
الدرس
1
1
1
1
1
1

القطوع المكافئة

PARABOLAS


Welcome

لماذا ؟

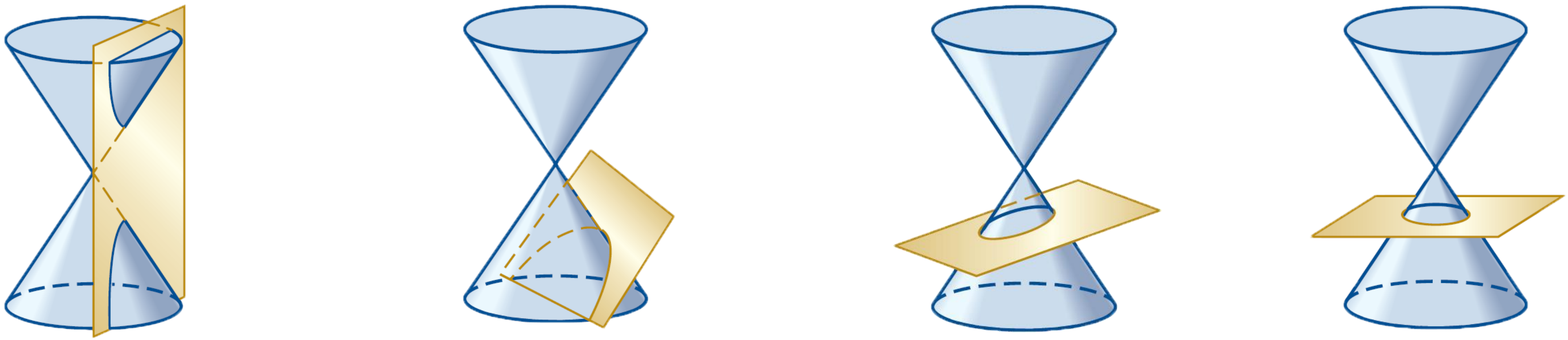
استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

تحليل القطوع المخروطية ة تمثيلها بيانياً :

القطوع المخروطية هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما. بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

والقطوع المخروطية الأربعة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.

والقطوع المخروطية الأربعة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.

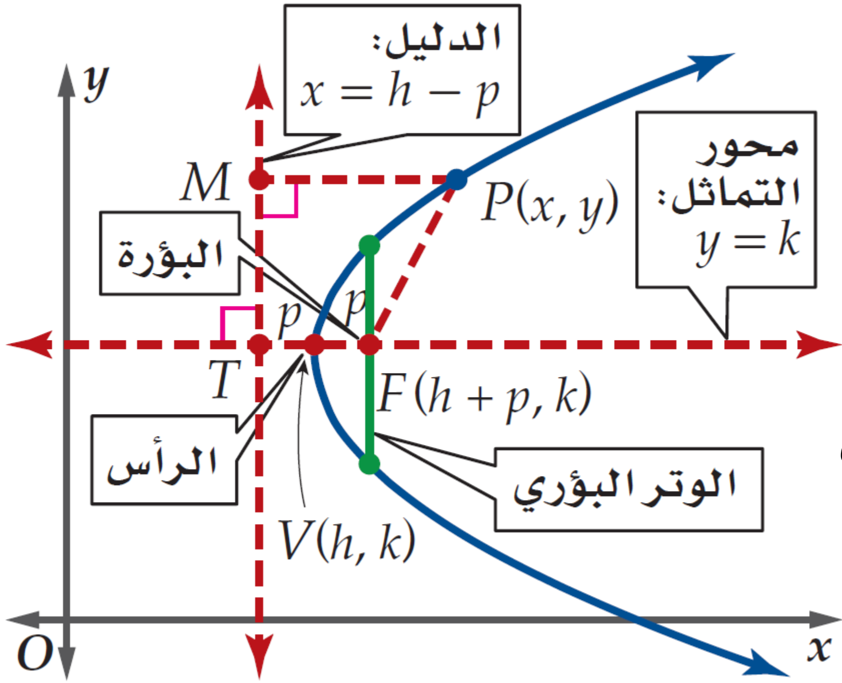


الدائرة   القطع الناقص   القطع المكافئ   القطع الزائد

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا، وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

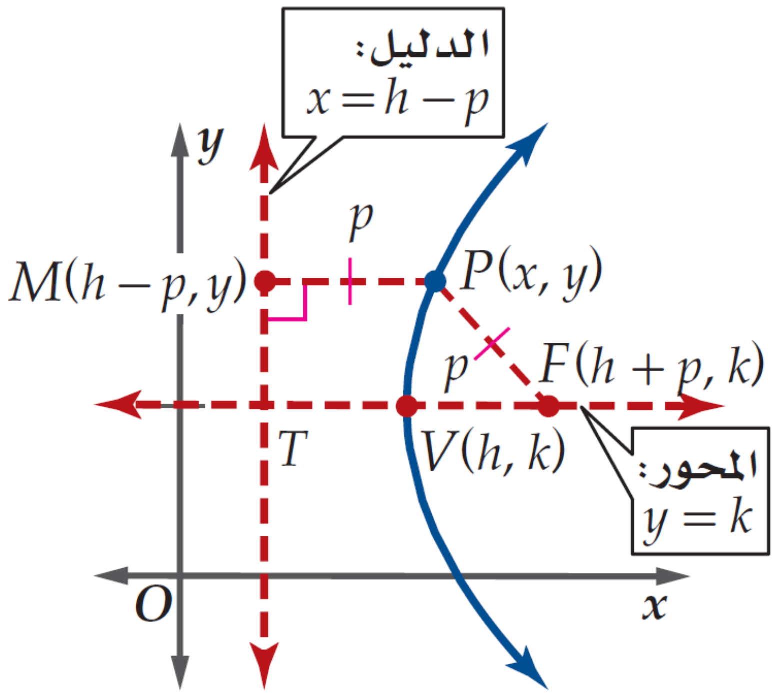
المحل الهندسي هو مجموعة النقاط التي تحقّق خاصية هندسية معينة. القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم يسمّى الدليل.



والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم محور التماثل. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل الرأس، وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل بالوتر البؤري، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

درست سابقاً الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$

والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل، ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ كمحل هندسي؛ لإيجاد المعادلة العامة للقطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل، أو إلى اليمين أو اليسار.



افترض أن P(x, y) نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه V(h, k) وبؤرته F(h+c , k) حيث FV = [c] هو البعد عن الرأس والبؤرة، وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان FV فإن [c] =VT.

نعلم من تعريف القطع المكافئ أن PF = PM. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما ((h – c, y، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين، لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

قانون المسافة بين نقطتين $\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-y)^2}$

بتربيع الطرفين $[x-(h+p)]^2+(y-k)^2 = [x-(h+p)]^2+(y-y)^2$

بفك الأقواس

$$x^2-2x(h+p)+(h+p)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-p)+(h-p)^2$$

بفك الأقواس

$$x^2-2xh-2xp+h^2+2hp+p^2(y-k)^2 = x^2-2xh+2xp+h^2-2hp+p^2$$

بالتبسيط $(y-k)^2 = 4xp-4hp$

بالتحليل $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

أي أن معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

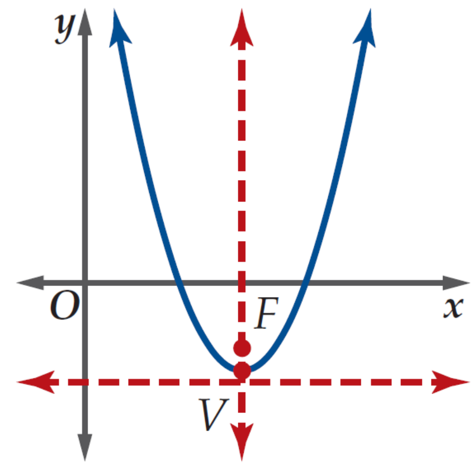
وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $p \neq 0$

وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه .

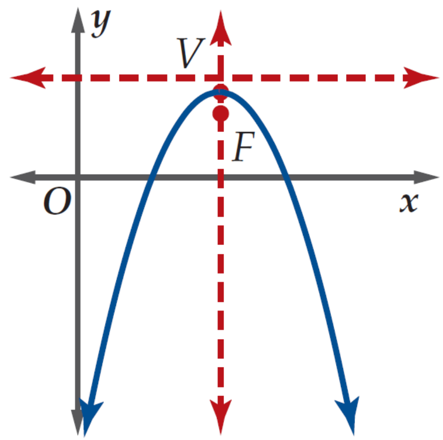
مفهوم أساسي

خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية : $(x-h)^2 = 4p(y-k)$



$p > 0$



$p < 0$

الاتجاه : المنحني مفتوح رأسياً

الاتجاه : (h, k)

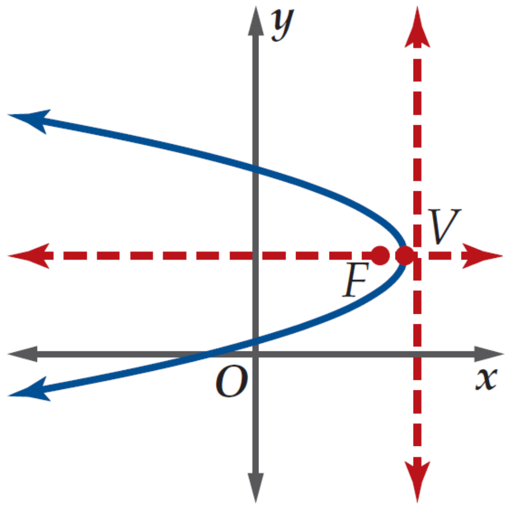
البؤرة : $(h, k+p)$

معادلة محور التماثل : $x = h$

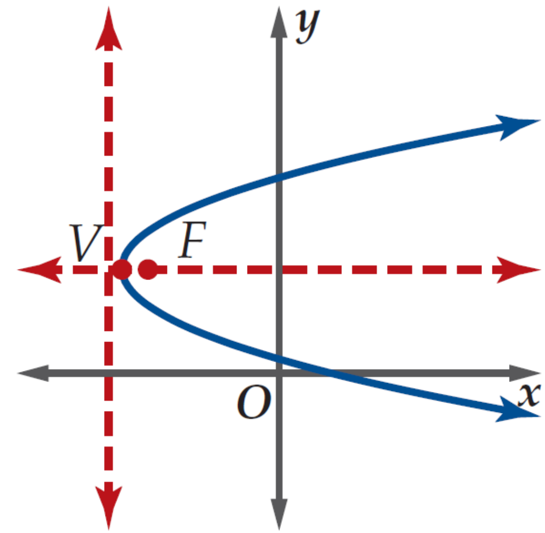
معادلة الدليل : $y = k - p$

طول الوتر البؤري : $|4p|$

المعادلة في الصورة القياسية : $(y-k)^2 = 4p(x-h)$



$p < 0$



$p > 0$

الاتجاه : المنحني مفتوح أفقياً

الاتجاه : (h, k)

