالة $(-\infty, \infty)$ ، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى متماثل حول محور y ؛ لذا فإن الدالة زوجية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- في الفترة $(-\infty, 0)$ نجد أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، وفي الفترة $(0, \infty)$ نجد أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$ ، ومتزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$.

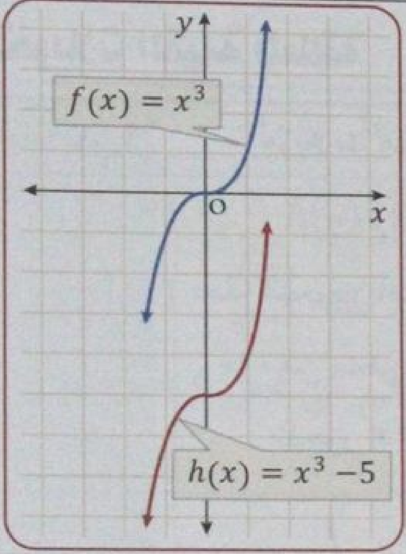
التحويلات الهندسية

ماذا تعني؟	التأثير على منحنى الدوال الرئيسة « الأم » بانعكاس أو إزاحة أو تمدد
نوعاها	• **قياسية:** تَغيُّر موقع المنحنى فقط دون تغير شكله « إزاحة » أو « انعكاس ». • **غير قياسية:** تغيُّر شكل المنحنى بـ « التمدد » ضغطًا أو مطًا.
الانسحاب الرأسي	منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مُزاحًا .. k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$  $\lvert k\rvert$ وحدة إلى أسفل عندما $k < 0$ 
الانسحاب الأفقي	منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مُزاحًا .. h وحدة إلى اليمين عندما $k > 0$  $\lvert h\rvert$ وحدة إلى اليسار عندما $k < 0$ 
انعكاس	**حول محور x** منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول محور x  **حول محور y** منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول محور y 

مثال توضيحي

استعمل منحنى الدالة الرئيسة « الأم » $f(x) = x^3$ لتمثيل الدالة $h(x) = x^3 -5$ بيانيًا.

الدالة $h(x) = x^3 - 5$ هي نفس الدالة الرئيسة « الأم » مزاحة $|-5|$ وحدات إلى الأسفل.



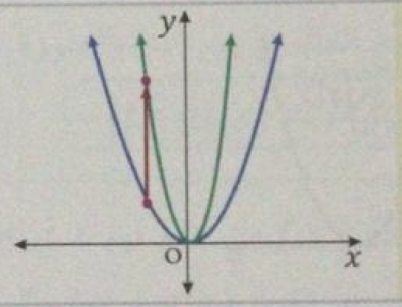
التمدد

ماذا يعني؟ تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضييق « ضغط » أو توسعة « مط » منحنى الدالة رأسيًا أو أفقيًا

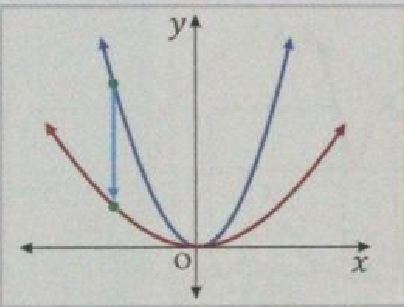
التمدد الرأسي

منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ ؛ حيث a عدد حقيقي موجب هو ..

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ إذا كانت $a > 1$



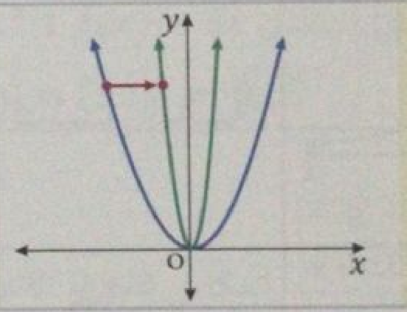
تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$ إذا كانت $0 < a < 1$



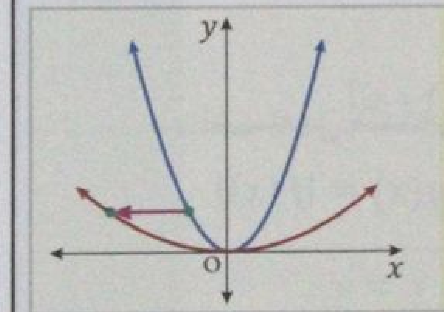
التمدد الأفقي

منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ ؛ حيث a عدد حقيقي موجب هو ..

تضييق أفقي لمنحنى $f(x)$ إذا كانت $a > 1$



توسع أفقي لمنحنى $f(x)$ إذا كانت $0 < a < 1$



مثال توضيحي

عين الدالة الرئيسة « الأم » $f(x)$ للدالة $g(x) = \frac{15}{x} + 3$ ؛ ثم صف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما بيانيًا في المستوى الإحداثي.

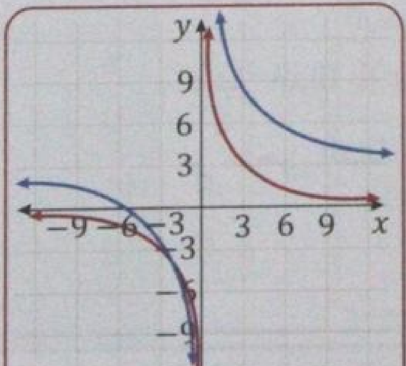
الدالة الرئيسة « الأم » هي $f(x) = \frac{1}{x}$ ..

منحنى $g(x)$ توسع رأسي لمنحنى الدالة الأم بمقدار $a = 15$ لأن ..

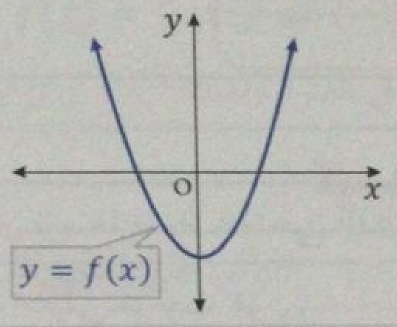
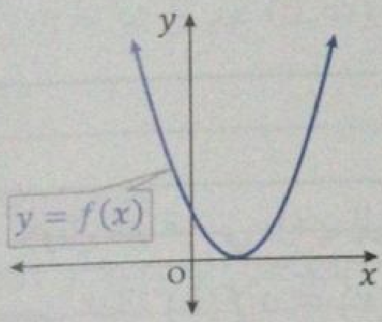
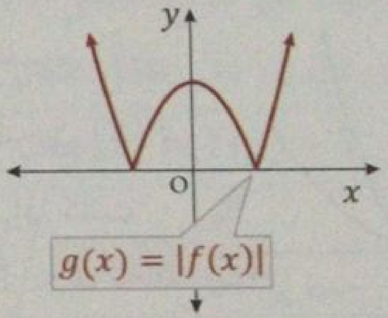
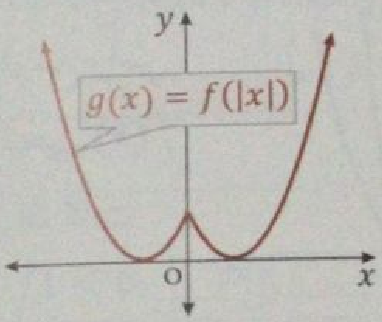
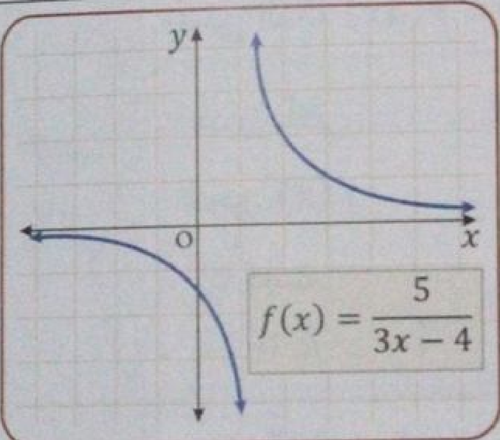
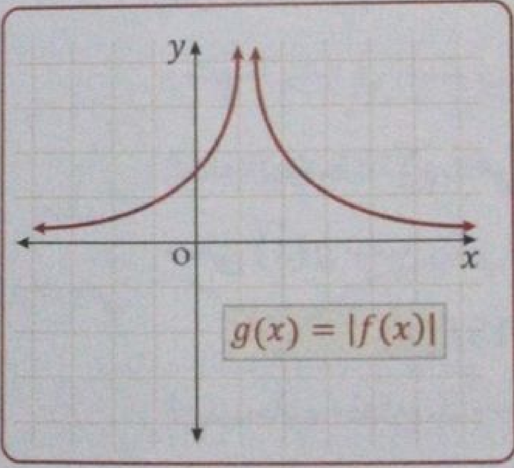
$$g(x) = 15\left(\frac{1}{x}\right) = 15f(x)$$

ثم انسحاب مقداره 3 وحدات لأعلى لأن ..

$$g(x) = 15f(x) + 3$$



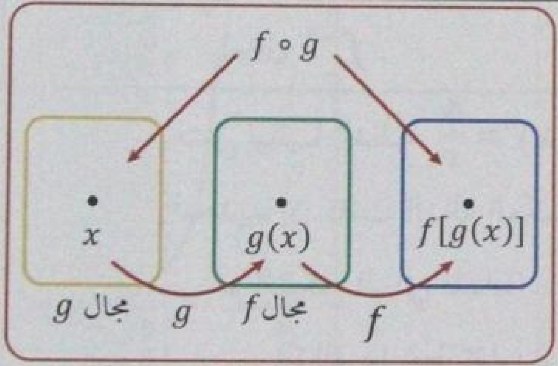
تحويلات القيمة المطلقة

ماذا تعني؟	تحويلات هندسية غير قياسية تعكس أيَّ جزء من منحنى دالة تتضمن القيمة المطلقة	
نوعاه	$g(x) = \lvert f(x)\rvert$	$g(x) = f(\lvert x\rvert)$
	هذا التحويل الهندسي يعكس أيَّ جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه	هذا التحويل الهندسي يغير جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس عليه
		
		
مثال توضيحي	استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل الدالة $g(x) = \lvert f(x)\rvert$ بيانيًا.	
	لتمثيل الدالة $g(x) = \lvert f(x)\rvert$ نعكس الجزء السالب من منحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x ..	

العمليات على الدوال

المقصود بها	إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على الدوال
التعبير الرمزي	**الجمع** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ **الضرب** $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ **الطرح** $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ **القسمة** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\,, g(x)\neq 0$
مجال الدالة الجديدة	مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g باستثناء القيم التي تجعل $g(x)=0$ في دالة القسمة
مثال توضيحي	أوجد $(f+g)(x)$ للدالتين $f(x)=x^2$ و $g(x)=3x+2$. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+3x+2$ بما أن مجال كل من f ، g هو $(-\infty,\infty)$ فإن مجال $(f+g)$ هو $(-\infty,\infty)$.

تركيب دالتين

التعبير الرمزي	تركيب الدالة f مع الدالة g يعبر عنه بالصورة.. $[f\circ g](x)=f[g(x)]$	
المجال	يتكون مجال الدالة $f\circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f	
مثال توضيحي	أوجد $[g\circ f](x)$ للدالتين $f(x)=3x$ ، $g(x)=x^2$. $[g\circ f](x)=g[f(x)]=(3x)^2=9x^2$	

العلاقة العكسية

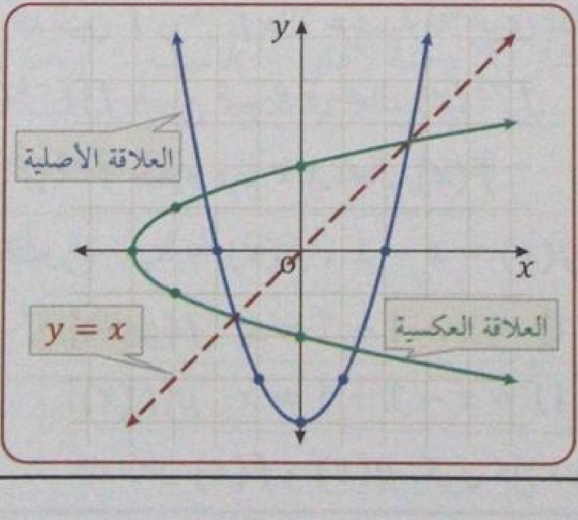
المقصود بها	انعكاس العلاقة الأصلية حول المستقيم $y=x$

مثال توضيحي

العلاقة الأصلية

$y=x^2-4$

x	y
-2	0
0	-4
-2	0

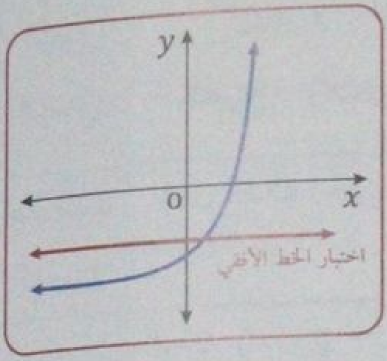
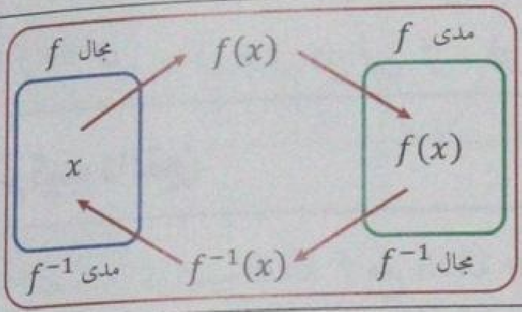
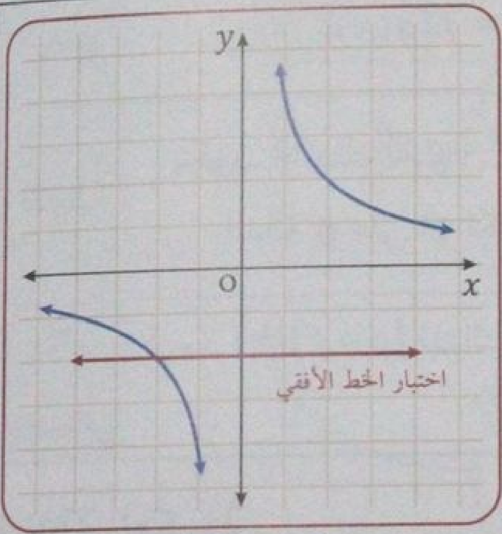


العلاقة العكسية

$y^2=x+4$

x	y
0	-2
-4	0
0	2

الدالة العكسية

ماذا تعني؟	علاقة عكسية لـ $f(x)$ بحيث تكون دالة ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(x)$
اختبار الخط الأفقي	- **التعبير اللفظي**: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر. - **مثال توضيحي**: للدالة f في الشكل المجاور لا يوجد خط أفقي يقطع المنحنى بأكثر من نقطة وبالتالي فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة. 
فائدتان	- إذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت دالة متباينة. - إذا كانت الدالة متباينة فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1} . 
مثال توضيحي	مثل بيانيًا الدالة $h(x) = \frac{4}{x}$ ثم طبق الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا. نرسم الشكل البياني للدالة .. الدالة لها خط تقارب رأسي عند $x = 0$ الدالة لها خط تقارب أفقي عند $y = 0$ الخط الأفقي يقطع الدالة في نقطة واحدة .. $\therefore$ الدالة العكسية موجودة 

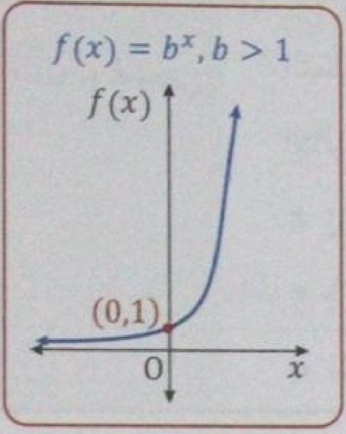
إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

لها شرطان	تكون كل من الدالتين f و f^{-1} دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: - $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$. - $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.
مثال توضيحي	لإثبات أن الدالتين $f(x) = x + 1$ ، $g(x) = x - 1$ كل منهما دالة عكسية للأخرى .. $f[g(x)]$: $f[g(x)] = f(x - 1) = x + 1 - 1 = x$ $g[f(x)]$: $g[f(x)] = g(x + 1) = x - 1 + 1 = x$ $\therefore$ الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ تكون كل منهما دالة عكسية للأخرى

الدوال الأسية

دالة النمو الأسّي

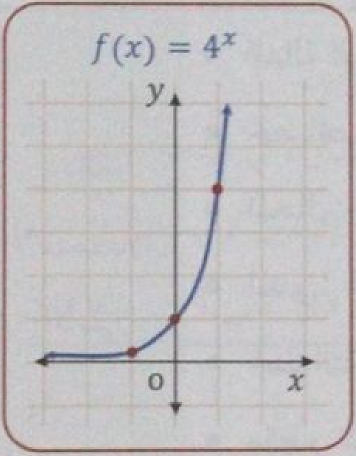
- الدالة الرئيسة « الأم »: $f(x) = b^x \ , \ b > 1$.
- خصائص منحنى الدالة: متصل ، متباين ، متزايد.
- المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R .
- المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ .
- خط التقارب: المحور x .
- مقطع المحور: (0,1) .



مثال توضيحي

مثّل الدالة $y = 4^x$ بيانيًا، ثم حدد مجالها ومداها.

x	$y = 4^x$	(x, y)
⋮	⋮	⋮
-1	$y = 4^{-1} = \frac{1}{4}$	$\left(-1, \frac{1}{4}\right)$
0	$y = 4^0 = 1$	(0,1)
1	$y = 4^1 = 4$	(1,4)
⋮	⋮	⋮



مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية

صورتها القياسية

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

الإزاحات

h موجبة	إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يمينًا	h سالبة	إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يسارًا
k موجبة	إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأعلى	k سالبة	إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأسفل

الشكل والاتجاه

$a < 0$	التمثيل البياني ينعكس حول المحور x عندما $k = 0$
$\|a\| > 1$	التمثيل البياني يتسع رأسيًا
$0 < \|a\| < 1$	التمثيل البياني يضيق رأسيًا

مثال توضيحي

- في الدالة $f(x) = 2(4)^{x-1} - 3$ ..

$a = 2$ ، $h = +1$ ، $k = -3$

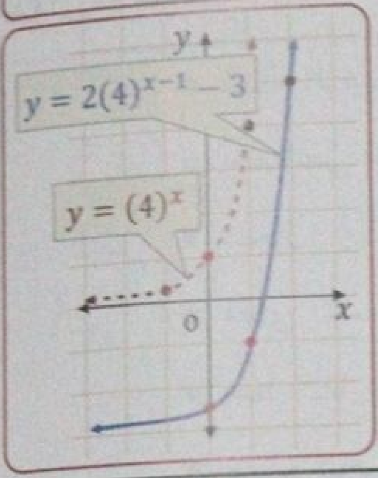
مقارنة الدالة المعطاة بالصورة القياسية

$f(x) = 2(4)^{x-1} - 3$

$f(x) = ab^{x-h} + k$

- التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2(4)^{x-1} - 3$ ينتج من التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = 4^x$ بالتحويلات التالية:

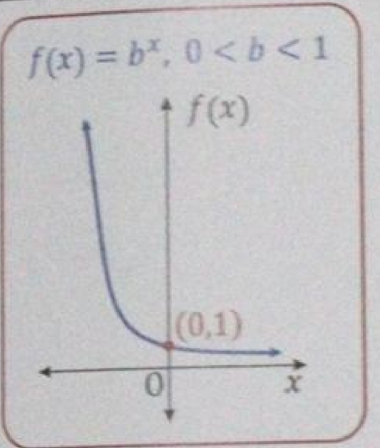
* إزاحة أفقية بمقدار 1 وحدة لليمين.
* إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات للأسفل.
* المنحنى يتسع رأسيًا لأن $a = 2 > 1$.



دالة الاضمحلال الأسي

دالة الاضمحلال الأسّي

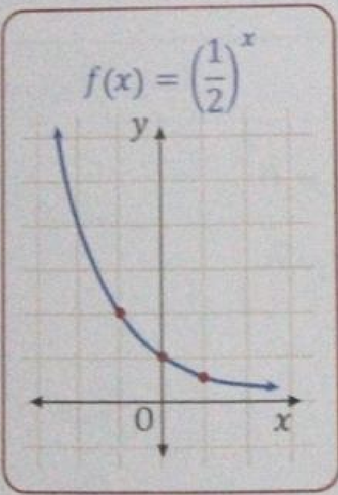
- الدالة الرئيسة « الأم »: $f(x) = b^x$, $0 < b < 1$.
- خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص.
- المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R .
- المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ .
- خط التقارب: المحور x .
- مقطع المحور: (0,1) .



مثال توضيحي

مثل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، ثم حدد مجالها ومداها.

(x, y)	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	x
⋮	⋮	⋮
$(-1,2)$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	-1
$(0,1)$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	0
$\left(1,\frac{1}{2}\right)$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	1
⋮	⋮	⋮



مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

المعادلات الأسية

المقصود بها	معادلة تظهر فيها المتغيرات في موقع الأسس
خاصية المساواة للدالة الأسية	• التعبير الرمزي: إذا كان $b > 0, b \neq 1$ فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$. • مثال توضيحي: إذا كان $7^x = 7^2$ فإن $x = 2$ وإذا كان $x = 2$ فإن $7^x = 7^2$.
حساب الربح المركب	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ A المبلغ الكلي بعد t سنة r معدل الربح السنوي المتوقع P رأس المال الذي تم استثماره n عدد مرات إضافة الأرباح لرأس المال في السنة
مثال توضيحي	أوجد حل المعادلة $4^{2n-1} = 64$. $4^{2n-1} = 64$ $(2^2)^{2n-1} = 2^6$ « وضعنا $4 = 2^2$, $64 = 2^6$ » $2^{4n-2} = 2^6$ « ضربنا القوتين » $4n - 2 = 6$ « خاصية المساواة في الدالة الأسية » $4n = 8$ « أضفنا 2 للطرفين ثم بسطنا » $n = 2$ « قسمنا الطرفين على 4 ثم بسطنا »

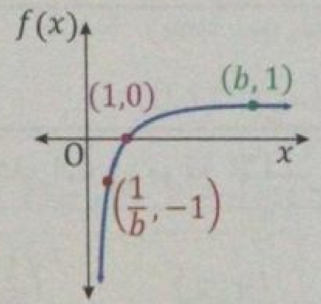
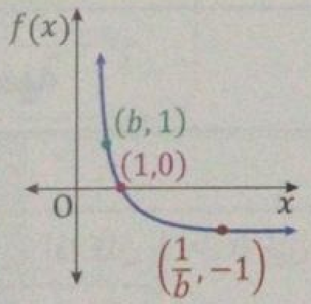
المتباينة الأسية

المقصود بها	متباينة تظهر فيها المتغيرات في موقع الأسس
خاصية التباين للدالة الأسية	إذا كان $b > 1$ فإن .. $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ ، و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$
مثال توضيحي	أوجد حل المتباينة $2^{x+2} > \frac{1}{32}$. $2^{x+2} > \frac{1}{32}$ $2^{x+2} > \frac{1}{(2)^5}$ « وضعنا $32 = 2^5$ » $2^{x+2} > 2^{-5}$ « قاعدة الأس السالب » $x + 2 > -5$ « قاعدة التباين للدوال الأسية » $x > -7$ « طرحنا 2 من الطرفين ثم بسطنا »

أساسيات عن اللوغاريتم

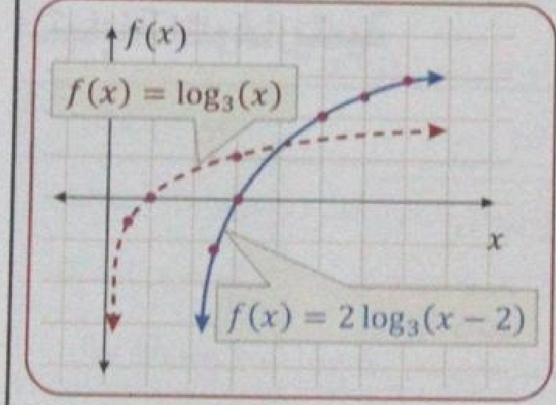
المقصود به	الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة حيث x, b عددان موجبان و $b \neq 1$
علاقة الصورة الأسية باللوغاريتمية	$b^y = x \Leftrightarrow y = \log_b x$
الخصائص الأساسية للوغاريتمات	• $\log_b 1 = 0$. • $\log_b b^x = x$. • $\log_b b = 1$. • $b^{\log_b x} = x$.
مثال توضيحي1	اكتب المعادلة اللوغاريتمية $\log_4 16 = 2$ على الصورة الأسية. $\log_4 16 = 2 \Rightarrow 16 = 4^2$
مثال توضيحي2	أوجد قيمة العبارة اللوغاريتمية $\log_3 81$. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

الدالة اللوغاريتمية

المقصود بها	الدالة $f(x) = \log_b x$ تسمى الدالة اللوغاريتمية الأم حيث x, b عددان موجبان و $b \neq 1$
تمثيلها بيانيًا	**$f(x) = \log_b x \ , \ b > 1$**  **$f(x) = \log_b x \ , \ 0 < b < 1$** 
خصائص الدالة الأم	• المجال: الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ . • **خط التقارب**: المحور y . • المدى: الأعداد الحقيقية R . • **مقطع المحور x** : النقطة (1,0) .
تنبيهان	• إذا كانت $b > 1$ فإن منحنى الدالة $f(x) = \log_b x$ متصل ومتباين ومتزايد. • إذا كانت $0 < b < 1$ فإن منحنى الدالة $f(x) = \log_b x$ متصل ومتباين ومتناقص.

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

صورتها القياسية	$f(x) = a \log_b(x - h) + k$
الإزاحة الأفقية	• إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يمينًا، إذا كانت h موجبة. • إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يسارًا، إذا كانت h سالبة.

الإزاحة الرأسية	• إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأعلى ، إذا كانت k موجبة. • إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأسفل ، إذا كانت k سالبة.
الشكل والاتجاه	• إذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x عندما $k = 0$. • إذا كانت $\|a\| > 1$ فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا. • إذا كانت $0 < \|a\| < 1$ فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.
مثال توضيحي	مثل الدالة $f(x) = 2\log_3(x-2)$. في الدالة $f(x) = 2\log_3(x-2)$ نجد أن .. $a = 2 \ , \ h = 2 \ , \ k = 0$ التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2\log_3(x-2)$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \log_3(x)$ بالتحويلات التالية: • إزاحة أفقية بمقدار 2 وحدة إلى اليمين لأن $h = 2$. • بدون إزاحة رأسية لأن $k = 0$. • المنحنى يتسع رأسيًا لأن $a = 2 > 0$. **مقارنة الدالة المعطاة بالصورة القياسية** $f(x) = 2\log_3(x-2) \ +0$ $f(x) = a\log_b(x-h) \ +k$ 

خصائص اللوغاريتمات

خاصية الضرب	إذا كانت x , b , a أعدادًا حقيقية موجبة و $x \neq 1$ فإن .. $\boxed{\log_x ab = \log_x a + \log_x b}$
خاصية القسمة	إذا كانت x , b , a أعدادًا حقيقية موجبة و $x \neq 1$ فإن .. $\boxed{\log_3 \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b}$
خاصية لوغاريتم القوة	لأي عدد حقيقي p ، وأي عددين حقيقيين موجبين m , b حيث $b \neq 1$ فإن .. $\boxed{\log_b m^p = p\log_b m}$
مثال توضيحي	احسب قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$. $\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 (36)^{\frac{1}{3}} = \log_6 [(6)^2]^{\frac{1}{3}} = \log_6 [6]^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_6 6 = \frac{2}{3}$

المقصود بها	معادلة تحوي لوغاريتمًا واحدًا أو أكثر
خاصية المساواة	إذا كانت b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$ فإن .. $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$
مثال توضيحي	أوجد حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$. $\log_9 x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = (3)^{\cancel{2}\times\frac{3}{\cancel{2}}} = 3^3 = 27$

المتباينة اللوغاريتمية

المقصود بها	متباينة تحوي عبارة لوغاريتمية أو أكثر
خاصية التباين للدوال وحيدة اللوغاريتم	إذا كانت $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$ إذا كانت $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x < y$ فإن $0 < x < b^y$
خاصية التباين للدوال تتضمن عبارتين لوغاريتميتين	إذا كانت $b > 1$ فإن .. $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$
مثال توضيحي	أوجد حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$. نُوجد حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$ بتطبيق خاصية التباين للدوال وحيدة اللوغاريتم .. $\log_4 x \geq 3 \Rightarrow x \geq 4^3 \Rightarrow x \geq 64$

للوغاريتم العشري

المقصود به	لوغاريتم أساسه 10 ، ويُكتب دون كتابة الأساس 10
فائدة	ترتبط اللوغاريتمات العشرية بقوى العدد 10 الصحيحة كالتالي: • $\log 10 = \log 10^1 = 1$. • $\log 1000 = \log 10^3 = 3$. • $\log 100 = \log 10^2 = 2$. • $\log 10^m = m$.

يغة تغيير الأساس

المقصود بها	كتابة عبارة لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف

التعبير الرمزي	لأي أعداد موجبة a, b, n حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ فإن .. $\boxed{\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}}$
صيغة التغيير للوغاريتم عشري	$\boxed{\log_a n = \frac{\log n}{\log a}}$
مثال توضيحي	أوجد حل المتباينة $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ ، وقرب الناتج لأقرب جزء من عشرة آلاف. $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ $\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1}$ « خاصية التباين للوغاريتمات » $2x \log 3 \geq (x+1) \log 6$ « خاصية لوغاريتم القوة » $2x \log 3 \geq x \log 6 + \log 6$ « خاصية التوزيع » $2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$ « طرحنا $x \log 6$ من الطرفين » $x(2 \log 3 - \log 6) \geq \log 6$ « أخذنا x عاملاً مشتركًا » $x \geq \frac{\log 6}{2\log 3 - \log 6}$ « قسمنا الطرفين على $2 \log 3 - \log 6$ » $x \geq 4.4190$ « بسطنا بالحاسبة » $\therefore$ مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

الفصل الثالث: المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

المقصود بها	متطابقة تحوي دوال مثلثية		
المتطابقات النسبية	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$	
متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$, $\csc\theta \neq 0$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$	
	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta \neq 0$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$	
	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$, $\cot\theta \neq 0$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\theta \neq 0$	
متطابقات فيثاغورس	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$
متطابقات الدوال الزوجية والفردية	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
مثال توضيحي	بسّط $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - \cos^2\theta)$. $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - \cos^2\theta) = \frac{\sec\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta$ « من العلاقة $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ » $= \frac{\sec\theta}{\cancel{\sin\theta}}\cancel{\sin\theta}\sin\theta$ « حذفنا $\sin\theta$ بسطًا ومقامًا » $= \sec\theta\sin\theta$ « بسطنا » $= \frac{1}{\cos\theta}\sin\theta$ « عوضنا $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ » $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ « عوضنا $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ »		

بات صحة المتطابقة

الطريقة	(١) نبسّط الطرف الأكثر تعقيداً حتى يصبح الطرفان متساويين. (٢) نحول العبارة في هذا الطرف إلى صورة العبارة في الطرف الأسهل.

مثال توضيحي	أثبت أن $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1$. $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1$

متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$	$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$	$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
$\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$	$\tan(A-B) = \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

مثال توضيحي

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$.

نختار زاويتين معلومتين الفرق بينهما °15 فنجد أن $\sin 15° = \sin(60° - 45°)$ ؛ ومنه فإن ..

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ « متطابقة الفرق »

$\sin(60° - 45°) = \sin 60°\cos 45° - \cos 60°\sin 45°$ « أخذنا $A = 60°, B = 45°$ »

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ « عوضنا عن النسب المثلثية »

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ « بسطنا »

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

متطابقة $\tan 2\theta$	متطابقة $\cos 2\theta$	متطابقة $\sin 2\theta$
$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

مثال توضيحي

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، علمًا أن: $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ « متطابقة فيثاغورس »

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ « طرحنا $\cos^2\theta$ من الطرفين »

$\sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ « عوضنا عن $\cos\theta = \frac{1}{3}$ »

$\sin^2\theta = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ « بسطنا ثم أخذنا الجذر التربيعي للطرفين »

ما أن $90° < \theta < 180°$ فإن θ تقع في الربع الثاني و $\sin\theta$ موجبة؛ ومنه فإن $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

متطابقة $\tan\frac{\theta}{2}$	متطابقة $\cos\frac{\theta}{2}$	متطابقة $\sin\frac{\theta}{2}$
$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ ، $\cos\theta \neq -1$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

مثال توضيحي

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ؛ علمًا أن: $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ؛ θ تقع في الربع الثاني.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ « متطابقة فيثاغورس »

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ « طرحنا $\sin^2\theta$ من الطرفين »

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ « عوضنا عن $\sin\theta = \frac{1}{3}$ »

$\cos^2\theta = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ « بسطنا ثم أخذنا الجذر التربيعي للطرفين »

بما أن θ تقع في الربع الثاني فإن $\cos\theta$ سالبة؛ ومنه فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

نُوجد ـ الآن ـ القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ..

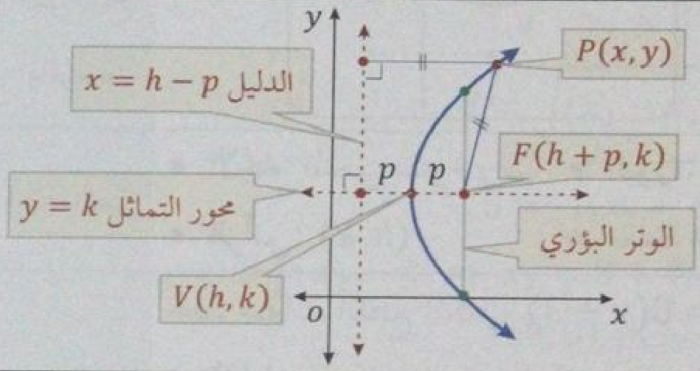
$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$$

حل المعادلة المثلثية

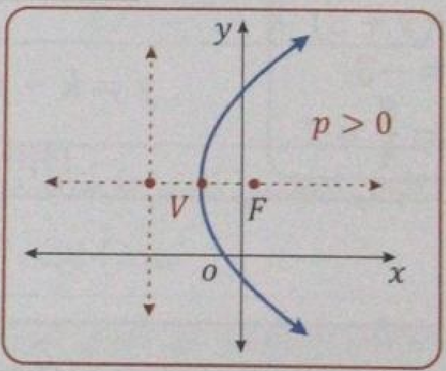
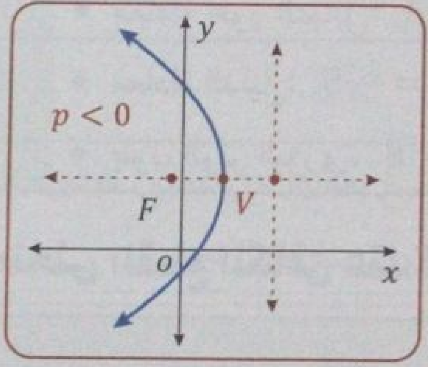
المقصود به	الحصول على قيم محددة للمتغير تكون عندها المعادلة صحيحة
أنواع الحلول	• حل المعادلة على فترة معطاه. • عدد لا نهائي من الحلول. • حلول دخيلة.
مثال توضيحي	حل المعادلة $\sin 2\theta = \cos\theta$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$. $\sin 2\theta = \cos\theta$ $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ « طرحنا $\cos\theta$ من الطرفين » $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ « عوضنا عن $\sin 2\theta$ » $\cos\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$ « أخذنا $\cos\theta$ عامل مشترك » إما $\cos\theta = 0$ ؛ ومنه فإن .. $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ أو $2\sin\theta - 1 = 0$ ؛ ومنه فإن .. $\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

الفصل الرابع: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

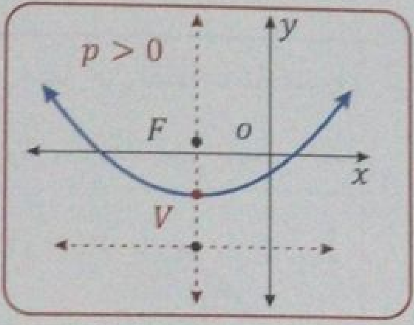
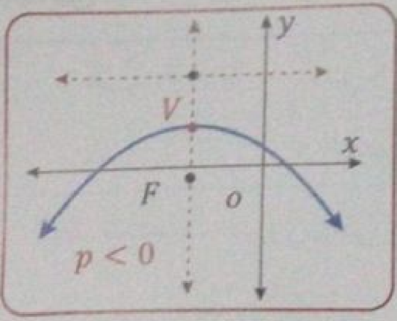
القطع المكافئ

المقصود به	مجموعة النقاط المستوية التي يكون بُعد كلٍ منها عن نقطة ثابتة مساويًا لبُعدها عن مستقيم « النقطة الثابتة تسمى **البؤرة** ، والمستقيم يسمى **الدليل** »	
محور التماثل	خط مستقيم عمودي على الدليل ومارًا بالبؤرة	
الرأس	نقطة تقاطع القطع مع محور التماثل	
الوتر البؤري	قطعة مستقيمة مارة بالبؤرة وعمودية على محور التماثل وطرفاها تقع على القطع	

خصائص القطع المكافئ المفتوح أفقيًا

المعادلة القياسية مع التوضيح بالرسم	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$  
الخصائص	• **الاتجاه:** المنحنى مفتوح أفقيًا. • **البؤرة:** $(h + p, k)$. • **معادلة الدليل:** $x = h - p$. • **الرأس:** (h, k) . • **معادلة محور التماثل:** $y = k$. • **طول الوتر البؤري:** $\lvert 4p \rvert$.
فائدتان	• إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن القطع مفتوح أفقيًا. • فتحة القطع لليمين إذا كانت $p > 0$ ولليسار إذا كانت $p < 0$.
مثال توضيحي	في القطع المكافئ الذي معادلته $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$ .. • **الاتجاه:** المنحنى مفتوح أفقيًا. • **الرأس:** $(h, k) = (3, 2)$. • **البؤرة:** $(h + p, k) = (3 + 2, 3) = (5, 3)$. • **معادلة محور التماثل:** $y = k = 2$. • **معادلة الدليل:** $x = h - p = 3 - 2 = 1$. • **طول الوتر البؤري:** $\lvert 4p \rvert = \lvert 4(2) \rvert = 8$. مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$ $k = 2 \, , \, h = 3$ $4p = 8 \Rightarrow p = 2$

خصائص القطع المكافئ المفتوح رأسيًا

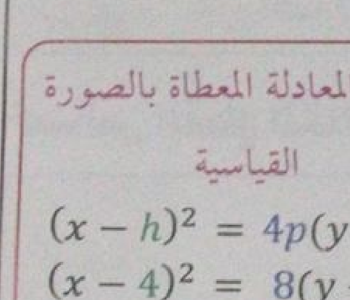
المعادلة القياسية مع التوضيح بالرسم	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$  
الخصائص	• **الاتجاه:** المنحنى مفتوح رأسيًا. • **البؤرة:** $(h, k+p)$. • **معادلة الدليل:** $y = k - p$. • **الرأس:** (h, k) . • **معادلة محور التماثل:** $x = h$. • **طول الوتر البؤري:** $\|4p\|$.
مثال توضيحي	حدد صفات القطع المكافئ $(x-4)^2 = 8(y+3)$. • **الاتجاه:** المنحنى مفتوح رأسيًا. • **الرأس:** $(h,k) = (4,-3)$. • **البؤرة:** $(h, k+p) = (4, -3+2) = (4,-1)$. • **معادلة محور التماثل:** $x = h = 4$. • **معادلة الدليل:** $y = k - p = -3 - 2 = -5$. • **طول الوتر البؤري:** $\|4p\| = \|4(2)\| = 8$. مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $(x-4)^2 = 8(y+3)$ $h = 4 \ , \ k = -3$ $4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} = 2$

مماس منحنى القطع المكافئ عند النقطة P

المقصود به

أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث ..

