مدونة المناهج السعودية

https://eduschool40.blog

الموقع التعليمي لجميع المراحل الدراسية

في المملكة العربية السعودية

جامعة الملك فيصل
KING FAISAL UNIVERSITY
١٣٩٥ ١٩٧٥

التحليل الإحصائي

مقرر التحليل الإحصائي
للدكتور محمد الحنيف
الملخص من إعداد لوسيندآ العصاميه
الفصل الدراسي الأول
من العام 2018-2019

المستوى الرابع

Designed By مستعينة بربي

المحاضره الأولى ..

المجموعات

تعريف المجموعة:

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً. وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شئ آخر.

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

$A, B, C, \cdots$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

$a, b, c, \cdots$

طرق كتابة المجموعات:

١- طريقة العد (سرد العناصر):

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة "," مثل:

$A = \{1,3,5,7\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

$C = \{1,2,3,\cdots\}$

$a, b, c, \cdots$

بحيث لا يتم تكرار العناصر

٢- طريقة القاعدة (الصفة المميزة):

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

A={x: x عدد طبيعي زوجي }

B={x: x كلية بجامعة الملك فيصل}

C={x: x طالب مسجل بالمقرر الحالي}

D={x: 0≤x ≤12 عدد صحيح، X}

مثال: عند رمي حجر نرد مرة واحدة ، نستطيع أن نعبر عن الحادثة (الحصول على عدد زوجي) من خلال التالي:

- طريقة سرد جميع العناصر وبينهما فاصلة كالتالي:

A={ 2, 4, 6 }

- **ويمكن أن نعبر عن الحادثة نفسها بطريقة الصفة المميزة وهي كتابة مميزات العناصر بين القوسين { } عوضا عن كتابة العناصر نفسها كالتالي:**

A={ x: 1 ≤ x ≤ 6, x عدد زوجي}

إذا المجموعة بشكل عام يمكن أن تكتب بميزة عناصرها بأشكال مختلفة طالما كانت الميزة كافيه لتحديد العناصر بشكل دقيق.

انتماء العناصر إلى المجموعة:

- يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى" لبيان العناصر التي تقع داخل المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة
$a \in A$
- أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة
$a \notin A$

ملاحظة : تعد دراسة المجموعات مقدمة لدراسة الاحتمالات.

مثال:

A={a, b, c, d}

أي أن المجموعة A تتكون من العناصر a و b و c و d

b ∈ A

أي أن العنصر b ينتمي إلى المجموعة A

f ∉ A

أي أن العنصر f لا ينتمي إلى المجموعة A

أنواع المجموعات:

1- المجموعة الخالية:

وهي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، مثل مجموعة الأعداد الصحيحة التي بين العددين 0,1 مجموعة خالية, أيضا مجموعة أسماء الأسماك التي تتحدث اللغة العربية مجموعة خالية بالتأكيد.

ويرمز للمجموعة الخالية بالرمز Ø أو بقوسين { }.

A = {x: x عدد طبيعي زوجي وفردي }

B = {x: x دولة عربية تقع في أوروبا }

٢ - المجموعة الشاملة:

هي المجموعة التي تشمل كل العناصر محل الدراسة بحيث تعتبر جميع المجموعات الأخرى مجموعات جزئية منها، ويرمز لها عادة بالرمز U.

3- المجموعة المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

$$A=\{2,4,6,8\}$$

$$\boldsymbol{B=\{1,2,3,..,100\}}$$

$$C=\{x,y,z,w,u\}$$

4- المجموعة غير المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A = {x: عدد طبيعي فردي x }

$$B=\{10,20,30,....\}$$

العلاقات بين المجموعات

1- المجموعة الجزئية:

نقول عن مجموعة A أنها مجموعة جزئية subset من مجموعة أخرى B إذا كان كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي أيضا إلى B ونعبر عن هذا بكتابة $A\subset B$

فإذا كانت $A\subset B$ وكانت $A\neq B$ قلنا أن A جزئية فعلية proper subset من B أو A محتواه في B أو أن المجموعة B تحتوى A

أما إذا كانت A=B فإن كل عنصر ينتمي إلى إحداهما ينتمي للأخرى وبالتالي $A\subset B$ و $B\subset A$

أمثلة:

١. إذا كانت $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

فإن $A\subset B$

2. مجموعة جميع طلاب التعليم الإلكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

2- تساوي وتكافؤ المجموعات:

تكون المجموعتان A ،B متساويتان إذا كانت

$$A\subseteq B, B\subseteq A\Rightarrow A=B$$

مثال:

$$\{-1,+1\}=\{x:x^2=1\}$$

{ x حرف من كلمة سلام : x} ≠ {س, ل, م}

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

$$1)\ A=\{1,3,5,7\}\ ,\ B=\{3,1,5,7\}$$

$$2)\ A=\{0,1,2\}\ \ ,\ \ B=\{a,b,c\}$$

الحل:

$$1)\quad A=B$$

$$2)\quad A\equiv B$$

العمليات على المجموعات:

- **الاتحاد**

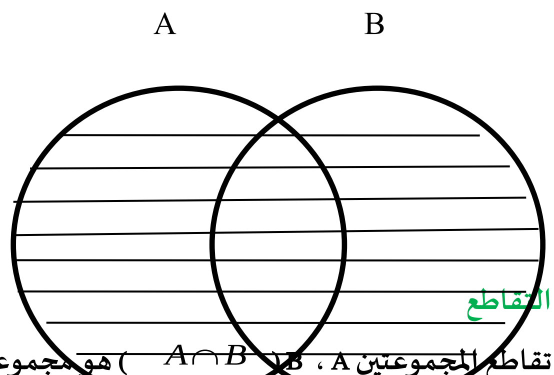
اتحاد المجموعتين A ، B ($A\cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما.

مثال :

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A\cup B)$ **= {1, 2, -6, -7, -11}**



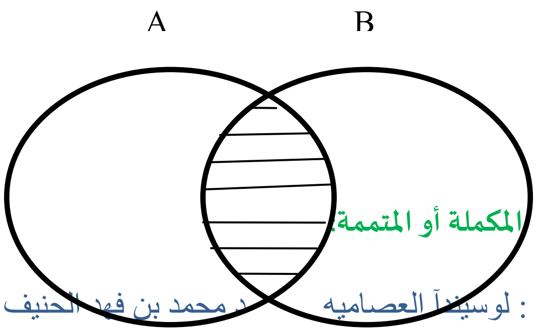
- **التقاطع**

تقاطع المجموعتين A ، B ($A\cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً. أي العناصر المشتركة بين A و B . مثال على ذلك:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$A\cap B$ **= {-6, -7}**



- **المكملة أو المتممة:**

يقال أن مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A. أي أن

مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\overline{A}$ ={2, 4, 6, 20}

$\overline{B}$ ={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}

- الفرق

إذا كانت مجموعتان A، B فان A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة A وليست في B.أي أن

اذا كانت A={1,2,3,X,Y} و $B=\{3,4,5,x,w\}$

فإن $A-B=\{1,2,y\}$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

1) $A\cup B$

الحل:

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,x,y,w\}$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

2) $A\cap B$

الحل

$A\cap B=\{3,x\}$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

3) $A-B$

الحل

$A-B=\{1,2,y\}$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

4) $\overline{A}$

الحل $\overline{A}=\{4,5,w,z\}$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

5) $\overline{B}$

الحل

$\overline{B}=\{1,2,y,z\}$

تدريبات

١. نفترض أن $A=\{3,4,5,x,y\}$ و $B=\{4,x,y,z\}$

ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة.