البؤرة : $(h+p, k)$

معادلة محور التماثل : $y = k$

معادلة الدليل : $x = h - p$

طول الوتر البؤرى : $|4p|$

مثال 1

تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانياً

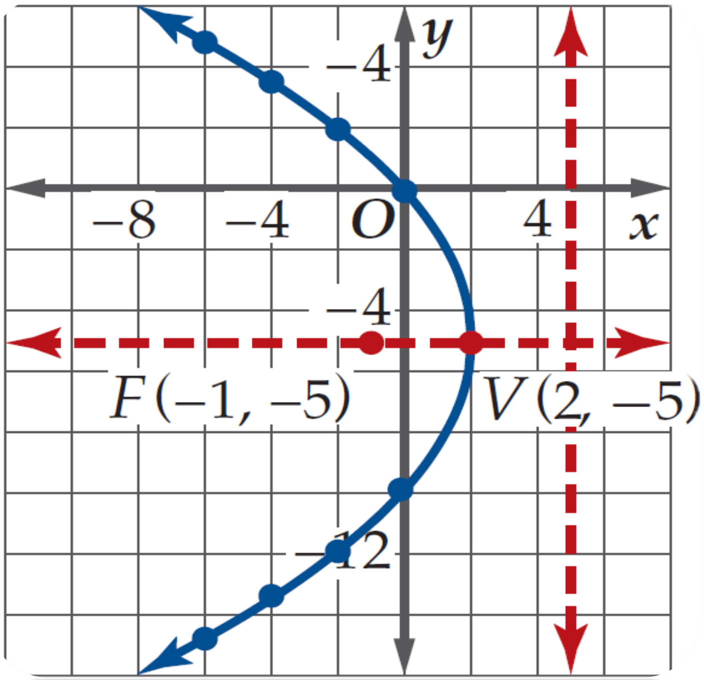
حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$ ثم مثّل منحناه بيانيًّا .

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًّا. وبما أن $4p = -12$

P = -3 ؛ لذا فهو مفتوح إلي اليسار ، و بما إن المعادلة علي صورة $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

لذا فإن $h = 2, k = -5$ استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.



الرأس	$(2,-5)$	$(h\,,k\,)$
الدليل	$x\ =5$	$x\ =h-p$
البؤرة	$(-1,-5)$	$(h+P\,,k\,)$
محور التماثل	$y\ =-5$	$y\ =k$
طول الوتر البؤري	12	$\lvert 4p\rvert$

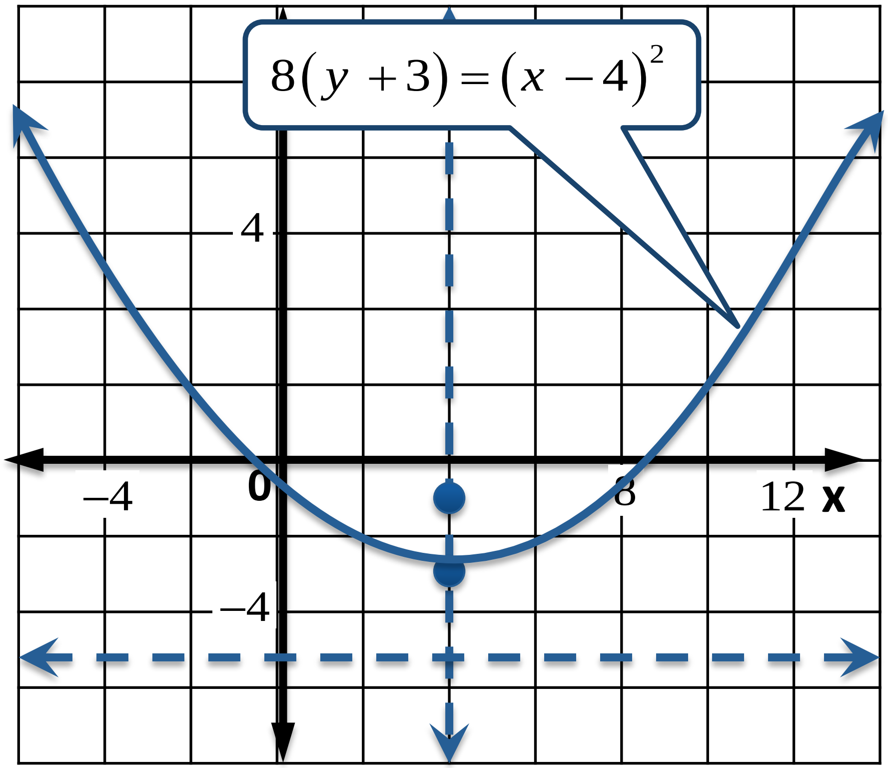
عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري، يجب أن يكون المنحنى متماثلاً حول محور التماثل.

تحقق من فهمك

a) $8(y+3)=(x-4)^2$ المنحني مفتوح رأسياً إلي أعلي

الرأس $(4,-3)$ البؤرة $(4,-1)$

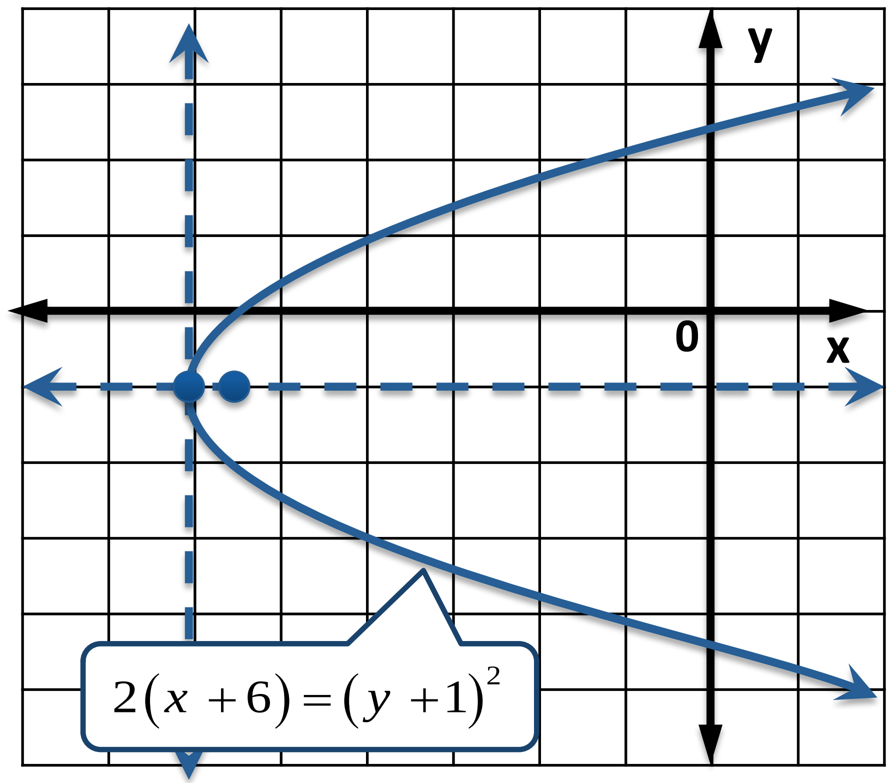
الدليل $y=-5$



(1B $2(x+6)=(y+1)^2$ المنحني مفتوح أفقياً إلي اليمين

الرأس $(-6,-1)$ البؤرة $(-5.5,-1)$

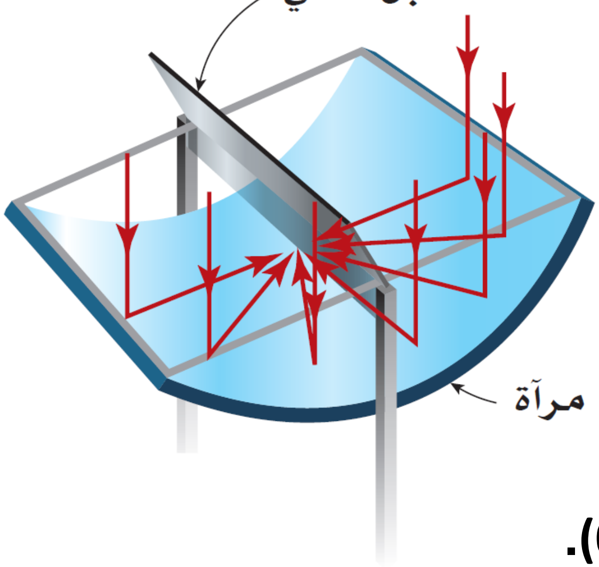
الدليل $x=-6.5$



مثال 2 من واقع الحياة

خصائص القطع المكافئ

طاقة الشمسية : يتكون مجمّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ تعمل علي تركيز أشعة الشمس علي مستقبل خطي يمر في بؤرة القطع و يمكن تمثيل المقطع العرضي للمرآة بالمعادله $X^2 = 3.04y$، حيث x, y بالأمتار، أين يقع المستقبل الخطي في هذا المقطع ؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و p موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k + p)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنَّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c= 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$.

فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

تحقق من نفسك

2) فلك : عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، افترض أنه يمكن تمثيل التلسكوب الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8$ حيث $-5 \le x \le 5$

إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

$11.2\ ft$ فوق الرأس

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

مثال 3

كتابة معادلة القطع المكافئ علي الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y=-\frac{1}{4}x^{2}+3x+6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدّد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًّا .

$$y=-\frac{1}{4}x^{2}+3x+6$$

المعادلة الأصلية

$$y=-\frac{1}{4}\left(x^{2}-12x\right)+6$$

بإخراج $-\frac{1}{4}$ عاملاً مشترك من حدود x

$$y=-\frac{1}{4}\left(x^{2}-12x+36-36\right)+6$$

بإكمال المربع

$$y=-\frac{1}{4}\left(x^{2}-12x+36\right)+9+6$$

$$-\frac{1}{4}(36)=9$$

$$y=-\frac{1}{4}(x-6)^{2}+15$$

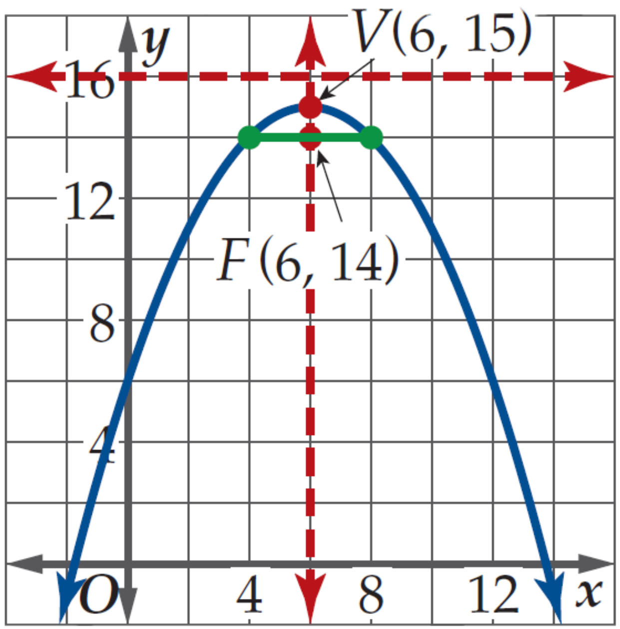
بالتحليل

الصورة القياسية للقطع

$$-4(y-15)=(x-6)^2$$

هذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و c = -1 فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدد خصائصه.

الرأس	$(6,15)$	(h,k)	الدليل	$y=16$	$y=k-p$
البؤرة	$(6,14)$	$(h+P,k)$	محور التماثل	$x=6$	$x=h$
طول الوتر البؤري	4	$\lvert 4p \rvert$			



عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري، يجب أن يكون المنحنى متماثلاً حول محور التماثل.

تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

$x^2 = 4(y+1)$

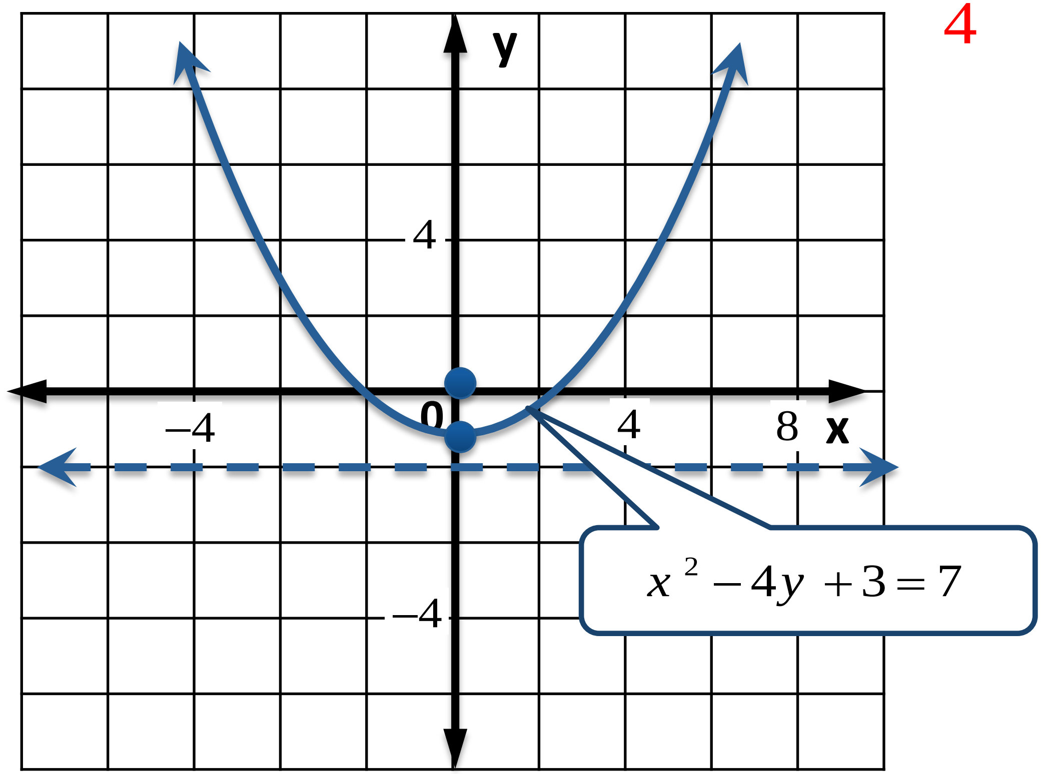
الرأس $(0,-1)$

الدليل $y = -2$

البؤرة $(0,0)$

محور التماثل $x = 0$

طول الوتر البؤري 4



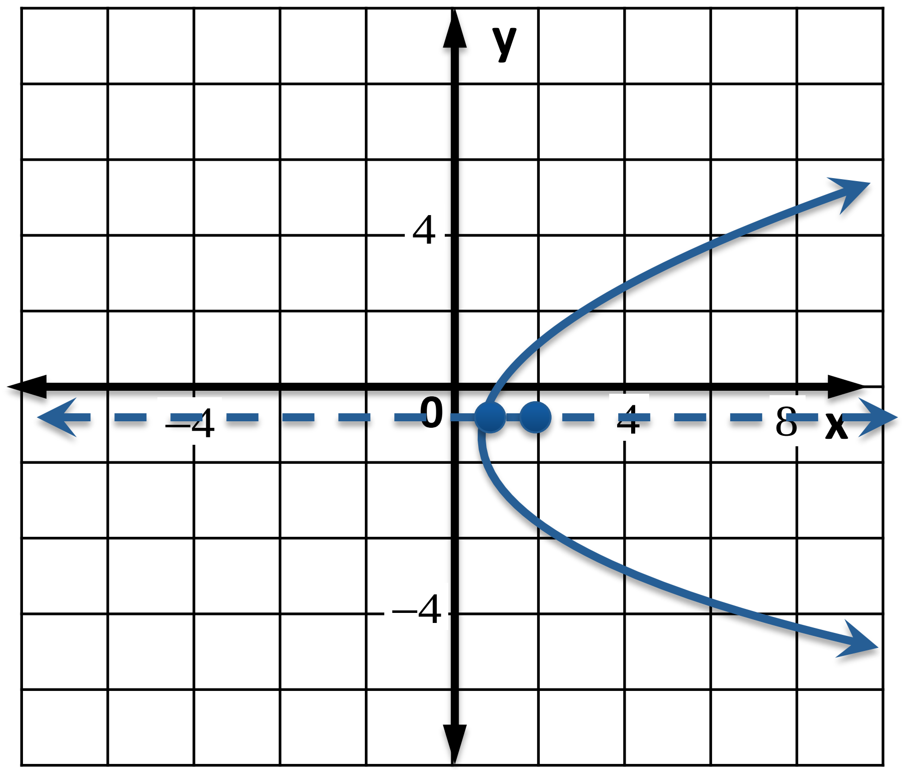
3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

$$(y+1)^2 = 4(x-1)$$

الرأس $(1,-1)$ الدليل $x = 0$

البؤرة $(2,-1)$ محور التماثل $y = -1$

طول الوتر البؤري 4



معادلات القطوع المكافئة : يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال 4

كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقّق الخصائص المعطاة في كل ممّا يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا :

a) البؤرة $(3,-4)$ و الرأس $(1,-4)$

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا، لذا فالبؤرة هي

(h + c, k)، وتكون قيمة c هي 2 = 1 – 3. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين

ويمكنك تحديد اتجاه فتحة المقطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

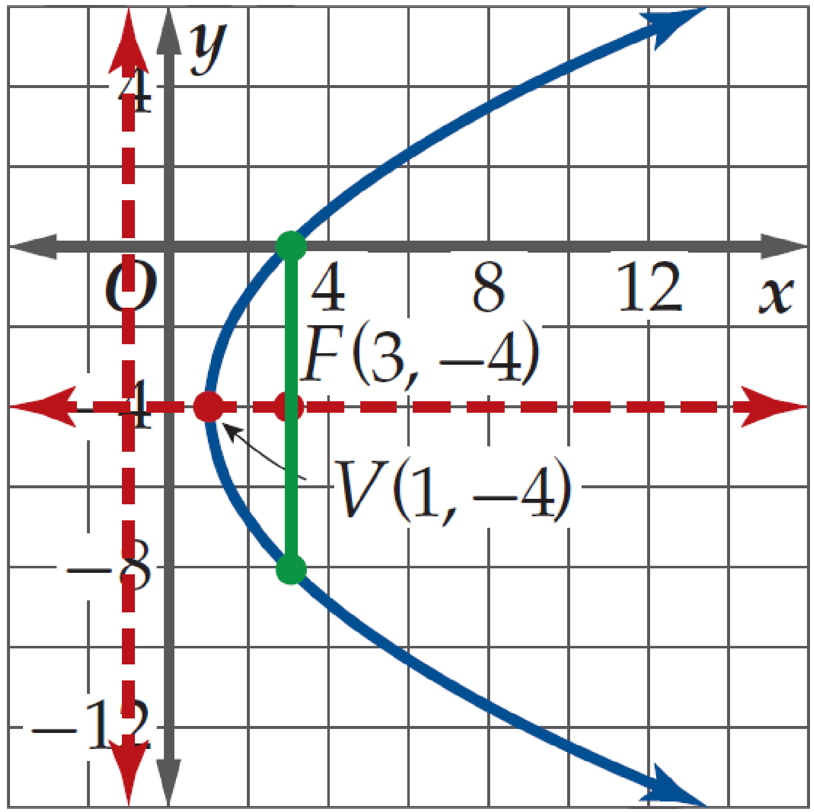
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$ الصورة القياسية

$$(y-(-4))^2=4(2)(x-1)$$ $p=2, h=1, k=-4$

$$(y+4)^2=8(x-1)$$ بالتبسيط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y+4)^2 = 8(x-1)$

مثّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلاً حول محور التماثل.



(b الرأس $(-2, 4)$ و الدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًّا، وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

استعمل معادلة الدليل لتجد c.

$y = k - p$	معادلة الدليل
$1 = 4 - p$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -p$	بطرح 4 من الطرفين
$3 = p$	بقسمة كلا الطرفين علي 1-

عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ .

الصورة القياسية

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$h=-2, k=4, p=3$

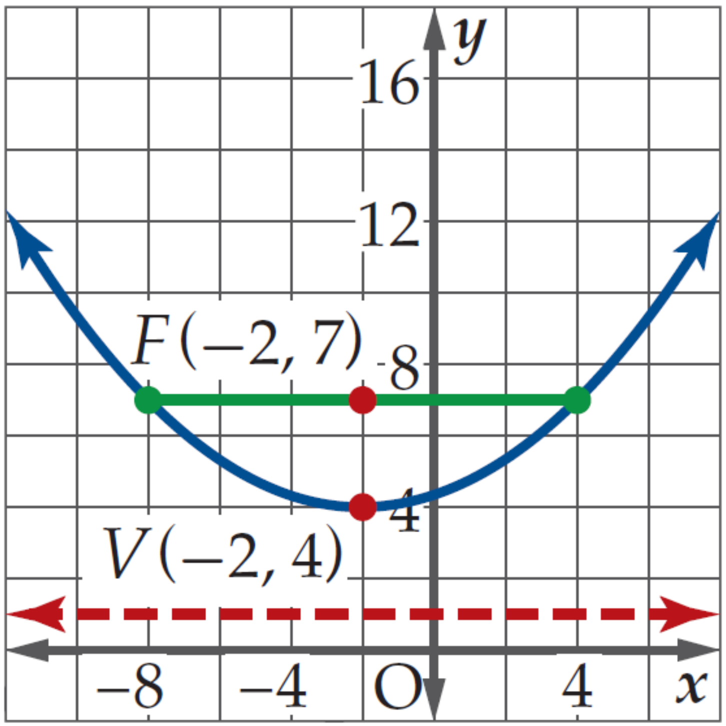
$$(x-(-2))^2 = 4(3)(y-4)$$

بالتبسيط

$$(x+2)^2 = 12(y-4)$$

طول الوتر البؤري يساوي $|4p| = |4\times 3| = 12$

والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.
البؤرة (2 , 1) والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة (2 , 5).



c) البؤرة $(2,1)$ و المنحني مفتوح إلي اليسار و يمر بالنقطة $(2,5)$

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + p , k) = (2, 1)$، والرأس (h, k) هو $(2 - p , 1)$ ؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$ الصورة القياسية

$$(5-1)^2 = 4p\left[2-(2-p)\right]$$ $h=2-p, k=1, y=5$

$$1 = 4p(p)$$ بالتبسيط

$$4 = p^2$$ بالتبسيط

$$\pm 2 = p$$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

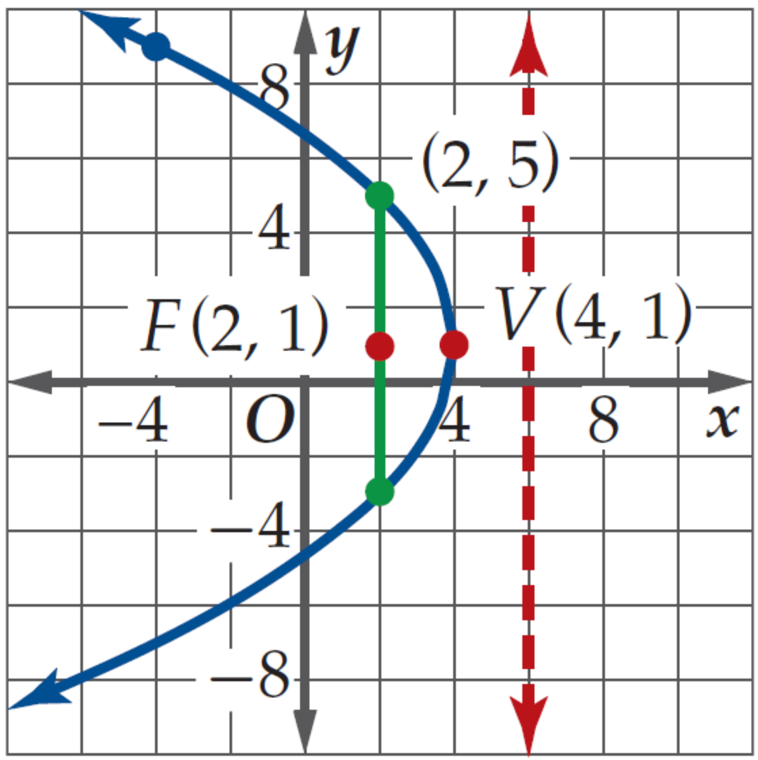
بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $p=-2$

و الرأس هو $(4,1)$

$$(y-1)^2=-8(x-4)$$

طول الوتر البؤري يساوي $|4p|=|4\times(-2)|=8$

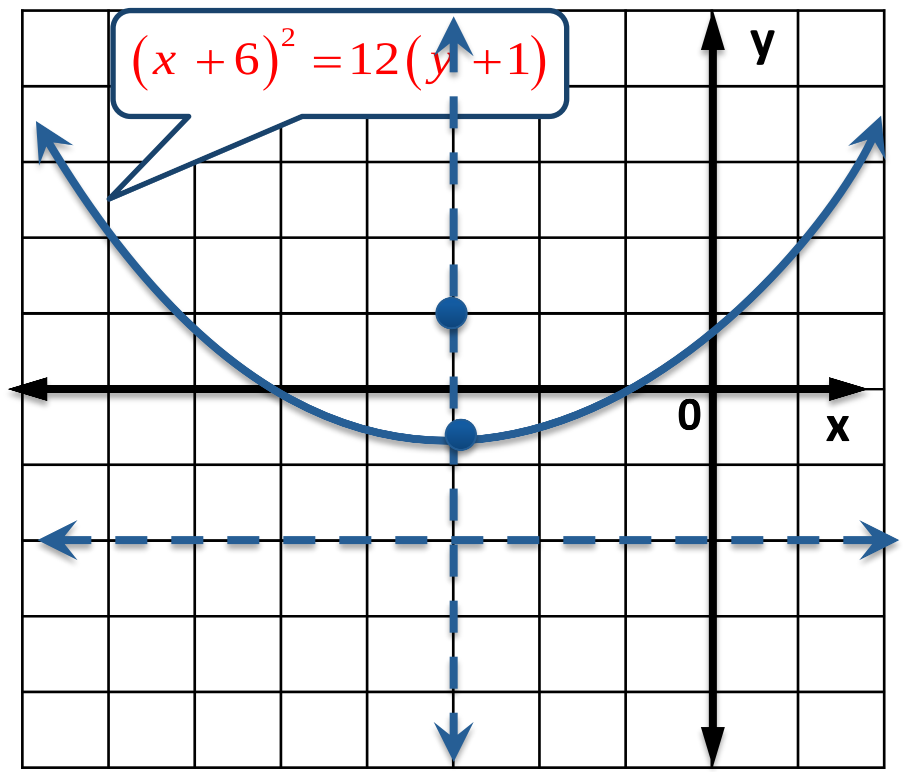
، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

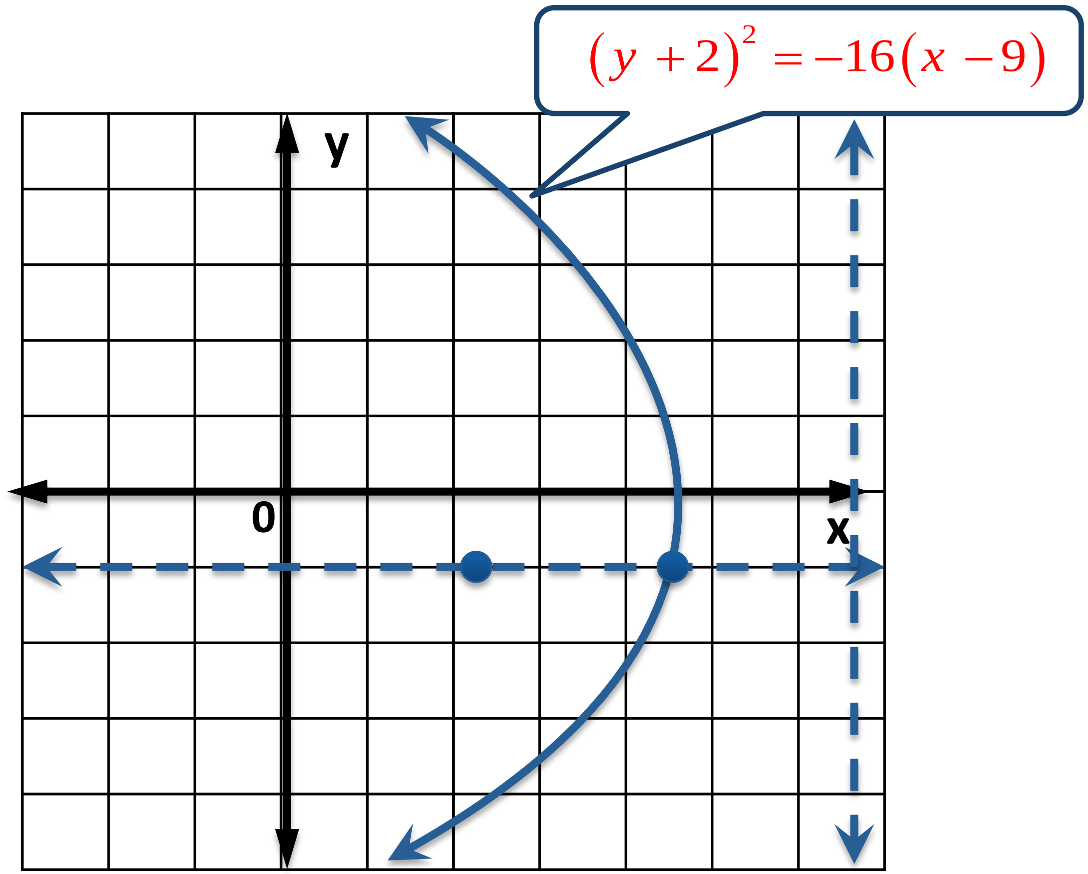
4A) البؤرة $\left(-6,2\right)$ و الرأس $\left(-6,-1\right)$