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع المطابق الثاني.



مثال توضيحي

- اكتب معادلة مماس القطع $x = 5 - \frac{y^2}{4}$ عند النقطة $(1,-4)$.
- نُوجد البؤرة F من معادلة القطع $x = 5 - \frac{y^2}{4}$ ..

$$4x = 20 - y^2$$
$$y^2 = 20 - 4x$$
$$(y-0)^2 = -4(x-5)$$

مقارنة معادلة القطع بالصورة القياسية

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(y-0)^2 = -4(x-5)$$
$$k = 0 \ , \ h = 5$$
$$4p = -4 \Rightarrow p = -1 < 0$$

وبما أن $p = -1 < 0$ فإن القطع مفتوح أفقياً وتكون ..

$$F = (h + p, k) = (5 + (-1), 0) = (4, 0) \text{ البؤرة}$$

- نُوجد المسافة d بين $p(1, 4), F(4, 0)$ باستعمال قانون المسافة ..

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (4-0)^2} = 5$$

- نُوجد إحداثي $\ell(x_2, y_2)$ والتي تقع على محور تماثل القطع باستعمال البؤرة $F(4, 0)$ والمسافة d ..

بما أن النقطة $\ell(x_2, y_2)$ تقع على محور التماثل فإن $y_2 = 0$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$5 = \sqrt{(x_2 - 4)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$5 = x_2 - 4 \Rightarrow x_2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow \ell(x_2, y_2) = (9, 0)$$

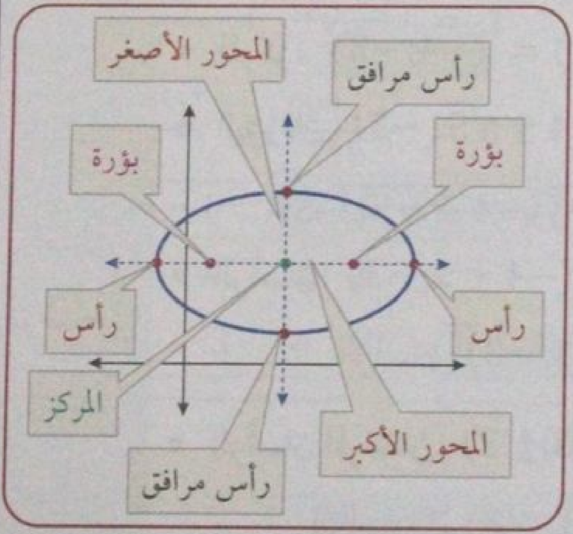
- نُوجد ميل المماس المطلوب باستخدام النقطتين $\ell(9, 0), p(1, -4)$ ..

$$m = \frac{0-(-4)}{9-1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- نُوجد معادلة المماس المطلوب بمعلومية الميل m والنقطة $\ell = (9, 0)$ ..

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

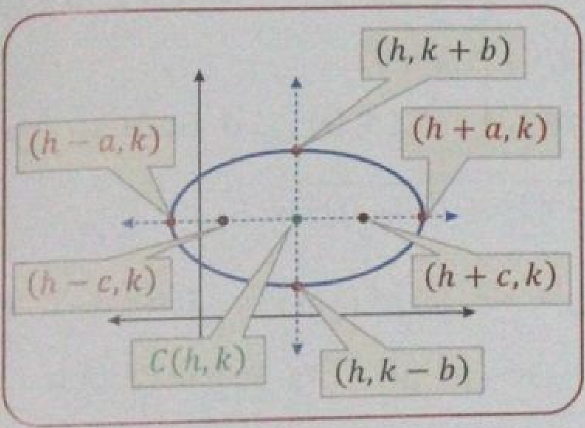
القطع الناقص

المقصود به	المحل الهندسي لمجموعة نقاط مستوية يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتًا، وتسمى النقطتان الثابتتان **البؤرتين**	
المحور الأكبر	القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين والتي نهايتاها على منحنى القطع	
المركز	نقطة منتصف المحور الأكبر أو الأصغر	
المحور الأصغر	القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز والتي نهايتاها على منحنى القطع وتتعامد على المحور الأكبر	
الرأسان	نهايتا المحور الأكبر	
الرأسان المرافقان	نهايتا المحور الأصغر	

القطع الناقص الذي محوره الأكبر أفقي

معادلته القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	a البعد بين المركز والرأس. b البعد بين المركز والرأس المرافق.	(h, k) إحداثيا المركز.

خصائصه



- **الاتجاه:** المحور الأكبر أفقي.
- **المركز:** (h,k) .
- **البؤرتان:** $(h \pm c, k)$.
- **الرأسان:** $(h \pm a, k)$.
- **الرأسان المرافقان:** $(h, k \pm b)$.
- **المحور الأكبر:** $y = k$.
- **المحور الأصغر:** $x = h$.

تحديد المركز (h,k)

نُوجد مركز القطع الناقص بإحدى الطرق التالية:

- نُوجد نقطة تقاطع المحورين.
- نُوجد نقطة المنتصف بين البؤرتين.
- نُوجد نقطة المنتصف بين الرأسين.
- نُوجد نقطة المنتصف بين الرأسين المرافقين.

علاقات مهمة

طول المحور الأكبر $= 2a$	$c^2 = a^2 - b^2$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
البعد بين البؤرتين $= 2c$	
طول المحور الأصغر $= 2b$	

c البعد بين المركز والبؤرة.

a البعد بين المركز والرأس.

b البعد بين المركز والرأس المرافق.

مثال توضيحي

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

أولاً: نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** المحور الأكبر أفقي.
- **المركز:** $(h,k) = (-4,-3)$.
- **البؤرتان:** $(h \pm c, k) = (-4 \pm \sqrt{5}, -3)$.

$(-4-\sqrt{5},-3)\,,\,(-4+\sqrt{5},-3)$

- **الرأسان:** $(h \pm a, k) = (-4 \pm 3, -3)$.

$\therefore$ الرأسان $(-1,-3)\,,\,(-7,-3)$

- **الرأسان المرافقان:** $(h, k \pm b) = (-4, -3 \pm 2)$.

$\therefore$ الرأسان المرافقان $(-4,-1)\,,\,(-4,-5)$

- **المحور الأكبر:** $y = k = -3$.
- **المحور الأصغر:** $x = h = -4$.

ثانيًا: نرسم منحنى القطع ..

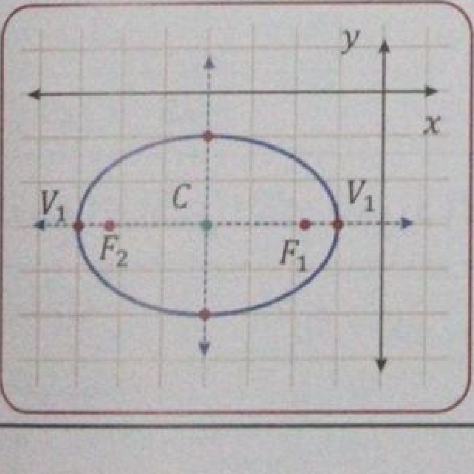
مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

h	k	a	b	c
−4	−3	3	2	$\sqrt{5}$



القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي

معادلته القياسية

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

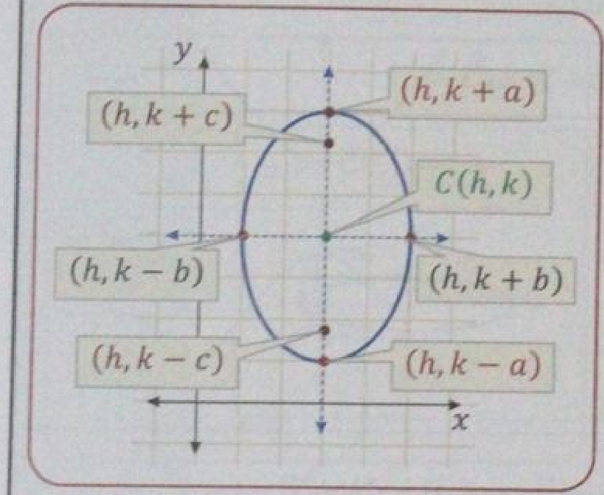
a البعد بين المركز والرأس.

b البعد بين المركز والرأس المرافق.

(h,k) إحداثيا المركز.

خصائصه

- **الاتجاه:** المحور الأكبر رأسي.
- **المركز:** (h,k) .
- **البؤرتان:** $(h,k\pm c)$.
- **الرأسان:** $(h,k\pm a)$.
- **الرأسان المرافقان:** $(h\pm b,k)$.
- **المحور الأكبر:** $x=h$.
- **المحور الأصغر:** $y=k$.



العلاقة بين a,b,c

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \quad \text{أو} \quad c^2=a^2-b^2$$

c البعد بين المركز والبؤرة.

a البعد بين المركز والرأس.

b البعد بين المركز والرأس المرافق.

مثال توضيحي

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$$

h	k	a	b	c
6	−3	4	3	$\sqrt{7}$

أولاً: نُحدد خصائص القطع ..

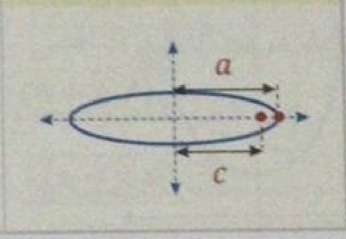
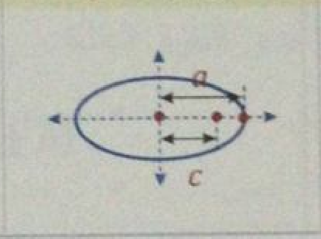
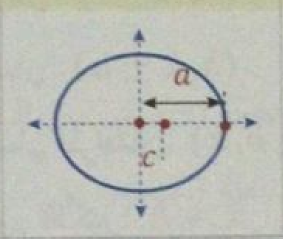
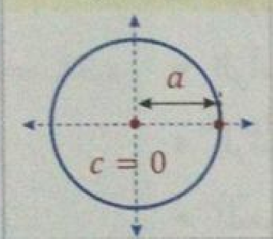
- **الاتجاه:** المحور الأكبر رأسي.
- **المركز:** $(h,k)=(6,-3)$.
- **البؤرتان:** $(h,k\pm c)=(6,-3\pm\sqrt{7})$.

  $(6,-3-\sqrt{7}),(6,-3+\sqrt{7})$
- **الرأسان:** $(h,k\pm a)=(6,-3\pm 4)$.

  $\therefore$ الرأسان $(6,-7),(6,1)$
- **الرأسان المرافقان:** $(h\pm b,k)=(6\pm 3,-3)$.

  $\therefore$ الرأسان المرافقان $(3,-3),(9,-3)$
- **المحور الأكبر:** $x=h=6$.
- **المحور الأصغر:** $y=k=-3$.

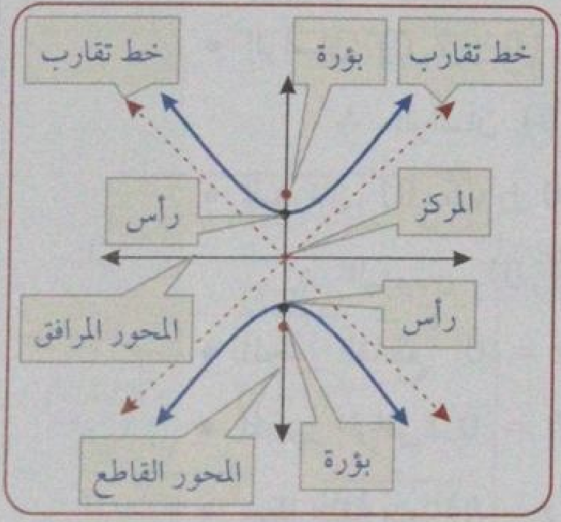
الاختلاف المركزي للقطع الناقص

المقصود به	الاختلاف المركزي e هو نسبة c إلى a ؛ ويُعطى بالعلاقة .. $\boxed{e = \frac{c}{a}}$	c البعد بين المركز والبؤرة. a البعد بين المركز والرأس.
دلالته	قيمته تدل على دائرية أو اتساع القطع الناقص	
تنبيه	قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تنحصر بين 0 و 1	
التوضيح بالرسم	$e = 0.95$  $e = 0.75$  $e = 0.3$  $e = 0$  	
مثال توضيحي	حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$. نُحدد قيمتي a, c .. $a^2 = 48 \Rightarrow a = \sqrt{48}$, $b^2 = 18$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{48 - 18} = \sqrt{30}$ نُوجد ـ الآن ـ الاختلاف المركزي e .. $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{48}} \approx 0.79$	مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ $\frac{(x-0)^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

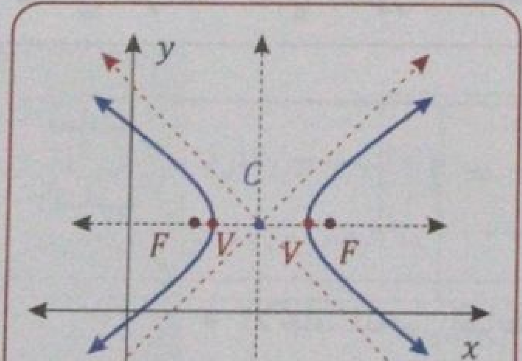
الدائرة

معادلتها القياسية	معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r .. $\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$
مثال توضيحي	اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 3 وحدات. نُحدد قيم h, k, r .. المركز $(h, k) = (0,0) \Rightarrow h = 0$, $k = 0$ ، نصف القطر $r = 3$ وبالتعويض في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة .. $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

القطع الزائد

المقصود به	المحل الهندسي لجميع النقاط المستوية التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن بؤرتين مقداراً ثابتًا « $2a$ »	
مكوناته	يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي التقارب	
الرأسان	نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى	
المركز	نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين	
المحور القاطع	محور تماثل للقطع يمر بالرأسين	
المحور المرافق	محور تماثل للقطع عمودي على المحور القاطع ويمر بالمركز	

القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي

معادلته القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	a البعد بين المركز والرأس. b نصف طول المحور المرافق. (h,k) إحداثيا المركز.
خصائصه	• **الاتجاه:** المحور القاطع أفقي. • **المركز:** $C(h,k)$. • **الرأسان:** $V(h\pm a,k)$. • **البؤرتان:** $F(h\pm c,k)$. • **المحور القاطع:** $y=k$. • **المحور المرافق:** $x=h$. • **خطا التقارب:** $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$.	
علاقات مهمة	طول المحور القاطع « البُعد بين الرأسين » = $2a$ طول المحور المرافق = $2b$ البُعد بين البؤرتين = $2c$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$ أو $c^2=a^2+b^2$	c البعد بين المركز والبؤرة. a البعد بين المركز والرأس. b نصف طول المحور المرافق.

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$ ، ثم مثل منحناه بيانيًا.

مثال توضيحي

أولاً: نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** أفقي « الحد المطروح منه يحوي x ».
- **المركز:** $(h,k)=(0,0)$.
- **الرأسان:** $(h\pm a,k)=(0\pm 2,0)$.

∴ الرأسان $(2,0),(-2,0)$

- **البؤرتان:** $(h\pm c,k)=(0\pm\sqrt{5},0)$.

∴ البؤرتان $(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$

- **المحور القاطع:** $y=k=0$.
- **المحور المرافق:** $x=h=0$.
- **خطا التقارب:** $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$.

$$y-0=\pm\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}x$$

∴ خطا التقارب هما

$$y=\frac{1}{2}x\ ,\ y=-\frac{1}{2}x$$

ثانيًا: نرسم منحنى القطع ..

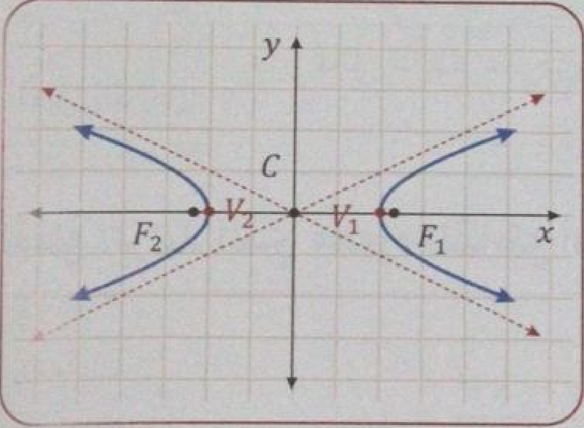
مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

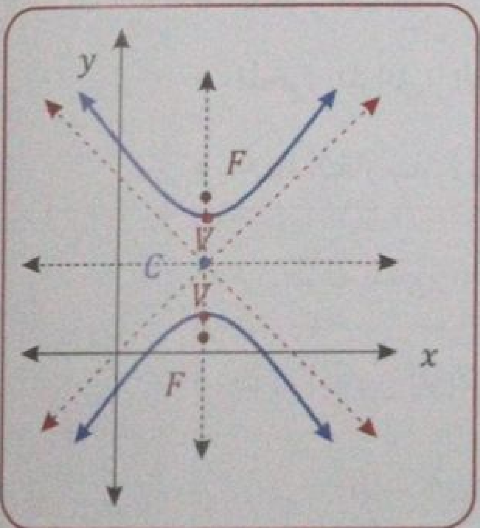
$$\frac{(x-0)^2}{4}-\frac{(y-0)^2}{1}=1$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

h	k	a	b	c
0	0	2	1	$\sqrt{5}$



القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي

معادلته القياسية	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	a البعد بين المركز والرأس. b نصف طول المحور المرافق. (h,k) إحداثيا المركز.
خصائصه	**الاتجاه:** المحور القاطع رأسي. **المركز:** $C(h,k)$. **الرأسان:** $V(h,k\pm a)$. **البؤرتان:** $F(h,k\pm c)$. **المحور القاطع:** $x=h$. **المحور المرافق:** $y=k$. **خطا التقارب:** $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$.	

علاقات مهمة

طول المحور القاطع « البُعد بين الرأسين » = $2a$	
طول المحور المرافق = $2b$	البُعد بين البؤرتين = $2c$
$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	

c البعد بين المركز والبؤرة.

a البعد بين المركز والرأس.

b نصف طول المحور المرافق.

مثال توضيحي

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$.

أولاً: نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** رأسي « الحد المطروح منه يحوي y ».
- **المركز:** $(h, k) = (-1, -4)$.
- **الرأسان:** $(h, k \pm a) = (-1, -4 \pm 8)$.

  ∴ الرأسان $(-1, 4)$, $(-1, -12)$
- **البؤرتان:** $(h, k \pm c) = (-1, -4 \pm \sqrt{145})$.

  $(-1, -4 + \sqrt{145})$, $(-1, -4 - \sqrt{145})$
- **المحور القاطع:** $x = h = -1$.
- **المحور المرافق:** $y = k = -4$.
- **خطا التقارب:** $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$ ..

$$y - (-4) = \pm\frac{8}{9}(x - (-1)) \Rightarrow y + 4 = \pm\frac{8}{9}(x + 1)$$

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$

h	k	a	b	c
−1	−4	8	9	$\sqrt{145}$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

المقصود به

الاختلاف المركزي e هو نسبة c الى a يُعطى بالعلاقة ..

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

c البعد بين المركز والبؤرة.

a البعد بين المركز والرأس.

مثال توضيحي

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$.

نُحدد قيمتي a, c ..

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8 \ , \ b^2 = 80 \ ,$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 80} = 12$$

نُوجد ـ الآن ـ الاختلاف المركزي e ..

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{8} = 1.5$$

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b} = 1$$

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$$

الصورة العامة لمعادلة القطوع

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

حيث: A, B, C لا تساوي جميعها أصفاراً، و ..

$$\text{المميز} = B^2 - 4AC\ ,\ B \neq 0$$

تصنيف القطوع

نوع القطع المخروطي	المميز
دائرة	$B^2 - 4AC < 0\ ,\ B = 0\ ,\ A = C$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0\ ,\ B \neq 0$ أو $A \neq C$
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

مثال

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$ دون كتابتها على الصورة القياسية « باستخدام المميز ».

نُعيد كتابة المعادلة لترتيبها ..

$$-6x^2 + 8y^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$$

نُحدد ـ الآن ـ قيمة المميز ..

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

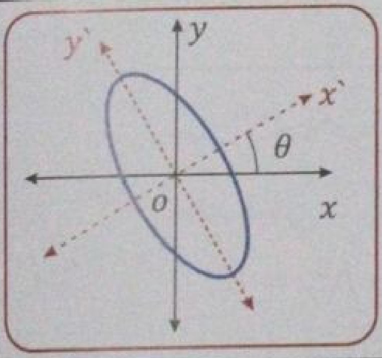
$$Ax^2\ +Bxy\ +Cy^2\ +Dx\ +Ey\ +F = 0$$
$$-6x^2\ +4xy\ +8y^2\ -6x\ +2y\ -4 = 0$$
$$A = -6\ ,\ B = 4\ ,\ C = 8$$

$$\text{المميز} = B^2 - 4AC = 4^2 - 4(-6)(8) = 208 > 0$$

$\therefore$ المعادلة تمثل قطعًا زائدًا

دوران محاور القطوع المخروطية

المقصود به	دوران محوري القطع بزاوية θ بحيث لا توازي محاور الاحداثيات x, y
المستوى $x`y`$	المستوى الناتج من دوران المستوى xy بزاوية θ



كتابة معادلة القطوع في المستوى $x`y`$ بالدوران بزاوية حادة θ

الطريقة

نُحول معادلة القطع من الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ إلى الصورة $(x`)^2 + C(y`)^2 + Dx` + Ey` + F = 0$ باستخدام صيغتي الدوران التاليتين:

$x = x`\cos\theta - y`\sin\theta$	$y = x`\sin\theta + y`\cos\theta$

مثال توضيحي

استعمل $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x`y`$ ، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

بما أن المطلوب كتابة المعادلة في المستوى $x`y`$ فإننا نستخدم صيغتي الدوران التاليتين:

$y = x`\sin\theta + y`\cos\theta$	$x = x`\cos\theta - y`\sin\theta$
$y = x`\sin\frac{\pi}{6} + y`\cos\frac{\pi}{6}$ $= x`\left(\frac{1}{2}\right) + y`\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= \frac{x` + \sqrt{3}\,y`}{2}$	$x = x`\cos\frac{\pi}{6} - y`\sin\frac{\pi}{6}$ $= x`\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y`\left(\frac{1}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{3}\,x` - y`}{2}$

نعوض ـ الآن ـ عن x, y في المعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 60 = 0$ ..

$$7\left(\frac{\sqrt{3}\,x` - y`}{2}\right)^2 + 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\,x` - y`}{2}\right)\left(\frac{x` + \sqrt{3}\,y`}{2}\right) + 3\left(\frac{x` + \sqrt{3}\,y`}{2}\right)^2 - 60 = 0$$

وبالفك ..

$$\frac{7(3x`^2 - 2\sqrt{3}\,x`y` + y`^2)}{4} + \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}\,x`^2 + 2x`y` - \sqrt{3}\,y`^2)}{4} + \frac{3(x`^2 + 2\sqrt{3}\,x`y` + 3y`^2)}{4} = 60$$

وبالضرب في 4 ثم فك الأقواس ..

$$36(x`)^2 + 4(y`)^2 = 240$$

وبالقسمة على 240 والتبسيط ..

$$\frac{(x`)^2}{\frac{20}{3}} + \frac{(y`)^2}{60} = 1$$

معادلة القطوع في المستوى xy إذا عُلمت معادلته في المستوى $x`y`$ بزاوية دوران θ

الطريقة

نُحول معادلة القطع من الصورة $A(x`)^2 + C(y`)^2 + Dx` + Ey` + F = 0$ للصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ باستخدام صيغتي الدوران التاليتين:

$x` = x\cos\theta + y\sin\theta$	$y` = y\cos\theta - x\sin\theta$

مثال توضيحي

اكتب معادلة القطع المخروطي $(x`)^2 = 8y`$ في المستوى xy إذا كانت زاوية الدوران $\theta = 45°$.

بما أن المطلوب كتابة معادلة القطع في المستوى xy فإننا نستخدم صيغتي الدوران التاليتين:

$y` = y\cos\theta - x\sin\theta$	$x` = x\cos\theta + y\sin\theta$
$y` = y\cos 45° - x\sin 45° y$ $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{2}\,(y-x)}{2}$	$x` = x\cos 45° + y`\sin 45°$ $= x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{2}\,(x+y)}{2}$

نعوض ـ الآن ـ عن $x`, y`$ في المعادلة $(x`)^2 = 8\,y`$ ..

$$\left(\frac{\sqrt{2}\,(x+y)}{2}\right)^2 = 8\left(\frac{\sqrt{2}\,(y-x)}{2}\right)$$

$$\frac{2(x^2+2xy+y^2)}{4} = 4\sqrt{2}\,y - 4x$$

وبالضرب في 4 ثم فك الأقواس ..

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = 16\sqrt{2}\,y - 16x$$

وبالتبسيط تكون معادلة القطع في المستوى xy ..

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 16x - 16\sqrt{2}\,y = 0$$

المعادلات الوسيطية

المقصود بها	إذا كانت f, g دالتين متصلتين في المتغير t على الفترة I فإن المعادلتين $x = f(t)$ و $y = g(t)$ تسميان المعادلتين الوسيطتين للمنحنى الوسيط حيث: t المتغير الوسيط ، I الفترة الوسيطية.
المنحنى الوسيط	المنحنى الممثل بالأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$

كتابة معادلات وسيطية بالصورة الديكارتية

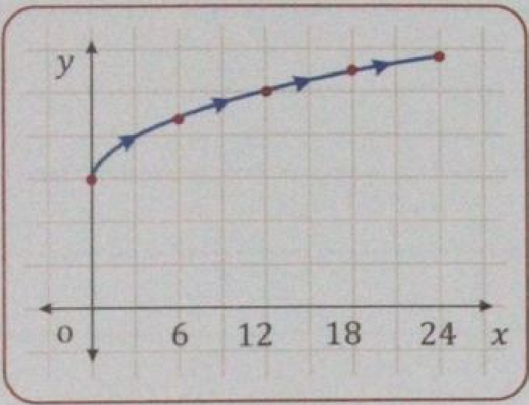
الطريقة	(1) نُوجد قيمة المتغير الوسيط t من أحد المعادلتين الوسيطتين. (2) نُعوض بقيمة t في المعادلة الثانية لينتج الصورة الديكارتية.

مثال توضيحي

مثل بيانيًا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين $x = 3t\ ,\ y = \sqrt{t} + 6$ حيث $0 \le t \le 8$.

نكون جدولاً لقيم x, y بناءً على قيم t ثم نرسم المنحنى على شبكة التربيع كما يلي:

t	$x = 3t$	$y = \sqrt{t} + 6$	(x, y)
0	$3(0) = 0$	$\sqrt{0} + 6 = 6$	$(0, 6)$
2	$3(2) = 6$	$\sqrt{2} + 6 = 7.4$	$(6, 7.4)$
4	$3(4) = 12$	$\sqrt{4} + 6 = 8$	$(12, 8)$
6	$3(6) = 18$	$\sqrt{6} + 6 = 8.4$	$(18, 8.4)$
8	$3(8) = 24$	$\sqrt{8} + 6 = 8.8$	$(24, 8.8)$



حركة المقذوفات

المقصود بها

إذا قُذف جسم بسرعة متجهة ابتدائية v_0 بحيث يصنع زاوية غير قائمة θ مع الأفق فإن ..

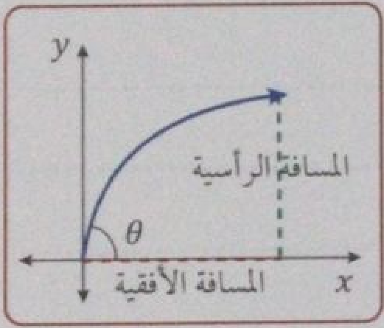
- **المسافة الأفقية x** : تعطى بالمعادلة ..

$$\text{المسافة الأفقية}\quad x = t\,v_0\cos\theta$$

- **المسافة الرأسية y**: تعطى بالمعادلة ..

$$\text{المسافة الرأسية}\quad y = t\,v_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

حيث: g الجاذبية الأرضية، t الزمن، h_0 الارتفاع الإبتدائي.



مثال توضيحي

ركلت كرة بسرعة $56\ \text{m/s}$ وبزاوية مقدارها 12° مع الأفق؛ ما أقصى مسافة أفقية تقطعها؟

أولاً: نحصل على الزمن اللازم للوصول لأقصى مسافة أفقية ..

بما أن الكرة تصل لأقصى مسافة أفقية عندما تكون المركبة الرأسية تساوي الصفر فإن ..

$y = t\,v_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ « المركبة الرأسية »

$0 = t\,(56)\sin 12^\circ - \frac{1}{2}(9.8)t^2 + 0$ « $y = 0\ ,\ g = 9.8\ ,\ \theta = 12^\circ\ ,\ h_0 = 0$ »

$4.9t^2 - 11.64t = 0$ « بسطنا »

$t(4.9t - 11.64) = 0$ « أخرجنا العامل المشترك t »

وباستخدام خاصية الضرب الصفري نتوصل إلى أنه: **إما** $t = 0$ وهذا مرفوض، **أو** ..

$$4.9t - 11.64 = 0 \ \Rightarrow\ 4.9t = 11.64 \ \Rightarrow\ t = \frac{11.64}{4.9} \approx 2.38$$

ثانيًا: نُوجد أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة بالتعويض عن t بـ 2.38 ..

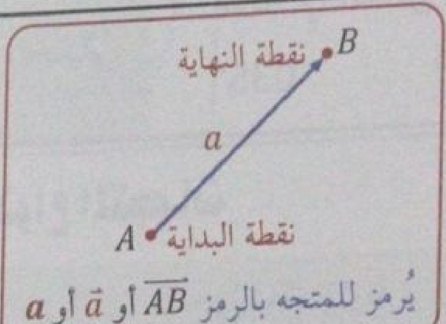
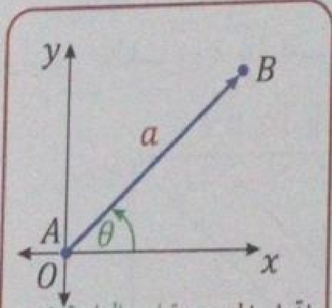
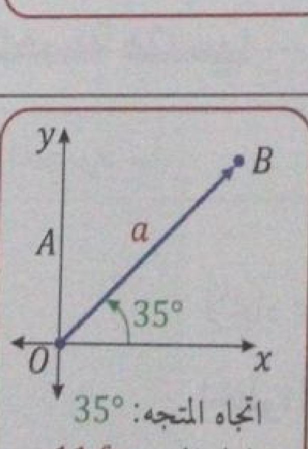
$$\text{المسافة الأفقية}\quad x = t\,v_0\cos\theta = 2.38(56)\cos 12^\circ \approx 130\ \text{m}$$

الفصل ١ : المتجهات

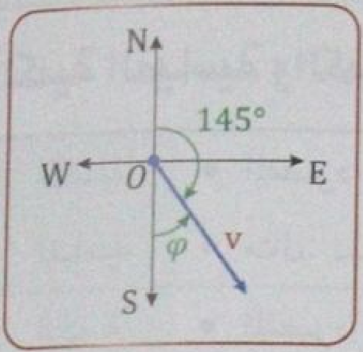
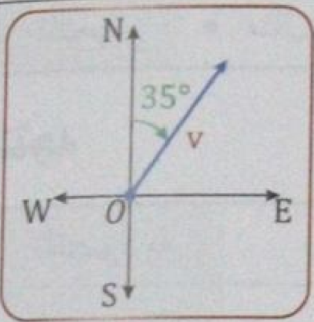
الكمية القياسية والكمية المتجهة

الكمية القياسية	• **المقصود بها:** كمية لها قيمة عددية فقط. • **مثال:** تسير سيارة بسرعة 100 km/h « السرعة هنا كمية قياسية ».
الكمية المتجهة	• **المقصود بها:** كمية لها قيمة عددية ولها اتجاه معلوم. • **مثال:** تسير سيارة بسرعة 100 km/h في اتجاه الجنوب « السرعة هنا كمية متجهة ».

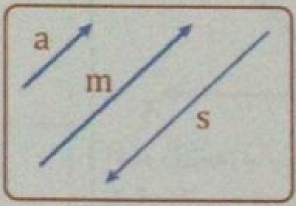
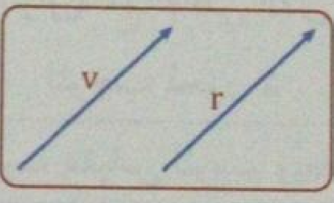
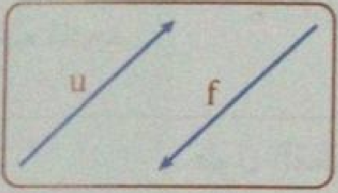
المتجه

المقصود به	كمية لها طول واتجاه معلوم	 يُرمز للمتجه بالرمز $\overline{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\boldsymbol{a}$
تمثيل المتجه هندسيًا	يُمثل المتجه هندسيًا بقطعة مستقيمة متجهة لها نقطة بداية ونقطة نهاية أو سهم يُظهر القيمة والاتجاه	
الوضع القياسي للمتجه	يكون المتجه في الوضع القياسي إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل	 اتجاه المتجه: قياس الزاوية θ طول المتجه: $\|a\|$
اتجاه المتجه	يساوي قياس الزاوية مع الأفقي الذي يسمى الاتجاه الموجب لمحور x	
طول المتجه	طول القطعة المستقيمة بمقياس للرسم ويُعطى بالعلاقة .. مقياس الرسم × الطول على الرسم = $\|a\|$	
مثال	الشكل المجاور يمثل المتجه a الذي اتجاهه 35° وطوله على الرسم 2.2 cm بمقياس الرسم 1 cm = 5 ft/s ، طول المتجه يساوي .. $\|a\| = 2.2 \times 5 = 11$ ft	 اتجاه المتجه: 35° طول المتجه: 11 ft

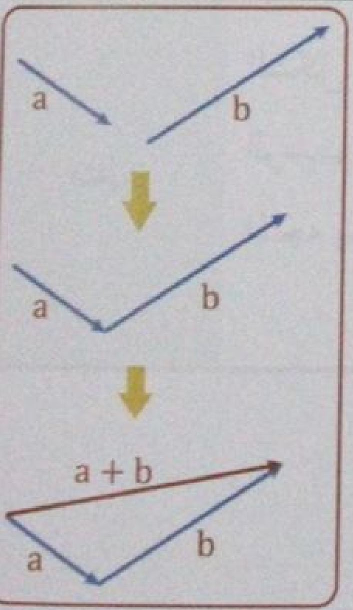
زاوية الاتجاه الربعي وزاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه

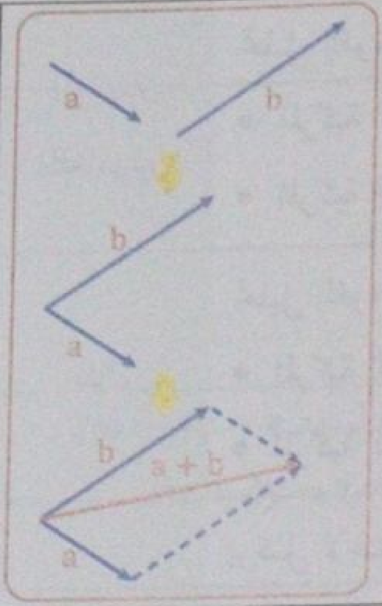
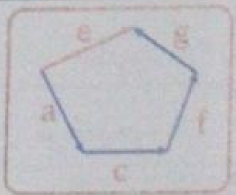
زاوية الاتجاه الربعي φ	• **المقصود بها**: قياس اتجاهي بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي « خط شمال ـ جنوب ». • **الرمز**: يرمز لها بالرمز φ وتقرأ فاي. • **مثال**: في الشكل المجاور زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** هي $\varphi = 35°$ شرق الجنوب، وتكتب S 35° E .	
زاوية الاتجاه الحقيقي	• **المقصود بها**: قياس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. • **القياس**: يكون بثلاثة أرقام للزاوية وبدون مركبات اتجاه. • **مثال**: في الشكل المجاور زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** هي 035° .	

أنواع المتجهات

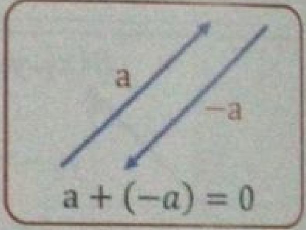
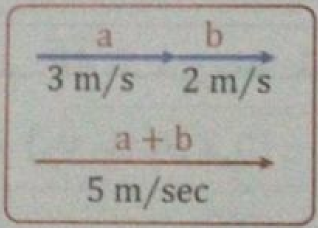
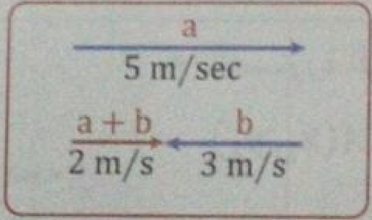
المتجهات المتوازية	المتجهات المتكافئة	المتجهان المتعاكسان
لها الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان وليس بالضرورة لها نفس الطول ..	لها الاتجاه نفسه والطول نفسه ..	لهما الطول نفسه ولكن اتجاهيهما متعاكسان ..
a ∥ m ∥ s	v = r	u = −f
		

المحصلة هندسيًا

المقصود بها	جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا	
قاعدة المثلث	لإيجاد محصلة المتجهين a, b هندسيًا نتبع الخطوتين التاليتين: الخطوة1: نجري انسحابًا للمتجه b لتلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه a . الخطوة2: محصلة المتجهين a, b هي المتجه **a + b** المرسوم من نقطة بداية a إلى نقطة نهاية b .	

قاعدة متوازي الأضلاع	لإيجاد محصلة المتجهين **a, b** هندسيًا نتبع الخطوات التالية: **الخطوة1:** نجري انسحابًا للمتجه **b** لتلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a** . **الخطوة2:** نكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a, b** . **الخطوة3:** محصلة المتجهين **a, b** هي المتجه **a + b** الذي يُمثل قطر متوازي الأضلاع. 
فائدة	لإيجاد محصلة ثلاثة متجهات فأكثر يُفضل استعمال قاعدة المثلث .. فمثلاً محصلة المتجهات **a, c, f, g** هو المتجه **e** 

العمليات على المتجهات

جمع المتجهات		
عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه فإن المحصلة هي المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$	محصلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه هو مجموع أطوال هذه المتجهات واتجاهها هو نفس اتجاه المتجهات الأصلية	محصلة ناتج جمع متجهين متعاكسين هو القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين واتجاهها هو اتجاه المتجه الأكبر
		

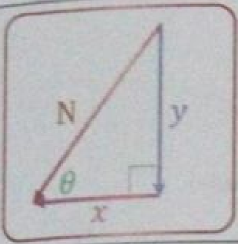
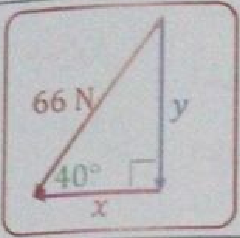
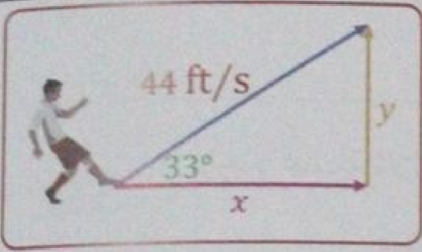
ضرب متجه في عدد حقيقي

إذا ضرب المتجه **v** في عدد حقيقي k فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k||\mathbf{v}|$ ..

