النوابض المرنة

Scanned by CamScanner

الأول: استنتاج التابع الزمني للمطال (للحركة) !

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

X_{max} (m) : للتحويل $m \xleftarrow{\times 10^{-2}} cm$

الجسم عن وضع توازنه مسافة..... ونتركه دون سرعة ابتدائية:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ v = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = X_{max}$$

...ال صريح بالمسألة (سعة الحركة أو سعة الاهتزاز)

...م على قطعة مستقيمة طولها (المسافة بين الوضعين المتطرفين):

$$X_{max} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة}}{2}$$

v_{max} ومنها نحسب $X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} \Leftarrow v_{max} = \omega_0 X_{max}$

ω_0 ($rad.s^{-1}$) النبض الخاص للحركة :

العلاقة: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\qquad$ m ، K معاليم.

العلاقة: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ $\qquad$ T_0 معلوم.

...ن الزمن بين الوضعين المتطرفين $2\,s$ $\left(\frac{T_0}{2} = 2 \Rightarrow T_0 = 4s\right)$

الجسم 10 هزات خلال $5\,s$ $\left(T_0 = \frac{\text{زمن الهزات}}{\text{عدد الهزات}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}s\right)$

φ (rad): من شروط بدء الحركة: ونميز الحالات التالية:

...بدأ الزمن والجسم في مطاله الأعظمي الموجب(شروط بدء الحركة):

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ X = X_{max} \end{matrix}\right\} \Rightarrow X_{max} = X_{max} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\, rad$$

...بدأ الزمن والجسم في مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ وهو يتحرك بالاتجاه السالب

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ X = \frac{X_{max}}{2} \\ v < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{X_{max}}{2} = X_{max} \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \frac{\pi}{3}\ rad \\ \varphi_2 = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\ rad \end{cases}$$

φ التي تجعل السرعة سالبة $v < 0$: $\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\bar{\varphi})$

$\varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow v < 0$ مقبول

$\varphi = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow v > 0$ مرفوض

Scanned by CamScanner

النواس المرن

c. بفرض مبدأ الزمن والجسم في مركز التوازن وهو يتحرك بالاتجاه السالب:

$$\left.\begin{pmatrix} t=0 \\ X=0 \\ v<0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \quad 0 = X_{max}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}\,rad \qquad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\,rad$$

نختار قيمة φ التي تجعل السرعة سالبة $v<0$:

$$\bar{v} = -\omega_o X_{max}\sin(\bar{\varphi})$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v<0 \quad \text{مقبول}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow v>0 \quad \text{مرفوض}$$

الطلب الثاني: استنتاج الاستطالة السكونية x_o

$$\sum\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \vec{F_{S_0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل: $W - F_{S_0} = 0$

$$W = F_{S_0} \;\dots\dots\dots (1)$$

$$m.g = k.x_0 \Rightarrow x_o = \frac{mg}{K}$$

✓ يستخدم في حال K ، m معاليم.

$$x_o = \frac{mg}{K} \xrightarrow{K=m\omega_0^2} x_o = \frac{g}{\omega_0^2}$$

✓ يستخدم في حال K ، m مجاهيل.

الطلب الثالث: حساب السرعة:

1. حساب السرعة العظمى طويلة : وتحسب بالعلاقة: $v_{max} = \omega_o X_{max}$

حساب كمية الحركة العظمى $P_{max} = m.v_{max} = m.\omega_o X_{max}$

2. حساب السرعة لحظة المرور الأول في وضع التوازن (بدء الحركة من X_{max}

نحسب أولاً زمن المرور الأول بوضع التوازن: $t_1 = \frac{T_0}{4}$ ، ثم نعوض في التابع الزمني للسرعة: $v = (\bar{x})'_t = -\omega_o X_{max}\sin(\omega_o t + \varphi)$

3. حساب السرعة عندما ($X = \cdots$) وتحسب بالعلاقة:

$$\bar{v} = \omega_o\sqrt{X_{max}{}^2 - X^2}$$

الطلب الرابع: حساب التسارع:

وتحسب بالعلاقة: $\bar{a} = -\omega_0^2\bar{x}$ $\quad x\,(m)$ معطاة

الطلب الخامس: حساب قوة الإرجاع (محصلة القوى):

وتحسب بالعلاقة: $\sum\bar{F} = \bar{F} = -K\bar{x}$

إذا طلب شدة قوة الإرجاع (موجب دوماً): $F = |-Kx|$

Scanned by CamScanner

الطلب السادس: حساب الدور الخاص:

ونحسب بإحدى الطرق التالية:

1. من العلاقة: $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ m ، K معاليم.

2. من العلاقة: $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ ω_o معلوم.

الطلب السابع: حساب ثابت صلابة النابض:

1. يحسب بالعلاقة: $K = m\omega_0^2$ $(N.m^{-1})$

2. من العلاقة: $E = \frac{1}{2}K X_{max}^2 \Rightarrow K = \frac{2E}{X_{max}^2}$ $(N.m^{-1})$

3. من العلاقة: $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$ $(N.m^{-1})$

الطلب الثامن: حساب الطاقة:

✓ الطاقة الميكانيكية – الطاقة الكلية : $E = \frac{1}{2}K X_{max}^2$

✓ الطاقة الكامنة المرونية : $E_p = \frac{1}{2}Kx^2$

✓ الطاقة الحركية: $E_k = E - E_p$

الطلب التاسع: تعيين زمن المرور الأول والثاني في وضع التوازن:

1. إذا كانت لحظة بدء الزمن عند X_{max} ($\varphi = 0$ يمكن حسابه مباشرة):

زمن المرور الأول: $t_1 = \frac{T_0}{4}$

زمن المرور الثاني: $t_2 = \frac{3T_0}{4}$

2. إذا لم تكن لحظة بدء الزمن عند X_{max} فيحسب الزمن رياضياً : عند المرور بوضع التوازن يكون $x = 0$ نعوض في تابع المطال.

مثال: $\bar{X} = 8 \times 10^{-2} \times \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$

عند المرور بوضع التوازن $\bar{X} = 0$

$$0 = 8 \times 10^{-2} \times \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) + \pi k$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = +\frac{\pi}{2} + \pi k$$

من أجل المرور الأول: $K = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{3}s$

من أجل المرور الثاني: $K = 1 \Rightarrow t_2 = - - - - s$

ملاحظة: في حال حساب زمن المرور الأول عندما $K = 0$ وكان الناتج (0 أو سالب) نختار $K = 1$ ونعيد حساب (t) $\bar{X} = 8 \times 10^{-2} \times \cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

Scanned by CamScanner

النواسخ الفعلية

الطلب الأول: استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي

$$\theta = \theta_{max}.\cos(\omega_0 . t + \varphi)$$

A. إيجاد (rad) θ_{max} :

1. نزيح النواس عن وضع توازنه بزاوية (...) ونتركه دون سرعة ابتدائية:

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \omega = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \theta_{max}$$

2. نذكر بشكل صريح بالمسألة (السعة الزاوية للحركة).

3. تدير الساق بمقدار :

نصف دورة بالاتجاه الموجب	$\theta_{max} = \theta = +\pi \, rad$
ربع دورة بالاتجاه الموجب	$\theta_{max} = \theta = +\frac{\pi}{2} \, rad$

الزوايا في تقدر بالراديان وتعطى أحياناً بالدرجات يجب تحويلها إلى الراديان:

بالدرجات	30°	45°	60°	90°
بالراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

B. إيجاد ω_0 :

1. من العلاقة: $\omega_o = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$ K و I_Δ معاليم.

2. من العلاقة: $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$ T_o معلوم.