$$(x+6)^2=12(y+1)$$



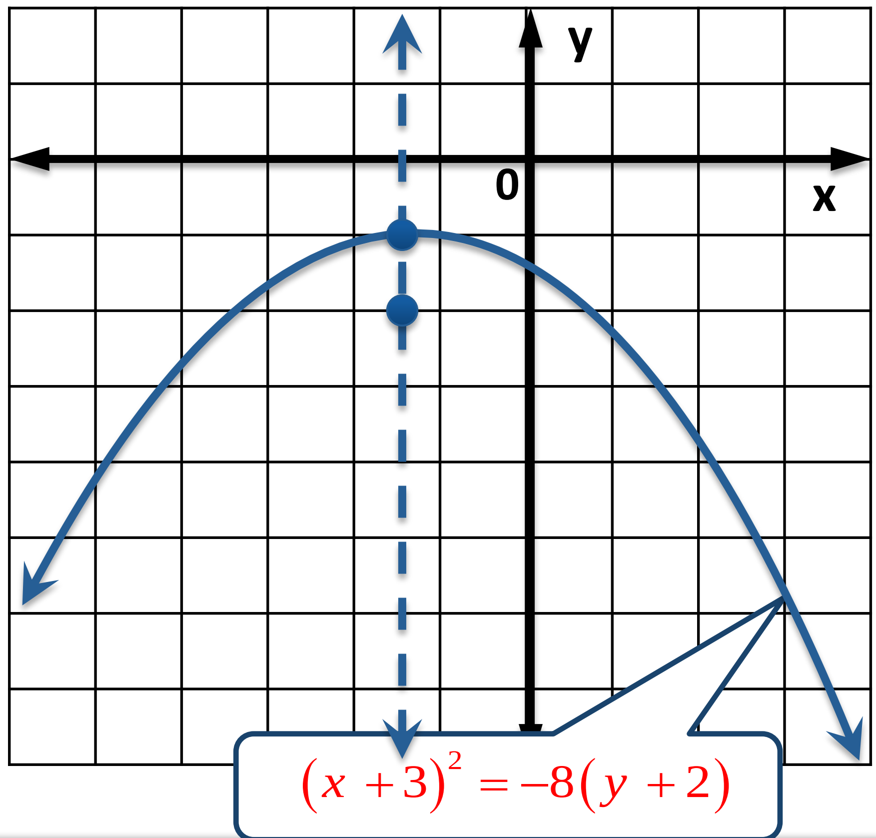
(4B الرأس $(9,-2)$ و الدليل $x=12$

$$(y+2)^2=-16(x-9)$$



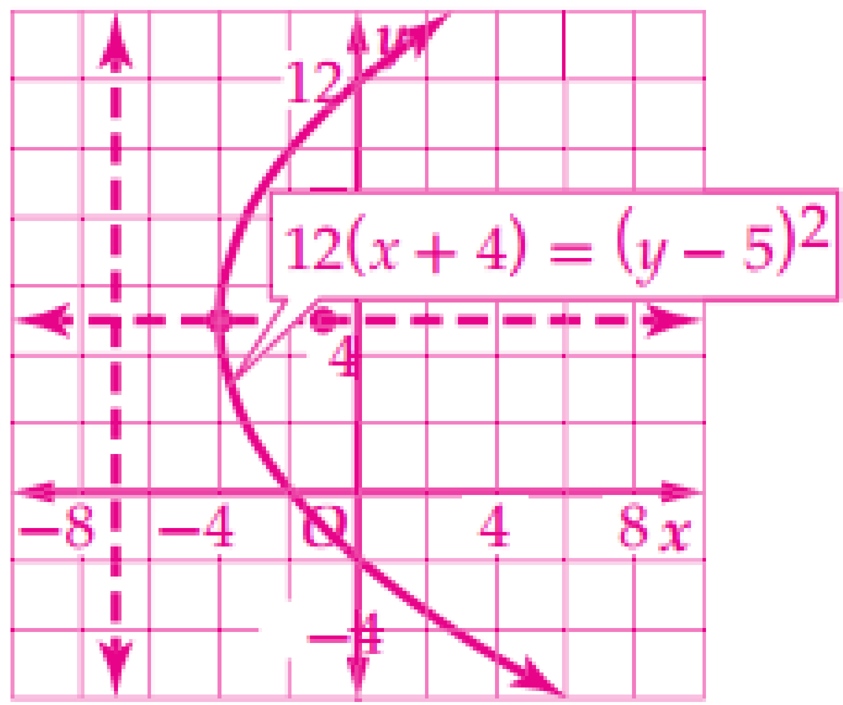
4C) البؤرة $(9,-2)$ و المنحني مفتوح إلي اليسار و يمر بالنقطة $(5,-10)$

$$(x+3)^2=-8(y+2)$$

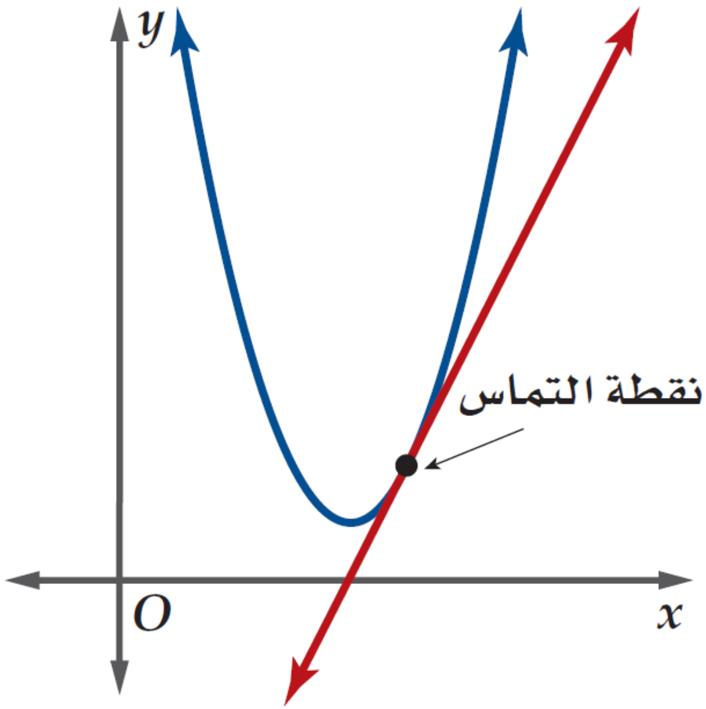


4D) البؤرة ، (-١، ٥) ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة (-٧، ٨).

$$12(x + 4) = (y - 5)^2$$

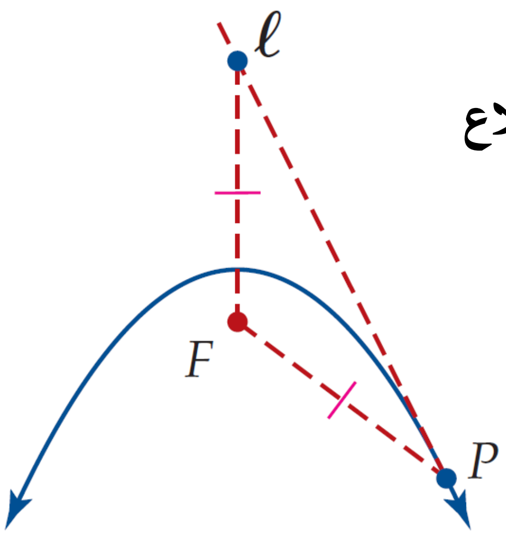


يمكن رسم مماسٍ لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقاً كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل، ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمل التفاضل.



مفهوم أساسي

مماس منحنى القطع المكافئ



مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.

مثال 5

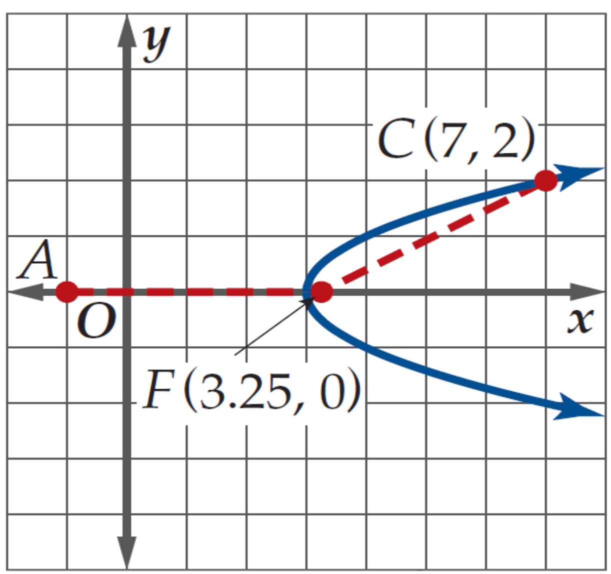
كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

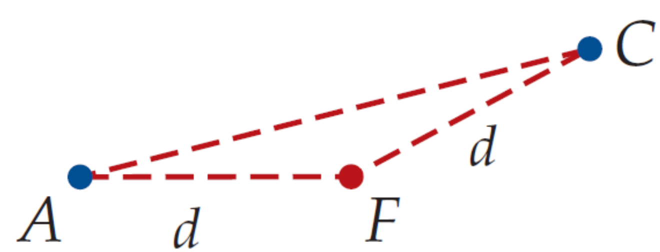
اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $C(7,2)$

المنحنى مفتوح أفقيًّا ، حدد الرأس و البؤرة :

$x = y^2 + 3$	المعادلة الأصلية
$(x-3) = (y-0)^2$	الصورة القياسية

بما أن $4p = 1$ فإن $p = 0.25$ الرأس $(3,0)$ و البؤرة $(3.25,0)$ كما يظهر في الشكلين الآتيين فإننا نحتاج إلي تحديد d ، و هي المسافة بين البؤرة F ، و نقطة التماس C .





و تمثل d أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين :

صيغة المسافة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x_2, y_2) = (7, 2), (x_1, y_1) = (3.25, 0)$$

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$$

بالتبسيط

$$= 4.25$$

استعمل d لنجد النقطة A و هي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين ، و تقع علي محور التماثل .

$$A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1.0)$$

تقع النقطتان A , P على مماس منحنى القطع المكافئ ، أوجد معادلة هذا المماس .