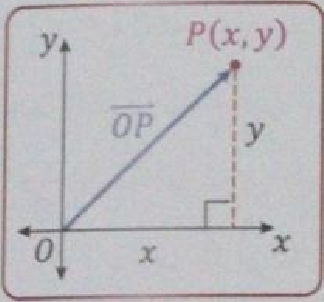
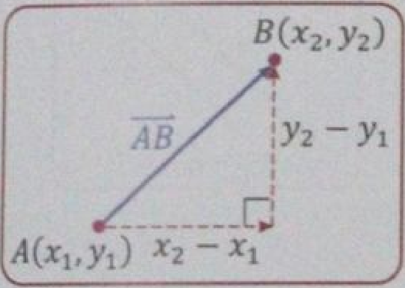
- إذا كانت $k > 0$ فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه **v** نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه **v** .

تحليل القوة

المقصود به	تحليل متجه القوة إلى مركبتين متعامدتين أحدهما أفقية والأخرى رأسية

المركبتين المتعامدتين	تحليل القوة N إلى مركبتين متعامدتين في الشكل المجاور هما .. • المركبة الأفقية: $\lvert x\rvert = \mathrm{N}\cos\theta$. • المركبة الرأسية: $\lvert y\rvert = \mathrm{N}\sin\theta$.	
مثال	تحليل القوة 66 N إلى مركبتين متعامدتين .. • المركبة الأفقية: $\lvert x\rvert = 66\cos 40° \approx 50.6$. • المركبة الرأسية: $\lvert y\rvert = 66\sin 40° \approx 42.4$.	
مثال توضيحي	يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft/s وبزاوية 33° مع الأرض؛ أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة. • المركبة الأفقية: $\lvert x\rvert = 44\cos 33° \approx 36.9\ \text{ft/s}$. • المركبة الرأسية: $\lvert y\rvert = 44\sin 33° \approx 24\ \text{ft/s}$.	

الصورة الإحداثية لمتجه وطول المتجه

المتجه في الوضع القياسي	• الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة نهايته $P(x, y)$ هي .. $\overrightarrow{OP} = \langle x, y\rangle$ • طول المتجه يُعطى بالصيغة .. $\lvert\overrightarrow{OP}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	
المتجه في وضع غير قياسي	• الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي .. $\overrightarrow{AP} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ • طول المتجه يُعطى بالصيغة .. $\lvert\overrightarrow{AP}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
مثال	• الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(1, 3)$ ونقطة نهايته $B(5, 6)$ .. $\overrightarrow{AP} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle = \langle 5 - 1, 6 - 3\rangle = \langle 4, 3\rangle$ • إيجاد طول $\overrightarrow{AB}$ .. $\lvert\overrightarrow{AP}\rvert = \sqrt{(5 - 1)^2 + (6 - 3)^2} = 5$	

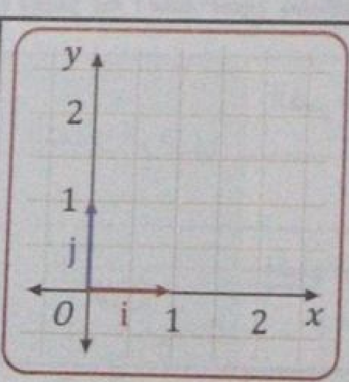
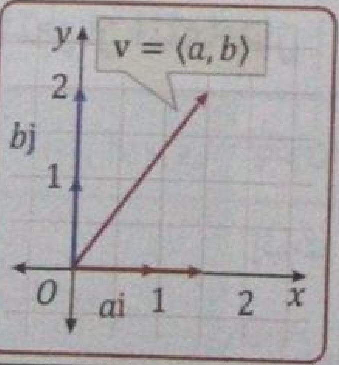
العمليات على المتجهات

جمع وطرح المتجهات وضرب متجه في عدد حقيقي	إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين فإن .. • جمع متجهين: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$. • طرح متجهين: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$. • ضرب متجه في عدد حقيقي k : $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$
مثال توضيحي	للمتجهات $\mathbf{w} = \langle -4, 1 \rangle$, $\mathbf{z} = \langle -3, 0 \rangle$, $\mathbf{y} = \langle 2, 5 \rangle$ أوجد $2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$. $2\mathbf{w} + 4\mathbf{y} - \mathbf{z} = 2\langle -4, 1 \rangle + 4\langle 2, 5 \rangle - \langle -3, 0 \rangle$ $= \langle -8, 2 \rangle + \langle 8, 20 \rangle + \langle 3, 0 \rangle = \langle 3, 22 \rangle$

متجه الوحدة u

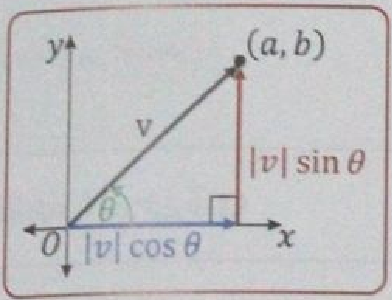
المقصود به	متجه طوله 1
إيجاده	نُوجد متجه الوحدة **u** في اتجاه أي متجه معلوم **v** بالعلاقة .. $\boxed{\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\lvert \mathbf{v} \rvert}}$
مثال	إيجاد متجه الوحدة **u** في نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$ .. $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\lvert \mathbf{v} \rvert} = \frac{\langle 3,4 \rangle}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\langle 3,4 \rangle}{5} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$ وللتأكد أن طول متجه الوحدة يساوي 1 : $\lvert \mathbf{u} \rvert = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$

متجها الوحدة القياسيين

متجها الوحدة القياسيين	• يُرمز لمتجه الوحدة باتجاه المحور x الموجب بالرمز **i** حيث .. $\boxed{\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle}$ • يُرمز لمتجه الوحدة باتجاه المحور y الموجب بالرمز **j** حيث .. $\boxed{\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle}$  • يمكن استعمال متجهي الوحدة القياسيين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ بالصورة .. $\boxed{\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}}$  • يُسمى ناتج الجمع $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًا** لـ **i, j** .

مثال توضيحي	أوجد المتجه $\overrightarrow{DE}$ الذي نقطتا بدايته ونهايته $D(-3,-8), E(7,1)$ بدلالة متجهي الوحدة **i, j** . نُوجد الصورة الإحداثية $\overrightarrow{DE}$ ثم نُعبر عن المتجه بدلالة متجهي الوحدة .. $\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle 7-(-3), 1-(-8)\rangle = \langle 10, 9\rangle$ $\overrightarrow{DE} = \langle 10, 9\rangle = 10\mathrm{i} + 9\mathrm{j}$

الصورة الإحداثية للمتجه إذا عُلم طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي

التعبير الرمزي	• يمكن تحديد اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها **v** مع المحور x الموجب .. $\mathbf{v} = \langle \lvert\mathrm{v}\rvert \cos\theta , \lvert\mathrm{v}\rvert \sin\theta\rangle$ • إيجاد زاوية اتجاه المتجه من العلاقة .. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ أو $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\lvert\mathrm{v}\rvert \sin\theta}{\lvert\mathrm{v}\rvert \cos\theta}\right)$ 
مثال	الصورة الإحداثية للمتجه **v** الذي طوله 6 وزاوية اتجاهه 30° مع الأفقي هي .. $\mathbf{v} = \langle \lvert\mathrm{v}\rvert \cos\theta , \lvert\mathrm{v}\rvert \sin\theta\rangle = \langle \lvert 6\rvert \cos 30° , \lvert 6\rvert \sin 30°\rangle = \langle 3\sqrt{3} , 3\rangle$
مثال توضيحي	أوجد زاوية اتجاه المتجه $\langle -3, -8\rangle$ مع المحور x الموجب. نُوجد زاوية اتجاه المتجه باستعمال معادلة زاوية الاتجاه .. $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{-3}\right) \approx 69.4°$ وبما أن المتجه يقع في الربع الثالث فإن: $\theta = 180° + 69.4° = 249.4°$

الضرب الداخلي لمتجهين

التعبير الرمزي	الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ .. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
مثال	إيجاد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 4\rangle \ , \mathbf{v} = \langle -1, 5\rangle$ .. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (3 \times -1) + (4 \times 5) = 17$

المتجهان المتعامدان

التعبير الرمزي	يكون المتجهان **a , b** متعامدين إذا وفقط إذا كان .. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
مثال	إثبات أن المتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 4\rangle \ , \ \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$ متعامدان .. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 3 \times -4 + 4 \times 3 = 0$ $\therefore$ **u , v** متجهان متعامدان

خصائص الضرب الداخلي

الخصائص

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات وكان k عددًا حقيقيًا فإن الخصائص التالية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=k\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0\cdot\mathbf{u}=0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\lvert\mathbf{u}\rvert^2$

فائدة

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=u_1^2+u_2^2=\left(\sqrt{(u_1^2+u_2^2)}\right)^2=\lvert\mathbf{u}\rvert^2$$

مثال توضيحي

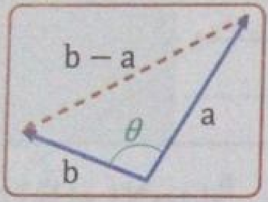
استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه $\mathbf{b}=\langle 12,16\rangle$.

بما أن $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\lvert\mathbf{b}\rvert^2$ فإن $\lvert\mathbf{b}\rvert=\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$ ..

$$\lvert\langle -1,-7\rangle\rvert=\sqrt{\langle -1,-7\rangle\cdot\langle -1,-7\rangle}=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=5\sqrt{2}$$

الزاوية بين متجهين

التعبير الرمزي



إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ فإن ..

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert}$$

مثال توضيحي

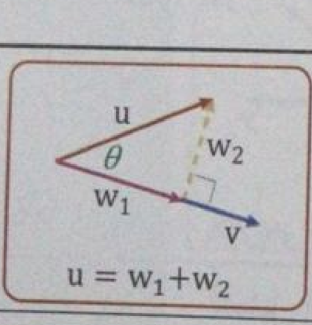
أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}=\langle -5,-2\rangle, \mathbf{v}=\langle 4,4\rangle$.

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}=\frac{\langle -5,-2\rangle\cdot\langle 4,4\rangle}{\lvert\langle -5,-2\rangle\rvert\lvert\langle 4,4\rangle\rvert}=\frac{-20+(-8)}{\sqrt{29}\sqrt{32}}=\frac{-28}{4\sqrt{58}}$$

$$\therefore\ \theta=\cos^{-1}\left(\frac{-28}{4\sqrt{58}}\right)\approx 157^\circ$$

سقط المتجه

التعبير الرمزي



إذا كان $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متجهين غير صفريين وكان $\mathbf{w}_1$ ، $\mathbf{w}_2$ مركبتي $\mathbf{u}$ فإن $\mathbf{w}_1$ يسمى مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على المتجه $\mathbf{v}$ ويكون ..

$$\mathbf{w}_1=\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$$

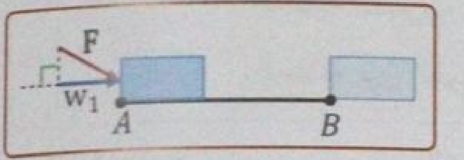
مثال

أوجد مسقط $\mathbf{u}=\langle 1,2\rangle$ على $\mathbf{v}=\langle 8,5\rangle$.

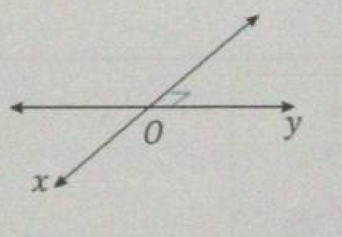
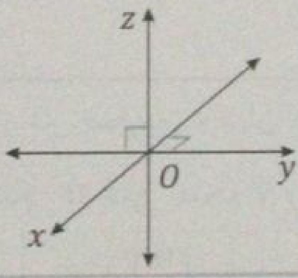
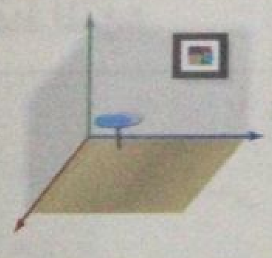
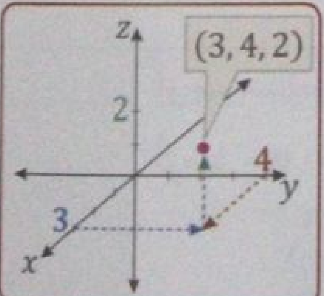
نُوجد $\mathbf{w}_1$ « مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ » ..

$\mathbf{w}_1=\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\ }\right)\mathbf{v}=\frac{\langle 1,2\rangle\cdot\langle 8,5\rangle}{\ }$ 18 144 90

الشغل

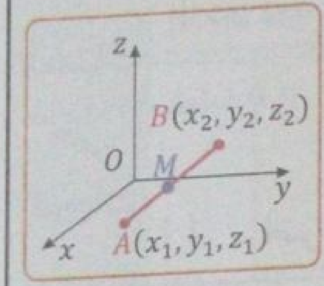
المقصود به	القوة المؤثرة على جسم لتحريكه من نقطة إلى نقطة أُخرى ويرمز له بالرمز W
التعبير الرمزي	إذا كانت $\mathbf{F}$ قوة مؤثرة على جسم لتحريكه من النقطة A إلى B فإن ..  • **أولاً:** $\mathbf{F}$ توازي $\overrightarrow{AB}$ .. $W = \lvert\mathbf{F}\rvert\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$  • **ثانيًا:** $\mathbf{F}$ لا توازي $\overrightarrow{AB}$ نأخذ المركبة الأفقية .. $W = \lvert\mathbf{w_1}\rvert\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$
مثال توضيحي	 يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N ، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض °60 فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m ؟ نستعمل قاعدة مسقط الشغل W والتي فيها القوة لا توازي سطح الأرض فتكون $\mathbf{w_1}$ هي مسقط القوة 25 N على الأرض والمسافة $\overrightarrow{AB} = 6\text{m}$ هي التي تحركها إبراهيم بالمكنسة .. $\therefore\ W = \lvert\mathbf{w_1}\rvert\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = (25\cos 60°)(6) = 75\text{ J}$

النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد

<table>
<tr><td>المقصود به</td><td colspan="3">تمثيل نقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية تتبع محاور متعامدة x, y, z</td></tr>
<tr><td rowspan="2">التعبير الهندسي</td><td>المحوران x, y بصورة تُظهر عمقًا</td><td>إضافة محور ثالث z يمر بنقطة الأصل ويعامد المحورين x, y</td><td>غرفة البيت تُمثل نظامًا إحداثيًا ثلاثي الأبعاد</td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td></td></tr>
<tr><td>مثال</td><td colspan="2">لتمثيل النقطة $(3, 4, 2)$ في المستوى الإحداثي ثلاثي الأبعاد نعين النقطة $(3, 4)$ في المستوى xy بإشارة ما ثم نصعد وحدتين للأعلى من الإشارة السابقة بموازاة محور z</td><td> </td></tr>
<tr><td>فائدة</td><td colspan="3">المحور الإضافي z يُقسِّم الفضاء إلى 8 مناطق يُسمى كل منها الثُمن</td></tr>
</table>

قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

القانون



- المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ هي ..

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ هي ..

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

مثالان

- إيجاد المسافة بين النقطتين $A(2, 3, 1), B(5, 7, 1)$ ..

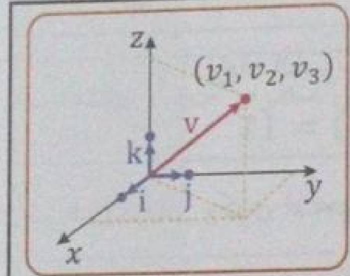
$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

- إيجاد نقطة المنتصف M للنقطتين $A(2, 3, 1), B(5, 7, 1)$ ..

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) = M\left(\frac{2+5}{2}, \frac{3+7}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = M(3.5, 5, 1)$$

تعيين متجه في الفضاء

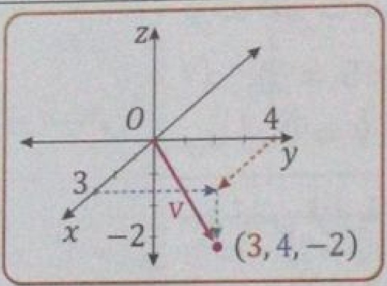
التعبير عن المتجه في الفضاء



- المتجه v : $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.
- المتجه الصفري: $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$.
- متجهات الوحدة القياسية:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad , \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad , \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

مثال



لتمثيل المتجه $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$ في الفضاء نُعين النقطة $(3, 4, -2)$ ثم نُمثل المتجه v بتوصيل خط من نقطة الأصل إلى هذه النقطة

مثال توضيحي

أوجد الصورة الإحداثية وطول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 4, 6)$ ونقطة نهايته $B(3, 3, 8)$ ، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ ..

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle 3 - (-1), 3 - 4, 8 - 6 \rangle = \langle 4, -1, 2 \rangle$$

ولإيجاد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ نجد أن ..

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{21}$$

والآن ـ نوجد ـ متجه الوحدة u باتجاه $\overrightarrow{AB}$ ..

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\langle 4, -1, 2 \rangle}{\sqrt{21}} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$$

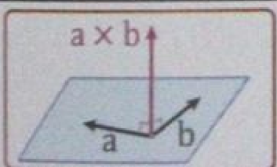
العمليات على المتجهات في الفضاء

<table>
<tr><td>العمليات على المتجهات</td><td>إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ متجهين في الفضاء وكان k عددًا حقيقيًا فإن ..
<table>
<tr><td>جمع متجهين</td><td>$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$</td></tr>
<tr><td>طرح متجهين</td><td>$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\rangle$</td></tr>
<tr><td>ضرب متجه في عدد حقيقي</td><td>$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3\rangle$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>للمتجهات $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4\rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5\rangle$ أوجد $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$.
$3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w} = 3\langle 3, -6, 2\rangle + 3\langle -2, 0, 5\rangle - 6\langle -1, 4, -4\rangle$
$= \langle 9, -18, 6\rangle + \langle -6, 0, 15\rangle + \langle 6, -24, 24\rangle = \langle 9, -42, 45\rangle$</td></tr>
</table>

الضرب الداخلي في الفضاء وشرط التعامد

التعبير الرمزي	الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ يُعرف بالعلاقة .. $\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$
مثال	إيجاد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 5, 4\rangle$ .. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (3 \times -1) + (2 \times 5) + (1 \times 4) = 11$
شرط التعامد	يكون المتجهان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متعامدين في الفضاء إذا وفقط إذا كان .. $\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0}$
مثال توضيحي1	أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 7, 5\rangle$ ثم تحقق إن كانا متعامدين. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 3 \times 5 + (-5) \times 7 + 4 \times 5 = 0$ وبما أن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ فإن المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ متعامدان.
مثال توضيحي2	جِد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ إلى اقرب منزلة عشرية. الصورة الإحداثية للمتجهين هي: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 0, 3\rangle$ نوجد ـ الآن ـ قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ باستعمال قانون الزاوية بين متجهين .. $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert} = \dfrac{\langle -4, 2, 1\rangle\cdot\langle 4, 0, 3\rangle}{\lvert\langle -4, 2, 1\rangle\rvert\lvert\langle 4, 0, 3\rangle\rvert} = \dfrac{-16 + 0 + 3}{\sqrt{21}\ \times 5} = \dfrac{-13}{5\sqrt{21}}$ $\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-13}{5\sqrt{21}}\right) \approx 124.6^\circ$

الضرب الاتجاهي لمتجهين

المقصود به	متجه عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين a, b ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ويُقرأ a cross b	

التعبير الرمزي

إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\,,\ \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a, b هو المتجه ..

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال توضيحي

جد مساحة متوازي أضلاع فيه $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

نُوجد حاصل الضرب الاتجاهي $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ، ثم نوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ..

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= [(-2)(1) - (3)(3)]\mathbf{i} + [(-6)(1) - (3)(4)]\mathbf{j} + [(-6)(3) - (-2)(4)]\mathbf{k}$$

$$= -11\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = \langle -11, 18, -10 \rangle$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2} \approx 23$$

∴ مساحة متوازي الأضلاع تساوي 23 وحدة مربعة تقريبًا

الضرب القياسي للثلاثيات

المقصود به

التقاء ثلاثة متجهات في نقطة البداية فتكون أحرفًا متجاورة لمتوازي سطوح حجمه هو القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات

التعبير الرمزي

إذا كان ..

$$\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

فإن الضرب القياسي للثلاثيات هو ..

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال توضيحي

جد حجم متوازي سطوح فيه $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\,,\ \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\,,\ \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

أحرف متجاورة.

حجم متوازي السطوح هو القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات للمتجهات t, u, v ..

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}(0) - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}(2) + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}(-5)$$

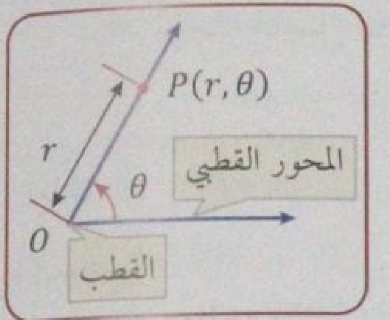
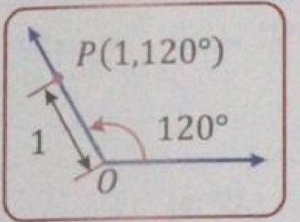
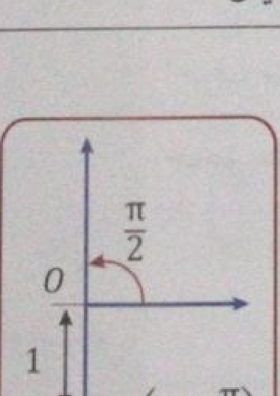
$$= 0 - \big((-6)(1) - (3)(4)\big)(2) + \big((-6)(3) - (-2)(4)\big)(-5)$$

$$= 18(2) - 10(-5) = 86$$

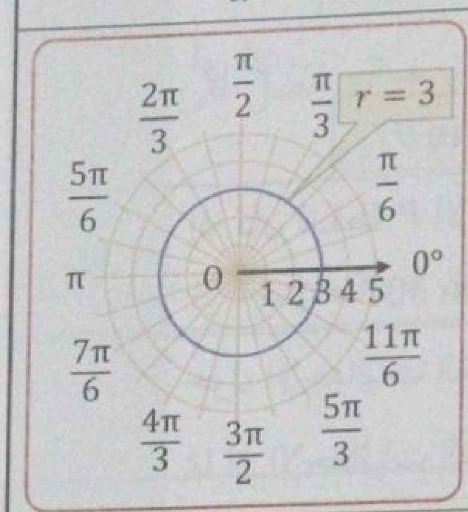
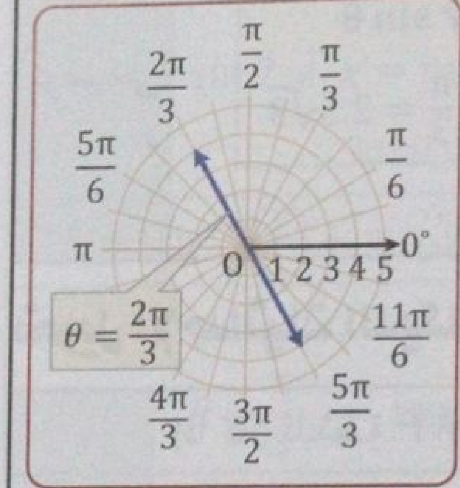
∴ حجم متوازي السطوح يساوي 86 وحدة مكعبة

الفصل ٢ : الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

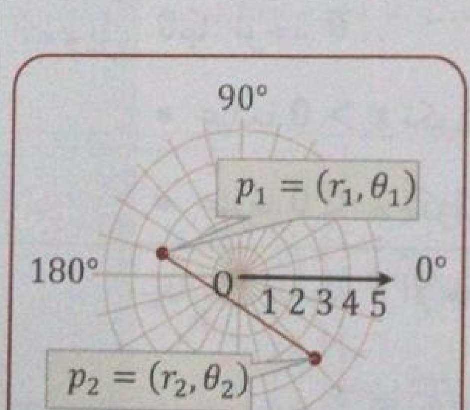
نظام الإحداثيات القطبية « المستوى القطبي »

مكوناته	• **القطب**: نقطة الأصل O . • **المحور القطبي**: شعاع يمتد أفقيًا من القطب لليمين. • **الإحداثيات القطبية لنقطة $P(r,\theta)$**: r هي المسافة المتجهة من القطب للنقطة P و θ هي الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$. 
تمثيل النقطة $p(r,\theta)$	• إذا كانت θ موجبة فإن الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي. • إذا كانت θ سالبة فإن الدوران مع اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي. • إذا كانت r موجبة فإن P واقعة على ضلع الانتهاء للزاوية θ . • إذا كانت r سالبة فإن P واقعة على الشعاع المقابل « الامتداد » لضلع الانتهاء للزاوية θ .
مثال	تمثيل النقطة $P(1,120°)$ .. بما أن $\theta = 120 > 0$ فإن الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة وبما أن $r = 1 > 0$ فإن P واقعة على ضلع الانتهاء للزاوية θ 
تنبيهان	• يمكن تمثيل النقطة (r,θ) بالإحداثيات $(r,\theta+360°n)$ أو $(-r,\theta+(2n+1)180°)$ ؛ حيث n عدد صحيح. • يمكن تمثيل النقطة (r,θ) بالإحداثيات $(r,\theta+2n\pi)$ أو $(-r,\theta+(2n+1)\pi)$ ؛حيث n عدد صحيح و θ مقيسة بالراديان.
مثال توضيحي	مثل النقطة $D\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$. بما أن $\theta = \frac{\pi}{2}$ « موجبة » فإننا نرسم ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\pi}{2}$ بحيث يكون المحور القطبي هو ضلع الابتداء لها بدوران عكس عقارب الساعة. وبما أن $r = -1$ « سالبة » فإننا نمد ضلع الانتهاء في الاتجاه المقابل ونُعين عليه النقطة D على بعد وحدة واحدة من القطب O كما بالشكل المجاور. 

التمثيل البياني للمعادلات القطبية

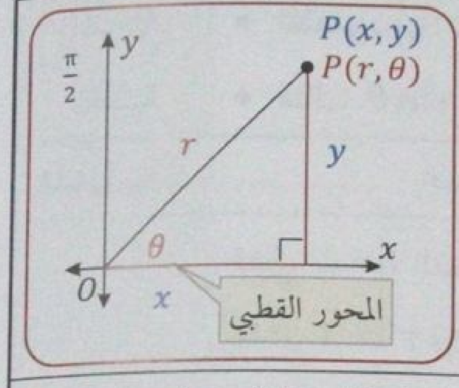
المعادلة القطبية	• المقصود بها: معادلة معطاه بدلالة الإحداثيات القطبية. • مثال: $r = 2\sin\theta$.
تمثيلها بيانيًا	مجموعة كل النقاط (r,θ) التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية
مثال1	تمثيل المعادلة القطبية $r = 3$ .. بما أن $r = 3$ فإن جميع النقاط على الصورة $(3,\theta)$ والتي تبعد 3 وحدات من نقطة الأصل « القطب O » تكون حلا للمعادلة. ∴ التمثيل البياني هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 
مثال2	تمثيل المعادلة القطبية $\theta = \frac{2\pi}{3}$ بيانيًا .. حلول المعادلة $\theta = \frac{2\pi}{3}$ عبارة عن جميع النقاط $\left(r, \frac{2\pi}{3}\right)$ حيث r أي عدد حقيقي. ∴ التمثيل البياني هو جميع النقاط الواقعة على المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور القطبي الموجب 

المسافة بالصيغة القطبية

المقصود بها	إذا كانت $P_1 = (r_1,\theta_1), P_2 = (r_2,\theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي فإن المسافة P_1P_2 تُعطى بالصيغة .. $P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$	
مثال	المسافة بين النقطتين $P_1 = (1, 20°), P_2 = (2, 80°)$ .. $P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$ $= \sqrt{1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos(80° - 20°)}$ $= \sqrt{3}$	

تحويل الإحداثيات القطبية للإحداثيات الديكارتية

طريقة التحويل



إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r,θ) فإن الإحداثيات الديكارتية (x,y) للنقطة P هي ..

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن ..

$$(x,y) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)$$

مثال

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية $(2,30°)$ فإن إحداثياتها الديكارتية (x,y) هي ..

$$x = r\cos\theta = 2\ \cos 30° = \sqrt{3} \quad , \quad y = r\sin\theta = 2\sin 30° = 1$$

مثال توضيحي

حول الإحداثيات القطبية للنقطة $S\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$ للإحداثيات الديكارتية.

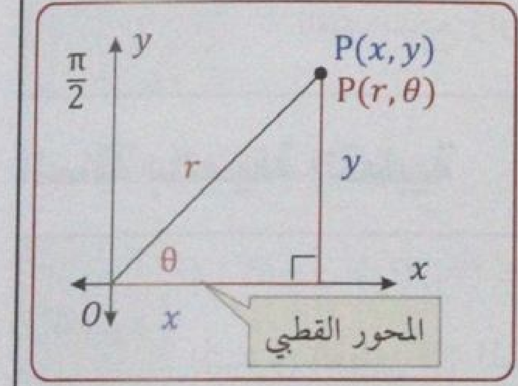
بما أن الإحداثيات القطبية للنقطة S هي $\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$ فإن $r = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$.

$\mathbf{y = r\sin\theta}$	صيغ التحويل	$\mathbf{x = r\cos\theta}$
$y = 5\sin\frac{\pi}{3} = 2.5\sqrt{3}$	عوضنا بـ $r = 5\ ,\ \theta = \frac{\pi}{3}$	$x = 5\cos\frac{\pi}{3} = 2.5$

∴ الإحداثيات الديكارتية للنقطة S هي $\left(2.5, 2.5\sqrt{3}\right)$

تحويل الإحداثيات الديكارتية للإحداثيات القطبية

طريقة التحويل



إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x,y) فإن الإحداثيات القطبية (r,θ) للنقطة P هي ..

أولاً: نُوجد r بالصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ثانيًا: نُوجد θ ..

- عندما $x > 0$ تكون $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.
- عندما $x < 0$ تكون $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ **أو** $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180°$.

مثال

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية $\left(1,\sqrt{3}\right)$ فإن إحداثياتها القطبية (r,θ) هي ..

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

وبما أن $x = 1 > 0$ فإن ..

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60°$$

أي أن الإحداثيات القطبية للنقطة $\left(1,\sqrt{3}\right)$ هي $(2,60°)$

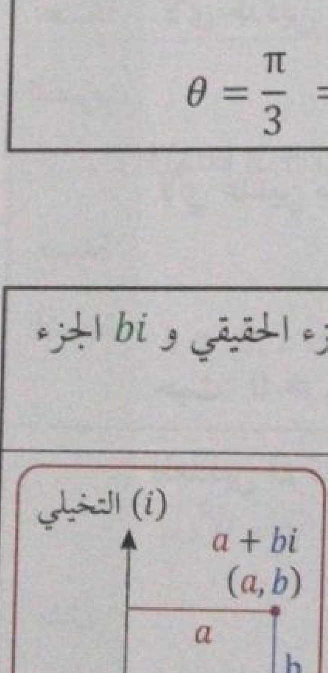
تحويل المعادلات الديكارتية للقطبية

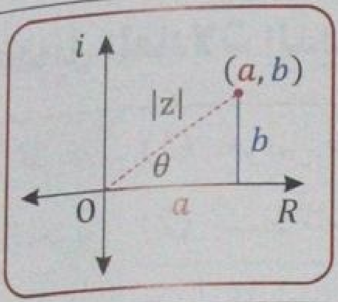
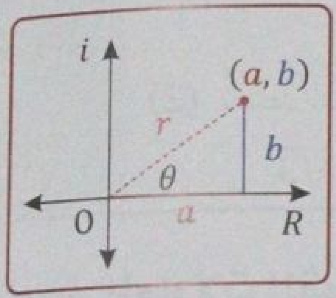
طريقة التحويل	(1) نُعوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$. (2) نُبسط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.
مثال	تحويل المعادلة $x^2+y^2=3$ للصورة القطبية .. (1) نُعوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$ في $x^2+y^2=3$ نحصل على .. $(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=3$ (2) نُبسط المعادلة بأخذ r^2 عاملاً مشتركًا .. $r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=3 \;\Rightarrow\; r^2(1)=3 \;\Rightarrow\; r^2=3 \;\Rightarrow\; r=\sqrt{3}$

تحويل المعادلات القطبية للديكارتية

طريقة التحويل	(1) نستخدم الصيغ التالية بحسب ما تحتاجه المعادلة: $r^2=x^2+y^2$ أو $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ أو $x=r\cos\theta$ أو $y=r\sin\theta$ (2) نُبسط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية والمتطابقات المثلثية.
تنبيه	عندما $x>0$ تكون $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ و عندما $x<0$ تكون $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi$
مثال	تحويل المعادلة $\theta=\frac{\pi}{3}$ للإحداثيات الديكارتية .. $\theta=\frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; \tan\theta=\tan\frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x}=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; y=\sqrt{3}\,x$

العدد المركب

صورته العامة	يُكتب العدد المركب بالصورة الديكارتية $a+bi$ ؛ حيث a الجزء الحقيقي و bi الجزء التخيلي	
مكونات المستوى المركب	• محور أفقي « المحور الحقيقي »: يُعين عليه الجزء الحقيقي a . • محور رأسي « المحور التخيلي »: يُعين عليه الجزء التخيلي bi . **فائدة:** يُسمى المستوى المركب بمستوى آرجاند.	
تمثيل العدد المركب	نُمثل العدد المركب $a+bi$ بتحديد الزوج المرتب (a,b) على المستوى المركب	

القيمة المطلقة للعدد المركب	القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ يُرمز لها بـالرمز $\|z\|$ ونوجدها بالعلاقة .. $\|z\| = \|a + bi\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 
الصورة القطبية للعدد المركب	الصورة القطبية للعدد المركب $z = a + bi$ هي .. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث: • $a = r\cos\theta\ ,\ b = r\sin\theta\ ,\ r = \sqrt{a^2 + b^2}$. • $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ عندما $a > 0$. • $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ عندما $a < 0$. 
تنبيه	إذا كانت $a = 0$ فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ عندما $b > 0$ و $\theta = -\frac{\pi}{2}$ عندما $b < 0$
فائدة	في العدد المركب $a + bi$ إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

صيغة الضرب	لأي عددين مركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ .. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$
صيغة القسمة	لأي عددين مركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ يكون .. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ حيث: $z_2 \neq 0 , r_2 \neq 0$.
مثال	للعددين المركبين $z_1 = 6(\cos 40° + i\sin 40°)$ و $z_2 = 2(\cos 10° + i\sin 10°)$ .. $z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot 2[\cos(40° + 10°) + i\sin(40° + 10°)]$ $= 12[\cos(50°) + i\sin(50°)]$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}[\cos(40° - 10°) + i\sin(40° - 10°)]$ $= 3[\cos(30°) + i\sin(30°)]$
فائدتان	• عند ضرب عددين مركبين نضرب المقياسين ونجمع السعتين. • عند قسمة عددين مركبين نقسم المقياسين ونطرح السعتين.

نظرية ديموافر

نصها

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية وكان n عددًا صحيحًا موجبًا فإن ..

$$\boxed{z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]}$$

مثال

إذا كان $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ فإن ..

$$z^2 = \left[3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 3^2\left[\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 9(\cos\pi + i\sin\pi)$$

الجذور النونية المختلفة

المقصود بها

لأي عدد صحيح موجب n فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد n من الجذور النونية المختلفة

إيجادها

نُوجد الجذور النونية المختلفة للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالصيغة ..

$$\boxed{r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

حيث: $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

مثال

إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب $4(\cos\pi + i\sin\pi)$ ..

بما أن مطلوب الجذور التربيعية للعدد $4(\cos\pi + i\sin\pi)$ فإن $n = 2\ ,\ r = 4\ ,\ \theta = \pi$ ؛ ومنه فإن ..

الجذور هي $4^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)$ ، حيث $k = 0, 1$

- الجذر الأول عند $k = 0$ ..

$$\text{الجذر الأول} = 4^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi+2(0)\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2(0)\pi}{2}\right) = 2i$$

- الجذر الثاني عند $k = 1$ ..

$$\text{الجذر الثاني} = 4^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi+2(1)\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2(1)\pi}{2}\right) = -2i$$

ملاحظتان

- لجميع الجذور النونية المختلفة لأي عدد مركب المقياس نفسه ويساوي $r^{\frac{1}{n}}$.
- سعة الجذر الأول تساوي $\frac{\theta}{n}$ ثم تزداد الجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

الجذور النونية للعدد واحد

طريقة إيجادها	(1) نضع العدد 1 على الصورة القطبية $1(\cos 0 + i\sin 0)$. (2) نُوجد الجذور النونية المختلفة للعدد المركب $1(\cos 0 + i\sin 0)$ بالصيغة .. $\boxed{1^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n} + i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right)}$ حيث $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.
مثال	إيجاد الجذور التكعيبية للعدد 1 .. (1) نضع العدد 1 على الصورة القطبية $1(\cos 0 + i\sin 0)$. (2) بما أن مطلوب الجذور التكعيبية للعـدد $1(\cos 0 + i\sin 0)$ فـإن $n = 3, r = 1, \theta = 0$ ومنه فإن .. الجذور هي $1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$ ، حيث $k = 0, 1, 2$ • الجذر الأول عند $k = 0$ .. الجذر الأول $= 1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{0+2(0)\pi}{3}\right) = 1$ • الجذر الثاني عند $k = 1$ .. الجذر الثاني $= 1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{0+2(1)\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ • الجذر الثالث عند $k = 2$ .. الجذر الثالث $= 1^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{0+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{0+2(2)\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
فائدتان	• الجذور النونية المختلفة للعدد واحد تقع جميعًا على دائرة الوحدة. • لجميع الجذور النونية المختلفة للعدد واحد المقياس نفسه ويساوي 1 .

الفصل ٣ : الاحتمال والإحصاء

الدراسة التجريبية

المقصود بها	إجراء تعديل متعمد على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة وملاحظة استجاباتها
مثال	لاختبار طريقة جديدة للتدريس نُقسم الطلاب إلى مجموعتين .. • تجريبية: تتم عليها التجربة. • ضابطة: لا تتم التجربة عليها أو تتم بصورة شكلية.

الدراسة المسحية

المقصود بها	جمع بيانات أو استفتاء عن الأشياء أو الأفراد دون تعديل فيها
مثال1	لعمل دراسة مسحية على المجتمع السعودي لأخذ رأيه في استعمال المترو في المملكة تسمى تعدادًا عامًا « المجتمع الكلي » أما إذا تم اختيار عدد محدود من أفراد المجتمع فتسمى عينة
نوعا العينة	• **عينة متحيزة:** يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام. • **عينة غير متحيزة:** يتم اختيارها عشوائيًا ولا تعتمد على خاصية تم تحديدها مسبقًا.
مثال توضيحي	حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يلي عينة متحيزة أم غير متحيزة: (1) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يجب مشاهدتها على التلفاز. (2) الذهاب إلى حي سكني وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيًا عن رياضتهم المفضلة. (1) متحيزة لأن المجموعة المختارة محددة بفريق السلة الرياضي. (2) غير متحيزة لأن العينة أُختيرت عشوائيًا ولا تعتمد على خاصية تم تحديدها مسبقًا.