(i) 3 ________ A

(ii) 3 ________ B

(iii) x ________ A

(iv) x ________ B

(v) z ________ A

(vi) z ________ B

(vii) 1 ________ A

($viii$) 1 ________ B

٢. اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية .

ملحوظة: يمكنك استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر

i. A = {x: x عدد طبيعي اصغر من ٧}

ii. B = {x: x عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على٢}

iii. C = {y: y حرف من حروف الهجاء المحصور بين c و h}

iv. D = {x: x عدد طبيعي فردي اصغر من ١٧}

مجموعات الأعداد : Sets of numbers

أ - مجموعة الأعداد الطبيعية : (Natural numbers)

وهي أصغر مجموعات الأعداد وتسمى أيضا مجموعة العد وتحتوي على الأعداد الصحيحة الموجبة.

N={ 1 , 2 , 3 , 4 , ... }

ب - مجموعة الأعداد الصحيحة : (Integer numbers)

هي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بالإضافة إلى الصفر.

I = { ... , -3 , - 2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ... }

ج - مجموعة الأعداد النسبية : (Rational numbers)

العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث

$a,b \in I$ ، $b \neq 0$ وتحوي مجموعة الأعداد النسبية على الأعداد الصحيحة

بالإضافة إلى الكسور مثل $\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{6},\frac{8}{10},\frac{9}{1},\frac{14}{1},.........$ ويرمز لها

بالرمز Q .

د - مجموعة الأعداد غير النسبية : (Irrational numbers)

العدد غير النسبي هو العدد الذي لا يمكن كتابه على الصورة $\frac{a}{b}$

مثل جذور الأعداد التي ليست مربع كامل

$$\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{20},......$$

هـ - مجموعة الأعداد الحقيقية : (Real numbers)

وتحوي مجموعة الأعداد النسبية وغير النسبية ويرمز لها بالرمز R. و تمثل بخط مستقيم يسمى خط الأعداد حيث يمتد من طرفيه من ∞- إلى ∞ ومنتصفه تكون نقطة الصفر وعلى يسار الصفر الأعداد السالبة وعلى يمينه الأعداد الموجبة كالأتي

$$\infty \longleftarrow\!\!\!\longrightarrow \infty$$

$$- \qquad 0 \qquad +$$

وأي جزء من هذا الخط يكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ويسمى فترة (Interval).

الفترة : Interval

تعرف الفترة كما ذكرنا سابقا بأنها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وهي الأعداد التي تقع بين أي نقطتين a و b على خط الأعداد ، وتكتب حسب نوعها كالأتي:

1- الفترة المفتوحة: $(a,b)=\{x \in R : a<x<b\}$

2- الفترة نصف المغلقة: $[a,b)=\{x \in R : a \leq x<b\}$

3- الفترة المغلقة: $[a,b]=\{x \in R : a \leq x \leq b\}$

مثال:

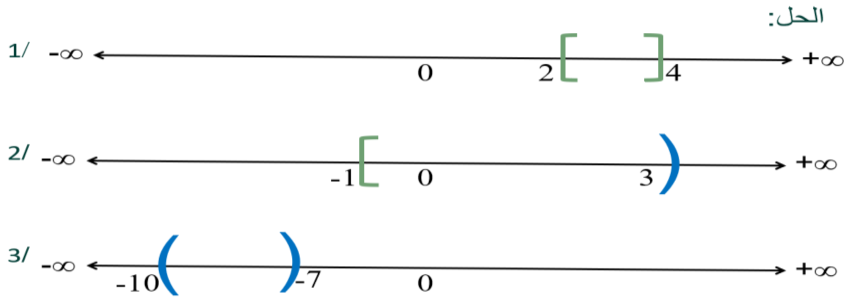
مثل الفترات التالية على خط الأعداد:

1- [2 , 4]

2- [-1 , 3)

3- (-10 , -7)

الحل



مثال:

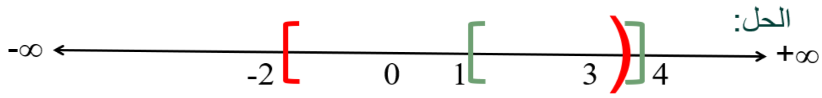
إذا كانت الفترات [1 , 4] = B و (3 , 2-] = A فأحسب ما يلي:

1- $A \cap B$

2- $A \cup B$

3- $A - B$

4- $B - A$



1- $A \cap B = [1, 3)$

2- $A \cup B = [-2, 4]$

3- $A - B = [-2, 1)$

4- $B - A = [3, 4]$

المحاضره الثانيه

نظرية الاحتمالات

التجربة الإحصائية (Experiment):

هي أي عملية أو مجموعة عمليات محددة لا تعرف نتائجها مسبقا بشكل حتمي، أي لا يستطاع التنبؤ بنتائجها بشكل مؤكد.

فعندما نلقي قطعة نقد فلا نعلم بشكل مؤكد ما هو الوجه الذي سيكون في الأعلى؛ فقد تظهر الصورة أو الكتابة.

وعندما نلقي حجر النرد فلا يمكننا التنبؤ ما هو الوجه الذي سيكون في الأعلى من الأوجه الستة لحجر النرد.

الفضاء العيني (Sample Space)

مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة، ويرمز له بالرمز S، ويمكن أن يكون فضاء العينة منفصلا أو متصلا وسوف نركز

مثال (1): ما هو الفضاء العيني لرمي قطعة نقد واحدة؟

الحل:

$$S = \{H, T\}$$

مثال (2): ما هو الفضاء العيني لرمي قطعتي نقد؟

الحل:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

مثال (3): ما هو الفضاء العيني لرمي حجر نرد؟

الحل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال (4): ما هو الفضاء العيني لرمي حجري نرد؟

الحل:

$$\begin{gathered}\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{gathered}$$

ويمكن أن يكون فضاء العينة منفصلا مثل الأمثلة السابقة، كما يمكن أن يكون متصلا مثل المثال التالي:

مثال (5): ما هو الفضاء العيني لعمر جهاز كهربائي بالساعة؟

الحل:

$$S = \{x: 0 \leq x < \infty\}$$

الحادث (Event)

هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني.

مثال (6): في تجربة رمي قطعة نقد واحدة؛ اكتب الحادث A الذي يرمز لظهور صورة.

الحل:

$$A = \{H\}$$

مثال (7): في تجربة رمي قطعتي نقد؛ اكتب الحادث B الذي يرمز لظهور صورة واحدة على الأقل.

الحل:

$$B = \{HH, HT, TH\}$$

مثال (8): في تجربة رمي حجري نرد؛ اكتب الحادث C الذي يرمز لظهور عددين مجموعهما أكثر من 9

الحل:

$$C = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

مثال (9): في تجربة عمر جهاز كهربائي؛ اكتب الحادث l الذي يرمز لأن يكون عمر الجهاز لا يتجاوز 50,000 ساعة.

الحل:

$$l = \{x: 0 \leq x < 50,000\}$$

احتمال الحوادث في الفضاء العيني ذي النقاط متساوية الحدوث

يمكن تعريف الاحتمال بطرق عديدة أبسطها أنه «مقياس لإمكانية وقوع حادث (Event) معين» أو «قيمة تعبر عن فرصة تحقق حدث معين».