C. إيجاد φ :

نفرض مبدأ الزمن والجسم في مطاله الأعظمي الموجب (شروط بدء الحركة):

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_{max} = \theta_{max}.\cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \, rad$$

<u>حساب عزم عطالة النواس:</u> $I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتل}}$

a. نواس فتل يتألف من ساق فقط كتلتها m :

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + 0 = \frac{1}{12} m\ell^2$$

b. نواس فتل يتألف من ساق مهملة + كتلتين $m_1 = m_2$:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = 0 + I_{\Delta/\text{كتل}} = 2\, m_1 r^2 = 2\, m_1 \frac{\ell^2}{4}$$

c. نواس فتل يتألف من ساق كتلتها m + كتلتين $m_1 = m_2$:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتل}} = \frac{1}{12} m\ell^2 + 2\, m_1 \frac{\ell^2}{4}$$

Scanned by CamScanner

نواس الفتل

الطلب الثاني : حساب السرعة الزاوية:

1. حساب السرعة الزاوية العظمى طويلة: $\omega_{max} = \omega_0 \theta_{max}$
2. حساب السرعة الزاوية لحظة المرور الأول في وضع التوازن (بدء الحركة من θ_{max} حصراً):

✓ نحسب أولاً زمن المرور الأول بوضع التوازن: $t_1 = \frac{T_0}{4}$

✓ ثم نكتب التابع الزمني للسرعة: $\omega = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

✓ نعوض الثوابت في التابع ثم نعوض زمن المرور الأول بوضع التوازن.

الطلب الثالث: حساب التسارع الزاوي عندما ($\theta = \cdots$) :

ويحسب بالعلاقة: $\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \bar{\theta} \quad (rad.s^{-2})$

الطلب الرابع: حساب ثابت فتل السلك:

يحسب من الدور الخاص: $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \overset{\text{نربع}}{\Rightarrow} K \quad (m.N.rad^{-1})$

أو يحسب من النبض الخاص $K = I_\Delta . \omega_0^2$

الطلب الخامس: حساب الدور الخاص:

ويحسب من العلاقة: $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$ K و I_Δ معاليم

الطلب السادس: حساب الطاقة:

✓ الطاقة الميكانيكية – الطاقة الكلية : $E = \frac{1}{2} K \theta_{max}^2$

✓ الطاقة الكامنة المرونية : $E_P = \frac{1}{2} K \theta^2$

✓ الطاقة الحركية: $E_k = E - E_p$

➢ حساب الطاقة الحركية في وضع التوازن: $\theta = 0 \Longrightarrow E_p = 0$

$$E_k = E = \frac{1}{2} K \theta_{max}^2$$

الطلب السابع: حساب الدور الخاص عند تقسيم سلك الفتل إلى قسمين متساويين ثم تعلق الساق بنصفي السلك معاً :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \quad و \quad T_0' = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K'}}$$

$$\frac{T_0}{T_0'} = \sqrt{\frac{K'}{K}} \quad لكن \quad K = K' \frac{(2r)^4}{\ell}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1 = \frac{1}{2}\ell \Rightarrow K_1 = 2K \\ \ell_2 = \frac{1}{2}\ell \Rightarrow K_2 = 2K \end{array}\right\} \Rightarrow K' = K_1 + K_2 = 4K$$

$$\frac{T_0}{T_0'} = \sqrt{\frac{K'}{K}} = \sqrt{\frac{4K}{K}} = 2 \Rightarrow T_0' = \frac{1}{2} T_0$$

Scanned by CamScanner

الطلب الثامن: حساب الدور الخاص عند تغير طول سلك الفتل (بجعل طول سلك الفتل ربع ما كان عليه):

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \quad \text{و} \quad T'_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K'}}$$

$$\frac{T_o}{T'_o} = \sqrt{\frac{K'}{K}} \quad \text{لكن} \quad K = K'\frac{(2r)^4}{\ell}$$

$$\frac{T_o}{T'_o} = \sqrt{\frac{\ell}{\ell'}} = \sqrt{\frac{\ell}{\frac{1}{4}\ell}} = 2 \quad \Rightarrow \quad T'_o = \frac{1}{2}T_o$$