الدراسة بالملاحظة

المقصود بها	ملاحظة الأشياء أو الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج
مثال	لمعرفة تأثير حمل الأثقال على قصر القامة للأفراد نجري دراسة بالملاحظة لمدة معينة ولعدد معين من الأفراد يحملون الأثقال ومثلهم لا يحملون الأثقال لنفس المدة

الارتباط والسببية

الارتباط	وجود ظاهرتين وكل منهما تؤثر في الأخرى وهو سهل الملاحظة
مثال	عندما تظهر الدراسات أن الفرد يكون نشيطًا عندما يستيقظ باكرًا فهو ارتباط بين ظاهرتين
السببية	وجود ظاهرتين على أن وقوع إحداهما يكون سببًا مباشرًا لوقوع الظاهرة الأخرى
مثال	عندما نرى الأرض مبللة فإن السماء قد أمطرت هي علاقة سببية بين ظاهرتين

مقاييس النزعة المركزية

<table>
<tr><td>المقصود بها</td><td colspan="3">البيانات التي تشتمل على متغير واحد وأبرزها الوسط والوسيط والمنوال</td></tr>
<tr><td>مثال</td><td colspan="3">عند مشاركة فرد في سباق للجري عدة مرات ويسجل زمن في كل مرة فإن الأزمنة المسجلة له هي بيانات تشتمل على متغير واحد</td></tr>
<tr><td rowspan="4">مقاييس النزعة المركزية</td><td></td><td>التعريف</td><td>متى يستعمل؟</td></tr>
<tr><td>الوسط</td><td>{ قسمة مجموع القيم على عددها }</td><td>عندما لا تكون هناك قيم متطرفة</td></tr>
<tr><td>الوسيط</td><td>{ العدد الذي يتوسط القيم بعد ترتيبها }</td><td>عندما تكون هناك قيم متطرفة</td></tr>
<tr><td>المنوال</td><td>{ العدد الأكثر تكرارًا }</td><td>في البيانات التي تتكرر فيها قيم عديدة</td></tr>
<tr><td>القيمة المتطرفة</td><td colspan="3">واحدة من البيانات أكبر أو أقل بكثير من بقية القيم</td></tr>
<tr><td>المَعلَمة</td><td colspan="3">مقياس يصف خاصية في المجتمع الكلي</td></tr>
<tr><td>الإحصائي</td><td colspan="3">يصف خاصية في العينة</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td colspan="3">تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال و 30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال؛ أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟
المنوال هو المقياس الأنسب لأن غالبية القيم متساوية.</td></tr>
</table>

هامش خطأ المعاينة

المقصود به	الفترة التي تدل على مدى اختلاف استجابة العينة عن المجتمع الكلي
التعبير الرمزي	عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي فإنه يمكن تقريب هامش الخطأ بالقانون: هامش الخطأ $= \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$
مثال	إيجاد هامش الخطأ لدراسة مسحية عشوائية تشمل 100 طالب بالمدرسة أفاد 95% منهم أن الجوالات ضرورية لهم .. هامش الخطأ $= \pm\frac{1}{\sqrt{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{100}} = \pm 0.1$

مقاييس التشتت

المقصود بها	مقدار تباعد البيانات أو تقاربها
مقياسا التشتت	• **التباين**: يقيس مدى تباعد مجموعة البيانات من الوسط أو تقاربها. • **الانحراف المعياري**: هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.

نوعا الانحراف المعياري	الانحراف المعياري للعينة s	الانحراف المعياري للمجتمع σ
	$s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$ حيث: $\bar{x}$ الوسط للعينة ويقرأ x بار n عدد قيم العينة.	$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$ حيث: μ الوسط للمجتمع ويقرأ ميو n عدد قيم المجتمع.

فائدتان

- عندما يكون الوسط للمجتمع الكلي μ معلومًا يمكن أن يحل مكان الوسط $\bar{x}$.
- كلما كبر الانحراف المعياري زاد تباعد قيم البيانات من الوسط.

احتمال المشروط

المقصود به

وقوع حادثة B بشرط وقوع حادثة أُخرى A

التعبير الرمزي

إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين فإن الاحتمال المشروط لـ B إذا وقعت A هو ..

$$\boxed{P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

حيث: $P(A)\neq 0$.

مثال

رُمِيَ مكعب مرقم مرة واحدة وكان العدد الظاهر على وجه المكعب عددًا فرديًا « الشرط »، ونريد إيجاد احتمال أن يكون هذا العدد 5 ..

نفرض أن A الحادثة التي يكون فيها العدد الظاهر فرديًا؛ ومنه فإن ..

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

ولتكن B الحادثة التي يظهر فيها العدد 5 ومنه ..

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

الجداول التوافقية

المقصود بها

تسجيل بيانات ضمن خلايا تُمثل تكرارات مشتركة بين متغيرين

مثال

الجدول المجاور يوضح أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، ونريد إيجاد احتمال أن يكون الشخص ناجحًا علمًا أنه يأخذ حصصًا في تعلم القيادة نجد أن ..

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح A	48	64
راسب B	32	18

$$P(A|D)=\frac{48}{48+32}=\frac{48}{80}=\frac{3}{5}$$

احتمال النجاح والفشل

المقصود به

نسبة تقيس فرصة وقوع حادثة معينة إن كانت مرغوبة سميت نجاحًا وعدم وقوعها يسمى فشلاً

إيجاده

لوقوع حادثة: إذا كان عدد مرات النجاح s مرة، وعدد مرات الفشل f مرة فإن ..

احتمال النجاح $P(S)$	$P(S) = \frac{s}{s+f}$	احتمال الفشل $P(F)$	$P(F) = \frac{f}{s+f}$

مثال توضيحي

رشحت مدرسة 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي، 11 طالبًا من الصف الأول الثانوي وكان عدد الجوائز 4 ، واختير 4 طلاب من الذين رشحوا بطريقة عشوائية؛ ما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟

الخطوة1: نحدد عدد النجاحات باستعمال التوافيق ..

اختيار طالبين من 3 طلاب مرشحين $3C_2$ ، واختيار طالبين من 11 طالبًا مرشحين $11C_2$ ..

$s = 3C_2 \cdot 11C_2 = 165$ عدد النجاحات s ∴

الخطوة : نحدد فضاء العينة $s + f$ ..

$$s + f = 14C_4 = 1001$$

الخطوة3: نوجد احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول ..

$$P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{165}{1001} \approx 0.16$$

المتغير العشوائي

المقصود به

متغير يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة

نوعاه

متغير عشوائي منفصل	متغير عشوائي متصل
تكون البيانات منفصلة؛ مثل مجموع العددين إذا أُلقي مكعبان	تكون البيانات متصلة في فترة من الأعداد الحقيقية؛ مثل أطوال جميع أفراد عينة ما

مثال

في تجربة رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة ..

- المتغير العشوائي X يُمثل مجموع العددين الظاهرين على المكعبين.
- الجدول المجاور يُبين بعض قيم X المعينة لنواتج هذه التجربة.

مجموع نواتج رمي المكعبين المرقمين

النواتج	قيم X
(1,1)	2
(1,2)	3
(2,1)	3
⋮	⋮
(6,6)	12

لتوزيع الاحتمالي المنفصل

لمقصود به

جدول أو معادلة أو تمثيل بياني يربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي المنفصل X مع احتمال وقوعها

مثال

عند رمي قطعتي نقد متمايزتين مرة واحدة وكان X متغيرًا عشوائيًا يدل على عدد مرات ظهور الشعار فيمكننا حساب الاحتمال لكل قيم $X = 0, 1, 2$ ..

2	1	0	عدد الشعارات X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	الاحتمال $P(X)$

تنبيهات

- احتمال كل قيمة من X محصور بين 0 و 1 ؛ أي أن $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1 ؛ أي أن $\sum P(X) = 1$.

لقيمة المتوقعة

لمقصود بها

معدل قيم المتغير العشوائي المتوقعة عند إعادة التجربة أو محاكاتها نظريًا عددًا لانهائيًا من المرات

حساب القيمة المتوقعة

لإيجاد القيمة المتوقعة $E(X)$ للمتغير العشوائي X نتبِّع التالي:

(١) نضرب قيمة X في احتمال حدوثها. (٣) نُوجد مجموع نواتج الضرب.

(٢) نُكرر الخطوة 1 لجميع قيم X الممكنة.

مثال

إيجاد القيمة المتوقعة E(X) لقيم المتغير العشوائي X وقيم الاحتمال المناظرة له كما بالجدول المجاور ..

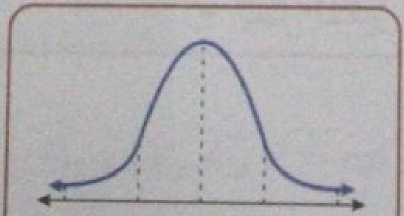
5	3	2	X
$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$P(X)$

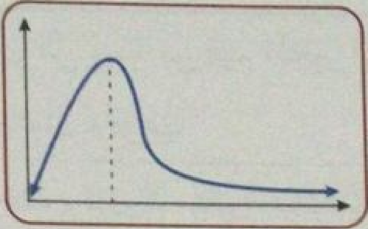
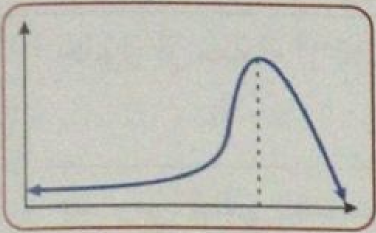
$$E(X) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{12}\right) + 5\left(\frac{7}{12}\right) \approx 3.83$$

لتوزيع الطبيعي

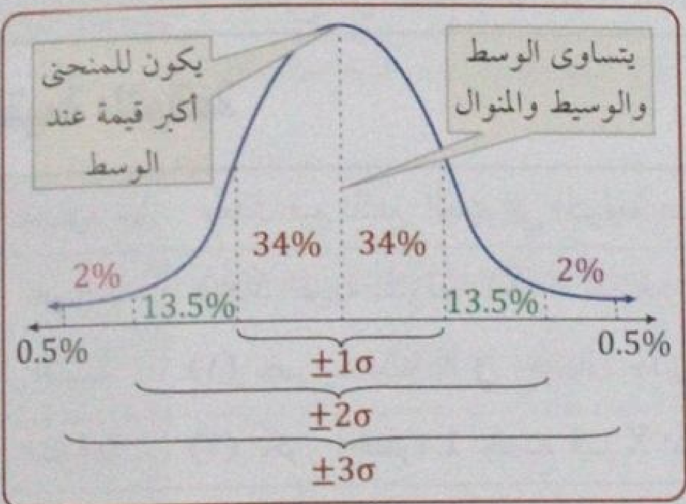
خصائصه

- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس ومتماثل بالنسبة للوسط.
- يتساوى الوسط والوسيط والمنوال وتقع في المركز.
- المساحة تحت المنحنى تساوي 1 أو %100 .
- يقترب المنحنى من المحور x ولكنه لا يمسه.
- المنحنى متصل.



التوزيعات الملتوية	**التواء موجب « إلى اليمين »**	**التواء سالب « إلى اليسار »**
		
	التوزيع مكثف في اليسار والذيل لليمين	التوزيع مكثف في اليمين والذيل لليسار

القانون التجريبي

وظيفته	يصف القانون التجريبي خصائص أخرى للتوزيع الطبيعي
الخصائص	يتصف التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص التالية: - يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - \sigma \,,\ \mu + \sigma$. - يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - 2\sigma \,,\ \mu + 2\sigma$. - يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $\mu - 3\sigma \,,\ \mu + 3\sigma$. 

توزيع ذات الحدين

المقصود به	كل تجربة يتم إجراءها لعدد من المحاولات n لها نتيجتان متوقعتان نجاح S أو فشل F
الشروط	- يعاد إجراء التجربة لعدد محدد من المحاولات المستقلة « المرات » n . - لكل محاولة نتيجتان متوقعتان نجاح S أو فشل F . - احتمال النجاح $P(S)$ أو p ، واحتمال الفشل $P(F)$ أو q ويساوي $1 - p$. - يُمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات

تمال ذات الحدين

التعبير الرمزي	احتمال X نجاح من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو .. $P(X) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$ حيث p احتمال النجاح و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة .
مثال	إيجاد $P(X = 3)$ في تجربة ذات حدين فيها $n = 5$, $p = 40\%$ .. $q = 1 - p = 1 - 0.40 = 0.60$ $P(X = 3) = {}_nC_x \ p^x q^{n-x} = \ {}_5C_3 \ (0.40)^3(0.60)^{5-3} \approx \ 0.23$
تنبيه	${}_nC_x \ = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x}$

وسط والتباين والانحراف المعياري

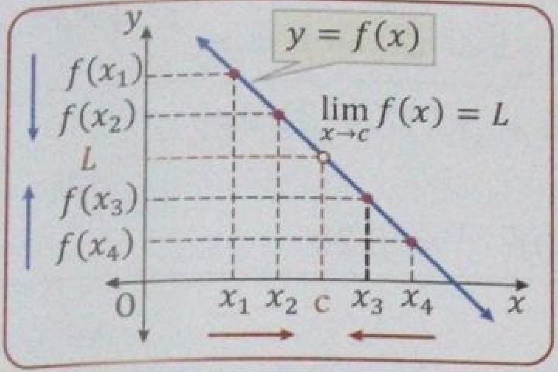
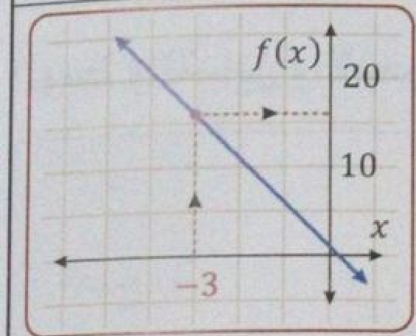
الصيغ	الوسط	$\mu = np$	n عدد المحاولات
	التباين	$\sigma^2 = npq$	p احتمال النجاح
	الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$	q احتمال الفشل
مثال	حساب الوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين الذي له البيانات التالية: $n = 6 \ , \ p = 0.40$ • الوسط: $\mu = np = 6 \times 0.40 = 2.40$. • التباين: $\sigma^2 = npq = 6 \times 0.40 \times (1 - 0.40) \approx 1.44$. • الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.44} \approx 1.2$.		

قريب توزيع ذات الحدين إلى التوزيع الطبيعي

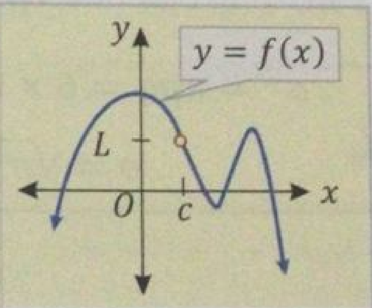
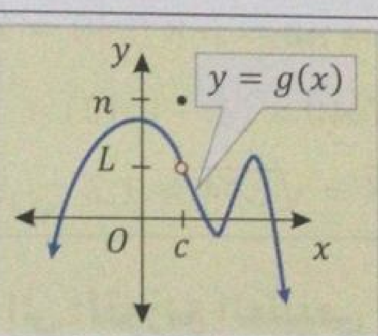
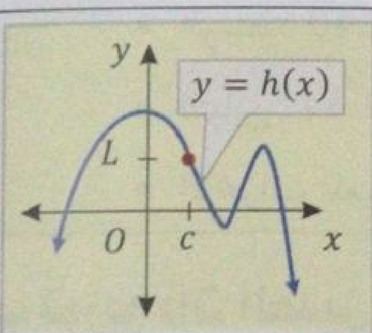
المقصود به	استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذي الحدين عندما تزداد عدد المحاولات في التجربة العشوائية
التعبير الرمزي	• في توزيع ذات الحدين عندما تمثل n عدد المحاولات واحتمال النجاح p واحتمال الفشل q ويكون $np \geq 5$, $nq \geq 5$. • يمكن تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي بوسط $\bar{x} = np$ وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$.

الفصل ٤ : النهايات والاشتقاق

تقدير النهايات بيانيًا

المقصود به	تقدير النهاية عند قيمة محددة	
التقدير بيانيًا	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين فإن نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من c هي L وتُكتب على الصورة $\lim_{x \to c} f(x) = L$	
مثال توضيحي	قدِّر النهاية $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$ باستعمال التمثيل البياني. يُبين التمثيل البياني للدالة $f(x) = 1 - 5x$ أنه كلما اقتربت x من العدد -3 فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد 16 .. $\therefore \lim_{x \to -3} (1 - 5x) = 16$	

عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

المقصود به	لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من العدد c على قيمة الدالة عند c		
أمثلة	 $\lim_{x \to c} f(x) = L$ و $f(c)$ غير معرفة	 $\lim_{x \to c} g(x) = L$ و $g(c) = n$	 $\lim_{x \to c} h(x) = L$ و $h(c) = L$

النهاية من جهة واحدة

المقصود بها	وصف سلوك التمثيل البياني لدالة النهاية عن يمين عدد أو يساره بمفرده
النهاية من اليمين	إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين فإن .. $\boxed{\lim_{x \to c^+} f(x) = L_1}$ **وتُقرأ:** نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من العدد c من اليمين تساوي L_1 .

النهاية من اليسار

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار فإن ..

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$$

وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من العدد c من اليسار تساوي L_2 .

النهاية من جهتين

المقصود بها

إيجاد النهاية عند نقطة

التعبير اللفظي

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين

التعبير الرمزي

إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$ فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$

مثال توضيحي 1

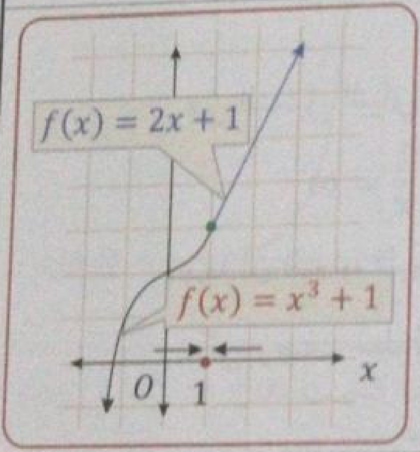
قدِّر النهايات التالية إذا كان لها وجود:

$\lim_{x \to 1^-} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x), \lim_{x \to 1} f(x)$ ، حيث ..

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \quad x < 1 \\ 2x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

يُبين التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ أن ..

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$ ، $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$



تنبيه

إذا كانت النهايتان من اليمين ومن اليسار غير متساويتين فإن $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

مثال توضيحي 2

قدِّر النهايات التالية إن كان لها وجود:

$\lim_{x \to -2^-} g(x), \lim_{x \to -2^+} g(x), \lim_{x \to -2} g(x)$ ، حيث:

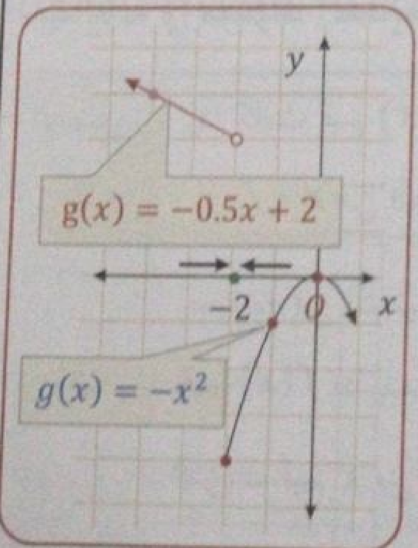
$$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \quad x < -2 \\ -x^2 & , \quad x \geq -2 \end{cases}$$

يُبين التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ أن ..

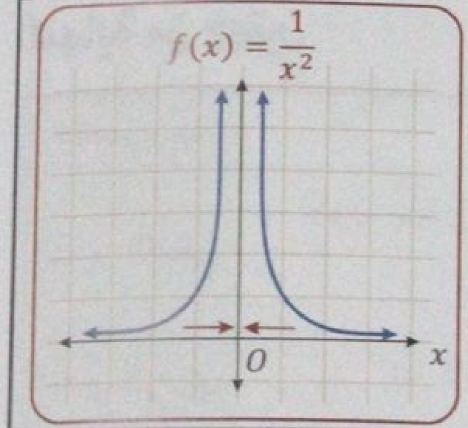
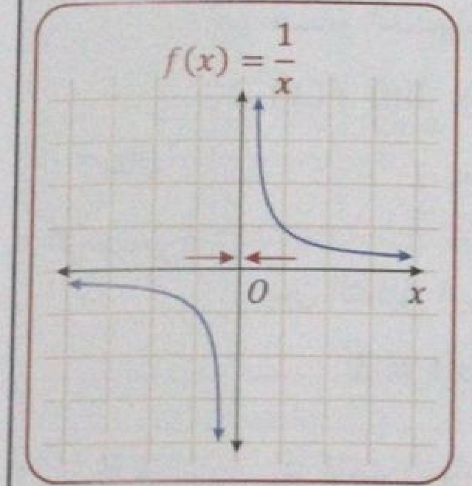
$\lim_{x \to -2^-} g(x) = 3$ ، $\lim_{x \to -2^+} g(x) = -4$

وبما أن النهاية اليمنى لا تساوي النهاية اليسرى فإن ..

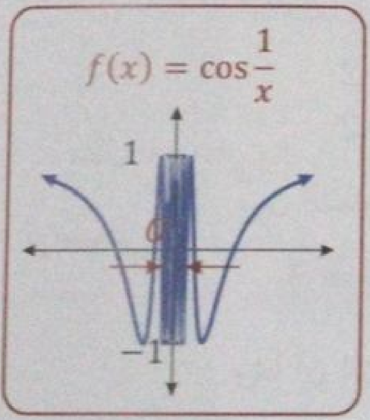
$\lim_{x \to -2} g(x)$ غير موجودة



النهايات والسلوك غير المحدد

المقصود بها	• إذا زادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c فإن $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$. • إذا نقصت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c فإن $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.	
مثال1	من التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ نجد أن .. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$ و $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$ يمكن وصف سلوك الدالة عندما $x = 0$ بعبارة واحدة .. $\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$	
مثال2	من التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ نجد أن .. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ و $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ وبما أن النهاية اليمنى لا تساوي النهاية اليسرى فإنه لا يمكن وصف سلوك الدالة عندما $x = 0$ بعبارة واحدة .. $\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة	

النهايات والسلوك التذبذبي

المقصود بها	إذا كانت قيم $f(x)$ تتذبذب بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c فإن $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة	
مثال	نستنتج من التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ أن قيم $f(x)$ تتذبذب بشكل مستمر بين العددين 1 و −1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0 ؛ أي أن $\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ غير موجودة	
أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة	• عندما تقترب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين. • عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو من اليمين أو كليهما. • عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c .	

هاية عند المالانهاية

لمقصود بها

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود فإن ..

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1}$$

تُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 .

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود فإن ..

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2}$$

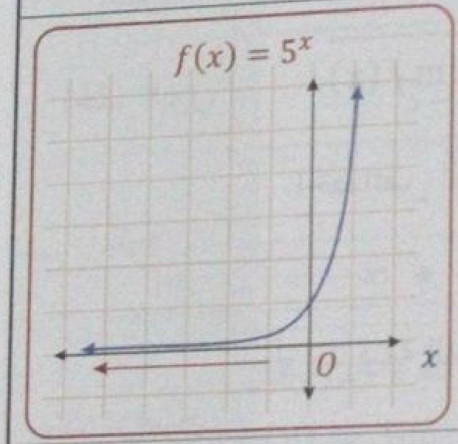
تُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 .

ثال وضيحي1

قدِّر النهاية $\lim_{x \to -\infty} 5^x$ إن كانت موجودة.

يُبين التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x) = 5^x$ أن ..

$$\lim_{x \to -\infty} 5^x = 0$$



تنبيهان

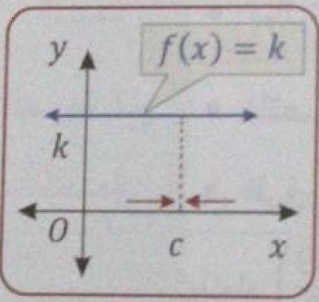
- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f إذا كانت $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.

هايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة، ويُرمز لها بالرمز ..

$$\boxed{\lim_{x \to c} k = k}$$



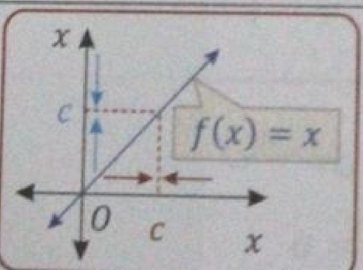
مثالان

$$\lim_{x \to 3} 7 = 7 \ , \ \lim_{x \to 4} -2 = -2$$

نهاية الدالة المحايدة

نهاية الدالة المحايدة عند أي نقطة c هي c ، ويرمز لها بالرمز ..

$$\boxed{\lim_{x \to c} x = c}$$



مثالان

$$\lim x = 3 \ , \ \lim x = -4$$

خصائص النهايات

المجموع	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$
الفرق	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$
الضرب في ثابت	$\lim_{x\to c}[kf(x)]=k\lim_{x\to c}f(x)$
الضرب	$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)$
القسمة	$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$ ، حيث $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$
القوة	$\lim_{x\to c}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to c}f(x)\right]^n$
الجذر النوني	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c}f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c}f(x)>0$ عندما n زوجي
تنبيه	الخصائص السابقة صحيحة إذا كان c, k عددين حقيقيين وn عدداً صحيحاً موجباً وكانت $\lim_{x\to c}f(x)$, $\lim_{x\to c}g(x)$ موجودتين
مثال توضيحي	أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15}$. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-3}{2x^2-x-15}\right)=\frac{2-3}{2(2)^2-2-15}=\frac{1}{9}$

نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية

نهايات دوال كثيرات الحدود	• **الطريقة:** بالتعويض المباشر. • مثال: $\lim_{x\to 4}(x^2-3)=4^2-3=16-3=13$.
نهايات الدوال النسبية	• **الطريقة:** بالتعويض المباشر بشرط أن المقام ≠ صفراً عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية. • مثال: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)=\frac{2-1}{2+5}=\frac{1}{7}$.
الصيغة غير المحددة	• **المقصود بها:** الصيغة $\frac{0}{0}$ وتنتج من التعويض المباشر لبعض نهايات الدوال النسبية. • **طرق معالجتها:** التحليل واختصار العوامل المشتركة ، ضرب البسط والمقام في المرافق.
مثال	إيجاد $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$ .. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0}$ الصيغة غير المحددة وبالتحليل واختصار العوامل المشتركة نحصل على .. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$

مثال توضيحي	احسب النهاية $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$. بالتعويض المباشر نحصل على .. الصيغة غير المحددة $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}=\frac{25-25}{\sqrt{25}-5}=\frac{0}{0}$ وبالضرب في المرافق واختصار العوامل المشتركة .. $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}\cdot\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}=\lim_{x\to 25}\frac{\cancel{(x-25)}(\sqrt{x}+5)}{\cancel{(x-25)}}=\sqrt{25}+5=10$

نهاية الدوال عند المالانهاية

نهايات دوال القوى	لأي عدد صحيح موجب n .. • $\lim_{x\to\infty}x^n=\infty$ • $\lim_{x\to-\infty}x^n=\infty$ ، إذا كانت n زوجي. • $\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ ، إذا كانت n فردي.
أمثلة	• $\lim_{x\to\infty}x^7=\infty$. • $\lim_{x\to-\infty}x^2=\infty$. • $\lim_{x\to-\infty}x^5=-\infty$.
نهايات دوال كثيرات الحدود	إذا كانت $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود فإن .. $\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n,\ \lim_{x\to-\infty}p(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n$
مثال	$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$
دالة المقلوب	• **المقصود بها:** الدالة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$ تسمى دالة المقلوب، حيث $a(x)$ دالة خطية لا تساوي الصفر. • **نهايتها:** $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. • **نتيجة:** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$ ؛ لأي عدد صحيح موجب n .
نهاية الدالة النسبية $p(x)$	• **الطريقة:** نقسم كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على x لأعلى قوة والتبسيط باستخدام نهاية دالة المقلوب عند المالانهاية. • **مثال:** نُوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$ بقسمة كل حد على x لأعلى قوة « x^2 » كالتالي: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{0}{1+(0)^2}=0$

المماس والسرعة المتجهة

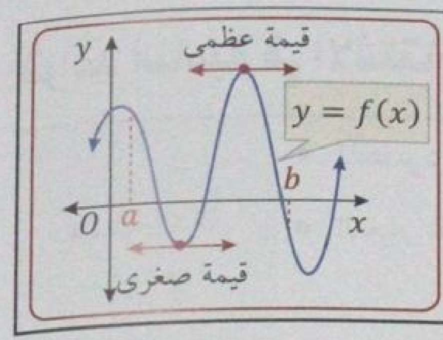
معدل التغير اللحظي	معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس عند هذه النقطة، ويُعطى بالصيغة .. $\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ بشرط وجود النهاية.
السرعة المتوسطة المتجهة	إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(x)$ فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b يُعطى بالصيغة .. $\boxed{v_{\text{avg}} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$
مثال توضيحي	تُمثل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًا؛ ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 2\text{ s}, t = 1\text{ s}$ ؟ نُوجد الارتفاع عند $t = 1\text{ s}$ و $t = 2\text{ s}$ بالتعويض في $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ .. $h(1) = 5 + 65(1) - 16(1)^2 = 54$ $h(2) = 5 + 65(2) - 16(2)^2 = 71$ نُوجد ـ الآن ـ السرعة المتوسطة المتجهة للبالون .. $v_{\text{avg}} = \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{h(2)-h(1)}{2-1} = \frac{71-54}{1} = 17$ ∴ السرعة المتوسطة المتجهة للبالون هي 17 ft/s لأعلى
السرعة المتجهة اللحظية	إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم على صورة $f(t)$ بدلالة الزمن t فإن السرعة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تُعطى بالصيغة .. $\boxed{v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}}$ بشرط وجود النهاية.
تنبيهان	• السرعة المتوسطة المتجهة تكون خلال **فترة** زمنية محددة « بداية ونهاية ». • السرعة المتجهة اللحظية تكون عند **لحظة** زمنية محددة.
إشارة السرعة المتجهة	+ تكون السرعة للأمام أو لأعلى − تكون السرعة للخلف أو لأسفل

قواعد أساسية في الاشتقاق

مشتقة الدالة $f(x)$	• المقصود بها: ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه. • التعبير الرمزي: يُرمز لها بالرمز $f'(x)$ وتُعطى بالصيغة .. $\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ بشرط وجود النهاية.
مشتقة القوة	إذا كانت $f(x)=x^n$ فإن .. $\boxed{f'(x)=nx^{n-1}}$
مثالان	• $f(x)=x^5 \Rightarrow f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$. • $f(x)=x^{-3} \Rightarrow f'(x)=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}$.
مشتقة الثابت	إذا كانت $f(x)=c$ حيث c عدد ثابت فإن .. $\boxed{f'(x)=0}$
مشتقة مضاعفات القوة	إذا كانت $f(x)=cx^n$ فإن .. $\boxed{f'(x)=ncx^{n-1}}$
فائدة	$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$ و $f(x)=cx \Rightarrow f'(x)=c$
مشتقة المجموع أو الفرق	إذا كانت $f(x)=g(x)\pm h(x)$ فإن .. $\boxed{f'(x)=g'(x)\pm h'(x)}$
مثال	إذا كانت $f(x)=x^3+5x^{-4}$ فإن .. $f'(x)=3x^{3-1}+(-4)5x^{-4-1}=3x^2-20x^{-5}$
مثال توضيحي	أوجد مشتقة الدالة $h(x)=\frac{4x^4-3x^2+5x}{x}$. أولاً: نُبسط $h(x)$ .. $h(x)=\frac{4x^4-3x^2+5x}{x}=\frac{4x^4}{x}-\frac{3x^2}{x}+\frac{5x}{x}=4x^3-3x+5$ ثانيًا: نُوجد ـ الآن ـ مشتقة الدالة $h(x)=4x^3-3x+5$ .. $h'(x)=3(4x^{3-1})+3x^{1-1}+0=12x^2-3$

نظرية القيمة القصوى

النقطة الحرجة	النقطة التي تكون عندها المشتقة تساوي الصفر أو غير معرفة
فائدتان	• قد تُشير النقطة الحرجة لوجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة. • ميل المماس عند النقطة الحرجة يساوي صفر « يوازي محور x » أو غير معرف.

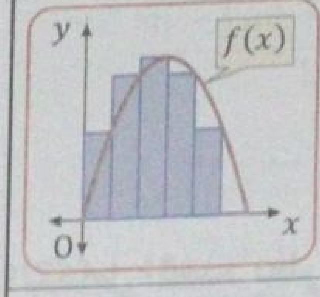
نظرية القيمة القصوى	إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a,b]$، وذلك إما عند طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة 

قاعدتا مشتقة الضرب والقسمة

مشتقة الضرب	إذا كانت مشتقة كلٍ من f,g موجودة عند x فإن .. $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
مثال توضيحي1	أوجد مشتقة الدالة $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$. نُوجد المشتقة $h'(t)$ باستعمال مشتقة ضرب دالتين .. $h'(x) = \left[\frac{d}{dx}(x^5 + 13x^2)\right]\cdot(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)\cdot\frac{d}{dx}[7x^3 - 5x^2 + 18]$ $= [5x^4 + 26x]\cdot(7x^3 - 5x^2 + 18) + (x^5 + 13x^2)\cdot[21x^2 - 10x]$
مشتقة القسمة	إذا كانت مشتقة كلٍ من f,g موجودة عند x و $g(x) \neq 0$ فإن .. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
مثال توضيحي2	أوجد مشتقة الدالة $j(x) = \frac{7x-10}{12x+5}$. نُوجد المشتقة $j'(x)$ باستعمال مشتقة قسمة دالتين .. $j'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(7x-10)\right]\cdot(12x+5) - (7x-10)\cdot\left[\frac{d}{dx}(12x+5)\right]}{[12x+5]^2}$ $= \frac{[7]\cdot(12x+5) - (7x-10)\cdot[12]}{[12x+5]^2} = \frac{84x + 35 - 84x + 120}{[12x+5]^2}$ $= \frac{155}{[12x+5]^2}$

المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

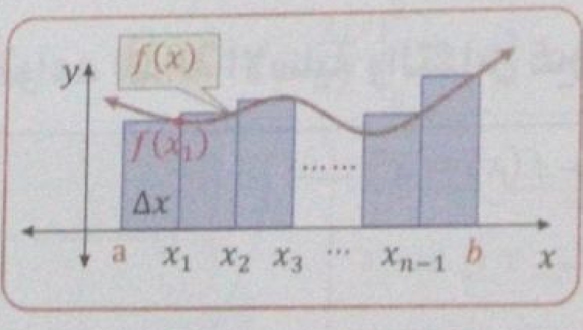
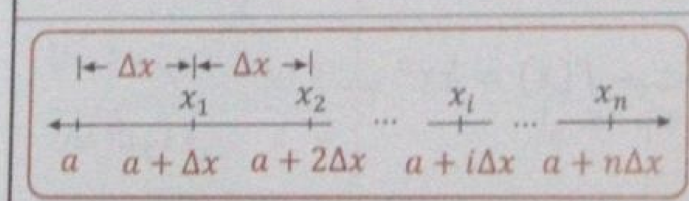
المقصود بها	تقريب مساحة شكل غير منتظم « المنطقة المحصورة بين منحنى دالة ومحور x » باستعمال مستطيلات متساوية العرض

مثال	نحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور x بتقسيم هذه المنطقة لمستطيلات متساوية العرض وإيجاد مساحة كل مستطيل فتكون المساحة التقريبية للمنطقة تساوي مجموع مساحات هذه المستطيلات 
تذكر	مساحة المستطيل = طول القاعدة × الارتفاع

التجزيء المنتظم

المقصود به	تقسيم الفترة من a إلى b لفترات جزئية متساوية الطول
طول الفترة الجزئية	إذا تم تجزئة الفترة من a إلى b تجزيئًا منتظمًا لفترات جزئية عددها n فإن .. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ حيث: Δx طول الفترة الجزئية و a بداية الفترة و b نهاية الفترة.

المساحة باستعمال التجزيء المنتظم

المقصود بها	حساب مجموع مساحات المستطيلات التي عرضها Δx وارتفاعاتها $f(x_i)$
التعبير الرمزي	تُعطى المساحة الكلية للمنطقة A بالصيغة .. المساحة $A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ حيث: n عدد المستطيلات و x_i الطرف الأيمن للمستطيل الذي ارتفاعه $f(x_i)$. 
إيجاد x_i	تُعطى x_i بالصيغة .. $x_i = a + i\Delta x$  حيث: a بداية الفترة و Δx طول الفترة الجزئية.

صيغ المجاميع

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{i=1}^{n} c = cn$; c عدد ثابت
$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$	$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i$; c عدد ثابت	$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

التكامل المحدد بطريقة مجموع ريمان الأيمن

التعبير اللفظي	نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر
التعبير الرمزي	مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a,b]$ .. $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$ حيث: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a + i\Delta x$.

الدوال الأصلية

المقصود بها	الدالة $F(x)$ تسمى دالة أصلية للدالة $f(x)$ إذا كانت $F'(x) = f(x)$
مثال	الدالة $F(x) = x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 3x^2$ لأن .. $F'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2 = f(x)$

قواعد الدالة الأصلية والتكامل غير المحدد

قاعدة القوة	إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 فإن .. $\boxed{F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$
قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت	إذا كانت $f(x) = kx^n$ حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 و k عدداً ثابتاً فإن .. $\boxed{F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C}$
فائدة	إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدداً ثابتاً فإن دالتها الأصلية هي $F(x) = kx + C$
مثال	إذا كانت $f(x) = 5x^4$ فإن .. $F(x) = \frac{5x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{\cancel{5}x^5}{\cancel{5}} + C = x^5 + C$
قاعدة المجموع والفرق	إذا كان لـ $f(x), g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x), G(x)$ على الترتيب فإن .. $G(x) \pm F(x)$ دالة أصلية لـ $g(x) \pm f(x)$

مثال توضيحي

أوجد جميع الدوال الأصلية $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$.

نكتب الدالة $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ بدلالة قوى x ..

$$f(x) = 8x^7 + 6x^1 + 2x^0$$

نوجد ـ الآن ـ جميع الدوال الأصلية للدالة $f(x) = 8x^7 + 6x^1 + 2x^0$ ..

$$F(x) = \frac{8x^{7+1}}{7+1} + \frac{6x^{1+1}}{1+1} + \frac{2x^{0+1}}{0+1} + C = \frac{8x^8}{8} + \frac{6x^2}{2} + \frac{2x^1}{1} + C$$

$$= x^8 + 3x^2 + 2x + C$$

التكامل غير المحدد

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة ..

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

حيث: $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ و C ثابت.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

المقصود بها

إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ فإن ..

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

مثال1

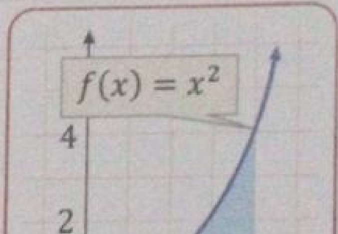
إيجاد التكامل المحدد $\int_0^3 2x\,dx$ ..

$$\int_0^3 2x\,dx = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^3 = (x^2 + C)\Big|_0^3 = (3^2 + C) - (0^2 + C) = 9$$

مثال2

حساب مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور التي تمثل المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومحور x في الفترة $[0, 2]$ ..