احتمال تحقق حادث معين $= \dfrac{\text{عدد حالات تحقق هذا الحادث}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$

مثال (10): في تجربة رمي قطعة نقد واحدة؛ ما احتمال تحقق الحادث A الذي يرمز لظهور صورة.

الحل:

$$A = \{H\} \qquad \Longrightarrow \qquad P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1}{2}$$

مثال (11): في تجربة رمي قطعتي نقد؛ ما احتمال تحقق الحادث B الذي يرمز لظهور صورة واحدة على الأقل.

الحل:

$$B = \{HH, HT, TH\} \Longrightarrow \qquad P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{3}{4}$$

مثال (12): في تجربة رمي حجري نرد؛ ما احتمال تحقق الحادث C الذي يرمز لظهور عددين مجموعهما أكثر من 9

$$C = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$
$$P(C) = \frac{\#C}{\#S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال (13): صندوق يحوي 5 كرات بيضاء و 7 كرات حمراء؛ إذا تم سحب كرة واحدة بشكل عشوائي فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟

$$P(W) = \frac{\#W}{\#S} = \frac{5}{12}$$

رموز ومفاهيم أساسية:

$P(A)$: هو احتمال تحقق الحادث A.

$P(\overline{A})$: هو احتمال عدم تحقق الحادث A

$P(A\cap B)$: التقاطع ويشير إلى إحتمال تحقق الحادثين معاً

$P(A\cup B)$: الاتحاد ويشير إلى إحتمال تحقق أحد الحادثين على الأقل

مسلمات الاحتمال

1) قيمة أي احتمال تتراوح ما بين الصفر والواحد:

$$0 \le \mathrm{P(E)} \le 1$$

2) قيمة الاحتمال الأكيد تساوي واحد:

$$\mathrm{P(S)} = 1$$

3) قيمة احتمال اتحاد الحوادث المتنافية تساوي مجموع احتمالاتها؛ فإذا كان لدينا حادثين مثلا A، B يستحيل تحققهما معا (متنافيان) فاحتمال تحقق أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتمالهما:

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

قواعد الاحتمال

1) قيمة احتمال الحادث المستحيل تساوي:

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0$$

مثال (14): في تجربة رمي حجر نرد؛ ما احتمال تحقق الحادث C الذي يرمز لظهور العدد 7

$$\mathrm{P(C)} = 0$$

فإذا كان الحادثان A، B متنافيان فإن:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{P}(A \cap B) = 0$$

2) قيمة احتمال عدم تحقق الحادث A تساوي:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال (15): إذا كان احتمال قبول طالب في إحدى الجامعات يساوي 0.8 فما احتمال عدم حصوله على القبول في تلك الجامعة؟

الحل: نفرض أن الحادث A يعني حصول الطالب على القبول.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = 0.2$$

3) قيمة احتمال اتحاد الحوادث بشكل عام:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال (16): إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى يساوي 0.4 و احتمال غيابه عن المحاضرة الثانية يساوي 0.3 واحتمال غيابه عن المحاضرتين يساوي 0.1، فاحسب ما يلي:

أ. ما احتمال غياب الطالب عن واحدة من هاتين المحاضرتين على الأقل؟

الحل:

نفرض أن الحادث A هو غياب الطالب عن المحاضرة الأولى

نفرض أن الحادث B هو غياب الطالب عن المحاضرة الثانية

$$P(A) = 0.4\,,\ P(B) = 0.3,\ P(A \cap B) = 0.1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$$

ب. ما احتمال عدم غياب الطالب عن أي من المحاضرتين؟

الحل:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

4) قيم احتمال تحقق حادث وعدم تحقق الآخر:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال (17): إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.90 واحتمال حضور مساعده يساوي 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الأقل يساوي 0.97، فاحسب الاحتمالات التالية:

أ. حضور المدير ومساعده

الحل:

نفرض أن الحادث A هو حضور المدير.

نفرض أن الحادث B هو حضور المساعد

$$P(A) = 0.90\,,\ P(B) = 0.95,\ P(A \cup B) = 0.97$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= 0.90 + 0.95 - 0.97 = 0.88$$

ب. حضور المدير وحده؟

الحل:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0.90 - 0.88 = 0.02$$

.

مثال (18): صندوق به 20 كرة بيضاء، و30 كرة حمراء، و50 كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة:

أ. حمراء:

$$P(R) = \frac{30}{100}$$

ب. بيضاء:

$$P(W) = \frac{20}{100}$$

ج. سوداء:

$$P(B) = \frac{50}{100}$$

د. حمراء أو سوداء:

$$P(R \cup B) = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} = \frac{80}{100}$$

هـ حمراء أو سوداء أو بيضاء:

$$P(R \cup B \cup W) = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{20}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

مثال (19): صندوق به 50 كرة بألوان وأحجام مختلفة. إذا كان من بين هذه الكرات 20 كرة بيضاء، و30 كرة كبيرة، و15 كرة بيضاء وكبيرة في نفس الوقت.

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء أو كبيرة؟

نفرض أن الحادث **A** هو الكرة بيضاء.

نفرض أن الحادث **B** هو الكرة كبيرة.

$$P(A \cup B) = \frac{20}{50} + \frac{30}{50} - \frac{15}{50} = \frac{35}{50}$$

مثال (20): إذا علمت أن P(A)=0.2 و P(B)=0.4 وأن هذه الأحداث هي أحداث متنافية فاحسب كل من الاحتمالات التالية:

١) $P(\bar{A})$
٢) $P(\bar{B})$
٣) $P(A \cap B)$
٤) $P(A \cup B)$

الحل:

١) $P(\bar{A}) = 1 - 0.2 = 0.8$
٢) $P(\bar{B}) = 1 - 0.4 = 0.6$
٣) $P(A \cap B) = 0$
٤) $P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0 = 0.6$

تمارين المحاضرة الثانية

1) إذا كانت لوحات السيارات مكونة من أرقام فقط. إذا كان عدد الخانات أربع خانات في اللوحة فما احتمال أن يحصل شخص على لوحة أرقامها موحدة (7777) بعد استبعاد (0000) لعدم وجود لوحة بهذا الرقم، وما احتمال ألا تكون أرقامها موحدة.