صيغة الميل

$$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4}$$

معادلة المستقيم بمعلومية الميل و النقطة

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$$

$$y-2=\frac{x}{4}-\frac{7}{4}$$ خاصية التوزيع

$$y=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$$ بجمع 2 إلي الطرفين

إذن معادلة المماس لمنحنى $x^2=y^2+3$ عند النقطة $(7,2)$ هي $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$

تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4$ ، $(-1, 8)$

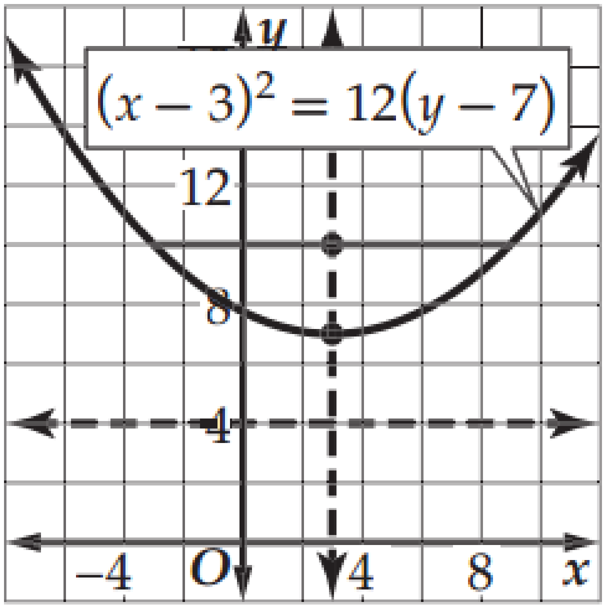
$$y = -8x$$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}$ ، $(1, -4)$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $(x-3)^2 = 12(y-7)$



المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

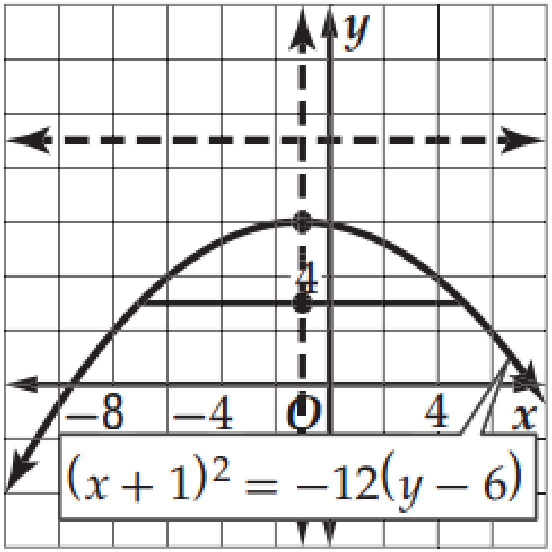
الرأس: $(3,7)$، البؤرة: $(3,10)$،

الدليل: $y=4$

ومحور التماثل: $x=3$

طول الوتر البؤري 12

$(x+1)^2 = -12(y-6)$ **(2**



المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

الرأس: $(-1, 6)$، البؤرة:

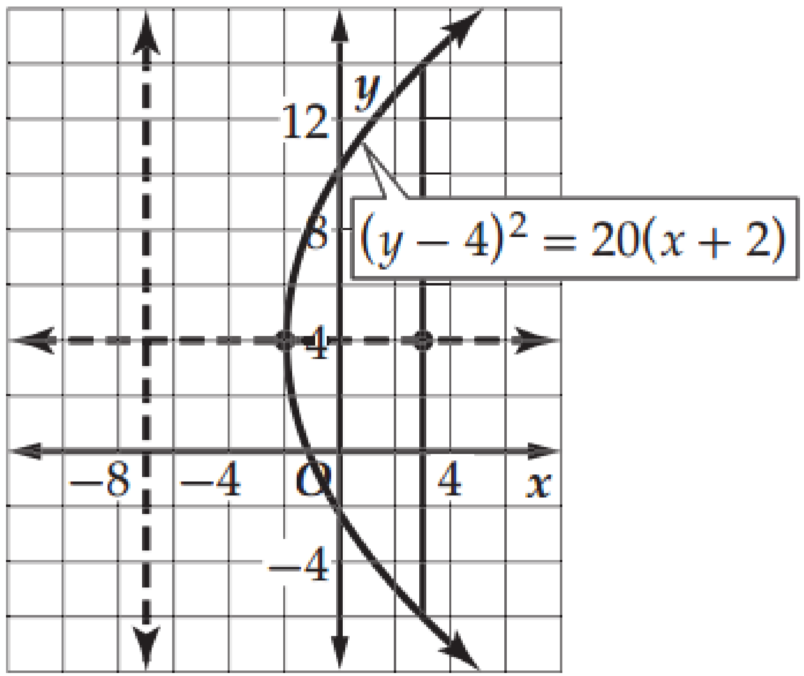
$(-1, 3)$،

الدليل: $y = 9$،

ومحور التماثل: $x = -1$

طول الوتر البؤري 12

3) $(y-4)^2 = 20(x+2)$



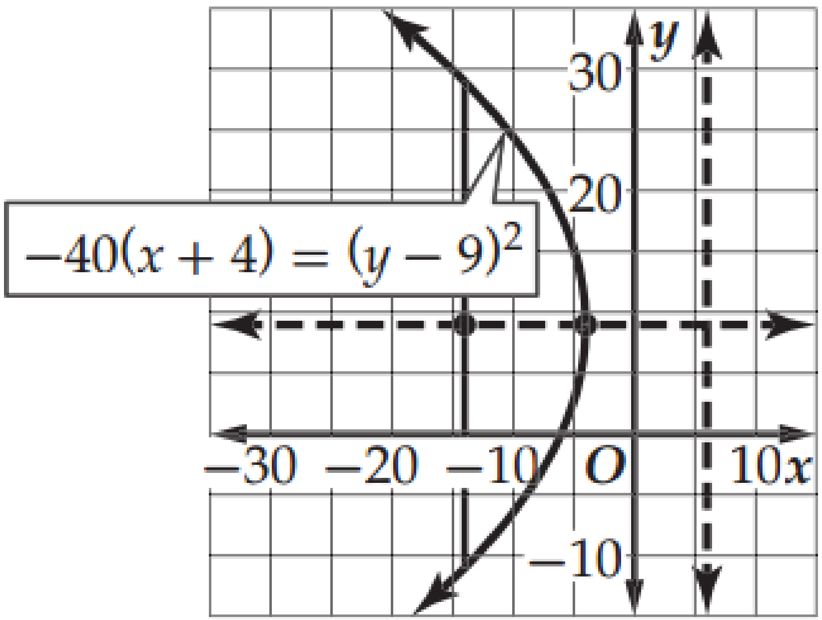
المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

الرأس: $(-2, 4)$، البؤرة: $(3, 4)$، الدليل: $x = -7$

ومحور التماثل: $y = 4$

طول الوتر البؤري 20

$$-40(x+4)=(y-9)^2 \quad \textbf{(4}$$



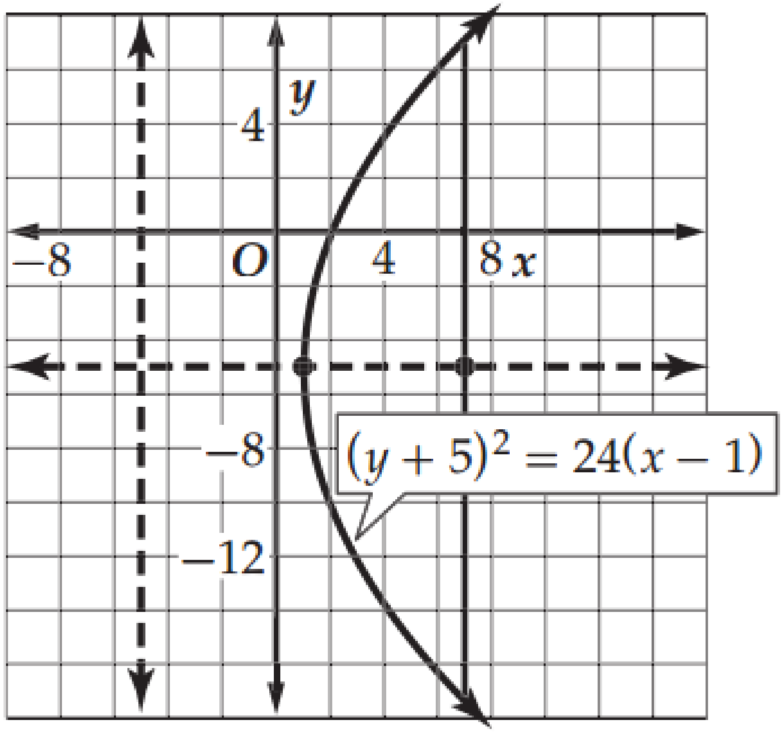
المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليسار

الرأس: $(-4, 9)$، البؤرة: $(-14, 9)$، الدليل: $x = 6$

ومحور التماثل: $y = 9$

طول الوتر البؤري 40

5) $(y+5)^2 = 24(x-1)$



المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

الرأس: $(1, -5)$

البؤرة: $(7, -5)$

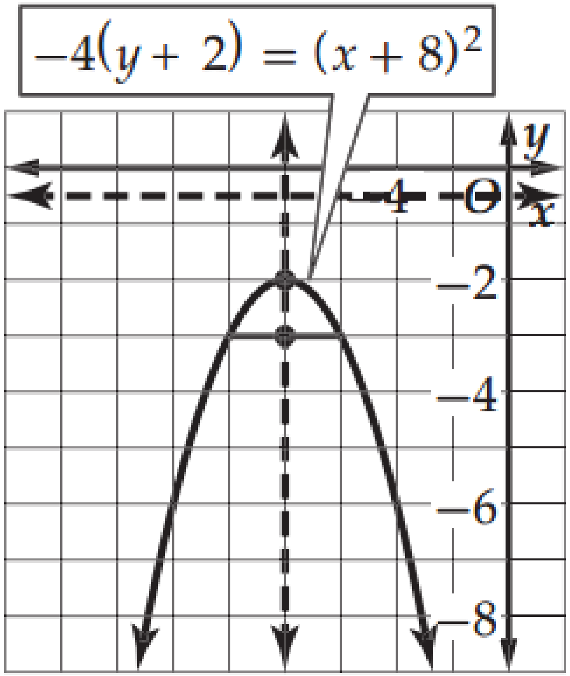
الدليل: $x = -5$

ومحور التماثل:

$y = -5$

طول الوتر البؤري 24

$-4(y+2)=(x+8)^2$ **(6**



المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

الرأس: $(-8,-2)$

البؤرة: $(-8,-3)$

الدليل: $y=-1$

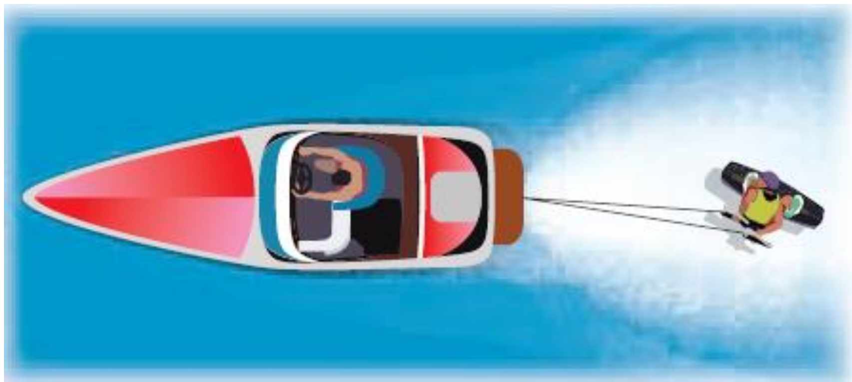
ومحور التماثل: $x=-8$

طول الوتر البؤري 4

$4ft$

7) **لوح تزلُّج:** صمم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y - 2)$ ، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