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$ وحدة مساحة



مثال توضيحي

احسب التكامل المحدد $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$.

$$\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx = \left(\frac{\overset{4}{\cancel{16}}x^4}{\cancel{4}} - \frac{\overset{2}{\cancel{6}}x^3}{\cancel{3}}\right)\Bigg|_1^2$$

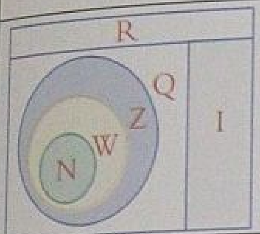
$$= (4x^4 - 2x^3)\Big|_1^2$$

$$= [4(2)^4 - 2(2)^3] - [4(1)^4 - 2(1)^3]$$

$$= [64 - 16] - [4 - 2] = 117$$

الفصل الأول: الدوال والمتباينات

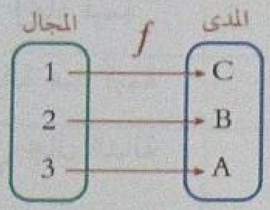
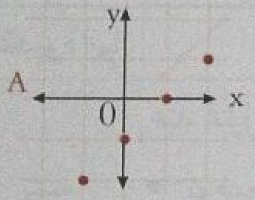
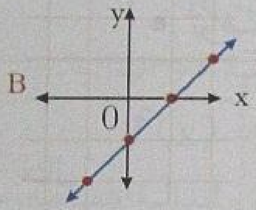
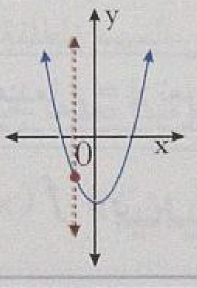
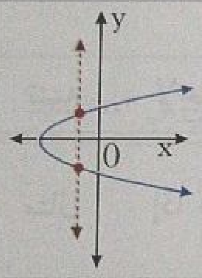
الأعداد الحقيقية

تعريفها	{ مجموعات مختلفة من الأعداد }	رمزها	R
الأعداد النسبية (Q)	• المقصود بها: الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ ؛ حيث a , b عددان صحيحان و $b \neq 0$. • أمثلة على الأعداد النسبية: $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$ ، $-\frac{7}{8}$ ، 0.123 .		
تنبيه	الصورة العشرية للعدد النسبي إما أن تكون عددًا عشريًا منتهيًا أو دوريًا		
الأعداد غير النسبية (I)	• المقصود بها: الأعداد التي صورتها العشرية ليست منتهية وليست دورية. • أمثلة على الأعداد غير النسبية: $\sqrt{3} = 1.7305\ldots$, $\pi = 3.14159\ldots$.		
الأعداد الصحيحة (Z)	$\{ \ldots , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots \}$	 	
الأعداد الكلية (W)	$\{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \ldots \}$		
الأعداد الطبيعية (N)	$\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \ldots \}$		
فائدة	مجموعات الأعداد الصحيحة والكلية والطبيعية كل منها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية ؛ لأن كل عدد صحيح n يمكن كتابته على الصورة $\frac{n}{1}$		

خصائص الأعداد الحقيقية

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a+b = b+a$	$a\cdot b = b\cdot a$
التجميعية	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
العنصر المحايد	$a+0 = a = a+0$	$a\cdot 1 = a = a\cdot 1$
النظير	$a+(-a) = 0 = (-a)+a$	$a\cdot\frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a}\cdot a \ , \ a \neq 0$
الانغلاق	$a+b$ عدد حقيقي	$a\cdot b$ عدد حقيقي
التوزيع	• $a(b+c) = ab+ac$ ، وتسمى خاصية التوزيع من اليمين. • $(b+c)a = ba+ca$ ، وتسمى خاصية التوزيع من اليسار.	
تنبيهات	الأعداد a , b , c أعدادًا حقيقية ، إشارة النظير الجمعي لعدد **عكس** إشارة العدد ، إشارة النظير الضربي لعدد **نفس** إشارة العدد	

العلاقات والدوال

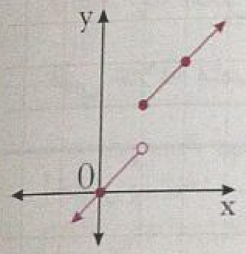
الدالة	{ علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى }	
الدالة المتباينة	- هي دالة لا يرتبط أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى. - **مثال توضيحي:** في الشكل المجاور الدالة f متباينة .. **المجال** = $\{1 , 2 , 3\}$ ، **المدى** = $\{A , B , C\}$	
فائدتان	- في الدالة المتباينة يرتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط في المدى. - من الممكن كتابة الدالة f بالشكل $f = \{(1,C) , (2,B) , (3,A)\}$.	
العلاقتان المنفصلة والمتصلة	- **العلاقة المنفصلة**: علاقة مجالها مجموعة من النقاط المنفردة؛ مثل العلاقة A في الشكل المجاور. - **العلاقة المتصلة**: علاقة مجالها عدد لانهائي من العناصر ويمكن تمثيلها بمستقيم أو بمنحنٍ متصل؛ مثل العلاقة B في الشكل المجاور. **فائدة**: إذا أمكن تمثيل العلاقة بيانيًا دون رفع رأس القلم عن الورقة فهي علاقة متصلة.	 
اختبار الخط الرأسي	اختبار يُستخدم لمعرفة ما إذا كانت العلاقة المنفصلة أو المتصلة دالة أم لا .. إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة **فالعلاقة دالة**  إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر **فالعلاقة ليست دالة** 	

معادلات العلاقات والدوال

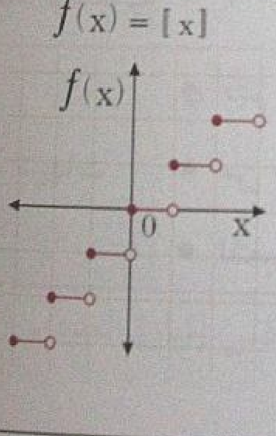
المقصود بها	معادلات تمثل العلاقة بين المتغيرين x , y
أمثلة توضيحية	$y = x+1$ و $y = \frac{1}{2}x-3$ و $y = 3x^2$
تنبيهات	- قِيم المتغيرين x , y التي تحقق المعادلة تُكتب على شكل زوج مرتب (x,y) . - من خلال التمثيل البياني للمعادلة يمكن تحديد إن كانت المعادلة تمثل دالة أم لا. - المتغير x « من المجال » يدعى المتغير المستقل، أما المتغير y « من المدى » فيدعى المتغير التابع.

إيجاد قيمة دالة عند قيمة في مجال الدالة	إذا كانت المعادلة تمثل دالة فيمكننا أن نرمز لها بأحد الرموز $f(x) = y$ أو $g(x) = y$ أو $h(x) = y$ أو ...	المعادلة $y = x+1$ يمكن كتابتها على الشكل $f(x) = x+1$
	لإيجاد قيمة $f(a)$ « حيث a من المجال » نعوض بقيمة a عن x في المعادلة $f(x) = y$	إذا كانت $f(x) = x+1$ فإن .. $f(3) = 3+1 = 4$ $f(b) = b+1$

الدالة متعددة التعريف

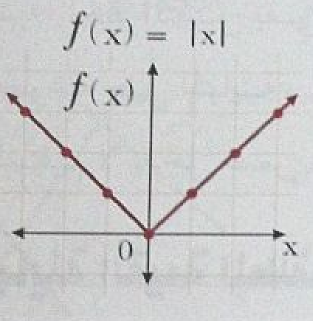
المقصود بها	دالة تُكتب باستعمال عبارتين أو أكثر
تنبيه	عند تمثيل الدالة متعددة التعريف بيانيًا .. - توضع دائرة صغيرة مظللة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي للتمثيل البياني. - توضع دائرة صغيرة غير مظللة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي للتمثيل البياني.
مثال توضيحي	الدالة $f(x) = \begin{cases} x+1 , & x \geq 1 \\ x , & x < 1 \end{cases}$ التمثيل البياني 
تنبيه	لإيجاد قيمة دالة معرفة بأكثر من قاعدة عندما $x = a$ نعوض بقيمة a عن x في القاعدة التي تنتمي لها a
مثال توضيحي	إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 , & x \geq 3 \\ -2x , & x < 3 \end{cases}$ فإن .. $f(4) = 2(4)+1 = 9 \quad , \quad f(1) = -2(1) = -2$

الدالة الدرجية

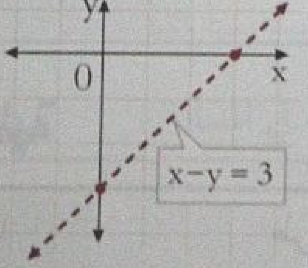
المقصود بها	دالة تمثيلها البياني يتكون من قطع مستقيمة أفقية	
التوضيح بالرموز	$f(x) = [\![x]\!]$ وتقرأ دالة أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x	
مثال توضيحي	إذا كانت $f(x) = [\![x]\!]$ فإن .. $f(3.25) = [\![3.25]\!] = 3$ $f(-4.6) = [\![-4,6]\!] = -5$	

المجال والمدى	• مجال الدالة الدرجية = مجموعة الأعداد الحقيقية R . • مدى الدالة الدرجية = مجموعة الأعداد الصحيحة Z .
تنبيه	إذا كانت $x \in [a,a+1)$ فإن $[\![x]\!] = a$
فائدة	العبارة $x \in [a,b)$ تكافئ العبارة $a \le x < b$

دالة القيمة المطلقة

رمزها	$f(x) = \|x\|$ وتُقرأ القيمة المطلقة للعدد x	
قاعدتها	$f(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$	
فائدة	التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة يكون على الشكل ∨ ، وإذا سبقتها إشارة سالبة تكون على الشكل ∧	
تنبيهات	• مجال دالة القيمة المطلقة $f(x) = \|x\|$ مجموعة الأعداد الحقيقية R . • مدى دالة القيمة المطلقة $f(x) = \|x\|$ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة. • لا يمكن أن تكون دالة القيمة المطلقة سالبة، أي أن $f(x) = \|x\| \ge 0$. • المقطعان هما $f(x) = 0$ و $x = 0$ ، « أي أن التمثيل البياني للدالة يتقاطع مع محور x عندما $y = 0$ و يتقاطع مع محور y عندما $x = 0$ » .	
خطوات تحديد قيم x للتمثيل البياني	(1) نساوي ما بداخل القيمة المطلقة بالصفر ونُحدد قيمة x . (2) نختار قيماً قبلها وقيماً بعدها بحيث تقع القيمة التي حصلنا عليها في المنتصف.	

خطوات تمثيل المتباينات الخطية بيانيًا

<table>
<tr><th>الخطوة</th><th>مثال توضيحي: تمثيل المتباينة $x-y<3$ بيانيًا</th></tr>
<tr><td>نضع علامة « = » بدلاً من علامة التباين</td><td>نكتب المعادلة: $x-y=3$</td></tr>
<tr><td>نعوض عن x بـ 0 ونحسب y ، ثم نعوض عن y بـ 0 ونحسب x ، فنحصل على النقطتين ..
$(0,y_1)$, $(x_2,0)$</td><td>النقطتان هما ..
$(0,-3)$, $(3,0)$
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>-3</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>نرسم على المستوى الإحداثي مستقيمًا يمر بالنقطتين، ولدينا احتمالان ..
• علامة التباين > أو < : نرسم المستقيم متقطعًا.
• علامة التباين ≤ أو ≥ : نرسم المستقيم متصلاً.</td><td> </td></tr>
</table>

المستقيم الذي رسمناه يقسم المستوى الإحداثي إلى نصفين؛ نختار نقطة من أحد النصفين ثم نعوض بها في المتباينة المعطاة، ولدينا ـ هنا ـ احتمالان ..

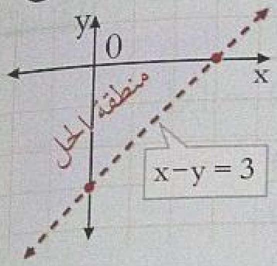
- **النقطة تحقق المتباينة:** حل المتباينة هو النصف الذي تقع فيه النقطة.
- **النقطة لا تحقق المتباينة:** حل المتباينة هو النصف الآخر.

تنبيه: الخط المتصل يعني أن المستقيم يدخل ضمن مجموعة حل المتباينة، أما الخط المتقطع فيعني أن المستقيم لا يدخل ضمن مجموعة الحل.

نختار النقطة $(0,0)$ ..

$$0-0 \overset{?}{<} 3 \Rightarrow 0<3 \quad ✓$$

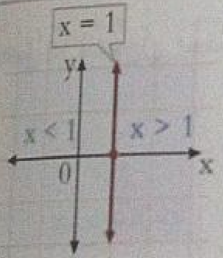
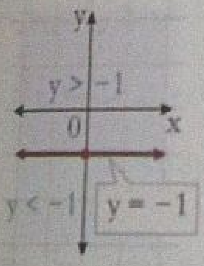
∴ النقطة $(0,0)$ تحقق المتباينة مما يعني أن حل المتباينة هو النصف الذي تقع فيه النقطة



متباينة القيمة المطلقة من الدرجة الأولى في متغيرين

المقصود بها	متباينة تحوي المتغيرين x , y وعلامة القيمة المطلقة
أمثلة توضيحية	$y > \|3x\|$, $y \geq 2\|x-1\|$, $y \leq 2\|x\|+3$
طريقة تمثيلها بيانيًا	تُمثل بنفس طريقة تمثيل المتباينات الخطية

حل نظام المتباينات الخطية في متغيرين

مجموعة حل نظام متباينات خطية في متغيرين	إذا فرضنا نظامًا يتكون من متباينتين فأكثر فإن .. مجموعة حل النظام = تقاطع مجموعات حلول متبايناته
مجموعة حل بعض المتباينات الخطية في متغيرين	بالنسبة للمستقيم x = a ، a ثابت ، فإن .. • نصف المستوى يمينه يُمثل حل المتباينة x > a . • نصف المستوى يساره يُمثل حل المتباينة x < a . 
	بالنسبة للمستقيم y = a ، a ثابت ، فإن .. • نصف المستوى فوقه يمثل حل المتباينة y > a . • نصف المستوى تحته يمثل حل المتباينة y < a . 

البرمجة الخطية

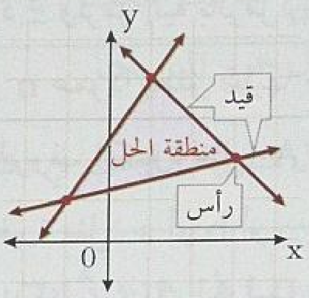
المقصود بها	طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة تحت قيود معينة

القيود	متباينات النظام
رؤوس منطقة الحل	نقاط تقاطع الخطوط التي تحدد منطقة الحل
تنبيهان	• القيم العظمى أو الصغرى تحدث دائمًا عند أحد رؤوس منطقة الحل. • يستعمل الرمز $f(x,y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x,y .

منطقتا الحل المحدودة وغير المحدودة

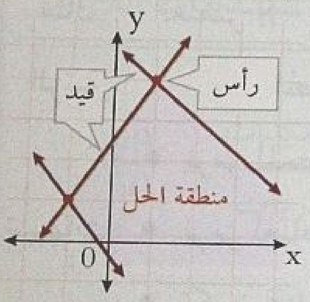
منطقة الحل المحدودة

تكون منطقة الحل محصورة بقيود وتظهر القيمة العظمى أو الصغرى للدالة عادة عند أحد رؤوس منطقة الحل



منطقة الحل غير المحدودة

تكون منطقة الحل مفتوحة وممتدة ويمكن أن تحوي قيمة عظمى أو قيمة صغرى



خطوات إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة معطاة بقيود معينة

(1) نُمثل المتباينات « القيود » بيانيًا ونُحدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل

(2) نوجد قيمة الدالة عند كل رأس وتكون ..

- القيمة العظمى هي أعلى قيمة للدالة.
- القيمة الصغرى هي أصغر قيمة للدالة.

البرمجة الخطية والحل الأمثل

المقصود بها	استعمال البرمجة الخطية للحصول على السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح
خطوات إيجاد الحل الأمثل	(1) نُحدد المتغيرات. (2) نكتب نظامًا للمتباينات الخطية التي تمثل المسألة. (3) نُمثل نظام المتباينات بيانيًا. (4) نُوجد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. (5) نكتب الدالة الخطية التي نريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى. (6) نُوجد قيمة الدالة عند رؤوس منطقة الحل. (7) نختار القيمة العظمى أو الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

الفصل الثاني: المصفوفات

المصفوفة

المقصود بها	ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين	$A=\underbrace{\begin{bmatrix}8&-2&5&6\\-1&3&-3&6\\7&-8&1&4\end{bmatrix}}_{\text{4 أعمدة}}\left.\vphantom{\begin{matrix}8\\-1\\7\end{matrix}}\right\}\text{3 صفوف}$
العنصر	{ كل قيمة في المصفوفة }	
مثال	العنصر 8- موجود في الصف 3 والعمود 2 ونرمز إليه بالرمز a_{32}	
الرتبة	المصفوفة المكونة من m صفًا و n عمودًا يطلق عليها مصفوفة من الرتبة m×n	
تنبيهات	• نرمز للمصفوفة ـ عادةً ـ باستعمال الحروف الكبيرة مثل: A أو B أو … . • نرمز لعناصر المصفوفة بالأحرف الصغيرة مثل: a أو b أو … . • تكون عناصر المصفوفة عبارة عن أعداد أو رموز أو أعداد ورموز معًا.	

أنواع المصفوفات وتساوي مصفوفتين

مصفوفة الصف	مصفوفة العمود	المصفوفة المربعة	المصفوفة الصفرية
تحوي صفًا واحدًا	تحوي عمودًا واحدًا	عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة	جميع عناصرها أصفار
$A=\begin{bmatrix}8&-5&2&4\end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix}8\\-1\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}-4&2\\-3&9\end{bmatrix}$	$D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

تساوي مصفوفتين	تتساوى مصفوفتان إذا كانتا من الرتبة نفسها، وتساوت عناصرهما المتناظرة تنبيه: العناصر المتناظرة تعني العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.	$\begin{bmatrix}2&-1\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\-4&3\end{bmatrix}$

تنظيم وتحليل البيانات بالمصفوفات

تنظيم البيانات في مصفوفة	وضع البيانات في مصفوفة على هيئة صفوف وأعمده بترتيب معين
تحليل البيانات باستعمال المصفوفة	الحصول على معلومات ذات معنى أو بدون معنى من مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة بعد تنظيم البيانات في مصفوفة

مثال توضيحي

المصفوفة التالية تمثل انجازات ثلاثة لاعبين في المباراة من حيث الأهداف وقطع الكرة والتمريرات والتسديدات والمباريات:

$$\begin{array}{ccccc|c} \text{المباريات} & \text{التسديدات} & \text{التمريرات} & \text{قطع الكرة} & \text{الأهداف} & \\ \hline 18 & 43 & 170 & 40 & 11 & \text{ماجد} \\ 20 & 31 & 20 & 30 & 4 & \text{معاذ} \\ 12 & 24 & 113 & 15 & 4 & \text{ياسر} \end{array}$$

- مجموع عناصر العمود 1 = 50 ويمثل العدد الكلي لمباريات اللاعبين.
- مجموع عناصر العمود 2 = 98 ويمثل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال جميع المباريات.
- معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة = $\dfrac{\text{مجموع التسديدات}}{\text{مجموع المباريات}} = \dfrac{98}{50}$.

جمع المصفوفات وطرحها وضربها في عدد ثابت

جمع المصفوفات وطرحها

إذا كانت A ، B مصفوفتين من الرتبة m×n فإن ..

A+B هي مصفوفة أيضًا من الرتبة m×n يكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A ، B وكذلك A−B هي مصفوفة من الرتبة m×n أيضًا

طريقة جمع المصفوفات وطرحها

$$\begin{array}{ccccc} A & + & B & = & A+B \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} A & - & B & = & A-B \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

تنبيه: عند جمع أو طرح المصفوفات لابد أن تكون لها نفس الرتبة.

مثال توضيحي

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفة بعدد ثابت

حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة m×n في عدد ثابت k هي مصفوفة kA من الرتبة m×n وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروبًا بالعدد الثابت k

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$k \cdot A = kA$$

$$-3\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$$

خصائص جمع المصفوفات

الخاصية الإبدالية	$A+B = B+A$
الخاصية التجميعية	$(A+B)+C = A+(B+C)$
خاصية التوزيع للضرب في عدد ثابت	$k(A+B) = kA+kB$

A ، B ، C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها و k عدد ثابت لا يساوي الصفر

ضرب المصفوفات

<table>
<tr><td>شرط الضرب</td><td>يمكن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة الأولى مساويًا لعدد صفوف الثانية
<table>
<tr><td>عملية ضرب يمكن إجراؤها</td><td>$\begin{matrix} A & \cdot & B \\ m\times r & \underset{=}{\longleftrightarrow} & r\times t \end{matrix}$</td><td>عملية ضرب لا يمكن إجراؤها</td><td>$\begin{matrix} A & \cdot & B \\ m\times n & \underset{\neq}{\longleftrightarrow} & r\times t \end{matrix}$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>حاصل الضرب</td><td>حاصل ضرب مصفوفة بأخرى هو مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد صفوف المصفوفة الأولى وعدد أعمدتها يساوي عدد أعمدة المصفوفة الثانية</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>$A_{m\times r} \cdot B_{r\times t} = AB_{m\times t}$
$r \underset{=}{\longleftrightarrow} r$
رتبة AB
ناتج الضرب مصفوفة من النوع m×t</td></tr>
<tr><td>كيف نضرب مصفوفتين؟</td><td>نضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم نجمع النواتج؛ فمثلاً ..
$$\begin{matrix} A & B & = & AB \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \end{matrix}$$</td></tr>
<tr><td>تنبيه</td><td>إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن $A^2 \neq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>خصائص ضرب المصفوفات</td><td>
<table>
<tr><td>خاصية التجميع لضرب المصفوفات</td><td>$(AB)C = A(BC)$</td></tr>
<tr><td>خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد</td><td>$k(AB) = (kA)B = A(kB)$</td></tr>
<tr><td>خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات</td><td>$C(A+B) = CA+CB$</td></tr>
<tr><td>خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات</td><td>$(A+B)C = AC+BC$</td></tr>
</table>
تنبيه: الخصائص السابقة صحيحة لأي ثلاث مصفوفات C ، B ، A ولأي عدد k ؛ على أن يكون ناتج ضرب أو جمع أي منها معرّفًا.
فائدة: نرمز لضرب مصفوفتين B ، A بالضرب A·B أو AB .</td></tr>
</table>

المحددات

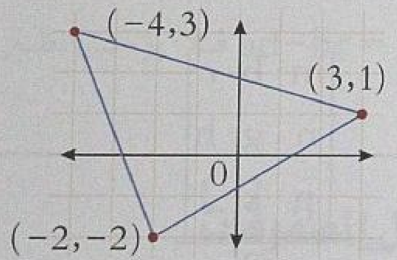
<table>
<tr><td>المحددة</td><td>• المقصود بها: إذا كانت المصفوفة A مربعة فإن لها محددة ويرمز لها بالرمز |A| .
• مثال توضيحي: إذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ فإن $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.</td></tr>
<tr><td>محددة الدرجة الثانية</td><td>• المقصود بها: محددة مصفوفة من النوع 2×2 .
• قيمتها: قيمة محددة الدرجة الثانية يساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-cb$
القطر الرئيسي</td></tr>
</table>

مثال توضيحي	$\begin{vmatrix}4 & 5\\-3 & 6\end{vmatrix} = 4(6)-(-3)(5) = 24+15 = 39$

محددة الدرجة الثالثة

المقصود بها	محددة مصفوفة من النوع 3×3
طريقة حساب قيمة المحددة بقاعدة الأقطار	(1) نُعيد كتابة العمود الأول والثاني إلى يمين المحددة. (2) نُوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة، ثم نجمع. $\left\|\begin{array}{ccc\|cc} a & b & c & a & b\\ d & e & f & d & e\\ g & h & i & g & h\end{array}\right.$ (3) نُوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة، ثم نجمع. $\left\|\begin{array}{ccc\|cc} a & b & c & a & b\\ d & e & f & d & e\\ g & h & i & g & h\end{array}\right.$ (4) لإيجاد قيمة المحددة نطرح ناتج الخطوة (3) من ناتج الخطوة (2) .

حساب مساحة المثلث باستعمال المحددات

القاعدة	مثال توضيحي
مساحة مثلث إحداثيات رؤوسه (a,b) ، (c,d) ، (e,f) تساوي |A| حيث .. $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & b & 1\\c & d & 1\\e & f & 1\end{vmatrix}$	 $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-4 & 3 & 1\\3 & 1 & 1\\-2 & -2 & 1\end{vmatrix}$
تنبيه	نستعمل القيمة المطلقة |A| للمقدار A حتى نضمن أن مساحة المثلث غير سالبة

قاعدة كرامر

المقصود بها	طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية
التوضيح بالرموز	إذا كانت C محددة مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix}ax+by = m\\fx+gy = n\end{matrix}$ ، حيث $C = \begin{vmatrix}a & b\\f & g\end{vmatrix}$ فإن حل هذا النظام هو .. $x = \frac{\begin{vmatrix}m & b\\n & g\end{vmatrix}}{\|C\|}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix}a & m\\f & n\end{vmatrix}}{\|C\|}$ ، إذا كانت $C \neq 0$

مثال توضيحي

حل نظام المعادلتين $\begin{aligned}6x+4y&=10\\2x+7y&=22\end{aligned}$ باستخدام قاعدة كرامر ..

$$x=\frac{\begin{vmatrix}10&4\\22&-7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6&4\\2&-7\end{vmatrix}}=\frac{79}{25} \quad ، \quad y=\frac{\begin{vmatrix}6&10\\2&22\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6&4\\2&-7\end{vmatrix}}=-\frac{56}{25}$$

$\therefore$ حل النظام $\left(\frac{79}{25},-\frac{56}{25}\right)$

تنبيهات

- يجب ترتيب النظام قبل إيجاد مصفوفة المعاملات C إن لم يكن مرتبًا.
- يكون للنظام حل وحيد إذا كانت قيمة $|C|$ لا تساوي صفراً.
- لا يكون للنظام حل وحيد إذا كانت قيمة $|C|$ تساوي صفراً.
- للتحقق من الحل نعوض بالقيم في المعادلات الأصلية.

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

إذا كانت C محددة مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{aligned}ax+by+cz&=m\\fx+gy+hz&=n\\jx+ky+lz&=p\end{aligned}$ ؛ حيث $C=\begin{vmatrix}a&b&c\\f&g&h\\j&k&l\end{vmatrix}$ فإن حل النظام ..

$$x=\frac{\begin{vmatrix}m&b&c\\n&g&h\\p&k&l\end{vmatrix}}{|C|} \quad ، \quad y=\frac{\begin{vmatrix}a&m&c\\f&n&h\\j&p&l\end{vmatrix}}{|C|} \quad ، \quad z=\frac{\begin{vmatrix}a&b&m\\f&g&n\\j&k&p\end{vmatrix}}{|C|}$$

، حيث $C \neq 0$

مثال توضيحي: حل النظام $\begin{aligned}3x+5y+2z&=-7\\-4x+3y-5z&=-19\\5x+4y-7z&=-15\end{aligned}$ باستخدام قاعدة كرامر ..

$$C=\begin{vmatrix}3&5&2\\-4&3&-5\\5&4&-7\end{vmatrix}=-330$$

إيجاد قيمة z	إيجاد قيمة y	إيجاد قيمة x
$z=\frac{\begin{vmatrix}3&5&-7\\-4&3&-19\\5&4&-15\end{vmatrix}}{\lvert C\rvert}=\frac{31}{22}$	$y=\frac{\begin{vmatrix}3&-7&2\\-4&-19&-5\\5&-15&-7\end{vmatrix}}{\lvert C\rvert}=\frac{57}{22}$	$x=\frac{\begin{vmatrix}-7&5&2\\-19&3&-5\\-15&4&-7\end{vmatrix}}{\lvert C\rvert}=\frac{23}{22}$

$\therefore$ حل النظام هو $\left(\frac{23}{22},-\frac{57}{22},\frac{31}{22}\right)$

النظير الضربي للمصفوفة

مصفوفة الوحدة	مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي 1 وباقي عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز I
مثال توضيحي	مصفوفة وحدة من نوع 2×2 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة وحدة من نوع 3×3 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
المصفوفة المحايدة لعملية الضرب	مصفوفة الوحدة I التي إذا ضربت في أي مصفوفة مربعة لها نفس الرتبة تعطى نفس المصفوفة
مثال توضيحي	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
النظير الضربي لمصفوفة	• إذا كانت المصفوفتان B ، A مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $AB = BA = I$ فإن المصفوفة A والمصفوفة B كلاً منهما تُسمى نظيراً ضربيًا للأخرى. • نرمز للنظير الضربي للمصفوفة A بالرمز A^{-1} ، حيث $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
قيمة النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2	إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن نظيرها الضربي ـ إن وجد ـ يعطى من العلاقة التالية: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ، بشرط أن $ad-bc \neq 0$ **تنبيه:** إذا كانت قيمة محددة A تساوي صفر، أي أن $ad-bc = 0$ فلا يوجد نظير ضربي للمصفوفة A .

خطوات حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال المصفوفات

(1) نجعل النظام في الصورة القياسية إن لم يكن كذلك $\begin{matrix} ax+by = m \\ fx+gy = n \end{matrix}$ ..

(2) نُوجد ثلاث مصفوفات ..

مصفوفة الثوابت	$B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$	مصفوفة المتغيرات	$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	مصفوفة المعاملات	$A = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

(3) نُوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات A ، أي نُوجد A^{-1} .

(4) نكتُب النظام في المعادلة المصفوفية التالية:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

(5) من حل المعادلة المصفوفية نُوجد قيمة كلٍ من x و y فنحصل على حل نظام معادلتي الدرجة الأولى بمجهولين.

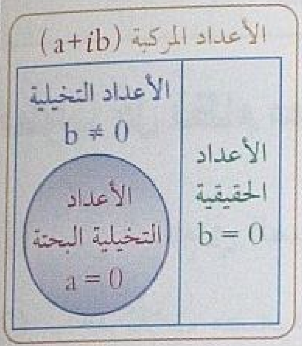
تنبيهان	• تستعمل هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات A نظير ضربي. • إذا لم يكن للمصفوفة A نظير ضربي؛ فيمكن أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول أو لا يوجد حل.

الفصل الثالث: كثيرات الحدود ودوالها

الوحدة التخيلية (ι)

المقصود بها	المقدار $\sqrt{-1}$ يسمى **الوحدة التخيلية**، ويُرمز له بالرمز ι ؛ أي أن .. $\iota=\sqrt{-1}$
قوى الوحدة التخيلية ι	$\iota^1=\iota$ ، $\iota^2=-1$ ، $\iota^3=\iota^2\times\iota=-\iota$ ، $\iota^4=(\iota^2)^2=1$ $\iota^5=\iota^4\times\iota=\iota$ ، $\iota^6=\iota^4\times\iota^2=-1$ ، $\iota^7=\iota^4\times\iota^3=-\iota$ ، $\iota^8=(\iota^4)^2=1$ $\iota^{4n}=1$ ، حيث n عدد طبيعي **مثال توضيحي**: $\iota^{20}=\iota^{4\times5}=1$ $\iota^{4n+m}=\iota^m$ ، حيث n و m عددان طبيعيان **مثال توضيحي**: $\iota^{15}=\iota^{(3\times4)+3}=\iota^3$
فائدة	تُستخدم الوحدة التخيلية ι في تبسيط الجذور التربيعية للأعداد السالبة
مثال	$\sqrt{-20}=\sqrt{20}\sqrt{-1}=\sqrt{4(5)}\sqrt{-1}=2\sqrt{5}\,\iota$

الأعداد المركبة

تعريفها	**{ الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $a+\iota b$ حيث a , b عددان حقيقيان، ι الوحدة التخيلية }**
تنبيهان	في العدد المركب $a+\iota b$ .. • يُسمى a الجزء الحقيقي و b الجزء التخيلي. • مثلاً: في العدد المركب $7+3\iota$ يكون الجزء الحقيقي 7 والتخيلي 3 . • إذا كان $b=0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا؛ أي أن .. أي عدد حقيقي هو عدد مركب جزؤه التخيلي صفر • مثلاً: العدد الحقيقي 4 هوعدد مركب جزءه التخيلي صفر. 

الأعداد التخيلية البحتة

المقصود بها	في العدد المركب $a+\iota b$ ؛ إذا كان $a=0$ فإن العدد ιb يسمى عددًا تخيليًا بحتًا
مثال توضيحي	الأعداد 7ι , -3ι تسمى أعدادًا تخيلية بحتة
فائدة	يُستخدم الجذر التربيعي لحل بعض المعادلات التربيعية التي حلولها أعداد تخيلية بحتة
مثال توضيحي	حل المعادلة $x^2+9=0$ .. $x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-9} \Rightarrow x=\pm3\iota$

ضرب الأعداد التخيلية البحتة	التعبير الرمزي	$a\iota\times b\iota = (ab)\iota^2 = (ab)(\iota^2) = -ab$
	مثال توضيحي	$3\iota\times 7\iota = (3\times 7)\iota^2 = (21)(-1) = -21$

العمليات على الأعداد المركبة

تساوي عددين مركبين	التعبير اللفظي	يتساوى العددان المركبان إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان
	التعبير الرمزي	$a+b\iota = c+d\iota$ إذا وفقط إذا $a = c , b = d$
مثال توضيحي	إذا كان $3+7\iota = a+b\iota$ فإن $a = 3 , b = 7$	
جمع وطرح الأعداد المركبة	$(a+b\iota)+(c+d\iota) = (a+c)+(b+d)\iota$ $(a+b\iota)-(c+d\iota) = (a-c)+(b-d)\iota$	

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها

<table>
<tr><td>ضرب عددين مركبين</td><td>$(a+b\iota)(c+d\iota) = (ac-bd)+(ad+bc)\iota$</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي لضرب عددين مركبين بالطريقة الرأسية</td><td>$(4+2\iota)(2+3\iota) = 8+16\iota+6\iota^2$
$= 8+16\iota+6(-1)$
$= 8+16\iota-6$
$= 2+16\iota$
$\begin{array}{r} 4+2\iota \\ \times\ 2+3\iota \\ \hline 8+4\iota \\ +\ \ 12\iota+6\iota^2 \\ \hline 8+16\iota+6\iota^2 \end{array}$</td></tr>
<tr><td>العددان المركبان المترافقان</td><td>العددان المركبان $a+b\iota , a-b\iota$ كلاً منهما يسمى مرافقًا للآخر</td></tr>
<tr><td>أمثلة توضيحية</td><td><table><tr><td>العدد</td><td>$2+5\iota$</td><td>$1-7\iota$</td><td>2ι</td></tr><tr><td>مرافقه</td><td>$2-5\iota$</td><td>$1+7\iota$</td><td>-2ι</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>فائدة</td><td>مرافق العدد الحقيقي هو نفسه « مثلاً مرافق العدد 3 هو العدد 3 »</td></tr>
<tr><td>ضرب عدد مركب في مرافقه</td><td>ضرب العددين المترافقين يساوي عدد حقيقي ..
$(a+b\iota)(a-b\iota) = a^2+b^2$</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>$(2+5\iota)(2-5\iota) = 2^2+5^2 = 4+25 = 29$</td></tr>
<tr><td>فائدتان على قسمة العددين المركبين</td><td>• نستخدم ضرب العددين المترافقين لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين.
• لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام.</td></tr>
</table>

حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

الصورة القياسية للمعادلة التربيعية	$ax^2+bx+c=0$	حيث: a , b , c أعداد نسبية و $a \neq 0$.
القانون العام	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	حيث: a معامل x^2 ، b معامل x ، c الحد الثابت.
تنبيهان	• يجب وضع المعادلة التربيعية على الصورة القياسية قبل حلها بالقانون العام. • جذور المعادلة تعني حلول المعادلة.	
المميز	المميز للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ هو ..	المميز $= b^2-4ac$

	قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها
حالات المميز	$b^2-4ac>0$ والمقدار b^2-4ac مربع كامل	جذران حقيقيان نسبيان
	$b^2-4ac>0$ والمقدار b^2-4ac ليس مربعًا كاملاً	جذران حقيقيان غير نسبيين
	$b^2-4ac=0$	جذر حقيقي واحد
	$b^2-4ac<0$	جذران مركبان

فائدتان	• إذا وُجد لمعادلة تربيعية جذران مركبان فهما مترافقان. • يمكن كتابة القانون العام على الصورة المجاورة ..	$x=\frac{-b\pm\sqrt{\text{المميز}}}{2a}$

وحيدات الحد

المقصود بها	عدد أو متغير أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة
أمثلة	تسمى كل من العبارات التالية وحيدة حد: $7 , x , 5y^2 , 4x^2y , -2n^3m$
تبسيط وحيدة الحد	تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما تتحقق الشروط التالية: • لا تتضمن قوى القوة. • يظهر كل أساس مرة واحدة. • تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة. • لا تتضمن أسسًا سالبة.
مثالان توضيحيان	• وحيدات حد في أبسط صورة: $5y^2 , 4x^2y , -2n^3m$. • وحيدات حد ليست في أبسط صورة: $\frac{8}{6}y^2 , 4x^2xy , -2(n^3)^2$.
درجة وحيدة الحد	• هو أس المتغير، أو مجموع أسس متغيرات وحيدة الحد إذا احتوت على أكثر من متغير. • مثالان: $3x^2$ وحيدة حد من الدرجة الثانية ، $5x^3y^2$ وحيدة حد من الدرجة الخامسة.

خصائص الأسس

الخاصية	التعريف	مثال توضيحي
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^3 = 3^{3+2} = 3^5$, $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ؛ $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$, $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأس السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$ حيث $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$, $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3\times2} = 3^6$, $(d^2)^4 = d^{2\times4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^b$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$, $(ab)^3 = a^3 d^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ ؛ $y \neq 0$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}$ حيث $x \neq 0 , y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ ؛ $y \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \left(\frac{b}{a}\right)^5 = \frac{b^5}{a^5}$ ؛ $a \neq 0 , b \neq 0$
القوة الصفرية	$x^0 = 1$ ؛ $x \neq 0$	$7^0 = 1$, $(2x)^0 = 1$ ؛ $x \neq 0$

كثيرة الحدود

المقصود بها	عبارة رياضية تحوي وحيدتي حد أو أكثر يفصلها علامة + أو −
مثال توضيحي	$3x^2 - 2x + 7$, $5x^2y + 2x - 3y$
درجة كثيرة الحدود	• درجة كثيرة الحدود هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأعلى. • مثال: كثيرة الحدود $5x^2y + 2x - 3y$ من الدرجة الثالثة.

قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

الطريقة	نقسم كل حد من حدود كثيرة الحدود على وحيدة الحد
تذكير	عند قسمة الأساسات المتساوية نطرح الأسس لنفس الأساس
مثال توضيحي	$\frac{20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf}{4cdf} = \frac{20c^4d^2f}{4cdf} - \frac{16cdf^2}{4cdf} + \frac{4cdf}{4cdf}$ $= 5c^{4-1}d^{2-1}f^{1-1} - 4c^{1-1}d^{1-1}f^{2-1} + c^{1-1}d^{1-1}f^{1-1}$ $= 5c^3d^1f^0 - 4c^0d^0f^1 + c^0d^0f^0$ $= 5c^3d - 4f + 1$

خطوات قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود « القسمة الطويلة »

نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه « نطرح الأسس لأن الأساسات متساوية »، ونكتب الناتج في مكان خارج القسمة

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-3 & x^2 \; +7x \; -30 \end{array}$$

نضرب خارج القسمة في المقسوم عليه ونكتب حاصل الضرب تحت المقسوم

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-3 & x^2 \; +7x \; -30 \\ & x^2 \; -3x \end{array}$$

نطرح حاصل الضرب السابق من المقسوم ونكتب الناتج تحتهما

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-3 & x^2 \; +7x \; -30 \\ - & x^2 \; -3x \\ \hline & \quad 10x \; -30 \end{array}$$

نعيد الخطوات الثلاث السابقة مع ناتج الطرح الأخير على أساس أنه المقسوم، ونكرر هذه الخطوة إلى أن تكتمل عملية القسمة

$$\begin{array}{r|l} & x+10 \quad \text{ناتج القسمة} \\ \hline x-3 & x^2 \; +7x \; -30 \\ - & x^2 \; -3x \\ \hline & \quad 10x \; -30 \\ - & \quad 10x \; -30 \\ \hline & \quad 0 \quad \text{باقي القسمة} \end{array}$$

القسمة التركيبية

المقصود بها	طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية الحد $x-r$
تنبيهات على القسمة التركيبية	• يجب ترتيب كثيرة الحدود تنازليًا حسب قوى متغيرها قبل البدء في إجراء عملية القسمة. • إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة الحدود فيُضَاف بالمعامل صفر. • إذا كان المقسوم عليه بالشكل $bx+c$ يجب قسمة المقسوم والمقسوم عليه على b .
مثال توضيحي	كثيرة الحدود $2x^3-4x^2+6$ تُكتب بالشكل $2x^3-4x^2+0x+6$

خطوات القسمة التركيبية

لإيجاد ناتج قسمة كثيرة الحدود $3x^3-8x^2+11x-14$ على $x-2$ نتبع الخطوات التالية:

(١) نُحدد قيمة الثابت r .

$$x-r=x-2 \;\Rightarrow\; r=2$$

(٢) نكتب معاملات المقسوم ونكتب الثابت r بالصندوق، ثم نكتب المعامل الأول « 3 » أسفل الخط الأفقي.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & \downarrow & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

(٣) نضرب المعامل الأول « 3 » في الثابت r « 2 » ثم نكتب الناتج « 6 » أسفل المعامل الثاني « 8- ».

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & & \\ \hline & 3 & & & \end{array}$$

(٤) نجمع ناتج الضرب « 6 » مع المعامل الثاني « 8- ».

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & & \\ \hline & 3 & -2 & & \end{array}$$

(٥) نضرب ناتج الجمع « 2- » في الثابت r « 2 »، ثم نكتب الناتج « 4- » تحت المعامل الثالث « 11 ».

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & -4 & \\ \hline & 3 & -2 & & \end{array}$$

(٦) نجمع ناتج الضرب « 4- » مع المعامل الثالث « 11 ».

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & -4 & \\ \hline & 3 & -2 & 7 & \end{array}$$

(٧) نضرب ناتج الجمع « 7 » في الثابت r « 2 »، ثم نكتب الناتج « 14 » تحت المعامل الرابع.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & -4 & 14 \\ \hline & 3 & -2 & 7 & \end{array}$$

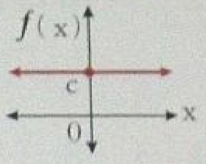
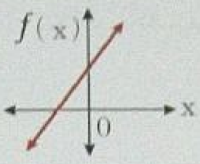
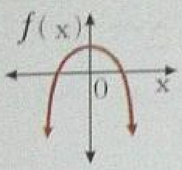
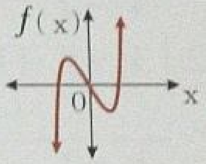
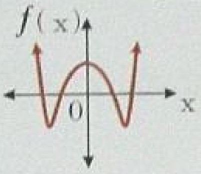
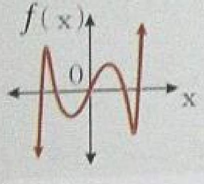
(٨) نجمع ناتج الضرب « 14 » مع المعامل الرابع « 14- » فيكون ناتج القسمة $3x^2-2x+7$ والباقي 0 .

$$\begin{array}{r|rrr|r} 2 & 3 & -8 & 11 & -14 \\ & & 6 & -4 & 14 \\ \hline & 3 & -2 & 7 & \text{الباقي } 0 \end{array}$$

دوال كثيرات الحدود بمتغير واحد

<table>
<tr><td>صورتها العامة</td><td>$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$
حيث: a_0 , a_1 , a_2 , ⋯ , a_{n-1} , a_n أعداد حقيقية و $a_n \neq 0$, n عدد صحيح غير سالب.</td></tr>
<tr><td>فائدة</td><td>يمكن إيجاد قيمة دالة كثيرة الحدود عند أي قيمة للمتغير x</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>لكثيرة الحدود $f(x)=5x^2-3x+12$ يكون ..
$f(c)=c^2-3c+12$, $f(2)=5(2)^2-3(2)+12=20-6+12=26$</td></tr>
<tr><td>تنبيهات</td><td>• $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ تسمى كثيرة حدود في المتغير x .
• تكون كثيرة الحدود بالصورة القياسية إذا كانت أسس المتغير مرتبة ترتيبًا تنازليًا.
• a_n يسمى **المعامل الرئيسي**، وأكبر أس للمتغير x يسمى **درجة كثيرة الحدود**.
• دالة القوة هي أبسط دوال كثيرات الحدود، وتكتب بالصورة $f(x)=ax^b$.</td></tr>
<tr><td>مثال</td><td>لكثيرة الحدود $5x^6-3x^4+12x^3-14$ فإن: معاملها الرئيسي 5 ، درجتها السادسة</td></tr>
<tr><td>حالات خاصة لكثيرات الحدود</td><td>
<table>
<tr><th>كثيرة الحدود</th><th>الثابتة</th><th>الخطية</th><th>التربيعية</th><th>التكعيبية</th></tr>
<tr><td>مثال</td><td>12</td><td>$3x-2$</td><td>$5x^2-4x+1$</td><td>$4x^3-2x^2+7x-1$</td></tr>
<tr><td>الدرجة</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>المعامل الرئيسي</td><td>12</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

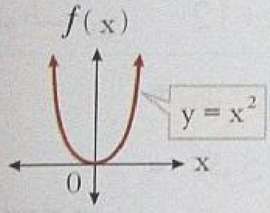
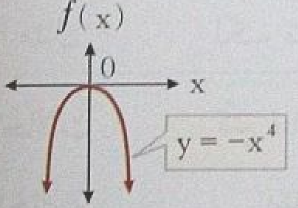
التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود

الدالة الثابتة « الدرجة 0 »	الدالة الخطية « الدرجة 1 »	الدالة التربيعية « الدرجة 2 »
		
الدالة التكعيبية « الدرجة 3 »	**الدالة من الدرجة الرابعة**	**الدالة من الدرجة الخامسة**
		

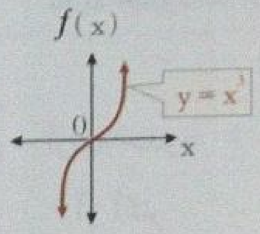
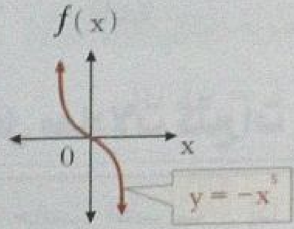
سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

المقصود به	دراسة سلوك التمثيل البياني لكثيرة الحدود $f(x)$ عندما تقترب x من المالانهاية « $x \to \infty$ » أو سالب مالانهاية « $x \to -\infty$ »
تنبيهان	• درجة دالة كثيرة الحدود والمعامل الرئيسي هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة ومداها. • المالانهاية « ∞ » غير محدود أو لا حدود له.

أمثلة توضيحية على سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود زوجية الدرجة

الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب	• المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية. • المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر أو تساوي القيمة الصغرى. • سلوك طرفي التمثيل البياني: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ و $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ 
الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب	• المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية. • المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر أو تساوي القيمة العظمى. • سلوك طرفي التمثيل البياني: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ 
فائدة	إذا كان طرفا التمثيل البياني للدالة في الاتجاه نفسه فإن الدالة زوجية الدرجة

أمثلة توضيحية على سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود فردية الدرجة

الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب	• **المجال والمدى:** مجموعة الأعداد الحقيقية. • سلوك طرفي التمثيل البياني: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ 
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب	• **المجال والمدى:** مجموعة الأعداد الحقيقية. • سلوك طرفي التمثيل البياني: $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$ 
فائدة	إذا كان طرفا التمثيل البياني للدالة في اتجاهين مختلفين فإن الدالة فردية الدرجة

الأصفار الحقيقية للدوال زوجية الدرجة وفردية الدرجة

أساسيات	• تقاطع منحنى دالة كثيرة الحدود مع محور x يسمى صفرًا حقيقيًا للدالة. • الصفر الحقيقي يعني صفرًا ينتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية. • عدد الأصفار الحقيقية يساوي عدد مرات تقاطع التمثيل البياني لمنحنى الدالة مع محور x . • **عدد الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة حدود زوجية الدرجة:** عدد زوجي **أو** ليس لها أصفار حقيقية. • **عدد الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة حدود فردية الدرجة:** يساوي عددًا فرديًا.
تنبيهان	• عندما يمس منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$ محور x فإن للدالة جذرًا مكررًا عند هذه النقطة. • إذا لم يقطع التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود $f(x)$ محور x فإنه لا توجد لها أصفار حقيقية.

تحليل كثيرة الحدود

- تحليل كثيرة الحدود هو إعادة كتابة كثيرة الحدود على صورة ضرب عاملين أو أكثر.
- **مثال:** كثيرة الحدود x^2-5x+6 تُحلل بالصورة $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$.
- كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها تسمى **كثيرة حدود أولية**؛ مثل: كثيرة الحدود $10x^2-3$.
- طرائق التحليل:

عدد الحدود	طريقة التحليل	الحالة العامة
أيّ عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2-8ab = 4ab(a^2b-2)$
حدان	الفرق بين مربعين	$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
	مجموع مكعبين	$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
	الفرق بين مكعبين	$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2+(ad+bc)x+bd = (ax+b)(cx+d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax+bx+ay+by = x(a+b)+y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$
فائدة	يمكن استخدام أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود	

حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل

خاصية الضرب الصفري	إذا كان $a \cdot b = 0$ فإنه .. إما $a = 0$ أو $b = 0$
مثال توضيحي	حل معادلة كثيرة الحدود $x^2-5x = 0$ .. $x^2-5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$ إما $x = 0$ أو $x-5 = 0 \Rightarrow x = 5$
الصورة التربيعية	$\boxed{au^2+bu+c}$ حيث: a , b , c أعداد حقيقية و $a \neq 0$.
التحويل إلى الصورة التربيعية	إعادة كتابة بعض كثيرات الحدود التي تحوي المتغير x والتي لها درجات كبيرة على صورة au^2+bu+c بعد تعريف u بدلالة x
فائدة	إذا كان حاصل ضرب الأس الأصغر في 2 يساوي الأس الأكبر فإن ثلاثية الحدود ax^m+bx^n+c يمكن تحويلها إلى الصورة التربيعية
مثالان توضيحيان	• تحويل كثيرة الحدود x^6+x^3+1 إلى الصورة التربيعية .. $2x^6+5x^3+4 = 2(x^3)^2+4x^3+5 = 2u^2+4u+5$ حيث: $x^3 = u$. • لا يمكن تحويل كثيرة الحدود $5x^8+x^2+6$ إلى الصورة التربيعية لأن $x^8 \neq (x^2)^2$.

نظرية الباقي

نظرية الباقي	التعبير اللفظي	إذا قُسمت كثيرة الحدود $P(x)$ على $x-r$ فإن باقي القسمة مقدار ثابت ويساوي $P(r)$
	التعبير الرمزي	$\overset{\text{المقسوم}}{P(x)} = \overset{\text{ناتج القسمة}}{Q(x)} \cdot \overset{\text{المقسوم عليه}}{(x-r)} + \overset{\text{الباقي}}{P(r)}$
	حيث: $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها **بواحد** عن درجة $P(x)$.	

التعويض التركيبي	عملية تطبيق نظرية الباقي والقسمة التركيبية لإيجاد قيمة الدالة عند قيم معينة
مثال توضيحي	يمكن إيجاد $P(4)$ حيث $P(x)=x^2+5x-3$ بطريقتين .. **التعويض المباشر**: $P(4)=4^2+5(4)-3=16+20-3=33$ **التعويض التركيبي**: نقسم $P(x)=x^2+5x-3$ على $x-4$ .. $\begin{array}{c\|ccc} 4 & 1 & 5 & -3 \\ & \downarrow & 4 & 36 \\ \hline & 1 & 9 & \boxed{33 \text{ الباقي}} \end{array}$ وبحسب نظرية الباقي فإن .. $P(4)=33$

نظرية العوامل

نظرية العوامل	تكون ثنائية الحد $(x-r)$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r)=0$
تنبيه	$P(r)=0$ يعني أن باقي قسمة $P(x)$ على $(x-r)$ يساوي 0
استعمال نظرية العوامل	• تُستعمل في التحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة. • تُستعمل في تحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.
مثال	لإثبات أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)=x^2-5x+6$ نثبت أن $P(2)=0$ .. $P(2)=(2)^2-5(2)+6=4-10+6=0$
فائدتان	• استخدام التعويض المباشر **أفضل** لإثبات أن $(x-r)$ عامل من عوامل $P(x)$. • استخدام التعويض التركيبي **أفضل** إذا كان المطلوب إيجاد بقية عوامل $P(x)$.

الأصفار والجذور والعوامل والمقاطع

إذا كانت $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود فإن العبارات التالية متكافئة:

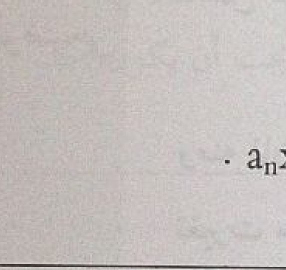
(١) c صفر للدالة $P(x)$.

(٢) c جذر أو حل للمعادلة $P(x)=0$.

(٣) $(x-c)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$.

(٤) إذا كان c عدداً حقيقياً فإن $(c,0)$ هو المقطع x للتمثيل البياني للدالة $P(x)$.

مثال توضيحي: لدالة كثيرة الحدود $P(x)=x^2-5x+6$ فإن ..



(١) 3 , 2 هما صفرا الدالة $P(x)=x^2-5x+6$.

(٢) 3 , 2 هما جذرا أو حلا المعادلة $x^2-5x+6=0$.

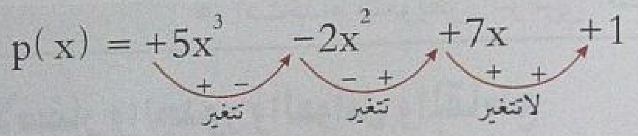
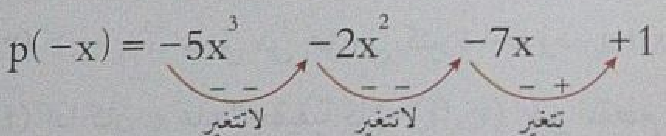
(٣) $(x-3)$, $(x-2)$ هما عاملا كثيرة الحدود x^2-5x+6 .

(٤) $(3,0)$, $(2,0)$ هما مقطعا x للتمثيل البياني للدالة $P(x)=x^2-5x+6$.

النظرية الأساسية في الجبر

نَصّها	كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة
تنبيه	أي جذر حقيقي هو جذر مركب
نتيجة	يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة
فائدة	دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار
مثالان	كثيرة الحدود x^3+2x^2+6 لها 3 جذور مركبة، وكثيرة الحدود $-2x^5-3x^2+8$ لها 5 جذور مركبة

قانون ديكارت للإشارات

استخدامه	يستخدم لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة والعدد الممكن للأصفار الحقيقية السالبة لأي دالة كثيرة حدود
نَص القانون	إذا كانت $P(x) = a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+ \cdots +a_2x^2+a_1x+a_0$ دالة كثيرة فإن .. • عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ أو أقل منه بعدد زوجي. • عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ أو أقل منه بعدد زوجي.
مثال توضيحي	• لدالة كثيرة الحدود $P(x) = 5x^3-2x^2+7x+1$ نجد أن .. إشارة معاملات $P(x)$ تغيرت مرتين ؛ ومنه فإن ..  عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي 2 أو 0 • لنفس كثيرة الحدود $P(x)$ فإن .. $P(-x) = 5(-x)^3-2(-x)^2+7(-x)+1$ ومنه فإن إشارة معاملات $P(-x)$ تغيرت مرة واحدة ؛ أي أنه ..  يوجد للدالة $P(x)$ صفر واحد حقيقي سالب
فائدة	لأي كثيرة حدود فإن .. عدد الأصفار الحقيقية الموجبة+عدد الأصفار الحقيقية السالبة+عدد الأصفار المركبة = درجة كثيرة الحدود

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

نَصها	إذا كان a , b عددين حقيقيين حيث $b \neq 0$ وكان $a+\iota b$ صفراً لدالة كثيرة الحدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن $a-\iota b$ صفر للدالة أيضاً
مثال توضيحي	إذا كان $3+\iota$ صفراً للدالة $f(x) = x^4-18x^2+12x+80$ فإن .. $3-\iota$ صفر أيضًا للدالة $f(x)$
تنبيهات	• العددان المركبان $a+\iota b$, $a-\iota b$ يسميان عددين مترافقين. • أي عدد حقيقي هو مرافق نفسه. • $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$.

نظرية الصفر النسبي

نَصها	إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة؛ حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيسي
مثال توضيحي	لتكن $P(x) = 2x^3+3x^2-17x+12$ ، والعدد النسبي $\frac{3}{2}$ صفر للدالة $P(x)$ فإن 3 أحد عوامل العدد 12 و 2 أحد عوامل العدد 2
فائدة	العدد b يكون عامل من عوامل العدد a إذا كان $\frac{a}{b}$ يساوي عدد صحيح
مثال توضيحي	العدد 3 عامل من عوامل العدد 12 لأن $\frac{12}{3}$ يساوي العدد الصحيح 4
نتيجة	إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة والمعامل الرئيسي لها 1 وحدُها الثابت لا يساوي الصفر فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت
مثال توضيحي	إذا كانت $P(x) = x^2-5x+6$ فإن .. العدد 2 صفر للدالة $P(x)$ وهو أحد عوامل الحد الثابت 6

الفصل الرابع: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

العمليات على الدوال

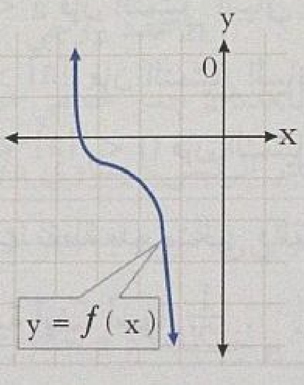
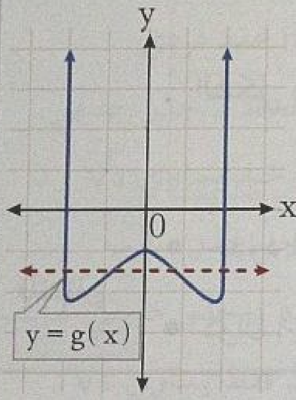
العمليات	الجمع	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	الطرح	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
	الضرب	$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $;\ g(x) \neq 0$
مثال	إذا كانت $f(x) = 2x\ ,\ g(x) = -x+5$ فإن .. $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = 2x+(-x+5) = x+5$ $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = 2x-(-x+5) = 2x+x-5 = 3x-5$ $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = 2x\cdot(-x+5) = -2x^2+10x$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{-x+5}\ ;\ x \neq 5$			

تركيب دالتين

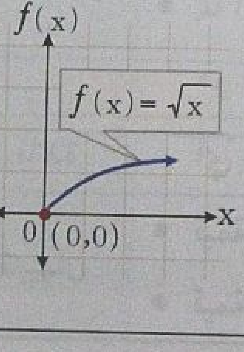
التعبير اللفظي	إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال الدالة f فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f\circ g$ كما يلي: $[f\circ g](x) = f[g(x)]$
فوائد	• يرمز لتركيب الدالتين f و g بالرمز $[f\circ g]$ أو $f[g(x)]$ وتُقرأ f بعد g . • عند تركيب دالتين فإن نواتج دالة منهما تُستعمل لحساب نواتج الدالة الأخرى. • يمكن أن يكون تركيب دالتين غير مُعرّف. • إذا كانت f و g دالتين فإن $[f\circ g](x)$ يكون مُعرّفًا فقط إذا كان مدى $g(x)$ مجموعة جزئية من مجال f .

أساسيات عن العلاقات

العلاقة	{ مجموعة من الأزواج المرتبة }
العلاقة العكسية	• **المقصود بها:** تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة. • **التعبير اللفظي:** تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا احتوت إحداهما على أي زوج مرتب مثل (a,b) ، وتحوى الأخرى على الزوج المرتب (b,a) .

<table>
<tr><td>مثال</td><td>كل من العلاقتين A ، B علاقة عكسية للأخرى حيث ..
$A = \{(1,5),(2,6),(3,7)\}$ ، $B = \{(5,1),(6,2),(7,3)\}$</td></tr>
<tr><td>فائدة</td><td>مجال العلاقة العكسية هو مدى العلاقة، ومدى العلاقة العكسية هو مجال العلاقة</td></tr>
<tr><td>الدالة العكسية</td><td>• نحصل على دالة عكسية من دالة بتبديل مجال الدالة ومداها.
• الدالة $f(x)$ رمز دالتها العكسية $f^{-1}(x)$.
• إذا كان كل من f ، f^{-1} دالة عكسية للأخرى فإن $f(a) = b$ إذا وإذا فقط كان $f^{-1}(b) = a$.
• ليس لكل دالة دالة عكسية.
• الدالتان $f(x)$ ، $g(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $[f \circ g](x) = x$ و $[g \circ f](x) = x$ ؛ حيث x دالة محايدة.
• نرمز للدالة المحايدة بالرمز x أو $I(x)$.</td></tr>
<tr><td>اختبار الخط الأفقي</td><td>• **استخدامه**: لتحديد إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا؛ ولدينا احتمالان ..
<table>
<tr><th>معكوس الدالة $f(x)$ يمثل دالة</th><th>معكوس الدالة $g(x)$ ليس دالة</th></tr>
<tr><td>• لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.
• معكوس الدالة $y = f(x)$ يمثل دالة أيضاً.
 </td><td>• يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.
• معكوس الدالة $y = g(x)$ لا يمثل دالة.
 </td></tr>
</table></td></tr>
</table>

دوال الجذر التربيعي

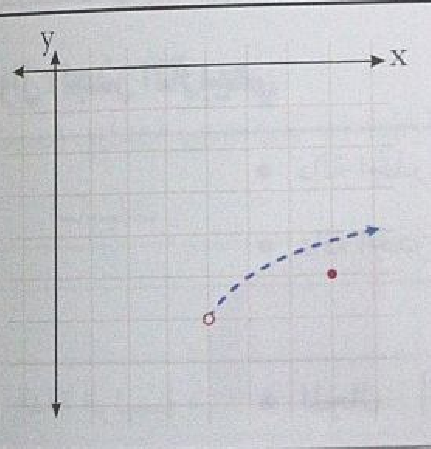
<table>
<tr><td>أساسيات</td><td>• دالة الجذر التربيعي دالة تحوي متغيراً تحت رمز الجذر التربيعي.
• دالة الجذر التربيعي نوع من أنواع الدوال الجذرية.</td></tr>
<tr><td>الدالة الرئيسية « الأم » لدوال الجذر التربيعي</td><td>$f(x) = \sqrt{x}$
• **المجال**: $\{x \mid x \geq 0\}$.
• **المدى**: $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.
• المقطع x هو $x = 0$ والمقطع y هو $y = 0$.
• غير معرفة عندما $x < 0$.
 </td></tr>
</table>

فائدتان	• مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة. • سلوك الدالة عند طرفيها .. $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ و $f(x) \to 0$ عندما $x \to 0$

تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًا

المقصود بها		تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \sqrt{x}$ مع تحديد المجال والمدى
تحويلات دوال الجذر التربيعي	**الدالة الجذرية**	$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$
	الإزاحة الأفقية	• إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يمينًا، إذا كانت h موجبة. • إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يسارًا، إذا كانت h سالبة. • **المجال:** $\{x \mid x \geq h\}$.
	الإزاحة الرأسية	• إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأعلى، إذا كانت k موجبة. • إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأسفل، إذا كانت k سالبة. • **المدى:** $\{f(x) \mid f(x) \geq k\}$.
	الشكل والاتجاه	• إذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x . • إذا كانت $\|a\| > 0$ فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا. • إذا كانت $0 < \|a\| < 1$ فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.
فائدتان		• حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي. • دوال الجذر التربيعي هي دوال أسية أيضًا أسها $\frac{1}{2}$.

متباينة الجذر التربيعي

المقصود بها	متباينة يكون متغيرها x تحت الجذر التربيعي	
مثال توضيحي	• لتمثيل المتباينة $y < \sqrt{x-4} + 6$ بيانيًا نمثل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًا. • المجال $\{x \mid x \geq 4\}$. • بما أن قيمة y أقل من الحد فإن التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.	
فائدة	أيّ نقطة في المنطقة المظللة تحقق المتباينة؛ فمثلاً النقطة $(7,-5)$ تحقق $-5 < -4.27$	
تنبيهان	• قيمة y أصغر من الحد: التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال. • قيمة y أكبر من الحد: التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة فوق الحد، وضمن المجال.	

الجذر النوني

المقصود به	العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n)	**رمزه**
التعبير اللفظي	لأي عددين a ، b ولأي عدد صحيح موجب n ؛ إذا كان $a^n = b$ فإن a هو جذر نوني للعدد b	رمز الجذر ما تحت الجذر الدليل $\sqrt[n]{81}$

التوضيح بالرموز

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

الجذر الرئيس ومعكوسه

الجذر الرئيس	الجذر غير السالب عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي ؛ وتكون n عددًا زوجيًا
معكوس الجذر الرئيس	الجذر السالب « النظير الجمعي »

مثال توضيحي

- بما أن $81 = (\pm 3)^4$ فإن كلاً من العددين 3− و 3 جذر رابع للعدد 81 .
- يُسمى العدد 3 الجذر الرابع الرئيس للعدد 81 .

الجذر النوني الحقيقي

إذا كان n عددًا صحيحًا أكبر من 1 ، a عددًا حقيقيًا فإن ..

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	يوجد للعدد a جذر حقيقي موجب وحيد « الجذر الرئيس » يساوي $+\sqrt[n]{a}$ وجذر حقيقي سالب وحيد يساوي $-\sqrt[n]{a}$	يوجد للعدد a جذر حقيقي موجب وحيد يساوي $\sqrt[n]{a}$ ولا يوجد جذر سالب
$a < 0$	لا يوجد للعدد a جذور حقيقية	يوجد للعدد a جذر حقيقي سالب وحيد فقط يساوي $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	يوجد للعدد a جذر حقيقي واحد فقط يساوي $\sqrt[n]{0} = 0$	يوجد للعدد a جذر حقيقي واحد فقط يساوي $\sqrt[n]{0} = 0$

تنبيهات

- إذا كان n عددًا فرديًا فإن $\sqrt[n]{x^n} = x$ ؛ حيث x عدد حقيقي.
- إذا كان n عددًا زوجيًا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ ؛ حيث $|x|$ القيمة المطلقة لـ x .
- إذا كان n عددًا زوجيًا و m عدد زوجيًا و r عددًا فرديًا و $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{(x^r)^n}$ فإن $\sqrt[n]{x^m} = |x^r|$.

فائدة

يمكن تقريب الجذور باستعمال الحاسبة

تبسيط العبارات الجذرية بعمليتي الضرب والقسمة

<table>
<tr><th>العملية</th><th>القاعدة</th><th>أمثلة توضيحية</th></tr>
<tr><td>ضرب الجذور</td><td>$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$</td><td>$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$</td></tr>
<tr><td>قسمة الجذور</td><td>$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ حيث $b \neq 0$</td><td>$\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$</td></tr>
<tr><td>إنطاق المقام</td><td colspan="2">يُستعمل لإزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر؛ وطريقته كالتالي:
<table>
<tr><th>قيمة المقام</th><th>نضرب البسط والمقام في ..</th><th>مثال توضيحي</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{b}$</td><td>$\sqrt{b}$</td><td>$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt[n]{b^x}$</td><td>$\sqrt[n]{b^{n-x}}$</td><td>$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$
حيث: $n = 3$ ، $x = 1$.</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>تنبيهات</td><td colspan="2">• a ، b عددان حقيقيان ، n عدد صحيح أكبر من 1 .
• إذا كانت n عددًا زوجيًا يكون a ، b عددين غير سالبين.
• يجب أن تكون جميع الجذور معرّفة.</td></tr>
</table>

العمليات على العبارات الجذرية

<table>
<tr><td>المقصود بها</td><td colspan="2">استعمال خواص العمليات الحسابية لتبسيط العبارات الجذرية</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي لضرب العبارات الجذرية</td><td colspan="2">$$\begin{aligned} 5\sqrt[3]{-12ab^4}\times 3\sqrt[3]{18a^2b^2} &= 5\times 3\times\sqrt[3]{-12ab^4\times 18a^2b^2} \\ &= 15\times\sqrt[3]{(2)^2\times -3\times ab^4\times 2\times 3^2\times a^2b^2} \\ &= 15\times(2)\times(-3)\times a\times b^2 = -90ab^2 \end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>تنبيه</td><td colspan="2">يمكن جمع وطرح العبارات الجذرية بشرط أن تكون الجذور متشابهة</td></tr>
<tr><td>مثالان توضيحيان</td><td colspan="2">• $7\sqrt{2}-8\sqrt{2} = (7-8)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$.
• $5\sqrt{12}+2\sqrt{27} = 5\sqrt{3\times 4}+2\sqrt{3^2\times 3} = 10\sqrt{3}+6\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.</td></tr>
<tr><td>الجذور المتشابهة</td><td>المقصود بها

أمثله</td><td>تكون الجذور متشابهة إذا كان لها الدليل نفسه والمقادير تحت الجذر نفسها

• جذران متشابهان: $4\sqrt{3b}$, $\sqrt{3b}$.
• جذران غير متشابهين: $\sqrt[3]{3b}$, $\sqrt{3b}$.
• جذران غير متشابهين: $\sqrt{3b}$, $\sqrt{2b}$.</td></tr>
</table>

مثال توضيحي لاستعمال المرافق لإنطاق المقام	لتبسيط العبارة الجذرية $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ ؛ نستعمل مرافق المقام وهو $\sqrt{5}+1$ كما يلي: $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}$
تنبيهات	• عند جمع أو طرح العبارات الجذرية نُبسط كل حد على حدة قبل جمع أو طرح الجذور المتشابهة. • يمكن ضرب الجذور باستعمال الخاصية التوزيعية المستعملة عند ضرب ثنائيات الحدود. • حاصل ضرب عددين مترافقين هو دائمًا عدد نسبي.

الأسس النسبية

التعبير اللفظي	$b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ حيث: b عدد حقيقي لا يساوي الصفر، x و y عددان صحيحان بحيث $y > 1$.
مثال توضيحي	$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = (\sqrt[3]{3^3})^2 = 3^2 = 9$
تنبيه	إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًا فإن الجذر قد يكون عددًا مركبًا
مثال توضيحي	$(-16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{-16})^3 = (4i)^3 = -64\imath$
فوائد	• بما أن مربع $b^{\frac{1}{2}}$ هو b فإن $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$. • $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$. • تربيع عدد وإيجاد جذره التربيعي عمليتان عكسيتان.
الصورة الجذرية	الصورة الجذرية لـ $x^{\frac{1}{6}}$ هي $\sqrt[6]{x}$ ، أي أن $x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$
الصورة الأسية	الصورة الأسية لـ $\sqrt[4]{z}$ هي $z^{\frac{1}{4}}$ ، أي أن $\sqrt[4]{z} = z^{\frac{1}{4}}$

تبسيط العبارات

تبسيط عبارات بأسس نسبية	عند تبسيط عبارات تحوي أسسًا نسبية نترك الأسس على الصورة النسبية بدلاً من كتابة العبارة على الصورة الجذرية
مثالان توضيحيان	• $a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{5}{5}} = a$. • $b^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{b^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{b^{\frac{4}{5}}}\cdot\frac{b^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{1}{5}}}{b^{\frac{5}{5}}} = \frac{b^{\frac{1}{5}}}{b}$.
تبسيط العبارات الجذرية	لتبسيط عبارة جذرية نجعل الجذر أقل ما يمكن، ونستعمل الأسس النسبية، ثم نكتب الناتج النهائي في الصورة الجذرية

أمثلة توضيحية	$\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt{3}} = \frac{81^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{(3^4)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{4}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{4}{4}-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
تنبيه	تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط التالية: • جميع الأسس غير سالبة. • جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة. • لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا. • دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

حل المعادلات الجذرية

المعادلة الجذرية	• **المقصود بها:** معادلة تحوي عبارات جذرية. • **مثال توضيحي:** $\sqrt{x+2}+4 = 7$.
حل المعادلات الجذرية	نحل المعادلات الجذرية عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين بحيث نتخلص من الجذر
خطوات حل المعادلات الجذرية	**(١)** نجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة. **(٢)** نرفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر. **(٣)** نحل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم نتحقق من صحة الحل.
الحل الدخيل	الحل الذي لا يحقق المعادلة الجذرية الأصلية
تنبيهان	• نستخدم طرق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية لحل المعادلات الجذرية أيًا كان دليل جذرها. • للتخلص من الجذر النوني لأيّ تعبير نرفعه للأس n .

حل المتباينات الجذرية

المتباينة الجذرية	• **المقصود بها:** متباينة تحوي متغيرًا في الصورة الجذرية. • **مثال توضيحي:** $\sqrt{x+2}+4 \leq 7$.
خطوات حل المتباينة الجذرية	**(١)** إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا فَإننا نُعيّن القيم التي تجعل ما تحت الجذر غير سالب. **(٢)** نحل المتباينة جبريًا. **(٣)** نختبر القيم للتأكد من صحة الحل.
تنبيه	المتباينة التي تُبسط للصورة $\sqrt{ax+b} \leq c$ حيث c عدد سالب؛ ليس لها حل

الفصل الخامس: العلاقات والدوال النسبية

العبارة النسبية

المقصود بها	النسبة بين كثيرتي حدود
أمثلة توضيحية	$\frac{x-8}{x^2+5x+6}$ ، $\frac{6c}{5d-8a}$ ، $\frac{1700}{d-33}$
طرق تبسيطها	(1) نحلل كلاً من البسط والمقام إلى العوامل. (2) نقسم كلاً من البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر بينهما « GCF ».
مثال توضيحي	$\frac{x-1}{x^2-6x+5}=\frac{\cancel{x-1}}{(x-5)\,\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{x-5}$
تنبيه	العبارة النسبية تكون غير معرّفة عند القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر
مثال توضيحي	العبارة $\frac{1}{x-5}$ تكون غير معرّفة عند $x=5$

ضرب العبارات النسبية

التعبير الرمزي لضرب عبارتين نسبيتين	إذا كانت $\frac{c}{d}$ ، $\frac{a}{b}$ عبارتين نسبيتين؛ حيث $b\neq 0\ ,\ d\neq 0$ فإن .. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
طريقته	عند ضرب عبارتين نسبيتين (1) نحلل كلاً من البسط والمقام إلى عوامل. (2) نختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.
مثال توضيحي	$\frac{3x}{2y}\cdot\frac{4y^2}{x^2}=\frac{3\cdot x\cdot 2\cdot 2\cdot y\cdot y}{2\cdot y\cdot x\cdot x}=\frac{3\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{y}\cdot y}{\cancel{2}\cdot\cancel{y}\cdot\cancel{x}\cdot x}=\frac{6y}{x}$

قسمة العبارات النسبية

طريقتها	عند قسمة عبارة نسبية على أخرى نضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه
التوضيح بالرموز	إذا كانت $\frac{c}{d}$ ، $\frac{a}{b}$ عبارتين نسبيتين حيث $b\neq 0\ ,\ d\neq 0\ ,\ c\neq 0$ فإن .. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$
مثال توضيحي	$\frac{3z^2}{2y}\div\frac{z}{4x}=\frac{3z^2}{2y}\cdot\frac{4x}{z}=\frac{3\cdot\cancel{z}\cdot z\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot x}{\cancel{2}\cdot y\cdot\cancel{z}}=\frac{6xz}{y}$
الكسر المركب	• المقصود به: عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية أيضًا. • أمثلة توضيحية: $\frac{\frac{4}{x}+6}{\frac{12}{a}-3}$ ، $\frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}}$ ، $\frac{\frac{c}{6}}{5d}$.

فائدة	لتبسيط الكسر المركب يُكتب أولاً على صورة قسمة عبارتين
مثال توضيحي	$\frac{\frac{4}{x}+6}{\frac{12}{a}-3} = \left(\frac{4}{x}+6\right)\div\left(\frac{12}{a}-3\right)$

جمع العبارات النسبية

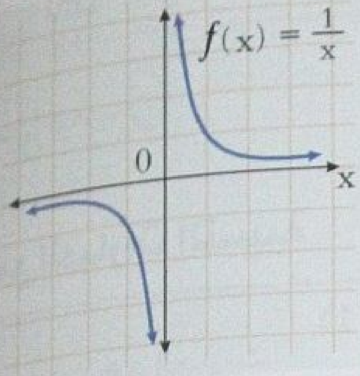
خطوات جمع العبارات النسبية	(1) نُوجد المضاعف المشترك الأصغر « LCM » للمقامات. (2) نُعيد كتابة العبارات بحيث يكون مقاماتها هي LCM . (3) نجمع البسوط لنفس المقام ثم نُبسط الناتج إن أمكن.
التوضيح بالرموز	إذا كانت $\frac{a}{b} \ , \ \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين؛ حيث $b \neq 0 \ , \ d \neq 0$ فإن .. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$
خطوات إيجاد LCM لعددين أو لكثيرتي حدود	(1) نُحلل كلاً منهما إلى عوامل. (2) نضرب كل العوامل التي لها أكبر أس.
مثال توضيحي	لإيجاد LCM بين $12a^2b \ , \ 15abc \ , \ 8b^3c^4$ نتبع التالي: **أولاً**: نُحلل كلاً منها إلى عوامل .. $12a^2b = 3\cdot2^2\cdot a^2\cdot b \ , \ 15abc = 3\cdot5\cdot a\cdot b\cdot c \ , \ 8b^3c^4 = 2^3\cdot b^3\cdot c^4$ **ثانيًا**: نوجد LCM بضرب العوامل التي لها أكبر أس .. $LCM = 3\cdot2^3\cdot5\cdot a^2\cdot b^3\cdot c^4 = 120a^2b^3c^4$

طرح العبارات النسبية

خطوات طرح العبارات النسبية	(1) نُوجد المضاعف المشترك الأصغر « LCM » للمقامات. (2) نُعيد كتابة العبارات بحيث يكون مقاماتها هي LCM . (3) نطرح البسوط لنفس المقام ثم نُبسط الناتج إن أمكن.
التوضيح بالرموز	إذا كانت $\frac{a}{b} \ , \ \frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين؛ حيث $b \neq 0 \ , \ d \neq 0$ فإن .. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$

الدالة الرئيسة « الأم » لدوال المقلوب

قاعدتها	$x \neq 0 \ , \ f(x) = \frac{1}{x}$

تمثيلها البياني	قطع زائد	
المجال والمدى	كل الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر	
خطا التقارب	$x = 0$ خط تقاربي رأسي ، $y = 0$ خط تقاربي أفقي	
المقطعان	لا يوجد « لا تتقاطع مع محوري الإحداثيات »	
تنبيه	الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ تكون غير معرّفة عند $x = 0$	
مجال دالة المقلوب	مجموعة القيم التي تكون عندها الدالة معرّفة	
مثال توضيحي	في الدالة $f(x) = \frac{2}{x-5}$ نجد أنه عند $x = 5$ فإن .. • $f(5) = \frac{2}{5-5} = \frac{2}{0} \Leftarrow$ $f(x)$ غير معرّفة عند $x = 5$. • مجال $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 5 .	