2) عند رمي حجر نرد ثلاث مرات فما احتمال أن يتم الحصول على نفس الرقم في الرميات الثلاث، وما احتمال أن يظهر في الرمية الأولى الرقم 5

حل تمارين المحاضرة الأولى

1) نفترض أن:

$$A = \{3, 4, 5, x, y\}, \; B = \{4, x, y, z\}$$

ضع إشارة $\in$ عندما ينتمي العنصر للمجموعة وإشارة $\notin$ عندما لا ينتمي العنصر للمجموعة:

$3 \in A$	$z \notin A$
$3 \notin B$	$z \in B$
$x \in A$	$1 \notin A$
$x \in B$	$1 \notin B$

٢. اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية .

i. A = {x: عدد طبيعي اصغر من ٧ x}
ii. B = {x: عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على ٢ x}
iii. C = {y: حرف من حروف الهجاء المحصورة بين c و h y}
iv. D = {x: عدد طبيعي فردي اصغر من ١٧ x}

الحل

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$
$$C = \{d, e, f, g\}$$
$$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

المحاضره الثالثه

تابع ... نظرية الاحتمالات

الاحتمال الشرطي:

هو احتمال حدوث حادث معين إذا علم تحقق حدوث حادث آخر؛ فإذا كان لدينا الحادثان A و B،

فنرمز لاحتمال حدوث الحادث A إذا علم حدوث الحادث B:

$$P(A|B)$$

ويتم حساب الاحتمال الشرطي بالقانون التالي:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \; ; P(B) \neq 0$$

مثال (21): في تجربة رمي حجر نرد؛ ما احتمال أن يكون العدد الظاهر 2 إذا علم أنه عدد زوجي؟

الحل:

نفرض أن الحادث A هو ظهور العدد 2

نفرض أن الحادث B هو ظهور عدد زوجي.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

مثال (22): في تجربة رمي قطعة نقد متزنة مرتين؛ إذا علم أن الوجه الظاهر في الرمية الأولى H فما احتمال أن يكون الوجه الظاهر في الرمية الثانية أيضا H؟

نفرض أن الحادث A هو ظهور H في الرمية الثانية.

نفرض أن الحادث B هو ظهور H في الرمية الأولى.

$$B = \{HH, HT, TH\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

قاعدة الضرب في الاحتمالات

من قانون الاحتمال الشرطي:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \implies P(A\cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \implies P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

مثال (23): إذا كان:

$$P(A) = 0.7 \quad , P(B) = 0.5 \quad , P(A|B) = 0.6$$

فأوجد ما يلي:

أ. $P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A | B) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$

ب. $P(B | A)$

$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$

مثال (24): صندوق به 3 كرات حمراء، و7 كرات بيضاء، فإذا سحبنا من الصندوق عشوائياً كرتين بدون إرجاع؛ فاحسب احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء.

نفرض أن الحادث A يمثل الكرة الأولى بيضاء.

نفرض أن الحادث B يمثل الكرة الثانية حمراء.

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

استقلال الحوادث:

إذا كان احتمال حدوث حادث معين لا يتغير بالعلم بحدوث حادث آخر؛ فإنه يقال عن هذين الحادثان أنهما مستقلان

فإذا كان لدينا الحادثان A و B، وكان احتمال حدوث الحادث A لا يتغير بالعلم بحدوث الحادث B فنكتب ذلك رياضيا:

$$P(A | B) = P(A)$$

وبناء على ذلك سيكون احتمال حدوث الحادثين المستقلين معا يساوي:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \times P(A | B) \\ &= P(B) \times P(A) \\ &= P(A) \times P(B) \end{aligned}$$

مثال (25): إذا كان الحادثان A و B مستقلين وكان:

$$P(A) = 0.7 \quad , P(B) = 0.6$$

فأوجد:

$$P(A \cap B)$$

الحل:

بما أن الحادثين مستقلان فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.6 = 42$$

مثال (26): إذا كان لدينا الحادثان A و B وكان:

$$P(A) = 0.4 \quad , P(\mathrm{A} | \mathrm{B}) = 0.4 \quad , P(\mathrm{B} | \mathrm{A}) = 0.5$$

فأجب عما يلي:

أ. هل الحادثان مستقلان؟ وكم $P(B)$؟

نعم لأن:

$$P(\mathrm{A} | \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) = 0.4$$

بما أن الحادثين مستقلان فكذلك:

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B} | \mathrm{A}) = 0.5$$

ملاحظات:

١. في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :

$$\mathrm{P(A | B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

١. في حالة الحوادث المستقلة :

$$\mathrm{P(A | B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = \mathrm{P(A)}$$

١. في حالة الحوادث غير المستقلة :

$$\mathrm{P(A | B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال (27): تقدم إلى إختبار مقرر الأدب والتحليل الاحصائي 10000 طالب نجح منهم 9000 طالب في مقرر الأدب كما نجح 8000 طالب في مقرر التحليل الاحصائي فاحسب:

١) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الأدب.
٢) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الأدب.
٣) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .
٤) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .
٥) حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .

٦) حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .

٧) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .

٨) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين على الأقل.

الحل

١. احتمال نجاح الطالب في مقرر الأدب= $\frac{9000}{10000} = 90\ \%$.

٢. احتمال رسوب الطالب في مقرر الأدب= $\frac{1000}{10000} = 10\ \%$.

٣. احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{8000}{10000} = 80\ \%$.

٤. احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{2000}{10000} = 20\ \%$.

5- بما أن النجاح في أي مقرر هو حدث مستقل عن النجاح في الآخر ، يتم تطبيق القاعدة

$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$:. وبالتالي فإن

٦- احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً= $\frac{9000}{10000} \times \frac{8000}{10000} = 0.72 = 72\ \%$

- احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً = $\frac{1000}{10000} \times \frac{2000}{10000} = 0.02 = 2\%$

٧- احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط =

$$= \frac{9000}{10000} \times \frac{2000}{10000} + \frac{8000}{10000} \times \frac{1000}{10000}$$

$$= 0.2 \times 0.9 + 0.1 \times 0.8 = 0.26$$

8- احتمال نجاح الطالب في احد المقررين على الأقل =

$$\frac{98}{100} = \frac{72}{100} - \frac{90}{100} + \frac{80}{100} = P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

مثال (28): إذا كان:

$P(A) = 0.6\ ,\ P(B) = 0.8\ ,\ P(A\cap B) = 0.5$

هل الحادثان A و B مستقلان وأوجد:

$1) P(A\cup B),\ 2) P(A \mid B),\ 3) P(B \mid A),\ 4) P(\bar{A}),\ 5) P(\bar{B})$

الحادثان مستقلان إذا تحققت العلاقة:

$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

نحسب كل طرف على حدة:

$P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.8 = 0.48$

$P(A\cap B) = 0.5$

من الواضح أن الطرفين غير متساويين:

$P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$

إذاً الحادثان غير مستقلين.

١) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

٢) $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625$

٣) $P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = 0.833$

٤) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$

٥) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2$

مثال (29): إذا كان:

$P(A) = 0.7 \quad , \quad P(B) = 0.4 \quad , P(A\cap B) = 0.28$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد:

$1)P(A\cup B), 2)P(A \mid B), 3)P(B \mid A), 4)P(\bar{A}), 5)P(\bar{B})$

الحل :

الحادثان مستقلان إذا تحققت العلاقة:

$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

نحسب كل طرف على حدة:

$P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$

$P(A\cap B) = 0.28$

من الواضح أن الطرفين متساويان:

$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

إذاً الحادثان مستقلان.

١) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82$

٢) $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} = 0.7$

٣) $P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = 0.4$

٤) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$

٥) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$

مثال (30): في دراسة لتخصصات 400 طالب وطالبة من خريجي جامعة الملك فيصل كانت النتائج كالتالي :-

التخصص	طالب B	طالبة C	المجموع
علمي S	120	40	160
أدبي L	96	144	240
المجموع	216	184	400

من خلال الجدول السابق المطلوب:

حساب إحتمال أن يكون الشخص طالب أو علمي ؟

$$P(B\cup S) = P(B) + P(S) - P(B\cap S)$$

$$= \frac{216}{400} + \frac{160}{400} - \frac{120}{400} = \frac{256}{400} = 0.64$$

حساب إحتمال أن يكون الشخص طالبة و تخصص أدبي :-

$$P(C\cap L) = \frac{144}{400} = 0.36$$

إذا علمت أن الشخص المختار طالبة أحسب احتمال أن يكون تخصصها أدبي :-

$$P(L \mid C) = \frac{P(L\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{144}{400}}{\frac{184}{400}} = \frac{144}{184} = 0.7826$$

مثال (31): الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراهB	المجموع
ذكرC	120	160	280
أنثى D	80	240	220
المجموع	200	400	600

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب إحتمال أن يكون الشخص ذكر أو حاصل على ماجستير :-

$$P(C\cup A) = P(C) + P(A) - P(C\cap A)$$

$$= \frac{280}{600} + \frac{200}{600} - \frac{120}{600} = \frac{360}{600} = 0.6$$

حساب إحتمال أن يكون الشخص أنثى و حاصلة على ماجستير :-

$$P(D\cap A) = \frac{80}{600} = 0.1333$$

إذا علمت أن الشخص المختار حاصل على ماجستير أحسب احتمال أن يكون ذكر :-

$$P(C | A) = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{120}{600}}{\frac{200}{600}} = \frac{120}{200} = 0.6$$

تمارين المحاضرة الثالثة

تمرين (1):

إذا أعطيت الجدول التالي :-

	A	B	المجموع
X	10	45	55
Y	30	15	45
المجموع	40	60	100

المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

3- P(X)	2- $P(\bar{A})$	1- P(A)
7- P(A⋃Y)	6- P(B⋂X)	5- P(A⋂X)
11- P(X|B)	10- P(B|Y)	9- P(A|Y)

تمرين (2):

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و تقديرات التخرج :-

النوع / المستوى التعليمي	جيد A	ممتاز B	المجموع
ذكرX	200	300	500
أنثى Y	400	100	500
المجموع	600	400	1000

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

1- أحسب إحتمال أن يكون ذكر أو حاصل على تقدير جيد ؟

2- أحسب أحتمال أن تكون أنثى و حاصلة على تقدير ممتاز ؟

3- إذا علمت أنها أنثى فما هو أحتمال أن تكون حاصلة على تقدير جيد ؟

تمرين (3):

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص :-

النوع / المستوى التعليمي	x	y	المجموع
A	5	10	15
B	12	3	15
المجموع	17	13	30

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

$P(y)$ $P(B \cup y)$

$P(\overline{B})$ $P(x \cap A)$

$P(B \mid X)$ $P(A \mid y)$

حل تمارين المحاضرة الثانية

1) إذا كانت لوحات السيارات مكونة من أرقام فقط. إذا كان عدد الخانات أربع خانات في اللوحة فما احتمال أن يحصل شخص على لوحة أرقامها موحدة (7777) بعد استبعاد (0000) لعدم وجود لوحة بهذا الرقم، وما احتمال ألا تكون أرقامها موحدة.

الحل: نفرض الحادث A هو أن الأرقام موحدة وبالتالي $\overline{A}$ يعني ألا تكون كذلك

عدد اللوحات المكونة من أربع خانات هو 10000 وعند استبعاد اللوحة (0000) يصبح عدد اللوحات 9999 لوحة.

عدد اللوحات موحدة الأرقام هو 9 تسع لوحات مثل (1111) و (8888)

$$P(A) = \frac{9}{9999} = \frac{1}{1111}$$
$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{1111} = \frac{1110}{1111}$$

2) عند رمي حجر نرد ثلاث مرات فما احتمال أن يتم الحصول على نفس الرقم في الرميات الثلاث، وما احتمال أن يظهر في الرمية الأولى الرقم 5

نفرض الحادث A هو ظهور نفس الرقم في الرميات الثلاث.

نفرض الحادث B هو ظهور الرقم 5 في الرمية الأولى.

عدد عناصر الفضاء العيني هو: $6 \times 6 \times 6 = 216$

عدد عناصر الحادث A هو 6 مثل $(1,1,1)$، $(2,2,2)$

عدد عناصر الحادث B هو 36 مثل $(5,1,1)$، $(5,1,2)$، $(5,1,3)$ ... وهكذا

$$P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$
$$P(B) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

المحاضره الرابعه

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة

المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي هو دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة S، بحيث تعطي قيمة عددية لنتائج العينة،

وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1- المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطع)

Discrete Random Variables.

2- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables.

1- المتغير العشوائي المنفصل:

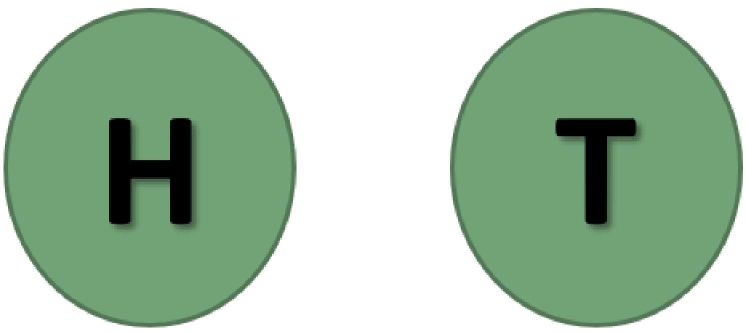
هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيماً عددية منفصلة (وبمعنى أخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي – عدد الوحدات التالفة من منتج معين – عدد أفراد الأسرة كلها أرقام ...,1,2,3,4,5 ولا يمكن أن تأخذ صورة كسرية).

2- المتغير العشوائي المتصل:

ويطلق علية المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة و جميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم و كمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة 35.7أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب)

المتغيرات العشوائية المنفصلة:

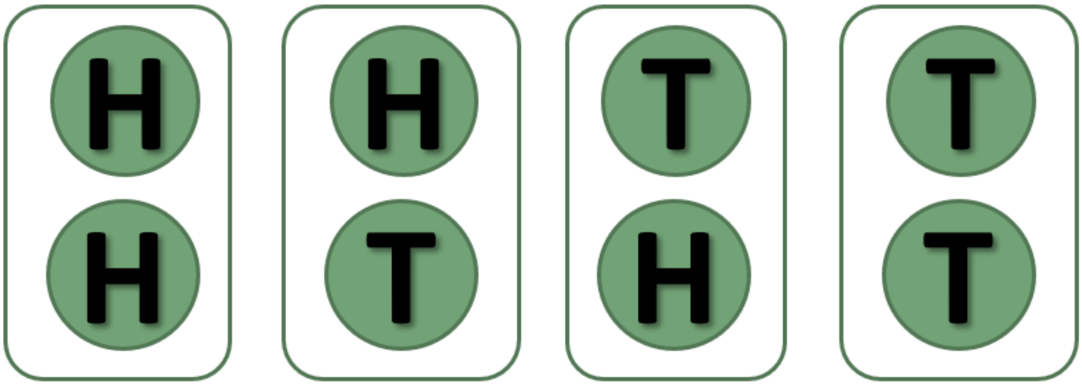
مثال (1): في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين: إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة؛ فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته؟



الحل

1- فراغ العينة (S):

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$



S = {HH, HT, TH, TT}

X = { 2 , 1 , 0 }

<u>2- المتغير العشوائي (X):</u>

هو وصف رقمي

لعدد مرات ظهور الصورة

<u>- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):</u>

عند ظهور الناتج TT : P(X=0) = ¼

عند ظهور الناتج HT أو TH : P(X=1) = 2/4 = ½

عند ظهور الناتج HH : P(X=2) = ¼

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

P(X=0) + P(X=1) +P(X=2) = ¼ + ½ + ¼ = 1

مثال (2): في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية: إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة؛ فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته؟