8) **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج من أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$ ، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية. $(y+5)^2 = 180(x-3)$

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟ $45ft$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّله منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$

$x^2 = 8(y+7)$ ؛

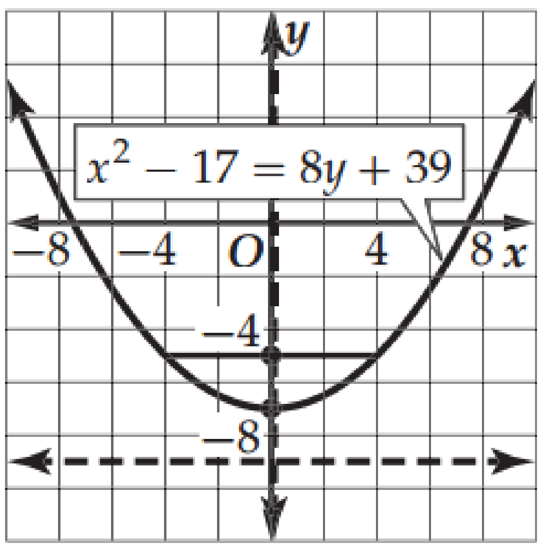
المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

الرأس: $(0, -7)$، البؤرة: $(0, -5)$؛

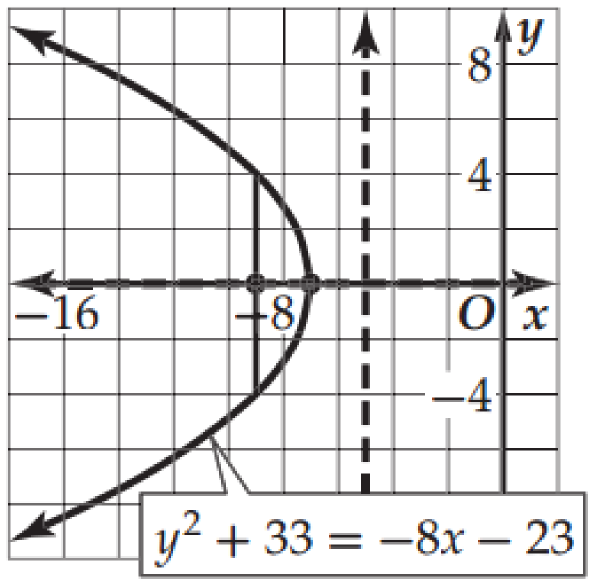
الدليل: $y = -9$

ومحور التماثل: $x = 0$

طول الوتر البؤري 8



$y^2 + 33 = -8x - 23$ **(10**



المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليسار

$y^2 = -8(x+7)$

الرأس: $(-7, 0)$

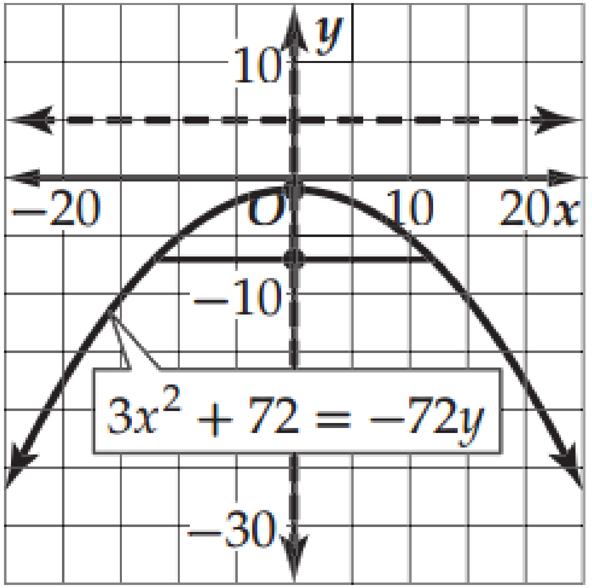
البؤرة: $(-9, 0)$

الدليل: $x = -5$

ومحور التماثل: $y = 0$

طول الوتر البؤري 8

$3x^2 + 72 = -72y$ (11



المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

$x^2 = -24(y + 1)$

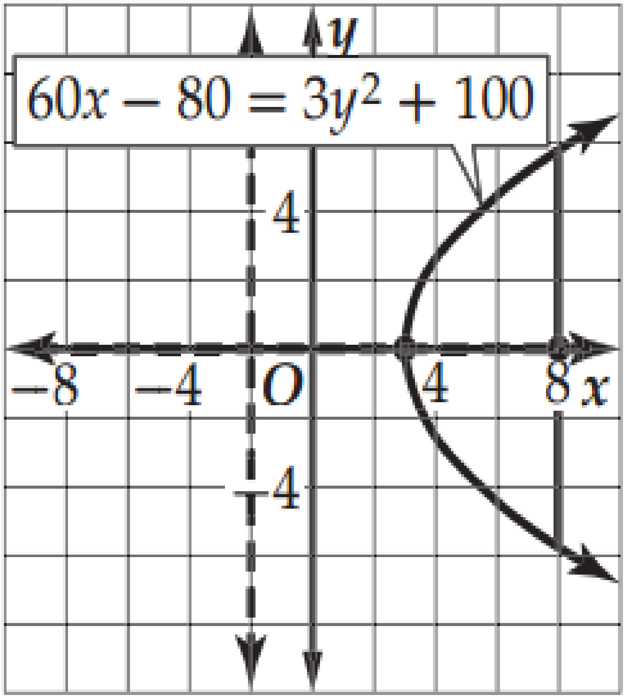
الرأس: $(0, -1)$ البؤرة: $(0, -7)$؛

الدليل: $y = 5$

ومحور التماثل: $x = 0$

طول الوتر البؤري 24

(12 $60x - 80 = 3y^2 + 100$



المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

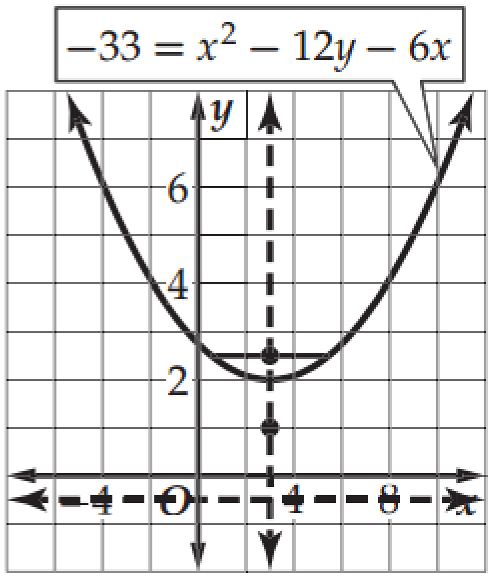
$y^2 = 20(x-3)$ ، الرأس: $(3, 0)$

البؤرة: $(8, 0)$، الدليل: $x = -2$؛

ومحور التماثل: $y = 0$

طول الوتر البؤري 20

$-33 = x^2 - 12y - 6x$ **(13**



المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

$(x-3)^2 = 12(y-2)$

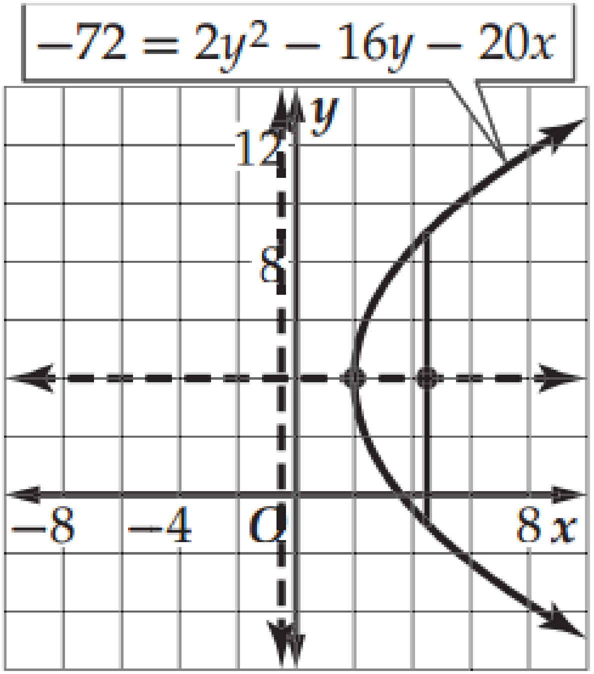
الرأس: $(3, 2)$، البؤرة: $(3, 5)$

الدليل: $y = -1$

ومحور التماثل: $x = 3$

طول الوتر البؤري 12

(14 $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$



المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

$(y-4)^2 = 10(x-2)$

الرأس: $(2, 4)$، البؤرة: $(4.5, 4)$

الدليل: $x = -0.5$

ومحور التماثل: $y = 4$

طول الوتر البؤري 10

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

15) البؤرة $(-9, -7)$ والرأس $(-9, -4)$ $\quad (x+9)^2 = -12(y+4)$

16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$. $\quad (x-3)^2 = 20(y+2)$

17) البؤرة $(2, -1)$ والرأس $(-4, -1)$ $\quad (y+1)^2 = 24(x+4)$

18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$. $\quad (y-4)^2 = 12(x-8)$