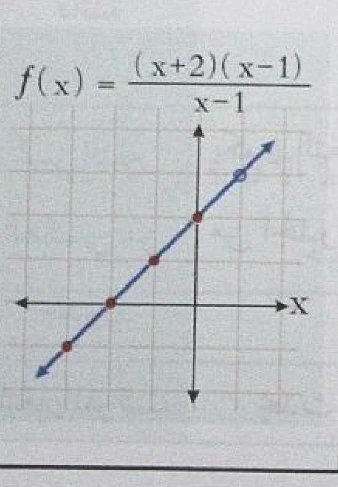
تحويلات التمثيل البياني لدالة المقلوب

المقصود به	تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \frac{1}{x}$ مع تحديد خطي التقارب الجديدين	
تحويلات التمثيل البياني لدالة المقلوب	صورتها القياسية	$f(x) = \frac{a}{x-h} + k$
	الإزاحة الأفقية	• إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يمينًا، إذا كانت h موجبة. • إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يسارًا، إذا كانت h سالبة. • خط تقارب رأسي عند $x = h$.
	الإزاحة الرأسية	• إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأعلى، إذا كانت k موجبة. • إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأسفل، إذا كانت k سالبة. • خط تقارب أفقي عند $y = k$.
	الشكل والاتجاه	• إذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x . • إذا كانت $\|a\| > 1$ فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا. • إذا كانت $0 < \|a\| < 1$ فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.
فائدة	تمتد خطوط التقارب لدالة المقلوب مع التمثيل البياني للدالة وتتقاطع عند النقطة (h,k)	
مثال توضيحي	في الدالة $f(x) = \frac{7}{x-4} + 2$ .. • $a = 7$, $k = 2$, $h = 4$. • $f(x)$ لها خط تقارب رأسي عند $x = 4$ ، وخط تقارب أفقي عند $y = 2$. • خطا التقارب للدالة $f(x)$ يتقاطعان عند النقطة $(4,2)$.	مقارنة الدالة المعطاة بالصورة القياسية $f(x) = \frac{7}{x-4} + 2$ $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$

الدالة النسبية

المقصود بها	دالة على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $a(x)$, $b(x)$ دالتان كثيرتا حدود و $b(x)\neq 0$
أمثلة توضيحية	$f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$, $f(x)=\frac{3}{x^2-1}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$
أصفار الدالة النسبية	• **المقصود بها:** أصفار الدالة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ هي كل قيم x التي تجعل $a(x)=0$. • **مثال توضيحي:** الدالة $f(x)=\frac{x-2}{x^2+3}$ لها صفر عند: $x=2 \Rightarrow x-2=0$
خطوط التقارب الرأسية والأفقية للتمثيل البياني للدوال النسبية	إذا كانت $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ ؛ حيث $a(x)$, $b(x)$ دالتان كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد و $b(x)\neq 0$ فإنه .. • يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عند $b(x)=0$. • يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر. • إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي. • إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=0$. • إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=\frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$.
فائدة	لتمثيل الدالة النسبية بيانيًا يجب تحديد الأصفار وخطوط التقارب

نقطة الانفصال

المقصود بها	نقطة يحدث عندها فجوة في التمثيل البياني لبعض الدوال النسبية	
التعبير اللفظي	إذا كانت $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ ؛ حيث $b(x)\neq 0$ وكان $x-c$ عاملاً مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$ فإنه يوجد نقطة انفصال عند $x=c$	
مثال توضيحي	إذا كانت $f(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}=x-2$ فإنه عند $x=1$ نقطة انفصال كما هو في الشكل المجاور	
فائدة	وجود عامل مشترك بين بسط ومقام دالة نسبية يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالة	
تنبيه	إذا كان للدالة $f(x)$ نقطة انفصال عند النقطة $x=c$ فإنها غير معرّفة عند تلك النقطة	

التغير الطردي والتغير المشترك

التغير الطردي	• **التعبير اللفظي**: تتغير y طرديًا مع x إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $y = kx$ ؛ ويُسمى العدد k ثابت التغير. • **مثال توضيحي**: إذا كانت $y = 7x$ فإن التغير طردي وثابت التغير يساوي 7 .
فائدة	إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وعُلمت بعض القيم فإنه يمكن استخدام التناسب الطردي $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ لإيجاد القيم الأخرى
تمييز التغير الطردي من جدول	التغير بين x و y يكون **طرديًا** إذا كان حاصل القسمة $\frac{x}{y}$ مقدارًا ثابتًا دائمًا. من الجدول المجاور فإن .. $\frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ مقدار ثابت $\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline x & 2 & 3 \\ \hline y & 6 & 9 \\ \hline \end{array}$
التغير المشترك	• **التعبير اللفظي**: تتغير y تغيُرًا مشتركًا مع x و z إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $y = kxz$ ؛ ويُسمى العدد k ثابت التغير. • **مثال توضيحي**: إذا كانت $y = 5xz$ فإن التغير مشترك وثابت التغير يساوي 5 .
فائدة	إذا كانت y تتغير تغيُرًا مشتركًا مع x و z وعُلمت بعض القيم فإنه يمكن استخدام التناسب المشترك $\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$ لإيجاد القيم الأخرى

التغير العكسي والتغير المركب

التغير العكسي	• **التعبير اللفظي**: تتغير y عكسيًا مع x إذا وُجد عدد $k \neq 0$ بحيث أن $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$ ؛ حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$. • **مثال توضيحي**: إذا كانت $xy = 3$ فإن: التغير عكسي و $x = \frac{3}{y}$ وثابت التغير يساوي 3 .
فائدة	إذا كانت y تتغير عكسيًا مع x وعُلمت بعض القيم فإنه يمكن استخدام .. $x_1y_1 = x_2y_2$ أو التناسب العكسي $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ لإيجاد القيم الأخرى
تمييز التغير العكسي من جدول	يكون التغير بين x و y **عكسيًا** إذا كان حاصل الضرب xy مقدارًا ثابتًا دائمًا. من الجدول المجاور فإن .. $xy = 2(12) = 3(8) = 24$ مقدار ثابت $\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline x & 2 & 3 \\ \hline y & 12 & 8 \\ \hline \end{array}$
التغير المركب	يحدث عندما تتغير كمية ما طرديًا أو عكسيًا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر

فائدتان	• إذا كانت y تتغير طرديًا مع x وعكسيًا مع z وعُلمت بعض القيم فإنه يمكن استخدام التناسب المركب $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ لإيجاد القيم الأخرى. • في التناسب المركب تظهر الكميات التي تتغير طرديًا في المقام، أما الكميات التي تتغير عكسيًا فتظهر في البسط.

حل المعادلات النسبية

المعادلة النسبية	• المقصود بها: معادلة تحوي عبارة نسبية أو أكثر. • مثال توضيحي: $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x+4} = \frac{x}{2}$. • حلها: القيم التي تحقق المعادلة.
فائدة	عند حل المعادلة النسبية يجب التخلص من الكسور وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM « المضاعف المشترك الأصغر » للمقامات
الحل الدخيل	الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية
تنبيهان	• يجب التحقق من صحة الحلول الناتجة بالتعويض في المعادلة النسبية. • يجب استبعاد الحلول الدخيلة إن وُجدت.

حل المتباينات النسبية

المتباينة النسبية	• المقصود بها: متباينة تحوي عبارة نسبية أو أكثر. • مثال توضيحي: $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x+4} < \frac{x}{2}$. • حلها: فترات تحقق المتباينة.
المعادلة المرتبطة	• المقصود بها: المعادلة الناتجة بعد وضع علامة « = » بدلاً من علامة التباين في المتباينة. • مثال توضيحي: المعادلة المرتبطة بالمتباينة $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$ هي $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} = \frac{5}{9}$.
خطوات حل المتباينة النسبية	(1) نُحدد القيم المستثناة وهي القيم التي تجعل المقام مساويًا للصفر. (2) نحل المعادلة المرتبطة. (3) نستعمل القيم التي حصلنا عليها في الخطوتين السابقتين لتقسيم خط الأعداد إلى فترات. (4) نختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحوي قيمًا تحقق المتباينة.

الفصل السادس: المتتابعات والمتسلسلات

المتتابعة الحسابية

المتتابعة	• **المقصود بها:** سلسلة من الأعداد مرتبة بطريقة معينة. • **مثال توضيحي:** 2 , 4 , 6 , 8 , ...
المتتابعة كدالة	دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية
المتتابعة الحسابية	• كل حد فيها يُحدَّد بإضافة عدد ثابت إلى الحد الذي يسبقه .. مقدار الحد = الحد الذي يسبقه+عدد ثابت • العدد الثابت يسمى **أساس المتتابعة.**
مثال	$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15$ • **المجال « ترتيب الحدود »** : $1 , 2 , 3 , 4 , \dots n$. • **المدى « حدود المتتابعة »** : $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$.
تنبيه	يمكن للمتتابعة أن تكون منتهية « لها عدد محدود »، أو غير منتهية « تستمر بلا نهاية »
مثالان	**متابعة منتهية** 3 , 6 , 9 , 12 , 15 **متتابعة غير منتهية** 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , ...

المتتابعة الهندسية

شرطها	مقدار الحد = الحد الذي يسبقه×عدد ثابت غير الصفر العدد الثابت يسمى **أساس المتتابعة.**
مثال توضيحي	العدد 4 يسمى أساس المتتابعة الهندسية ونحصل عليه بقسمة أي حد على الحد الذي يسبقه مباشرةً $\frac{1}{16} \xrightarrow{\times 4} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 1 \xrightarrow{\times 4} 4 \xrightarrow{\times 4} 16$
فائدة	في المتتابعة الهندسية تكون النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة نسبة ثابتة

الحد النوني للمتتابعة الحسابية

الصيغة الجبرية لإيجاد الحد النوني	المتتابعة الحسابية: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$ فيها .. $a_n = a_1 + (n-1)d$	a_n الحد النوني a_1 الحد الأول للمتابعة n عدد طبيعي d أساس المتتابعة

مثال توضيحي	إيجاد الحد الثاني عشر في المتابعة الحسابية ... , 30 , 23 , 16 , 9 .. $n = 12 \quad , \quad d = 16-9 = 7 \quad , \quad a_1 = 9$ $\therefore \quad a_{12} = a_1 + (12-1)d = 9+(12-1)(7) = 9+11(7) = 9+77 = 88$

الأوساط الحسابية

المقصود بها	الأوساط الحسابية هي الحدود الواقعة بين حدين غير متتالين في متابعة حسابية
فائدتان	• يمكن استعمال أساس المتابعة الحسابية لإيجاد الأوساط الحسابية. • إذا علمنا عدد الأوساط الحسابية فيمكننا الحصول على عدد حدود المتابعة الحسابية .. عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢

المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

<table>
<tr><td>المتسلسلة الحسابية</td><td>مجموع متابعة حسابية</td></tr>
<tr><td>فائدة</td><td>يمكن الحصول على المتسلسلة بوضع إشارة الجمع بين حدود المتابعة</td></tr>
<tr><td>المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية</td><td>
<table>
<tr><td>المقصود به</td><td>ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة الحسابية</td><td rowspan="3">S_n المجموع الجزئي
n عدد الحدود
a_1 الحد الأول
a_n الحد الأخير
d الأساس</td></tr>
<tr><td>صيغته العامة</td><td>$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>صيغته البديلة</td><td>$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>تنبيهان</td><td>• الصيغة العامة للمجموع الجزئي تُستخدم إذا عُلم الحد الأول a_1 والحد الأخير a_n .
• الصيغة البديلة للمجموع الجزئي تُستخدم إذا عُلم الحد الأول a_1 والأساس d .</td></tr>
<tr><td>مجموع المتسلسلة الحسابية</td><td>يمكن كتابة مجموع المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال رمز المجموع $\sum$ ويُقرأ سيجما
$\sum_{\text{أول قيمة لـ } k \rightarrow k=1}^{\text{آخر قيمة لـ } k \rightarrow n} f(k) \leftarrow \text{صيغة حدود المتسلسلة}$</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>$\sum_{k=1}^{7}(2k+1) = [2(1)+1]+[2(2)+1]+\ldots+[2(7)+1] = 3+5+\ldots+15$</td></tr>
<tr><td>تنبيه</td><td>للحصول على عدد حدود المتسلسلة ..
نطرح أول قيمة لـ k من آخر قيمة لـ k ثم نضيف ١</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>للمتسلسلة $\sum_{k=3}^{7}(2k+1)(k+1)$ يكون ..
عدد الحدود $= 7-3+1 = 5$</td></tr>
</table>

صيغته الجبرية	المتتابعة الهندسية $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n$ فيها .. $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	a_n الحد النوني a_1 الحد الأول للمتابعة r أساس المتتابعة n عدد طبيعي
مثال توضيحي	لإيجاد الحد السادس في المتتابعة الهندسية $2 , 6 , 18 , \ldots$ .. $n = 6 \quad , \quad r = \frac{6}{2} = 3 \quad , \quad a_1 = 2$ $a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} = 2(3)^5 = 486$	

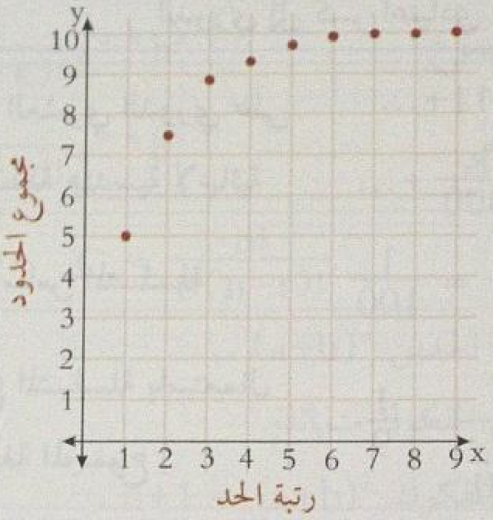
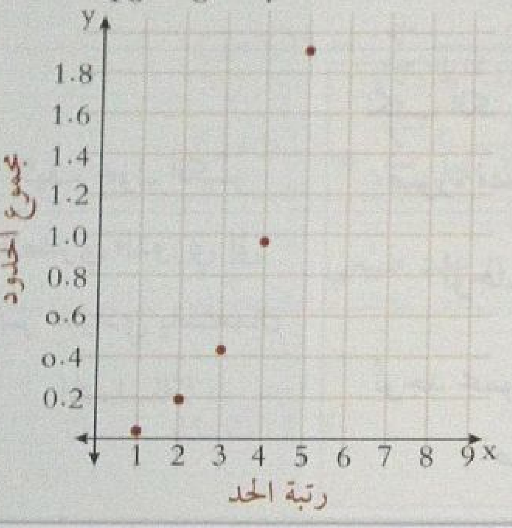
الأوساط الهندسية

المقصود بها	الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين في متتابعة هندسية
مثال توضيحي	في المتتابعة الهندسية $\ldots , 24 , 12 , 6 , 3$ نجد أن .. العددان $6 , 12$ وسطان هندسيان بين العددين $3 , 24$
فائدة	يمكن استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية

المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية

<table>
<tr><td>المتسلسلة الهندسية</td><td colspan="3">مجموع حدود المتتابعة الهندسية</td></tr>
<tr><td>مجموعها</td><td colspan="3">يرمز لمجموع المتسلسلة الهندسية بالرمز $\sum_{k=1}^{n} a_1 (r)^{k-1}$ ؛ حيث r أساس المتسلسلة</td></tr>
<tr><td rowspan="3">المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية</td><td>المقصود به</td><td>ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة الهندسية</td><td rowspan="3">S_n المجموع الجزئي
a_1 الحد الأول
a_n الحد الأخير
r الأساس
n عدد الحدود</td></tr>
<tr><td>صيغته العامة</td><td>$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \quad ; \quad r \neq 1$</td></tr>
<tr><td>صيغته البديلة</td><td>$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \quad ; \quad r \neq 1$</td></tr>
<tr><td>تنبيهان</td><td colspan="3">• الصيغة العامة للمجموع الجزئي تُستخدم إذا عُلم الحد الأول a_1 وعدد الحدود n .
• الصيغة البديلة للمجموع الجزئي تُستخدم إذا عُلم الحد الأول a_1 والحد الأخير a_n .</td></tr>
<tr><td>تذكر</td><td colspan="3">للحصول على عدد حدود المتسلسلة ..
نطرح أول قيمة لـ k من آخر قيمة لـ k ثم نضيف ١</td></tr>
</table>

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

المقصود بها	متسلسلة لها عدد لانهائي من الحدود		
نوعاها		المتسلسلات المتقاربة	المتسلسلات المتباعدة
	المقصود بها	متسلسلة يقترب مجموعها من عدد حقيقي	متسلسلة لا يقترب مجموعها من عدد حقيقي
	الأساس	$\|r\| < 1$	$\|r\| \ge 1$
	مثال توضيحي	للمتسلسلة $5+2.5+1.125+\ldots$  	للمتسلسلة $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\ldots$ 

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

صيغته	$S=\frac{a_1}{1-r}$	S مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية r أساس المتسلسلة؛ حيث: $\|r\| < 1$
تنبيه	إذا كان $\|r\| \ge 1$ فلا يوجد للمتسلسلة مجموع	
مثال توضيحي	مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول 25 وأساسها $\frac{1}{2}$ .. $S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{25}{1-\frac{1}{2}}=50$	

مجموع المتسلسلة اللانهائية

التعبير الرمزي	نستعمل رمز المجموع $\sum$ لتمثيل المتسلسلات الهندسية غير المنتهية كما يلي: $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 (r)^{k-1}$ ؛ حيث a_1 الحد الأول، r أساس المتسلسلة
فائدة	الرمز ∞ يدل على أن حدود المتسلسلة تستمر إلى ما لانهاية دون توقف

مثال توضيحي	في المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ .. • الحد الأول: $a_1 = 12$. • الأساس: $r = \frac{3}{4}$.

الكسور الدورية

الكسر العشري الدوري	الكسر العشري الدوري يساوي مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	
مثال توضيحي	$0.\overline{45} = 0.454545... = 0.45+0.0045+0.000045+...$	
تنبيه	يمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي	
كيف نحول الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي باستعمال المتسلسلة؟	نكتب الكسر العشري الدوري على صورة متسلسلة هندسية لانهائية	$0.\overline{11} = 0.11+0.0011+... = \frac{11}{100}+\frac{11}{10000}+...$
	نُوجد أساس المتسلسلة	$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0.0011}{0.11} = \frac{1}{100}$
	نُوجد مجموع المتسلسلة باستعمال صيغة المجموع	$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{11}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{9}$

مثلث باسكال

استعماله	يستعمل لإيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$		
تنبيه	يُستخدم مثلث باسكال ـ فقط ـ عندما يكون معامل a = 1 ، ومعامل b = 1		
مثلث باسكال	معاملات مفكوك الأس 0	1	$(a+b)^0$
	معاملات مفكوك الأس 1	1 1	$(a+b)^1$
	معاملات مفكوك الأس 2	1 2 1	$(a+b)^2$
	معاملات مفكوك الأس 3	1 3 3 1	$(a+b)^3$
	معاملات مفكوك الأس 4	1 4 6 4 1	$(a+b)^4$
	معاملات مفكوك الأس 5	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5$
مثال توضيحي	إيجاد مفكوك $(a+b)^5$: نلاحظ أن الأس يساوي 5 ؛ وباستعمال معاملات مفكوك الأس 5 نجد أن .. $(a+b)^5 = 1a^5+5a^4b^1+10a^3b^2+10a^2b^3+5a^1b^4+1b^5$	1 5 10 10 5 1	صف معاملات الأس 5

تنبيه	لجميع الحدود في مفكوك $(a+b)^n$ فإن .. أس a + أس b = n

نظرية ذات الحدين

<table>
<tr><td>استعمالها</td><td>تستخدم لإيجاد مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$ بدلاً من استعمال مثلث باسكال</td></tr>
<tr><td>النظرية</td><td>إذا كان n عدداً طبيعياً فإنه ..
<table>
<tr><td>باستعمال التوافيق</td><td>$(a+b)^n = {}_nC_0a^nb^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\ldots+{}_nC_na^0b^n$</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>$(a+b)^3 = a^3+{}_3C_1a^2b+{}_3C_2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$</td></tr>
<tr><td>باستعمال المجموع</td><td>$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k$</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3}\frac{3!}{k!(3-k)!}a^{3-k}b^k$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>تذكر</td><td>${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ؛ n عدد طبيعي</td></tr>
<tr><td>تنبيهات</td><td>في مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$ ..
• المعاملات في المفكوك متماثلة.
• عدد الحدود لمفكوك $(a+b)^n$ = n+1 .
• أس a في الحد الأول = n ، أس b في الحد الأخير = n .
• في أي حدين متتاليين: ينقص أس a بمقدار واحد ويزيد أس b بمقدار واحد.</td></tr>
<tr><td>مثال توضيحي</td><td>• الحد الخامس في مفكوك $(a+b)^{10}$: الحد الخامس = ${}_{10}C_4a^6b^4 = 210a^6b^4$.
• الحد الثامن في مفكوك $(a+b)^{10}$: الحد الثامن = ${}_{10}C_7a^3b^7 = 120a^3b^7$.</td></tr>
</table>

الاستقراء الرياضي

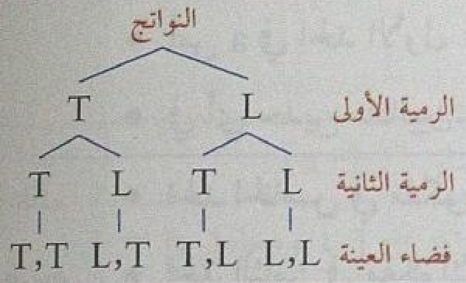
المقصود به	أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية
خطواته	لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n نتبع الخطوات التالية: **(١)** نبرهن أن الجملة صحيحة عندما n = 1 . **(٢)** نفرض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k ، ويسمى فرضية الاستقراء. **(٣)** نبرهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k+1 .

الفصل السابع: الاحتمالات

التجربة والنواتج والحادثة

التجربة	• المقصود بها: موقف يتضمن فرصًا تؤدي إلى نتائج تسمى **نواتج**. • **مثال توضيحي**: إلقاء قطعة نقد مرتين؛ حيث الشعار L والكتابة T .
النواتج	• المقصود بها: كل ما يمكن أن ينتج من تجربة ما. • **مثال توضيحي**: عند إلقاء قطعة نقد مرتين فإن جميع النواتج هي .. $\{(L,L),(T,T),(L,T),(T,L)\}$
الحادثة	• المقصود بها: نتيجة أو أكثر للتجربة. • **مثال توضيحي**: حادثة ظهور شعارين عند إلقاء قطعة نقد مرتين تساوي $\{(L,L)\}$.

فضاء العينة

<table>
<tr><td>المقصود به</td><td colspan="2">مجموعة جميع النواتج الممكنة</td></tr>
<tr><td>تمثيله</td><td colspan="2">يمكن تمثيله باستعمال الرسم الشجري أو القائمة المنظمة أو الجدول</td></tr>
<tr><td rowspan="4">مثال توضيحي</td><td colspan="2">عند إلقاء قطعة نقد مرتين فإن فضاء العينة يمكن إيجاده بإحدى الطرق التالية:</td></tr>
<tr><td>الرسم الشجري</td><td>
</td></tr>
<tr><td>القائمة المنظمة: نكتب أزواج النواتج الممكنة من الرمية الأولى مع النواتج الممكنة من الرمية الثانية</td><td>
<table>
<tr><td>L , L</td><td>T, L</td></tr>
<tr><td>L ,T</td><td>T , T</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>الجدول: تُدون نواتج الرمية الأولى في العمود الأيمن ونواتج الرمية الثانية في الصف العلوي</td><td>
<table>
<tr><td>النواتج</td><td>شعار L</td><td>كتابة T</td></tr>
<tr><td>شعار L</td><td>L , L</td><td>T , L</td></tr>
<tr><td>كتابة T</td><td>L , T</td><td>T , T</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

بدأ العد الأساسي

المقصود به	إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العينة

طريقته	نضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة
التعبير الرمزي	في تجربة ما عدد مراحلها k نفرض أن .. n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى $\vdots$ n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث k−1 من المراحل ومنه فإن .. $\boxed{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k}$ = العدد الكلي لنواتج تجربة عدد مراحلها k
مثال توضيحي	عند اختيارنا وجبة الكبسة من البدائل .. • اللحم أو الدجاج « 2 ». • 4 أنواع من المشروبات « 4 ». • الأرز الأحمر أو الأبيض أو الأصفر « 3 ». فإن عدد الخيارات المتاحة أمامنا = $2\times3\times4$ = 24 وجبة.

المضروب

التعبير اللفظي	• **صورته:** يُكتب مضروب العدد الصحيح الموجب n على الصورة !n . • **قيمته:** يساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .
التعبير الرمزي	$\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}$
مثالان توضيحيان	• $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$. • $4! = 4\times3\times 2\times1 = 24$.
فائدتان	• $0! = 1$. • $1! = 1$.

التباديل

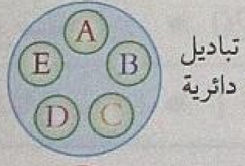
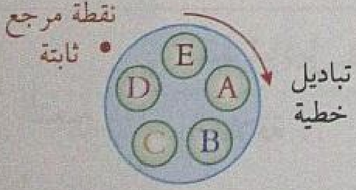
المقصود بها	تنظيم لمجموعة من العناصر، ويكون الترتيب فيه مهمًّا
التعبير الرمزي	عدد تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة يُرمز له بالرمز $_nP_r$ ، ويعطى بالعلاقة .. $\boxed{_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$

مثال توضيحي	عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي .. ${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$

التباديل مع التكرار

المقصود بها	هي التباديل المتمايزة لعناصر عددها n يتكرر منها عنصر r_1 من المرات، وآخر r_2 من المرات .. وهكذا
إيجادها	عدد التباديل مع التكرار = $\frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot \ldots \cdot r_k!}$
مثال توضيحي	حساب احتمال تكوين كلمة « المملكة » من الأحرف المجاورة: م ك ة ل ا ل م بما أنه يوجد 7 أحرف يتكرر فيها الحرف م مرتين والحرف ل مرتين فإن .. عدد التباديل لهذه الأحرف = $\frac{7!}{2!\times2!} = \frac{5040}{4} = 1260$ و بما أنه يوجد ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي كلمة « المملكة » فإن .. الاحتمال = $\frac{1}{1260}$

التباديل الدائرية

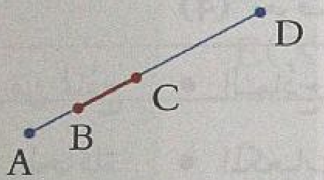
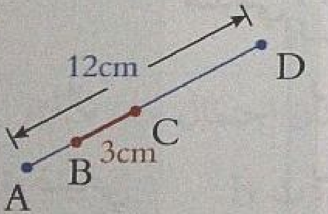
المقصود بها	عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة دون نقطة مرجع ثابتة
إيجادها	عدد التباديل الدائرية = $\frac{n!}{n} = (n-1)!$
مثال توضيحي	عندما نضع الأحرف A , B , C , D , E على شكل دائري أو حلقة فإن الترتيب الممكنة تسمى تباديل دائرية .. • عند تدويرها موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف .. ∴ عدد التباديل الدائرية = $(5-1)! = 4! = 24$ • عند تدويرها بالنسبة لنقطة مرجع ثابتة فإن الترتيبات ستعامل خطيًا .. ∴ عدد التباديل = $5! = 120$   

تنبيهات	• إذا رتبنا عناصر عددها n بدون نقطة مرجع ثابتة فإنها تُعدّ تبديلاً دائريًا، ويكون عدد تباديلها $(n-1)!$. • إذا رتبنا عناصر عددها n بالنسبة لنقطة مرجع ثابتة فإنها تُعدّ تبديلاً خطيًا، ويكون عدد تباديلها $n!$.

التوافيق

المقصود بها	تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه غير مُهم
التعبير الرمزي	يُرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$ ، ويعطى بالعلاقة .. $\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}}$
مثال توضيحي	عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي .. ${}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!\times3!} = \frac{8!}{5!\times3!} = \frac{8\times7\times\cancel{6}\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}\times\cancel{6}} = 56$
تنبيهات	• نستعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًّا. • نستعمل التوافيق عندما يكون ترتيب العناصر غير مهم.

الاحتمال والطول

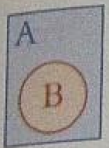
التعبير اللفظي	 إذا احتوت القطعة المستقيمة $\overline{AD}$ قطعة مستقيمة أخرى $\overline{BC}$ واختيرت نقطة تقع على القطعة $\overline{AD}$ عشوائيًا فإن .. $\boxed{\text{احتمال أن تقع النقطة على } \overline{BC} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة BC}}{\text{طول القطعة المستقيمة AD}}}$
مثال توضيحي	 في الرسم المجاور: إذا اخترنا النقطة X عشوائيًا على $\overline{AD}$ فإن احتمال أن تقع X على $\overline{BC}$ هو .. $P = \frac{BC}{AD} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 25\%$

الاحتمال والمساحة

التعبير اللفظي

إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًا فإن ..

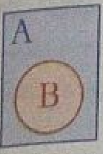
احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B = $\dfrac{\text{مساحة المنطقة B}}{\text{مساحة المنطقة A}}$



مثال توضيحي

إذا اخترنا النقطة E عشوائيًا في المستطيل A الذي مساحته $100\ cm^2$ فإن احتمال أن تقع E في الدائرة B التي مساحتها $35\ cm^2$ هو ..

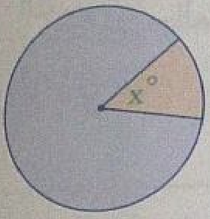
$$P=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}=35\%$$



تنبيه

يمكن استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي ..

نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية = نسبة قياس زاوية القطاع المركزية x° إلى 360° = $\dfrac{x^\circ}{360^\circ}$



تصميم المحاكاة

المقصود به

استعمال نموذج احتمالي لإعادة تكوين موقف مرة تلو الأخرى بحيث يمكن تقدير احتمالات النواتج

خطواته

(1) نحدد كل ناتج ممكن وقيمة احتماله النظري.

(2) نكتب الفرضيات الممكنة.

(3) نصف نموذجًا احتماليًا ملائمًا للموقف.

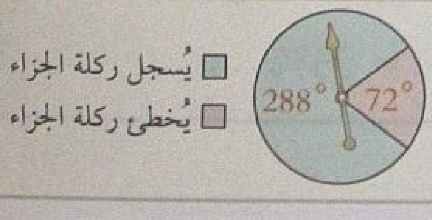
(4) نعرّف المحاولة اللازمة للموقف، ثم نُحدد عدد المحاولات الواجب إجراؤها.

من نماذج المحاكاة

- النماذج الهندسية.
- المكعبات المرقمة.
- قطع النقود.
- مولدات الأعداد العشوائية بالآلة الحاسبة.

مثال توضيحي

بناءً على تدريب فهد في ركلات الجزاء فإنه يسجل 80% منها في المرمى ويخطئ في 20% منها، ويمكن التنبؤ بعدد ركلات الجزاء التي يسجلها في المرمى في مباراةٍ قادمة ببناء نموذج هندسي « القرص ذو المؤشر » لتقدير احتمال أن يسجل فهد ركلة الجزاء ..

ركلات الجزاء	قياس زاوية القطاع	القرص ذو المؤشر
يسجل 80%	$\frac{80}{100}\times360^\circ=228^\circ$	 ☐ يُسجل ركلة الجزاء ☐ يُخطئ ركلة الجزاء
يخطئ 20%	$\frac{20}{100}\times360^\circ=72^\circ$	

فائدتان:

- نجاح المحاولة يعني تسجيل الهدف، وفشلها يعني عدم التسجيل.
- بعد تصميم عملية المحاكاة يجب علينا إجراءها وتسجيل النتائج.

المتغير العشوائي

المقصود به	المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة
مثال توضيحي	في تجربة رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة .. • المتغير العشوائي X يُمثل مجموع العددين الظاهرين على المكعبين. • الجدول المجاور يُبين بعض قيم X المعينة لنواتج هذه التجربة.

النواتج	قيم X
(1,1)	2
(1,2)	3
(2,1)	3
⋮	⋮
(6,6)	12

القيمة المتوقعة

المقصود بها	معدل قيم المتغير العشوائي المتوقعة عند إعادة التجربة أو محاكاتها نظريًا عددًا لانهائيًا من المرات
حساب القيمة المتوقعة	لإيجاد القيمة المتوقعة E(X) للمتغير العشوائي X نتبع التالي: **الخطوة1:** نضرب قيمة X في احتمال حدوثها. **الخطوة2:** نُكرر الخطوة1 لجميع قيم X الممكنة. **الخطوة3:** نُوجد مجموع نواتج الضرب.
مثال توضيحي	الجدول المجاور يوضح قيم المتغير العشوائي X وقيم الاحتمال المناظرة .. ولإيجاد القيمة المتوقعة E(X) ..

X	2	3	5
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$

$$E(X) = 2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{12}+5\times\frac{7}{12} = \frac{23}{6} \approx 3.83$$

الحادثة المركبة

المقصود بها	حادثة تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر	
نوعاها	**حادثتان مستقلتان**	تكون A و B حادثتين مستقلتين إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B
	حادثتان غير مستقلتين	تكون A و B حادثتين غير مستقلتين إذا كان احتمال حدوث A يُغير بطريقةٍ ما احتمال حدوث B
مثال توضيحي	عند اختيارنا بطاقة عشوائيًا من صندوق ما .. • إذا أُعيدت البطاقة في كل مرة فإن اختيار بطاقات أخرى هي **حوادث مستقلة.** • إذا لم تُرجع البطاقة في كل مرة فإن اختيار بطاقات أخرى هي **حوادث غير مستقلة.**	

الحادثة البسيطة	حادثة تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما
مثال توضيحي	عندما نرمي مكعب مُرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة فإن .. نواتج التجربة « فضاء العينة » = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } والحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلاً هي حادثة بسيطة لأنها تظهر مرة واحدة فقط.

احتمال حادثتين مستقلتين

التعبير اللفظي	احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن .. $P(A \text{ و } B) = P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ **فائدة:** يمكن تعميم القانون لأيّ عدد من الحوادث المستقلة.
تنبيه	الحرف و يدل على وقوع الحادثتين معًا ويشير إلى ضرب الاحتمالات، ويُرمز له برمز التقاطع ∩
فائدة	العبارة $P(A \text{ و } B)$ تُقرأ « احتمال وقوع A و وقوع B »
مثال توضيحي	عند إلقاء قطعة نقد A ورمي مكعب مرقم B مرة واحدة؛ لحساب احتمال ظهور الشعار L والعدد 5 نجد أن .. • احتمال ظهور الشعار L عند إلقاء قطعة النقد = $P(A) = \frac{1}{2}$. • احتمال ظهور العدد 5 عند رمي المكعب المرقم = $P(B) = \frac{1}{6}$. ∴ احتمال ظهور الشعار L والعدد 5 = $P(B)\cdot P(A) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
فائدة في المثال السابق	فضاء العينة = {(L,1) , (L,2) , (L,3) , (L,4) , (L,5) , (L,6) , (T,1) , (T,2) , (T,3) , (T,4) , (T,5) , (T,6)} ∴ احتمال ظهور الشعار و العدد 5 = $P(A\cap B) = \frac{1}{12}$

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي	احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال حدوث الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلاً
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين فإن .. $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B\|A)$ **فائدة:** يمكن تعميم القانون لأيّ عدد من الحوادث غير المستقلة.
فائدة	العبارة $P(B\|A)$ تُقرأ « احتمال وقوع B بشرط وقوع الحادثة A أولاً »، وتسمى الاحتمال المشروط

تنبيهان	• لأي حادثة X في تجربة عشوائية يكون $0 \le P(X) \le 1$. • مجموع احتمالات جميع الحوادث البسيطة لتجربة عشوائية يساوي 1 .

الاحتمال المشروط

المقصود به	اختزال فضاء العينة عند معرفة معلومات إضافية عن حادثة في تجربة عشوائية
التعبير الرمزي	الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو .. $P(B\|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$
مثال توضيحي	رُمي مكعب مرقم مرة واحدة وكان العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي « **الشرط** »؛ أوجد احتمال أن يكون هذا العدد 5 . الحل: بما أنه يمكن ظهور ثلاث أعداد فردية على وجه المكعب فإن .. فضاء العينة يختزل من { 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } إلى { 5 , 3 , 1 } ومنه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 .. $P(5\|\text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$

الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية

الحادثتان المتنافيتان	• المقصود بها: حادثتان لا توجد عناصر مشتركة بينهما. • مثال: عند اختيار عدد عشوائي من الأعداد { 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } والحصول على عدد زوجي أو عدد فردي فهاتان الحادثتان متنافيتان لعدم وجود عناصر مشتركة بينهما.
الحادثتان غير المتنافيتين	• المقصود بها: حادثتان يوجد بينهما عناصر مشتركة. • مثال: عند اختيار عدد عشوائي من الأعداد { 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 } والحصول على عدد زوجي أو عدد أكبر من 2 فهاتان الحادثتان غير متنافيتين لوجود عناصر مشتركة بينهما.

احتمال الحادثتين المتنافيتين

التعبير اللفظي	إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كلٍ منهما
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين فإن .. $P(A \text{ أو } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **فائدة:** يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المتنافية.

الحادثة البسيطة	حادثة تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما
مثال توضيحي	عندما نرمي مكعب مُرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة فإن .. نواتج التجربة « فضاء العينة » = $\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ والحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلاً هي حادثة بسيطة لأنها تظهر مرة واحدة فقط.

احتمال حادثتين مستقلتين

التعبير اللفظي	احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين فإن .. $P(\mathrm{A} \text{ و } \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})$ **فائدة:** يمكن تعميم القانون لأيّ عدد من الحوادث المستقلة.
تنبيه	الحرف و يدل على وقوع الحادثتين معًا ويشير إلى ضرب الاحتمالات، ويُرمز له برمز التقاطع ∩
فائدة	العبارة $P(\mathrm{A} \text{ و } \mathrm{B})$ تُقرأ « احتمال وقوع A و وقوع B »
مثال توضيحي	عند إلقاء قطعة نقد A ورمي مكعب مرقم B مرة واحدة؛ لحساب احتمال ظهور الشعار L والعدد 5 نجد أن .. • احتمال ظهور الشعار L عند إلقاء قطعة النقد = $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$. • احتمال ظهور العدد 5 عند رمي المكعب المرقم = $P(\mathrm{B}) = \frac{1}{6}$. ∴ احتمال ظهور الشعار L والعدد 5 = $P(\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{A}) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
فائدة في المثال السابق	فضاء العينة = $\{(L,1) , (L,2) , (L,3) , (L,4) , (L,5) , (L,6) , (T,1) , (T,2) , (T,3) , (T,4) , (T,5) , (T,6)\}$ ∴ احتمال ظهور الشعار و العدد 5 = $P(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}) = \frac{1}{12}$

احتمال حادثتين غير مستقلتين

التعبير اللفظي	احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال حدوث الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلاً
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين فإن .. $P(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$ **فائدة:** يمكن تعميم القانون لأيّ عدد من الحوادث غير المستقلة.
فائدة	العبارة $P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$ تُقرأ « احتمال وقوع B بشرط وقوع الحادثة A أولاً »، وتسمى الاحتمال المشروط

تنبيهان	• لأي حادثة X في تجربة عشوائية يكون $0 \le P(X) \le 1$. • مجموع احتمالات جميع الحوادث البسيطة لتجربة عشوائية يساوي 1 .