1) $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

2) $X = \{0, 1, 2, 3\}$

3) $P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$, $P(X=2) = \frac{3}{8}$, $P(X=3) = \frac{1}{8}$

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{8}{8} = 1$$

مثال (3): في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين: إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع العددين الظاهرين فأوجد القيم التي يأخذها المتغير X وأوجد احتمال الحصول على كل من هذه القيم؟

$$1)\ S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$$2)\ X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

3- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير P(x):

$$P(X=2) = 1/36 \qquad P(X=3) = 2/36$$
$$P(X=4) = 3/36 \qquad P(X=5) = 4/36$$
$$P(X=6) = 5/36 \qquad P(X=7) = 6/36$$
$$P(X=8) = 5/36 \qquad P(X=9) = 4/36$$
$$P(X=10) = 3/36 \qquad P(X=11) = 2/36$$
$$P(X=12) = 1/36$$

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد :-

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \ \ldots\ldots + P(X=12) = 1$$

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة:

التوزيع الاحتمالي :

التوزيع الاحتمالي بشكل عام هو دالة مجالها القيم التي يأخذها المتغير العشوائي ومداها قيم الاحتمالات المناظرة لقيم المتغير العشوائي، وبمعنى آخر هو التكرار النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، ويمثل الشكل الذي تأخذه مجموعة البيانات، ولا شك أن شكل البيانات مهم جدا في تحليلها ووصفها ويعتبر معرفته خطوة مهمة تسبق قرار استخدام أي اسلوب احصائي .

ويمثل التوزيع الاحتمالي مثل الدوال على شكل معادلة أو رسم بياني أو جدول، ويسمى التوزيع الاحتمالي بالمنفصل إذا تم تعريفه على متغير عشوائي منفصل، ويسمى متصلا إذا تم تعريفه على متغير عشوائي متصل.

وعند تمثيل التوزيع الاحتمالي المنفصل على شكل جدول فيكون مكونا من صفين، الأول به القيم الممكنة للمتغير العشوائي، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير.

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة:

مثال (4): كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

P(X=0) = ¼ (الناتج TT)

P(X=1) = 2/4 = ½ (النواتج HT , TH)

P(X=2) = ¼ (الناتج HH)

x	0	1	2	المجموع
P(x)	1/4	1/2	1/4	1

التوقع الرياضي:

هو الوسط الحسابي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز μ أو E(x)

قانون التوقع للمتغير العشوائي المنفصل:

$$\mu = E(X) = \sum (x\, P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة من قيم المتغير العشوائي في احتمالها.

مثال (5): أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية متزنة مرتين متتاليتين ؟

x	$P(X=x)$	$x\,P(x)$
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
$\mu = E(X)$		$\frac{4}{4} = 1$

مثال (6): إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي, فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟

x	0	1	2	3	4	Σ
$P(X = x)$	0.20	0.30	0.25	0.15	0.10	1

الحل

x	$P(X = x)$	$x\,P(x)$
0	0.20	0
1	0.30	0.30
2	0.25	0.50
3	0.15	0.45
4	0.10	0.40
$\mu = E(X)$		1.65

التباين والانحراف المعياري:

التباين للمتغير العشوائي X الذي له قيمة متوقعة تساوي E(x) هو :

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \left[\sum x^2 p(x)\right] - \mu^2$$

والانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال (7): أوجد القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي التالي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

الحل

x	$P(X=x)$	$x\,P(x)$	x^2	$x^2P(x)$
0	0.3	0	0	0
1	0.2	0.2	1	0.2
2	0.4	0.8	4	1.6
3	0.1	0.3	9	0.9
$\mu = E(X)$		1.3	$E(X^2)$	2.7

$$Var(X) = \sigma^2 = 2.7 - (1.3)^2 = 1.01$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.01} = 1.005$$

مثال (8): إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي:

x	2	4	5	6
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25

المطلوب : احسب الآتي:

١) $P(x \geq 4)$

٢) $P(2 \leq x < 5)$

3) التوقع والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

$$1)\ P(x \geq 4) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$$
$$= 0.35 + 0.25 + 0.25 = 0.85$$
$$2)\ P(2 \leq x < 5) = 0.15 + 0.35 = 0.50$$

x	$P(X=x)$	$x\,P(x)$	x^2	$x^2P(x)$
2	0.15	0.30	4	0.60
4	0.35	1.40	16	5.60
5	0.25	1.25	25	6.25
6	0.25	1.50	36	9.00
$\mu = E(X)$		4.45	$E(X^2)$	21.45

$$Var(X) = \sigma^2 = 21.45 - (4.45)^2 = 1.6475$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.6475} = 1.28355$$

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الخاصة: توزيع ذي الحدين:

أ- توزيع ذي الحدين: Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن أمثلة ذلك:

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن = $\frac{1}{3}$
عند سؤال 10 أفرادا فكل منهم قد يكون.... ⟵ غير مدخن / مدخن

إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق = $\frac{2}{7}$،
عند سحب مصباح من كل صندوق من 50 صندوق في كل مرة قد يكون.. ⟵ سليم / تالف

عند رمي قطعة النقد ، الناتج قد يكون ... ⟵ صورة / كتابة

إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة $\frac{1}{4}$ ،
بمتابعة حضور الطالبة في ٥ محاضرات قد تكون ... ⟵ حاضرة / غائبة

توزيع ذي الحدين:

جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

١. نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
٢. نتيجة كل محاولة مستقلة عن الأخرى.
٣. احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابتا و ليكن p و احتمال الخطأ أو الفشل $q = 1 - p$
٤. إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك n محاولة.

تجربة ذات الحدين

إذا كان X متغير ذات الحدين ، عند اجراء تجربة ذات الحدين n من المرات وكان احتمال الحصول على حالة نجاح في كل مرة يساوي p واحتمال الفشل q=1-p ، فإن احتمال تحقق عدد x من حالات النجاح هو:

. التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند اجراء التجربة n مرة:

$$P(X = x) = P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح و $q = 1 - p$ و x= 0,1,2,3........n

مراجعة على التوافيق:

- القانون الأساسي: $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$
- $\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

إذا كان X متغير ذات الحدين n, p فإن: $X \sim Bin(n,\ p)$

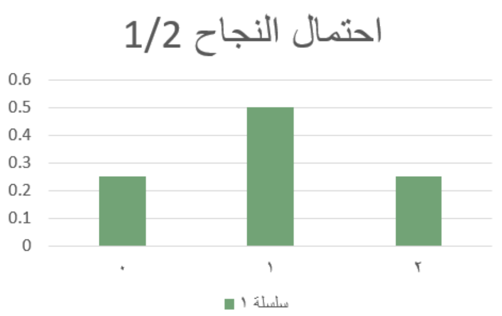
التوقع الرياضي ← $E(X) = \mu = np$

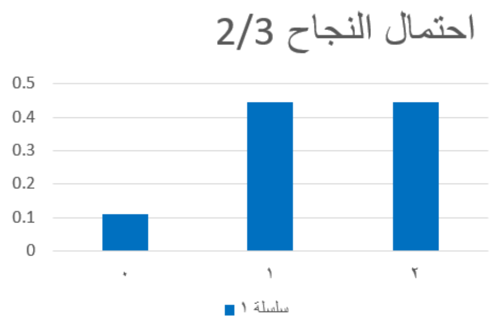
التباين ← $V(X) = \sigma^2 = npq$

شكل التوزيع

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح كما يلي:

- إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع يكون متماثل.
- إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع يكون موجب الالتواء.
- إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع يكون سالب الالتواء.