الطلب التاسع: حساب الدور الخاص عند تثبيت كتلتين نقطيتين $m_1 = m_2$ على طرفي الساق:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{ساق}}}{K}} \quad , \quad T'_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{K}}$$

$$\frac{T_o}{T'_o} = \sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{ساق}}}{I_{\Delta/\text{جملة}}}}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \underbrace{I_{\Delta/\text{ساق}}}_{\text{يعطى بنص المسألة}} + I_{\Delta/\text{كتل}}$$

لكن دوماً $r_1 = r_2 = \frac{\ell}{2}$ ، $m_1 = m_2$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + 2\,m_1 r^2 = 2\,m_1\frac{\ell^2}{4}$$

نحسب $I_{\Delta/\text{جملة}}$ ثم نعوض.

الطلب العاشر: حساب طول الساق – كتلة الساق – الكتل المعلقة:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{ساق}}}{K}}$$

- في حال كان نواس الفتل مؤلف من ساق فقط نعوض:

$$I_{\Delta/\text{ساق}} = \frac{1}{12}m\ell^2$$

- في حال كان نواس الفتل مؤلف من كتل فقط نعوض:

$$I_{\Delta/\text{كتل}} = 2\,m_1 r^2 = 2\,m_1\frac{\ell^2}{4}$$

- مدرسو المادة -

Scanned by CamScanner

البندول البسيط

الطلب الأول: حساب الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط:

A. من أجل سعات زاوية صغيرة: $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

B. من أجل سعات زاوية كبيرة $\underbrace{T'_o}_{\text{سعة كبيرة}} \approx \underbrace{T_o}_{\text{سعة صغيرة}} \left(1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right)$

حالات السعة الزاوية كبيرة (بفرض $T_o = 2\ s$):

$\theta_{max} = 0.4\ rad \Rightarrow T'_o = 2.02\ s$ ✓

(60°) $\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad \Rightarrow T'_o = 2.14\ s$ ✓

(90°) $\theta_{max} = \frac{\pi}{2} rad \Rightarrow T'_o = 2.3\ s$ ✓

الطلب الثاني: استنتاج السرعة الخطية لكرة النواس عند الشاقول:

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: عند ترك الكرة دون سرعة ابتدائية: $\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$

الثاني: عند مروره بالشاقول: $\theta = 0$

$$\overline{\Delta E_k} = \Sigma\, \overline{w}_{\vec{F}\,(1\to 2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \overline{w}_{\vec{w}} + \overline{w}_{\vec{T}}$$

$E_{K_1} = 0$: ترك الكرة دون سرعة ابتدائية.

$\overline{w}_{\vec{T}} = 0$: لإن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة.

$$E_{K_2} = W_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2} m.v^2 = m.g.h$$

لكن $h = \ell(1 - \cos\theta_{max})$

$$v = \sqrt{2g.\ell(1 - cos\ \theta_{max})}$$

الطلب الثالث: استنتاج قوة توتر الخيط $\vec{T}$ عند المرور بالشاقول

الجملة المدروسة: كرة

القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{w}$: قوة ثقل الساق

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي: $\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على الناظم: $-w + T = m.a_c \Rightarrow T = m.g + m.a_c$

لكن $a_c = \frac{v^2}{r}$ $\quad T = m(g + \frac{v^2}{\ell})$

في حال استنتاج قوة توتر الخيط عند زاوية ما تصبح العلاقة:

$$T = m(g.cos\theta + \frac{v^2}{\ell})$$

Scanned by CamScanner

النواس الثقلي البسيط

الطلب الرابع: استنتاج التسارع المماسي لكرة النواس عندما يصنع الخيط زاوية $\theta = 30°$:

جملة المقارنة: خارجية

الجملة المدروسة: كرة

القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{w}$: قوة ثقل الساق

$\vec{T}$: قوة توتر الخيط

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي: $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على المماس: $m.g\sin\theta + 0 = m.a_t \Rightarrow a_t = g.\sin\theta$