الاحتمال المشروط

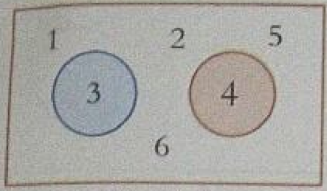
المقصود به	اختزال فضاء العينة عند معرفة معلومات إضافية عن حادثة في تجربة عشوائية
التعبير الرمزي	الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو .. $P(B\|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$
مثال توضيحي	رُمي مكعب مرقم مرة واحدة وكان العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي « **الشرط** »؛ أوجد احتمال أن يكون هذا العدد 5 . **الحل:** بما أنه يمكن ظهور ثلاث أعداد فردية على وجه المكعب فإن .. فضاء العينة يختزل من $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ إلى $\{1 , 3 , 5\}$ ومنه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 .. $P(5\|\text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$

الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية

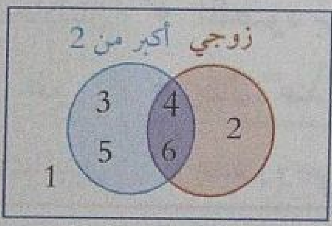
الحادثتان المتنافيتان	• **المقصود بها:** حادثتان لا توجد عناصر مشتركة بينهما. • **مثال:** عند اختيار عدد عشوائي من الأعداد $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ والحصول على عدد زوجي أو عدد فردي فهاتان الحادثتان متنافيتان لعدم وجود عناصر مشتركة بينهما.
الحادثتان غير المتنافيتين	• **المقصود بها:** حادثتان يوجد بينهما عناصر مشتركة. • **مثال:** عند اختيار عدد عشوائي من الأعداد $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ والحصول على عدد زوجي أو عدد أكبر من 2 فهاتان الحادثتان غير متنافيتين لوجود عناصر مشتركة بينهما.

احتمال الحادثتين المتنافيتين

التعبير اللفظي	إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين فاحتمال وقوع A **أو** B يساوي مجموع احتمال كلٍ منهما
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين فإن .. $P(A \text{ أو } B) = P(A\cup B) = P(A)+P(B)$ **فائدة:** يمكن تعميم هذا القانون على أي عدد من الحوادث المتنافية.

تنبيه	الحرف أو يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات، ويرمز له برمز الاتحاد ∪
فائدة	العبارة $P(\text{A أو B})$ تُقرأ « احتمال وقوع A أو وقوع B »
مثال توضيحي	عند رمي مكعب مرقم وإيجاد احتمال ظهور العدد 3 أو 4 نجد أن .. • الحادثتين متنافيتان؛ لأنه لا يمكن ظهور العدد 3 و 4 في آنٍ واحد. • فضاء العينة = $\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$. • احتمال الحادثة ظهور العدد 3 = $P(3) = \frac{1}{6}$. • احتمال الحادثة ظهور العدد 4 = $P(4) = \frac{1}{6}$. • احتمال ظهور العدد 3 أو 4 يساوي .. $P(3 \text{ أو } 4) = P(3)+P(4) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ 

احتمال الحادثتين غير المتنافيتين

التعبير اللفظي	إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع A و B معًا
التعبير الرمزي	إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فإن .. $\boxed{P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$
مثال توضيحي	عند رمي مكعب مُرقم وإيجاد احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو زوجي نجد أن .. • الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه. • فضاء العينة = $\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$. • الحادثة A عدد أكبر من 2 = $\{3 , 4 , 5 , 6\}$. $\therefore \quad P(\text{أكبر من } 2) = P(A) = \frac{4}{6}$ • الحادثة B عدد زوجي = $\{2 , 4 , 6\}$. $\therefore \quad P(\text{زوجي}) = P(B) = \frac{3}{6}$ • التقاطع بين الحدثين .. $A\cap B = \{4 , 6\} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{2}{6}$ • نُوجد احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي .. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{4}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ 

الحادثة المتممة

التعبير اللفظي	احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة	
التعبير الرمزي	لأيّ حادثة A .. $\boxed{P(A`) = 1 - P(A)}$	A` الحدث المتمم للحدث A
مثال توضيحي	إذا كان احتمال أن يتناول فهد الفطور 20% فإن احتمال عدم فطوره .. $P(\text{عدم فطوره}) = 1 - P(\text{فطوره})$ $P(\text{عدم فطوره}) = 1 - \frac{20}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$	

ملخص قوانين الاحتمال

نوع الحادثة	القانون
الحادثتان A , B مستقلتان	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحادثتان A , B غير مستقلتين	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
الحادثة B بشرط وقوع A	$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
الحادثتان A , B متنافيتان	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحادثتان A , B غير متنافيتين	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثة المتممة لـ A	$P(A`) = 1 - P(A)$

تنبيهات:

- مجموع احتمالات جميع الحوادث البسيطة لتجربة عشوائية = 1 .
- لأيّ حادثة A في تجربة عشوائية فإن $0 \le P(A) \le 1$.
- $P(A` \cup B`) = P(A \cap B)`$.
- $P(A` \cap B`) = P(A \cup B)`$.

الفصل الثامن: الدوال والمتباينات

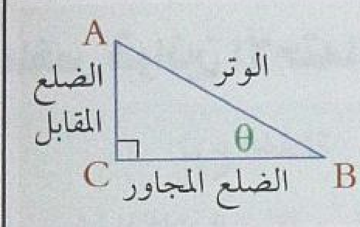
الدوال المثلثية للزوايا الحادة

حساب المثلثات	دراسة العلاقات بين زوايا وأضلاع المثلث قائم الزاوية
النسبة المثلثية	تقارن النسبة المثلثية بين طولي ضلعين في المثلث قائم الزاوية
الدالة المثلثية	تُعرف الدالة المثلثية من خلال نسبة مثلثية
تنبيه	الرمز الإغريقي θ « ثيتا » يرمز لقياس زاوية حادة في المثلث قائم الزاوية

الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

التعبير اللفظي

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية فإن الدوال المثلثية الست تُعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور للزاوية

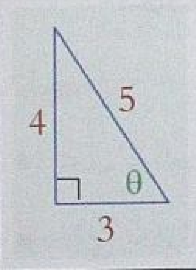


التوضيح بالرموز

$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$	**قاطع تمام θ**	$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	**جيب θ**
$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$	**قاطع θ**	$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	**جيب تمام θ**
$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$	**ظل تمام θ**	$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	**ظل θ**

مثال توضيحي

$\tan\theta = \frac{4}{3}$	$\cos\theta = \frac{3}{5}$	$\sin\theta = \frac{4}{5}$
$\cot\theta = \frac{3}{4}$	$\sec\theta = \frac{5}{3}$	$\csc\theta = \frac{5}{4}$



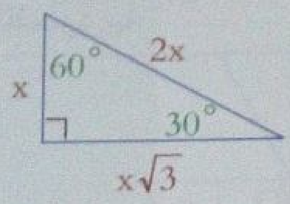
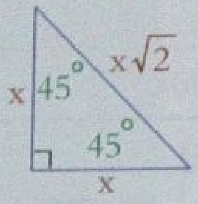
العلاقات بين النسب المثلثية

- النسبة المثلثية قاطع التمام مقلوب النسبة المثلثية الجيب؛ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$.
- النسبة المثلثية القاطع مقلوب النسبة المثلثية جيب التمام؛ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.
- النسبة المثلثية ظل التمام مقلوب النسبة المثلثية الظل؛ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

فائدتان

- الدوال المثلثية تعتمد على قياسات الزوايا الحادة.
- الدوال المثلثية **لا تعتمد** على أطوال أضلاع المثلث قائم الزاوية.

قيم بعض الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

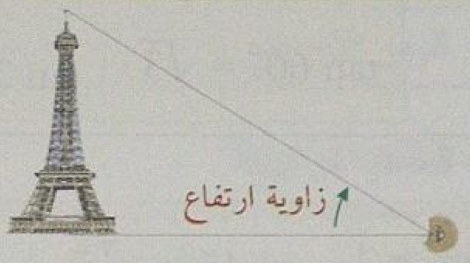
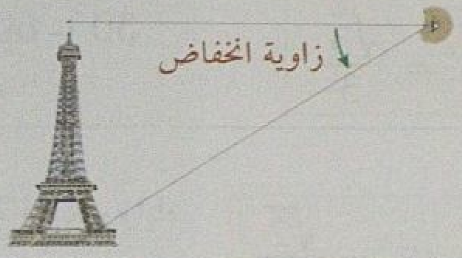
الزوايا الخاصة	• **المقصود بها:** الزوايا التي تتكرر قياساتها كثيراً في حساب المثلثات. • **أمثلة توضيحية:** الزوايا التي قياساتها $60°$, $45°$, $30°$ هي زوايا خاصة.
الدوال المثلثية لمثلث زواياه $30° - 60° - 90°$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$ 
الدوال المثلثية لمثلث زواياه $45° - 45° - 90°$	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan 45° = 1$ 
تنبيهات	• يمكن استعمال الدوال المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا المجهولة في مثلث قائم الزاوية. • إذا كان طول الوتر مجهولاً فإننا نوجده باستعمال دالة الجيب أو دالة جيب التمام.

معكوس النسب المثلثية

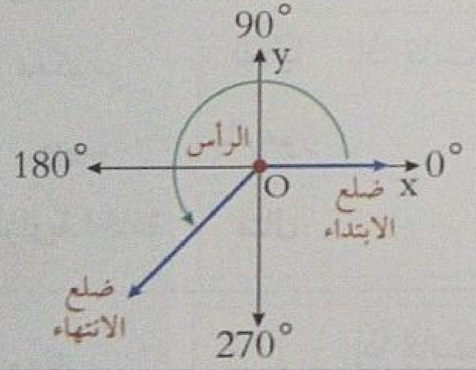
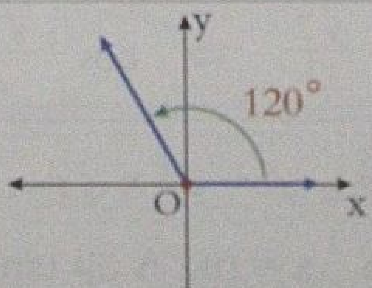
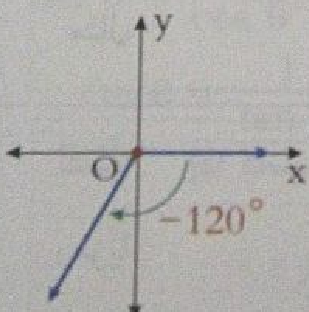
معكوس جيب الزاوية الحادة	لفظيًا	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيبها يساوي x فإن **معكوس جيب x** هو قياس $\angle A$
	بالرموز	إذا كان $\sin A = x$ فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$
	مثال	$\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{2} = m\angle A = 30°$
معكوس جيب تمام الزاوية الحادة	لفظيًا	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب تمامها يساوي x فإن **معكوس جيب تمام x** هو قياس $\angle A$
	بالرموز	إذا كان $\cos A = x$ فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$
	مثال	$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A = 45°$
معكوس ظل الزاوية الحادة	لفظيًا	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظلها يساوي x فإن **معكوس ظل x** هو قياس $\angle A$
	رمزيًا	إذا كان $\tan A = x$ فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$
	مثال	$\tan A = \sqrt{3} \Rightarrow \tan^{-1}\sqrt{3} = m\angle A = 60°$

<table>
<tr><td></td><td>sin x</td></tr>
<tr><td>فائدة</td><td>العبارة $\sin^{-1} x$ تُقرأ « معكوس جيب x »، وتعني الزاوية التي جيبها x</td></tr>
</table>

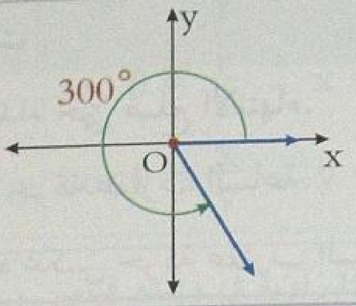
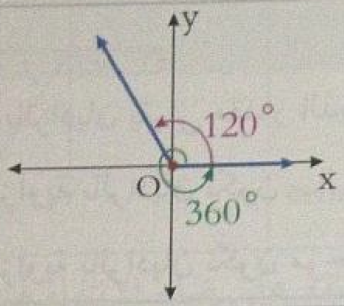
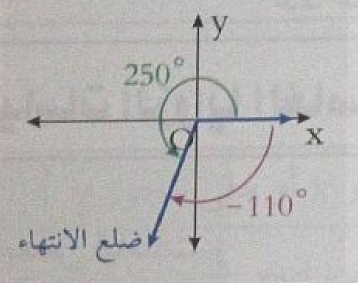
زوايا الارتفاع والانخفاض

<table>
<tr><td>المقصود بها</td><td>الزاوية المحصورة بين خط أفقي وخط نظر الناظر إلى الهدف</td></tr>
<tr><td>نوعاها</td><td>
<table>
<tr><th>زاوية الارتفاع</th><th>زاوية الانخفاض</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>تنبيه</td><td>زاويتا الارتفاع والانخفاض للحالة الواحدة متطابقتان لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان لخطين متوازيين</td></tr>
</table>

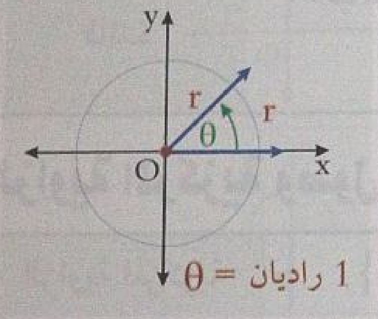
زاوية المرسومة في الوضع القياسي

<table>
<tr><td>عريفها</td><td>{ زاوية مرسومة في المستوى الإحداثي رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب من المحور x }</td></tr>
<tr><td>لعاها</td><td>
<table>
<tr><td>ضلع الابتداء</td><td>ضلع الزاوية المنطبق على محور x</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>ضلع الانتهاء</td><td>ضلع الزاوية الذي يدور حول نقطة الأصل</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>اسات
زوايا</td><td>
<table>
<tr><th>الزاوية الموجبة</th><th>الزاوية السالبة</th></tr>
<tr><td>ضلع انتهاء الزاوية دار عكس حركة عقارب الساعة</td><td>ضلع انتهاء الزاوية دار مع حركة عقارب الساعة</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

رسم زاوية في الوضع القياسي

	يدور دورة واحدة أو أقل	يدور أكثر من دورة
حالات ضلع الانتهاء لزاوية	يكون قياس الزاوية 360° أو أقل	يكون قياس الزاوية أكثر من 360°
	مثال: الزاوية 300°	**مثال:** الزاوية $360^\circ+120^\circ = 480^\circ$
		
فائدة	عند دوران ضلع الانتهاء لزاوية **دورة كاملة** يكون مقدارها 360°	
تنبيه	يمكن إيجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى من خلال جمع أو طرح أحد مضاعفات 360°	
مثال توضيحي	الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية -110° .. الزاوية المشتركة $= -110^\circ+360^\circ = 250^\circ$	

القياس بالدرجات والقياس بالراديان

الراديان	 1 راديان $= \theta$
قياس الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي ويقطع ضلع الانتهاء لها قوسًا طوله مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة r	
العلاقة بين القياس بالدرجات والقياس بالراديان	
• $2\pi \ \text{Rad} = 360^\circ$. • $\pi \ \text{Rad} = 180^\circ$.	

التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان

قياس الزاوية بالراديان = قياس الزاوية بالدرجات× $\frac{\pi \text{ راديان}}{180^\circ}$

التحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات

قياس الزاوية بالدرجات = قياس الزاوية بالراديان× $\frac{180^\circ}{\pi \text{ راديان}}$

مثالان توضيحيان

تحويل -30° إلى راديان	$-30^\circ = -30^{\cancel{\circ}} \times \frac{\pi\ rad}{180^{\cancel{\circ}}} = \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6}\ rad$
تحويل $\frac{5\pi}{2}$ rad إلى درجات	$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\cancel{\pi}}{2}\ \cancel{rad} \times \frac{180^\circ}{\cancel{\pi\ rad}} = \frac{900^\circ}{2} = 450^\circ$

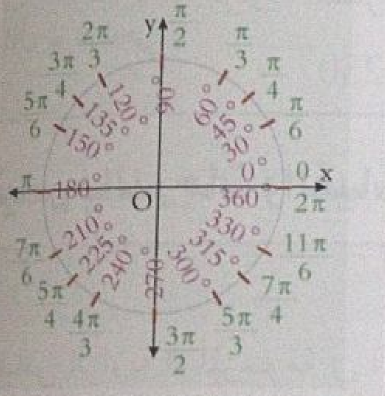
تنبيهات

- القياس بالراديان يقيس مقدار الدوران من ضلع الابتداء حتى ضلع الانتهاء.
- قياس الزاوية بالراديان تكون سالبة إذا كانت في اتجاه حركة عقارب الساعة.
- قياس الزاوية بالراديان تكون موجبة إذا كانت في اتجاه عكس حركة عقارب الساعة.

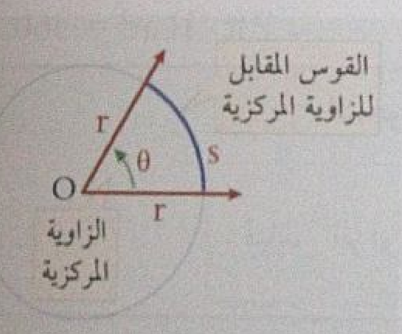
فائدة

عند عدم وجود وحدة قياس لزاوية فإن وحدة قياسها تكون راديان

قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان

بعض قياسات الزوايا الخاصة	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ $90^\circ = \frac{\pi}{2}$	
فائدة	قياسات الزوايا الخاصة الأخرى هي مضاعفات لقياسات الزوايا أعلاه	

الزاوية المركزية وطول القوس

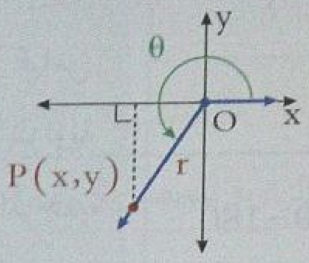
الزاوية المركزية	{ زاوية رأسها يقع على مركز الدائرة }	
طول القوس في دائرة	لدائرة طول نصف قطرها r تحوي زاوية مركزية قياسها θ فإن طول القوس s المقابل لهذه الزاوية يساوي حاصل ضرب r في θ	
العلاقة الرياضية	$\boxed{s = r\,\theta}$	
مثال توضيحي	لدائرة طول نصف قطرها 27 m وزاويتها المركزية $\frac{10\pi}{9}$ فإن طول القوس .. $s = r\,\theta = 27 \times \frac{10\pi}{9} = 30\pi = 94.2\ m$	
تنبيه	الدورة الكاملة على الدائرة تساوي 2π راديان	

الدوال المثلثية للزوايا

قيم الدوال المثلثية لزوايا قياساتها تزيد عن 90° أو تنقص عن 0° بمعلومية نقطة

إذا كانت θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، والنقطة $P(x,y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها، وقيمة r من نظرية فيثاغورس $r = \sqrt{x^2+y^2}$ فإن قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ ..

$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad , \; y \neq 0$	$\sin\theta = \frac{y}{r}$
$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad , \; x \neq 0$	$\cos\theta = \frac{x}{r}$
$\cot\theta = \frac{x}{y} \quad , \; y \neq 0$	$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad , \; x \neq 0$



مثال توضيحي

إذا كانت θ زاوية في وضع قياسي، و $P(3,5)$ نقطة تقع على ضلع الانتهاء لها فإن ..

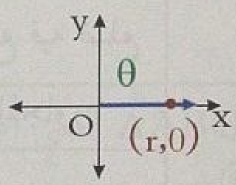
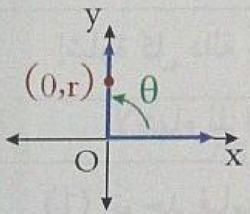
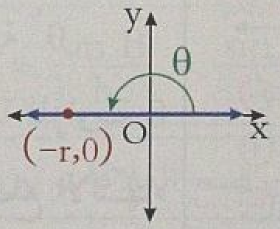
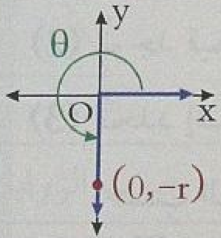
- $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{3}$.
- $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$.

الزاوية الرُّبعية

تعريفها { زاوية مرسومة في الوضع القياسي يقع ضلع الانتهاء لها على المحور x أو على المحور y }

تنبيه قياس الزوايا الرُّبعية من مضاعفات 90° أي من مضاعفات $\frac{\pi}{2}$ rad

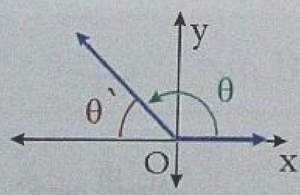
حالاتها

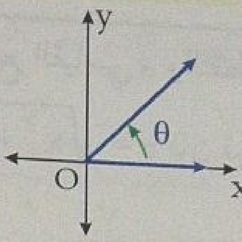
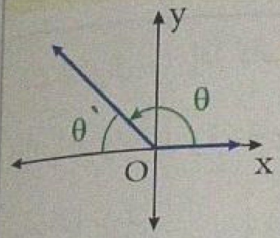
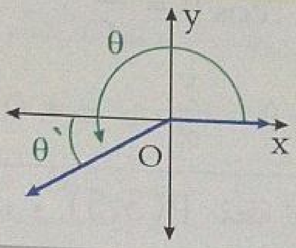
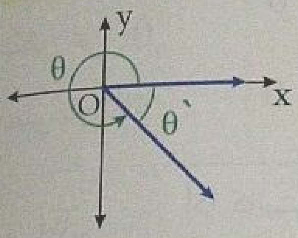
$\theta = 0^\circ$ أو $\theta = 0$ rad		$\theta = 90^\circ$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad	
$\theta = 180^\circ$ أو $\theta = \pi$ rad		$\theta = 270^\circ$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad	

الزاوية المرجعية

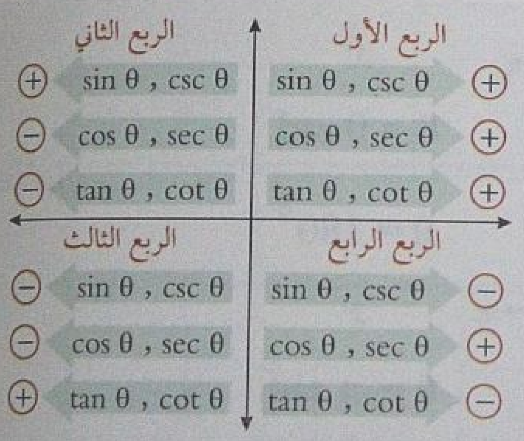
تعريفها { زاوية حادة محصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x ؛ حيث θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي }

فائدة يرمز للزاوية المرجعية بالرمز $\theta^{`}$ ، ونقرأها: ثيتا برايم



قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ	**الربع الأول**  $\theta = \theta`$	**الربع الثاني**  $\theta` = 180^\circ - \theta$ $\theta` = \pi - \theta$
	الربع الثالث  $\theta` = \theta - 180^\circ$ $\theta` = \theta - \pi$	**الربع الرابع**  $\theta` = 360^\circ - \theta$ $\theta` = 2\pi - \theta$
	تنبيه: لجميع الحالات السابقة $0^\circ < \theta < 360^\circ$ **أو** $0 < \theta < 2\pi$.	
تنبيه	لإيجاد الزاوية المرجعية للزاوية θ التي قياسها أكبر من 360° أو أقل من 0° نستخدم زاوية بقياس موجب محصورة بين 360° و 0° ومشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية θ	

إيجاد قيم الدوال المثلثية

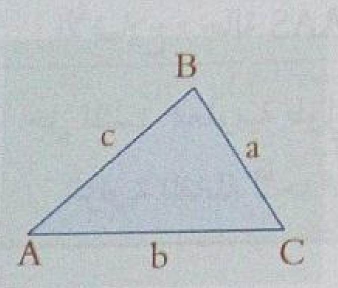
فائدة	الزوايا المرجعية تُستعمل لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأيّ زاوية θ	
تحديد إشارة الدوال المثلثية	إشارة كل دالة يُحدّدها الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ كما في الشكل المجاور	
خطوات إيجاد قيم الدوال المثلثية	(1) نُوجد قياس الزاوية المرجعية θ` . (2) نُوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ` . (3) نُحدد إشارة قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .	

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

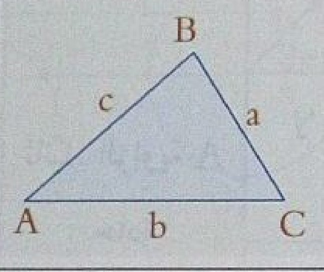
الجيب	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
جيب التمام	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
الظل	$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

قاطع التمام	$\csc 30^\circ = 2$	$\csc 45^\circ = \sqrt{2}$	$\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
القاطع	$\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$	$\sec 60^\circ = 2$
ظل التمام	$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$	$\cot 45^\circ = 1$	$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مساحة المثلث

التعبير اللفظي	مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما	
التوضيح الرموز	مساحة المثلث $= \frac{1}{2} ab \sin C$ مساحة المثلث $= \frac{1}{2} bc \sin A$ مساحة المثلث $= \frac{1}{2} ac \sin B$	
مثال توضيحي	إذا كان ΔABC فيه $a = 5$ cm , $b = 6$ cm , $C = 45^\circ$ فإن .. مساحة المثلث $= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \sin 45^\circ = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm^2	

قانون الجيوب

القانون	إذا كانت أضلاع ΔABC التي أطوالها a , b , c تقابل الزوايا ذات القياسات A , B , C فإن .. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	
فائدة	قانون الجيوب يوضح العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث وجيوب الزوايا المقابلة لها	
مثال توضيحي	لإيجاد الزاوية B في ΔABC الذي فيه: $A = 30^\circ$, $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$ فإن .. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{\sin B}{2\sqrt{3}}$ $\therefore \quad \sin B = \frac{\sin 30^\circ \times 2\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660 \Rightarrow B \approx 60^\circ$	
صورة أخري لقانون الجيوب	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
حل المثلث	استعمال القياسات المعطاة في إيجاد المجهول من أطوال أضلاع المثلث وقياس زواياه	

متى يستعمل قانون الجيوب؟	معرفة قياسي زاويتين في المثلث وطول أي ضلع فيه	• حالة ASA « زاوية – ضلع – زاوية ».
	معرفة طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	حالة SSA « ضلع – ضلع – زاوية »

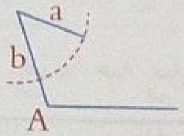
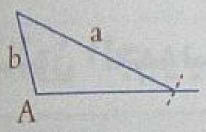
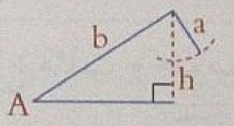
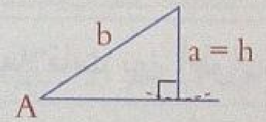
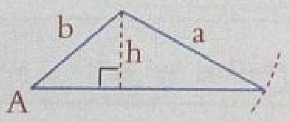
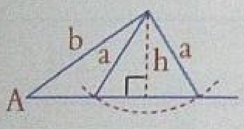
حالات حل المثلث

<table>
<tr><td>حل المثلث بمعلومية قياس زاويتين وطول أحد الأضلاع « حالة AAS أو حالة ASA »</td><td>يوجد مثلث وحيد وحل واحد فقط</td></tr>
<tr><td>حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما « حالة SSA »</td><td><table>
<tr><td>عدد المثلثات</td><td>صفر</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>عدد الحلول</td><td>لا يوجد حل</td><td>حل واحد</td><td>حلان</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

المثلثات الممكنة في حالة SSA

تحديد عدد المثلثات الممكنة في حالة SSA

ليكن مثلثًا معلوم فيه: $m\angle A$, a , b ..

أولاً: الزاوية A منفرجة أو قائمة	$a \le b$: لا يوجد حل للمثلث		$a > b$: يوجد حل واحد للمثلث	
ثانيًا: الزاوية A حادة	$a < h$ لا يوجد للمثلث حل	$a = h$ يوجد للمثلث حل واحد	$a \ge b$ يوجد للمثلث حل واحد	$h < a < b$ يوجد للمثلث حلان
				

تنبيهان

- الحالة التي يكون للمثلث فيها حلان تُسمى الحالة المبهمة.
- لإيجاد ارتفاع المثلث h في المثلثات الحادة الزوايا نستخدم العلاقة $h = b \sin A$.

قانون جيوب التمام

استخداماته	• حل المثلث المعلوم فيه طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما « حالة SAS ». • حل المثلث المعلوم فيه أطوال الأضلاع الثلاثة « حالة SSS ».

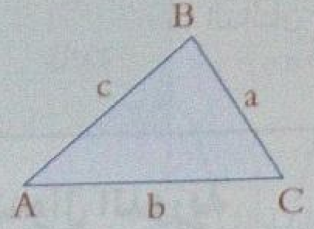
قانون جيوب التمام

إذا كانت أضلاع ΔABC التي أطوالها a , b , c تقابل الزوايا ذات القياسات A , B , C على الترتيب فإن ..

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$$



طرق حل المثلثات غير القائمة الزاوية

المعطيات	القانون الذي يُستخدم في الحل
قياسا زاويتين وطول أي ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

الدوال الدائرية

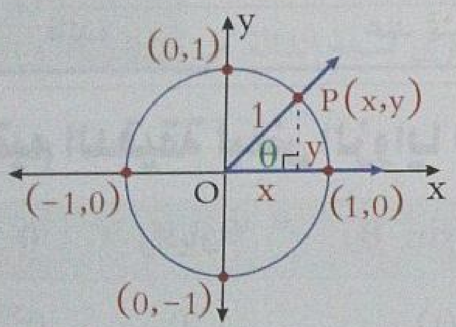
دائرة الوحدة

{ دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة }

فائدة

إذا كانت النقطة P على دائرة الوحدة فإن دالتا الجيب وجيب التمام ..

$$\cos\theta = x \quad ، \quad \sin\theta = y$$



الدوال الدائرية في دائرة الوحدة

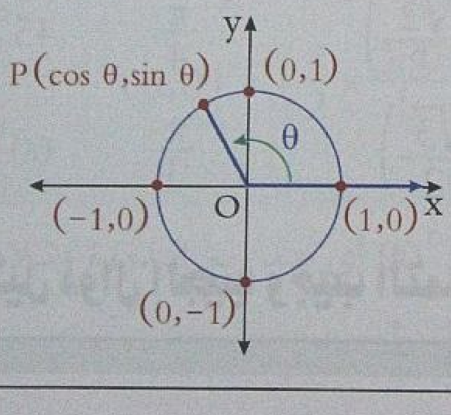
التعبير اللفظي

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$ فإن ..

$$\cos\theta = x \quad , \quad \sin\theta = y$$

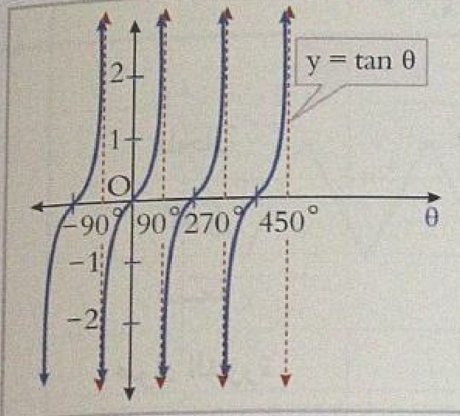
التعبير بالرموز

$$\boxed{P(x,y) = P(\cos\theta,\sin\theta)}$$

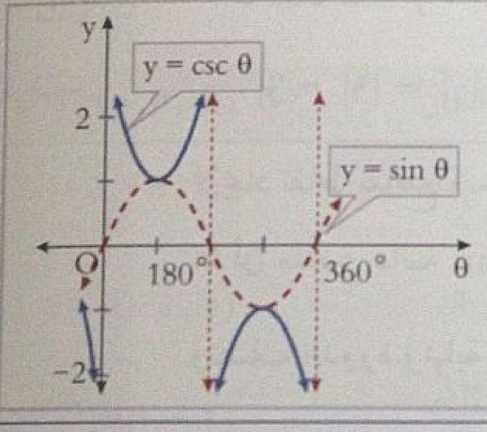


التردد	• المقصود به: عدد الدورات في وحدة الزمن. • إيجاد تردد التمثيل البياني لدالة: نُوجد مقلوب طول الدورة. • مثال توضيحي: إذا كان طول الدورة لدالة $\frac{1}{70}$ ثانية فإن ترددها يساوي 70 دورة/ثانية.

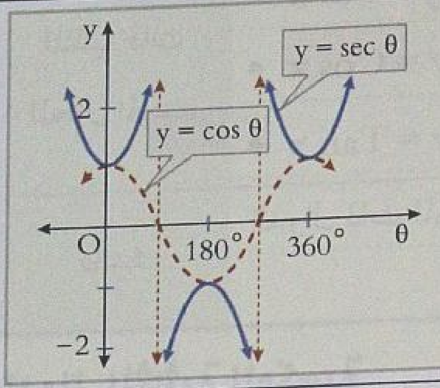
تمثيل دالة الظل في المستوى الإحداثي

دالة الظل	الدالة المولدة « الأم »	$y = \tan\theta$	
	المجال	$\{ \theta \mid \theta \neq 90+180n \ , \ n\in z \}$	
	المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية	
	السعة	غير معرَّفة	
	طول الدورة	180°	
تنبيهات	• طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \tan b\theta$ يساوي $\frac{180^\circ}{\lvert b\rvert}$. • لا يوجد سعة لدالة الظل لعدم وجود قيم عظمى أو صغرى لها. • دالة الظل لها خطوط تقارب رأسية عند المضاعفات الفردية للعدد $\frac{180^\circ}{2\lvert b\rvert}$.		

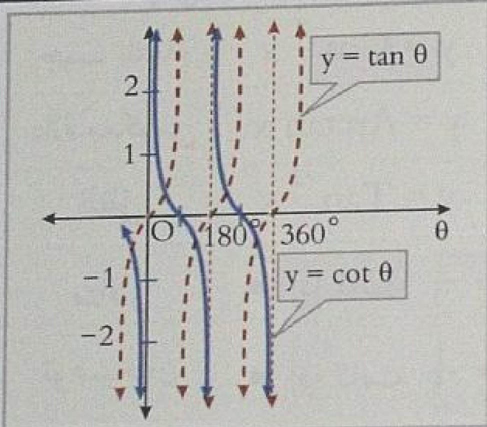
تمثيل دالة قاطع التمام

دالة قاطع التمام	الدالة المولدة « الأم »	$y = \csc\theta$	
	المجال	$\{ \theta \mid \theta \neq 180n \ , \ n\in z \}$	
	المدى	$\{ y \mid 1 \le y$ أو $y \le -1 \}$	
	السعة	غير معرَّفة	
	طول الدورة	360°	
فائدة	منحنى دالة قاطع التمام يرتبط بمنحنى دالة الجيب		
تنبيه	طول الدورة لمنحنى الدالة $y = a \csc b\theta$ يساوي $\frac{360^\circ}{\lvert b\rvert}$		

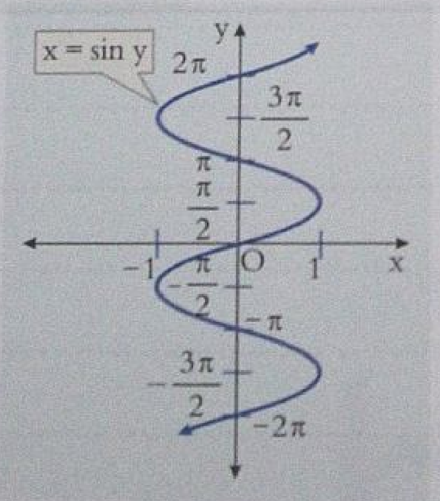
تمثيل دالة القاطع

دالة القاطع	الدالة المولدة « الأم »	$y = \sec\theta$	
	المجال	$\{ \theta \mid \theta \neq 90+180n \text{ , } n\in z \}$	
	المدى	$\{ y \mid 1 \le y$ أو $y \le -1 \}$	
	السعة	غير معرَّفة	
	طول الدورة	360°	
مثال	الدالة $y = 3\sec 4\theta$ ؛ طول دورتها $= \frac{360^\circ}{\lvert b\rvert} = \frac{360^\circ}{\lvert 4\rvert} = 90^\circ$		
فائدة	منحنى دالة القاطع يرتبط بمنحنى دالة جيب التمام		

تمثيل دالة ظل التمام

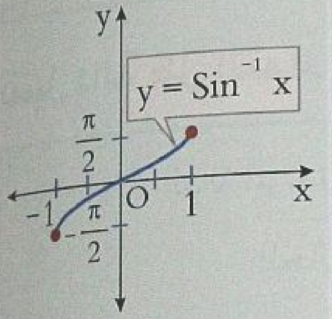
دالة القاطع	الدالة المولدة « الأم »	$y = \cot\theta$	
	المجال	$\{ \theta \mid \theta \neq 180n \text{ , } n\in z \}$	
	المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية	
	السعة	غير معرَّفة	
	طول الدورة	180°	
مثال	الدالة $y = 5\cot 2\theta$ ؛ طول دورتها $= \frac{180^\circ}{\lvert b\rvert} = \frac{180^\circ}{\lvert 2\rvert} = 90^\circ$		
فائدة	منحنى دالة ظل التمام يرتبط بمنحنى دالة الظل		

معكوس الدالة المثلثية

المقصود بها	العلاقة التي تُعكس فيها قيم المتغيرين x , y	
مثال توضيحي	• معكوس $y = \sin x$ هو $x = \sin y$. • تنبيه: معكوس الدالة المثلثية ليس دالة لوجود عدد من قيم y لكل قيمة من قيم x . • معكوس الدالة المثلثية يصبح دالة إذا تم تحديد مجال الدالة بحيث يكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. • القيم الأساسية هي القيم في المجال المحدد.	

تمثيل الدوال المثلثية ذات المجال المحدد	الدوال المثلثية ذات المجال المحدد تمثل بأحرف كبيرة كما يلي: • $y = \text{Sin } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \sin x$ ؛ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. • $y = \text{Cos } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \cos x$ ؛ $0 \le x \le \pi$. • $y = \text{Tan } x$ إذا وفقط إذا كان $y = \tan x$ ؛ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
فائدة	الدوال ذات المجالات المحددة تُستعمل لتعريف الدوال العكسية « دالة معكوس الجيب ، دالة معكوس جيب التمام ، دالة معكوس الظل »

الدوال المثلثية العكسية

الدالة	الرموز	المجال	المدى	نموذج
دالة معكوس الجيب	$y = \text{Arcsin } x$ $y = \text{Sin}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \le y \le 90^\circ$	
دالة معكوس جيب التمام	$y = \text{Arccos } x$ $y = \text{Cos}^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0^\circ \le y \le 180^\circ$	
دالة معكوس الظل	$y = \text{Arctan } x$ $y = \text{Tan}^{-1} x$	مجموعة الأعداد الطبيعية	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90^\circ \le y \le 90^\circ$	
مثالان توضيحيان	• إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ في الدالة $y = \text{Cos}^{-1} x$ فإن $y = 60^\circ$ فقط لأنها دالة. • إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ في العلاقة $y = \cos^{-1} x$ فإن $y = 60^\circ , 300^\circ$ لأنها علاقة.			

حل المعادلات باستخدام الدوال العكسية

المقصود بها	إعادة كتابة المعادلات المثلثية لإيجاد قياس الزاوية
مثال توضيحي	$\text{Sin } \theta = -0.35 \Rightarrow \text{Arcsin } (-0.35) = \theta$ أو $\text{Sin } \theta = -0.35 \Rightarrow \text{Sin}^{-1} (-0.35) = \theta$