مثال (9): في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة خمس مرات أوجد احتمال ظهور الصورة ثلاث مرات واحسب التوقع والتباين؟

الحل

1- $p(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

2- $E(X) = \mu = np = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

3- $\sigma^2 = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

مثال (10): إذا كان إحتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الإحصائي 80% تم إختيار 4 طلاب. المطلوب:

١. كون جدول توزيع ثنائي الحدين .
٢. أوجد إحتمال نجاح 3 طلاب .
٣. أوجد إحتمال رسوب 3 طلاب .
٤. أوجد إحتمال نجاح طالبين على الأقل .
٥. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) .
٦. الانحراف المعياري .

الحل :- $P = 0.80$, $q = 1\text{-}P = 0.20$, $n=4$

1- جدول توزيع ثنائي الحدين:

عدد الطلاب الناجحين	عدد الطلاب الراسبين	الاحتمال	الناتج
0	4	$= 4C0 \times (0.80)^0 \times (0.20)^4$	0.0016
1	3	$= 4C1 \times (0.80)^1 \times (0.20)^3$	0.0256
2	2	$= 4C2 \times (0.80)^2 \times (0.20)^2$	0.1536
3	1	$= 4C3 \times (0.80)^3 \times (0.20)^1$	0.4096
4	0	$= 4C4 \times (0.80)^4 \times (0.20)^0$	0.4096

2- احتمال نجاح 3 طلاب: $P(3) = 0.4096$

3. احتمال رسوب 3 طلاب (يعني نجاح واحد): $P(1) = 0.0256$

4- احتمال نجاح طالبين على الأقل :-

$P(2)+P(3)+P(4) = 0.9728$

5. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) =

$\mu = n \times p = 4 \times 0.80 = 3.2$

6- الانحراف المعياري =

$$\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{4 \times 0.8 \times 0.2} = 0.8$$

مثال (11): وجد في إنتاج أحد المصانع أنه من بين 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معيبة. أخذت عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية:

1- الوحدات المختارة كلها سليمة

2- على الأكثر توجد واحدة معيبة

3- على الأقل توجد وحدتان معيبتان

4- القيمة المتوقعة و التباين للوحدات المعيبة .

الحل:

احتمال النجاح (الحصول على وحدة معيبة):

p = 150/1000 = 0.15

احتمال الفشل (عدم الحصول على وحدة معيبة):

q = 1-p= 1-0.15 =0.85

عدد المحاولات (عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات) n = 5

X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المعيبة يأخذ القيم 0, 1, 2, 3, 4, 5

ويكون له توزيع ذي الحدين التالي:

$$P(X=x)=\binom{5}{x}(0.15)^x(0.85)^{5-x} \quad ; x=0,1,2,3,4,5$$

1- الوحدات كلها سليمة يعني أن X = 0

$$P(X=x)=\binom{5}{0}(0.15)^0(0.85)^5=0.44371$$

2- على الأكثر توجد وحدة معيبة يعني أن X ≤ 1

$$\begin{aligned} P(X\le 1) &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= \binom{5}{0}(0.15)^0(0.85)^5+\binom{5}{1}(0.15)^1(0.85)^4 \\ &= 0.44371+0.39150 = 0.83521 \end{aligned}$$

3- على الأقل توجد وحدتان معيبتان ، أي أن X ≥ 2

$$\begin{aligned} P(X\ge 2) &= 1-P(X<2) \\ &= 1-[P(X=0)+P(X=1)] \\ &= 1-[0.83521]=0.16479 \end{aligned}$$

4- القيمة المتوقعة و التباين للوحدات المعيبة .

$$E(X)=np=5\times 0.15=0.75$$

$$Var(X)=npq=5\times 0.15\times 0.85=0.6375$$

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الخاصة: توزيع بواسون:

ب- توزيع بواسون: هو توزيع احتمالي منفصل آخر يستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحدة الزمن، وذلك عندما تكون الأحداث أو "النجاحات " مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتاً لوحدة الزمن. عندئذ :

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; x=0,1,2,3,\ldots$$

حيث : P (x) = احتمال حدوث عدد x من النجاحات.

λ = متوسط أو معدل تكرار الحدث في وحدة الزمن. حيث $\lambda = np$

e = أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي ، وقيمتها تساوي 2.718 تقريبا، ويمكن حسابها باستخدام الآلة الحاسبة.

$x!$ = مضروب العدد x " ويساوي: $x(x-1)(x-2)\ldots(2)(1)$

يعتبر بديلا لتوزيع ذي الحدين ولكن عندما تكون n كبيرة و p صغيرة جدا.

- يصف متغيرات عشوائية متقطعة تعبر عن عدد كبير من الظواهر مثل:
    - عدد الكرات الحمراء في عينة الدم
    - عدد الأخطاء المطبعية في الصفحات المختلفة للكتاب
    - عدد القطع التالفة في الإنتاج الكلى لسلعة معينة
- إذا كان للمتغير العشوائي X توزيع بواسون فإن:

التوقع : $E(X)=\lambda$

التباين : $Var(X)=\lambda$

مثال (12): في كمية من القطع المصنعة ، كان من المعلوم أن نسبة القطع المعيبة بها هي 0.3%. أخذت عينة عشوائية حجمها 350 قطعة. احسب الاحتمالات الآتية:

١) عدم وجود أي قطع معيبة
٢) وجود قطعة معيبة
٣) وجود قطعتان معيبتان
٤) وجود على الأكثر قطعتان معيبتان

الحل

- عملية سحب العينة تمثل سلسلة عددها n=350
- احتمال أن تكون القطعة معيبة (النجاح) p=0.003
- واضح أن n كبيرة و p صغيرة ، ولذلك يرجح استخدام توزيع بواسون:

$$\lambda = np = 350 \times (0.003) = 1.05$$

1- عدم وجود أي قطعة معيبة يعنى أن X = 0

- $$P(X=0) = \frac{e^{-1.05}(1.05)^0}{0!} = 0.350$$

2- وجود قطعة معيبة واحدة يعنى أن X = 1

$$P(X=1) = \frac{e^{-1.05}(1.05)^1}{1!} = 0.367$$

3- وجود قطعتان معيبتان يعنى أن X = 2

$$P(X=2) = \frac{e^{-1.05}(1.05)^2}{2!} = 0.193$$

4- وجود وحدتان معيبتان على الأكثر يعني $X \le 2$

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= 0.350 + 0.367 + 0.193 = 0.91$$

مثال (13): إذا كان عدد الأخطاء المطبعية في كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ فإذا كانت الأخطاء تتوزع توزيعا عشوائيا. فما احتمال إذا اختيرت 10 صفحات عشوائيا أن لا تحتوى على أخطاء.