لحساب التسارع الزاوي للنواس عند الزاوية السابقة θ:

$$a_t = \alpha \times r \overset{r=\ell}{\Longrightarrow} \alpha = \frac{a_t}{\ell}$$

اختيار من متعدد:

1. نواس ثقلي بسيط طوله L دوره الخاص T_0 نجعل طوله ربع ما كان عليه فيصبح دوره الخاص T_0' :

$T_0' = \frac{T_0}{4}$ .a	$T_0' = 2T_0$ .b	$T_0' = \frac{T_0}{2}$ .c	$T_0' = 4T_0$ .d

2. نواس ثقلي طوله خيطه L ودوره الخاص T_0 من أجل السعات الزاوية الصغيرة نجعل طول خيطه $L' = 4L$ فيصبح دوره :

$T_0' = 2T_0$ .a	$T_0' = \frac{T_0}{4}$ .b	$T_0' = 4T_0$ .c	$T_0' = T_0$ .d

3. التوتر في خيط النواس الثقلي البسيط أعظمي عندما θ تساوي :

$+\theta_{max}$ .a	$-\theta_{max}$ .b	$\frac{+\theta_{max}}{2}$ .c	0 .d

4. نواس ثقلي بسيط غير متخامد دوره الخاص من أجل النواسات صغيرة السعة الزاوية 2s ننقص طوله ليصبح ربع ما كان عليه فيصبح دوره الخاص :

2s .a	1s .b	4s .c	0.5s .d

5. نواس ثقلي بسيط ينقل من موضع عند سطح البحر إلى قمة جبل فإن T_0 :

a. لا يتغير	b. يزداد	c. ينقص	d. لا شيء مما سبق

6. نواس ثقلي طوله l وكتلة كرته النقطية m ودوره الخاص T_0 من أجل السعات الصغيرة نجعل كل من (m , l) نصف ما كانت عليه فيصبح دوره T_0' يساوي:

$T_0' = \sqrt{2}\,T_0$ .a	$T_0' = \frac{T_0}{2}$ .b	$T_0' = T_0$ .c	$T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ .d

Scanned by CamScanner

والنواسخ المركبة

Scanned by CamScanner

الطلب الأول: حساب الدور الخاص للنواس الثقلي المركب:

1) من أجل سعات زاوية صغيرة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

2) من أجل سعات زاوية كبيرة $\underbrace{T'_o}_{\text{سعة كبيرة}} \approx \underbrace{T_o}_{\text{سعة صغيرة}} \left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$

حالات السعة الزاوية كبيرة (بفرض $T_o = 2\,s$):

$\theta_{max} = 0.4\,rad \Rightarrow T'_o = 2.02\,s$

(60°) $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad \Rightarrow T'_o = 2.14\,s$

(90°) $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}rad \Rightarrow T'_o = 2.3\,s$

الطلب الثاني: حساب طول النواس البسيط المواقت للنواس الثقلي المركب:

$T_{0_{\text{مركب}}} = T_{0_{\text{بسيط}}} \Rightarrow 1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ $1 = 40\frac{\ell}{g} \Rightarrow \ell = \frac{1}{4}\,m$	$=2$ $T_{0_{\text{مركب}}} = T_{0_{\text{بسيط}}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ $4 = 40\frac{\ell}{g} \Rightarrow \ell = 1\,m$

الطلب الثالث: استنتاج السرعة الزاوية للنواس عند المرور بالشاقول:

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: لحظة الترك دون سرعة ابتدائية: $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$

الثاني: لحظة المرور بالشاقول: $\theta = 0$

$$\overline{\Delta E_k} = \Sigma \overline{w}_{\vec{F}\,(1\to2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \overline{w}_{\vec{w}} + \overline{w}_{\vec{R}}$$

$E_{K_1} = 0$ ترك دون سرعة ابتدائية.

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثيرها لا تنتقل.

$$E_{K_2} = W_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2}I_\Delta.\omega^2 = m.gh$$

$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

Scanned by CamScanner

النواس الثقلي المركب

الحالة الأولى ساق أو قرص دون كتل.