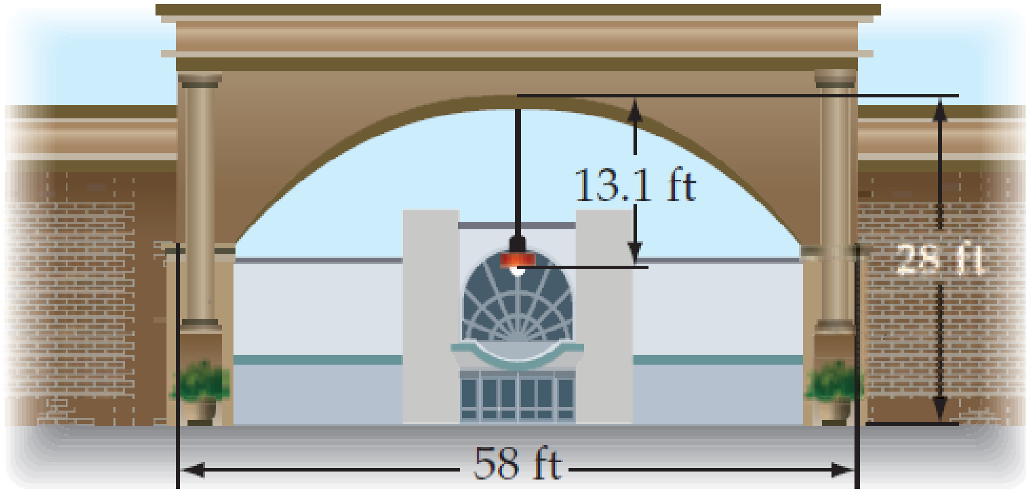
19) البؤرة $(-3, -2)$، والرأس $(1, -2)$ $\quad (y+2)^2 = -16(x-1)$

20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$. $\quad x^2 = -12(y+2)$

21) البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$ $\quad (x+3)^2 = 8(y-2)$

22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات. $\quad (y-2)^2 = 8(x+3)$ أو $(y-2)^2 = -8(x+3)$

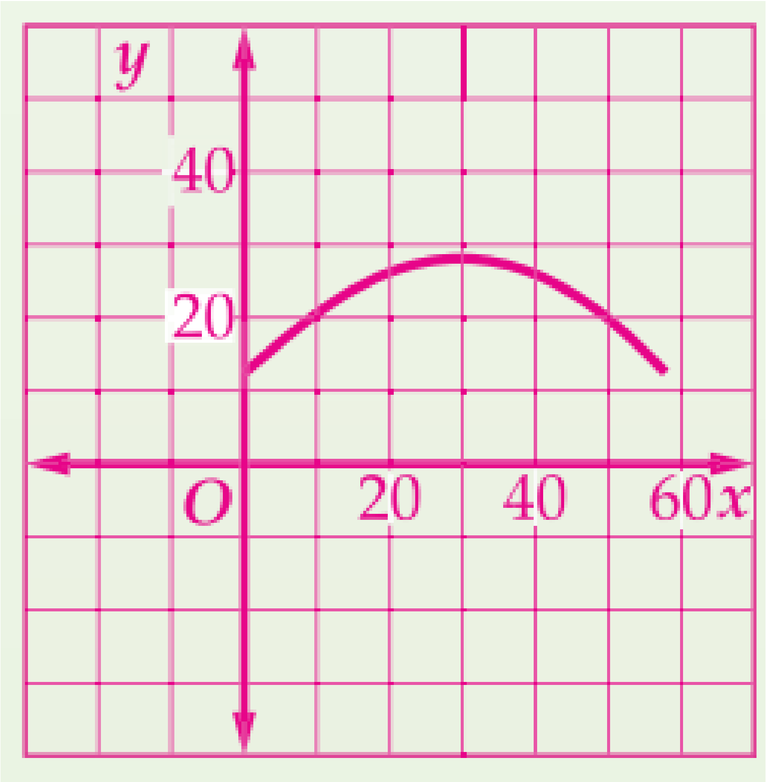
(23 **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



(a اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

$$-52.4(y-28)=(x-29)^2$$

b) مثّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.



اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(24 $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)\,;(-5,-5)$ $\quad$ $y = -8x - 45$

(25 $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)\,;(24\,,2)$ $\quad$ $y = \frac{1}{20}x + \frac{4}{5}$

(26 $(x+6)^2 = 3(y-2)\,;(0\,,14)$ $\quad$ $y = 4x + 14$

(27 $-4x = (y+5)^2;(0,-5)$ $\quad$ $x = 0$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

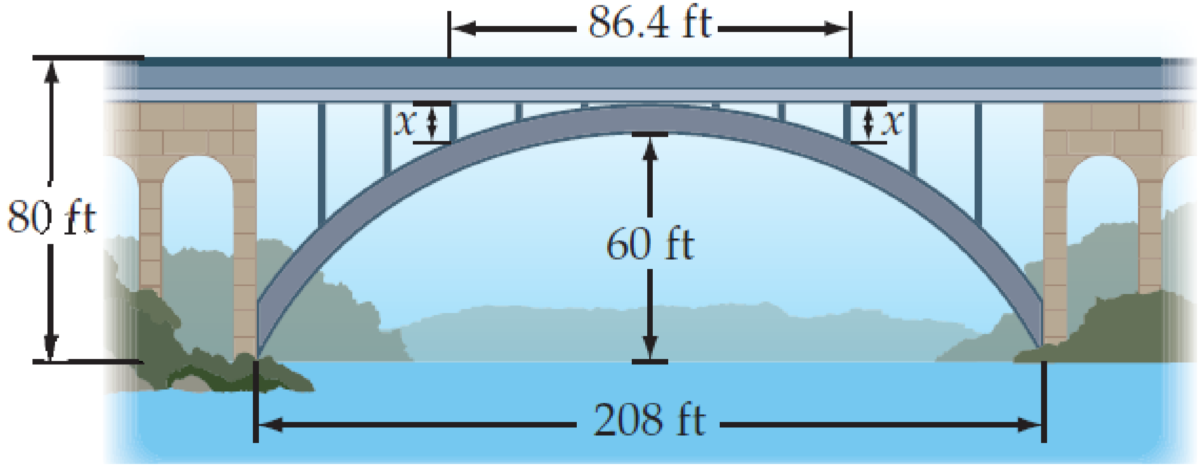
28) الدليل $y = 4$ وَ $c = -2$ — مفتوح إلي أسفل

29) المعادلة هي $y^2 = -8(x - 6)$ — مفتوح إلي اليسار

30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$ — مفتوح إلي أعلي

31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$ — مفتوح إلي اليمين

32) **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

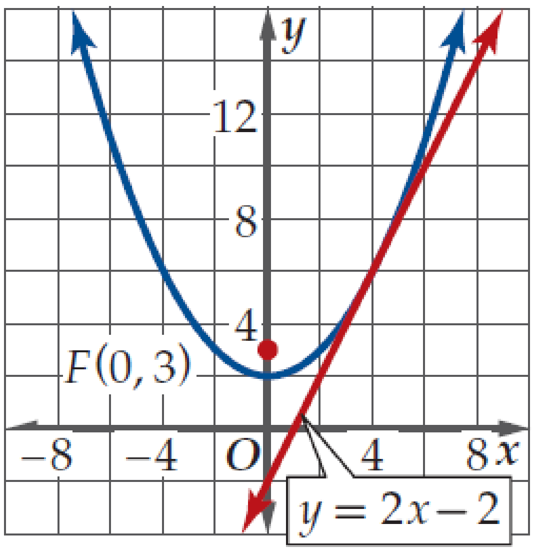


a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثِّل المحور x . إجابة ممكنة: $x^2=-180.27(y+20)$

b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft . **30.35 m تقريبًا**

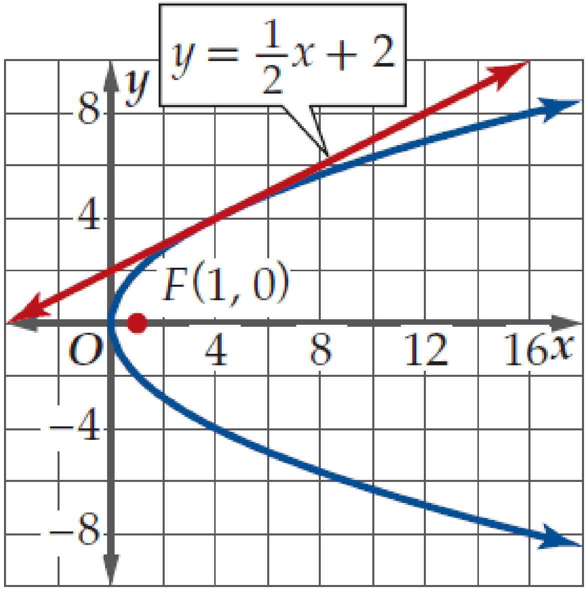
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F ، ويمس المستقيم المعطى منحناه في كل مما يأتي:

(33



إجابة ممكنة: $x^2 = 4(y - 2)$

(34



إجابة ممكنة: $y^2 = 4x$

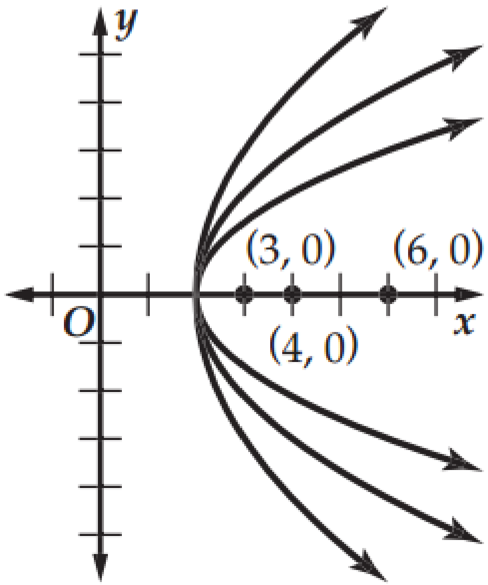
35) **تمثيلات متعددة:** ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

a) **هندسيًّا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2=4(x-2)$ ii) $y^2=8(x-2)$ iii) $y^2=16(x-2)$

وحدة واحدة وحدتين 4 وحدات

b) **بيانيًا:** مثّل منحنى كل قطع مكافئ في فرع a بيانيًّا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيّن بؤرة كل منها.



c) **لفظيًا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

عندما تتحرك البؤرة بعيدًا عن الرأس، يزداد توسع منحنى القطع المكافئ رأسيًّا.

d) **تحليليًّا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا.

اجابة ممكنة: $(x+1)^2 = 4(y+7)$

e) **تحليليًّا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:

$$x^2 = -2(y+1)\,,\ x^2 = -12(y+1)\,,\ x^2 = -5(y+1)$$

ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًّا.

إجابة ممكنة: جميع القطوع المكافئة لها الرأس $(0, -1)$، ومنحنياتها مفتوحة إلى الأسفل. منحنى المعادلة $x^2 = -2(y+1)$ هو الأضيق، في حين أن منحنى المعادلة $x^2 = -12(y+1)$ هو الأوسع.