محور الدوران لا يمر من مركز الثقل C :

المسألة بالكامل رموز

m $\quad I_\Delta \quad$ $d = OC$

$$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + m.d^2$$ البعد بين محور الدوران ومركز الثقل(نظرة)

1. ساق طولها ($\ell = \frac{3}{2}m$) تنوس حول محور مار من طرفها العلوي :(ساق $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m\ell^2$)

- $d = \frac{\ell}{2}$
- $I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + m.d^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4}$

$$I_{\Delta/o} = \frac{1}{12} m\ell^2 + \frac{3}{12} m\ell^2 = \frac{4}{12} m\ell^2 \implies I_{\Delta/o} = \frac{1}{3} m\ell^2$$

- $m = m$ ساق

2. ساق طولها ($\ell = \frac{3}{2}m$) تنوس حول محور يبعد مسافة ($\frac{\ell}{6}$)عن مركز ثقلها (ساق $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m\ell^2$):

- $d = \frac{\ell}{6}$
- $I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + m.d^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{36}$

$$I_{\Delta/o} = \frac{3}{36} m\ell^2 + \frac{1}{36} m\ell^2 = \frac{4}{36} m\ell^2 \implies I_{\Delta/o} = \frac{1}{9} m\ell^2$$

- $m = m$ ساق

3. قرص نصف قطره ($r = \frac{1}{6}m$) ينوس حول مار من محيطه :(قرص $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} mr^2$)

- $d = r$
- $I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + m.d^2 = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$
- $m = m$ قرص

الحالة الثانية: ساق أو قرص مع كتل:

محور الدوران يمر من مركز الثقل C أو محور الدوران لا يمر من مركز الثقل C لكن الساق مهملة:

m $\quad I_\Delta \quad$ $d = OC$

قانون $$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتلة}}$$

$I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m\ell^2$ $\quad$ 0 مهملة

Scanned by CamScanner

1. ساق مهملة طولها ($1m$) تنوس حول محور مار من منتصفها ، بطرفها العلوي ($m_1 = 0.2\,Kg$) و بطرفها السفلي ($m_2 = 0.6\,Kg$)

$$\succ d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{+m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 + m_2} = \frac{0.6\left(\frac{1}{2}\right) - 0.2\left(\frac{1}{2}\right)}{0.6+0.2} = \frac{0.3-0.1}{0.8} = \frac{1}{4}m$$

$$\succ I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتلة}} = 0 + m_1 . r_1^2 + m_2 . r_2^2$$

$$= 0.2\left(\frac{1}{4}\right) + 0.6\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{0.2+0.6}{4} = 0.2\,Kg.m^2$$

$$\succ m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2 = 0.6 + 0.2 = 0.8\,Kg$$

✓ حساب السرعة الخطية لمركز الثقل (مركز العطالة): $v_c = \omega . d$

✓ حساب السرعة الخطية للكتلة الأولى m_1 : $v_{m_1} = \omega . r_1$

2. ساق طولها $(\ell = 1m)$ كتلتها $(3\,Kg)$ تنوس حول محور مار من منتصفها نعلق بطرفها السفلي كتلة $(m' = 1\,Kg)$ $\left(I_{\Delta/C\,\text{ساق}} = \frac{1}{12} m\ell^2\right)$

$$\succ d = \frac{m'r'}{m'+m} = \frac{1\left(\frac{1}{2}\right)}{1+3} = \frac{\frac{1}{2}}{4} \Rightarrow d = \frac{1}{8}m$$

$$\succ I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتلة}} = \frac{1}{12} m\ell^2 + m'r'^2$$

$$= \frac{1}{12}(3)(1)^2 + 1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} Kg.m^2$$

$$\succ m_{\text{جملة}} = m_{\text{ساق}} + m' = 3 + 1 = 4\,Kg$$

3. قرص نصف قطره $\left(r = \frac{2}{3}m\right)$ كتلته (m) ينوس حول مار من مركزه نعلق أسفل القرص كتلة $(m' = m)$ $\left(I_{\Delta/C\,\text{قرص}} = \frac{1}{2} mr^2\right)$:

$$\succ d = \frac{m'r'}{m'+m} = \frac{mr}{2m} = \frac{r}{2}$$

$$\succ I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{قرص}} + I_{\Delta/\text{كتلة}} = \frac{1}{2} mr^2 + m'r'^2$$

$$= \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

$$\succ m_{\text{جملة}} = m_{\text{قرص}} + m_{\text{كتلة}} = 2m$$

4. ساق مهملة الكتلة طولها ($1m$) تنوس حول محور يبعد $(20\,cm)$ عن النهاية العلوية ($m_1 = 0.4\,Kg$) وبطرفها السفلي ($m_2 = 0.6\,Kg$)

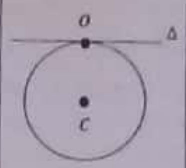
$$\succ d = \frac{+m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 + m_2} = \frac{0.6(0.8) - 0.4(0.2)}{0.6+0.4} = \frac{0.48-0.08}{1} = 0.4m$$

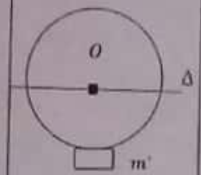
$$\succ I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتلة}} = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

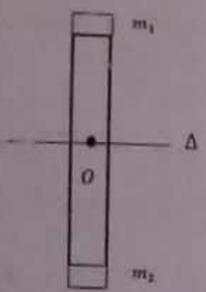
$$= (4 \times 10^{-1})(4 \times 10^{-2}) + (6 \times 10^{-1})(64 \times 10^{-2}) = 4 \times 10^{-1}\,Kg.m^2$$

$$\succ m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2 = 0.6 + 0.4 = 1\,Kg$$

Scanned by CamScanner

الحالة الأولى		
الحالة	حالة ساق فقط	حالة قرص فقط
الشكل		
الكتلة m	الكتلة عادة لا تعط لأنها تختصر	
d البعد بين محور الدوران ومركز العطالة	$d = \frac{\ell}{2}$	$d = r$
	ويمكن ذكر غير ذلك في نص المسألة	
عزم العطالة I_Δ	نطبق نظرية هايجنز $I_{\Delta/o} = I_{\Delta/c} + m\, d^2$	

الحالة الثانية		
الحالة	حالة ساق مع كتلة	حالة قرص مع كتلة
الشكل		
الكتلة $m_{\text{جملة}}$	m : كتلة الساق m' : كتلة معلقة $m_{\text{جملة}} = m + m'$	m : كتلة القرص m' : كتلة معلقة $m_{\text{جملة}} = m + m'$
$d = OC$ البعد بين محور الدوران ومركز العطالة.	$d = \frac{m'\, r'}{m + m'}$ $r' = \frac{\ell}{2}$	$d = \frac{m'\, r'}{m + m'}$ $r' = r$
عزم العطالة I_Δ	$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m'}$ $I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/c} + m'\, r'^2$	$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{قرص}} + I_{\Delta/m'}$ $I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/c} + m'\, r'^2$

الحالة الثالثة	
الحالة	حالة ساق مهملة مع كتلتين نقطيتين
الشكل	
الكتلة $m_{\text{جملة}}$	m_1 , m_2 : كتلتين نقطيتين $m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$
$d = OC$ البعد بين محور الدوران ومركز العطالة.	$d = \frac{m_2\, r_2 - m_1\, r_1}{m_1 + m_2}$ $r_1 = \frac{\ell}{2}$, $r_2 = \frac{\ell}{2}$
عزم العطاله I_Δ	$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$ $I_{\Delta/\text{جملة}} = m_1\, r_1^2 + m_2\, r_2^2$ r بعد الكتلة عن محور الدوران

(علما أن $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}\, m\, r^2$ قرص ، $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12}\, m\, \ell^2$ ساق)

Scanned by CamScanner