الحل

بفرض أن X يمثل عدد الأخطاء في كل صفحة وأن عدد المحاولات (الصفحات) تمثل سلسلة من المحاولات عددها n = 10

ونسبة الخطأ (النجاح) هي $p = \frac{50}{600} = 0.083$

وعليه فإن: $\lambda = np = 10\ (0.083) = 0.83$

وبالتالي فإن للمتغير X توزيع بواسون:

$$P(X=x) = \frac{e^{-0.83}(0.83)^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

احتمال عدم وجود أخطاء:

$$P(X=0)=\frac{e^{-0.83}(0.83)^{0}}{0!}=0.436$$

تمارين المحاضرة الرابعة:

تمرين (1) إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي:

x	0	2	4	6
P(x)	0.1	0.2	0.4	?

المطلوب :-

١) p(6)
٢) الوسط الحسابي .
٣) التباين .
٤) الانحراف المعياري .
٥) $P(x\geq 4)$.
٦) $P(2\leq x\leq 5)$

تمرين (2): إذا كان احتمال انسحاب موظف من العمل قبل بلوغ سن التقاعد هو 60%، وتم اختيار 5 موظفين عشوائيا ، المطلوب :

١. كون جدول توزيع ثنائي الحدين .
٢. أوجد احتمال انسحاب 4 موظفين.
٣. أوجد احتمال استمرار 3 موظفين في العمل حتى التقاعد.
٤. أوجد احتمال انسحاب 3 موظفين على الاقل .
٥. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) .
٦. الانحراف المعياري .

تمرين (3): إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

- ما نوع المتغير العشوائي؟
- اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.
  - احسب الاحتمالات التالية:
  - احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
  - احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟
  - احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.
  - حدد شكل التوزيع.

حل تمارين المحاضرة الثالثة

تمرين (1):

إذا أعطيت الجدول التالي :-

	A	B	المجموع
X	10	45	55
Y	30	15	45
المجموع	40	60	100

المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

1- P(A)=0.40   2- $P(\bar{A}) = 0.60$ 3- P(X)=0.55   4- $P(\bar{X})=0.45$

5- $P(A\cap X)=0.10$ 6- $P(B\cap X)=0.45$ 7- $P(A\cup Y)=0.55$ 8- $P(B\cup Y)=0.90$

9- $P(A|Y)=30/45$ 10- $P(B|Y)=15/45$ 11- $P(X|B)=45/60$

تمرين (2):الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و تقديرات التخرج :-

النوع / المستوى التعليمي	جيد A	ممتاز B	المجموع
ذكرX	200	300	500
أنثى Y	400	100	500
المجموع	600	400	1000

1) $$P(X \cup A) = \frac{500+600-200}{1000} = \frac{900}{1000} = 90\%$$

2) $$P(Y \cap B) = \frac{100}{1000} = 10\%$$

3) $$P(A|Y) = \frac{400}{500} = 80\%$$

تمرين (3):الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص :

النوع / المستوى التعليمي	x	y	المجموع
A	5	10	15
B	12	3	15
المجموع	17	13	30

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

$P(y) = \frac{13}{30}$ $\qquad$ $P(B \cup y) = \frac{15+13-3}{30} = \frac{25}{30}$

$P(\overline{B}) = 1 - \frac{15}{30} = \frac{15}{30}$ $\qquad$ $P(x \cap A) = \frac{5}{30}$

$P(B \mid X) = \frac{12}{17}$ $\qquad$ $P(A \mid y) = \frac{10}{13}$

المحاضره الخامسه

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتصلة

المتغيرات العشوائية المتصلة:

2- المتغير العشوائي المتصل :-

ويطلق علية المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة و جميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم و كمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب)

التوزيعات الاحتمالية المتغيرات العشوائية المتصلة:

تعريف دالة كثافة الاحتمال :

إذا كان لدينا متغير عشوائي متصل x بمجال $R_x = [a,b]$ فان الدالة $f(x)$ تسمى دالة كثافة احتمال للمتغير x إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R_x$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

بعض قواعد التكامل المحدود:-

1. $\int_a^b c\,dx = c\int_a^b dx = cx\Big|_a^b = c[b-a] \quad , \quad c \in R$

2. $\int_a^b x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1} - a^{n+1}\right] \quad , n \in R \,, n \neq -1$

3. $\int_a^b \left(f(x) \pm h(x)\right)dx = \int_a^b fxdx \pm \int_a^b h(x)dx$

4. $\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad , c \in R$

مثال: اثبت أن الدالة $0 \le x \le 2 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{2}x$ هي دالة كثافة احتمال.

الحل:

$$1. \quad f(x) = \frac{1}{2}x \ge 0 \qquad \forall x \in [0,2]$$

$$2. \quad \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\int_0^2 xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

إذاً $f(x)$ دالة كثافة احتمال.

نتائج مهمة:

1. احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل قيمة محددة واحدة يساوي صفر أي أن : $P(X = a) = 0 \quad \forall x \in R$

احتمال أن تتراوح قيمة المتغير العشوائي المتصل X بين قيمتين يحسب كالآتي: $P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)dx , \quad c,d \in R , c < d$

التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً بمجال $R_x = [a,b]$ و دالة كثافة احتمال $f(x)$ فان:

$$1. \; E(X) = \mu = \int_a^b x. \; f(x)dx$$

$$2. \; V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b x^2. \; f(x)dx - \mu^2$$

مثال:

إذا كان المتغير العشوائي المتصل X له دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x)=\frac{1}{8}x\ ;\quad 0\le x\le 4$$

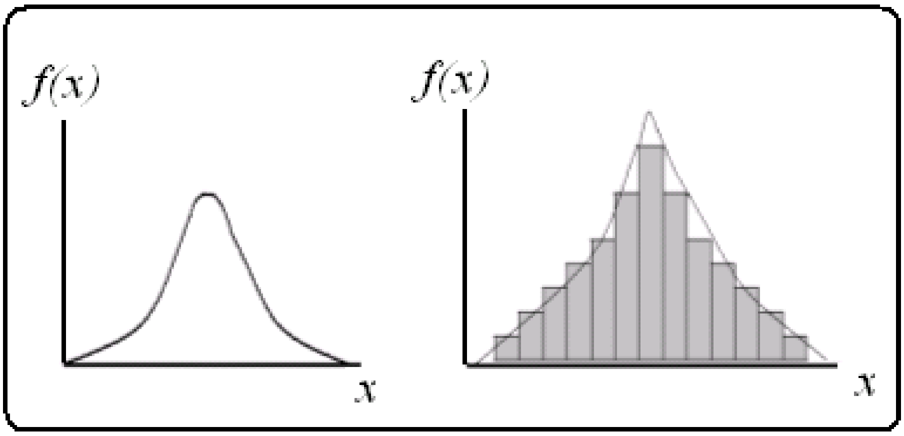
أوجد التوقع والانحراف المعياري.

$$E(X)=\int_0^4 x\cdot\frac{1}{8}x\ dx=\frac{1}{8}\int_0^4 x^2\ dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{64}{24}-0=\frac{64}{24}=\frac{8}{3}$$

$$E(X^2)=\int_0^4 x^2\times\frac{1}{8}x dx=\frac{1}{8}\int_0^4 x^3 dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4=\frac{256}{32}-0=\frac{256}{32}=\frac{32}{4}=8$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=8-\left(\frac{8}{3}\right)^2=8-\frac{64}{9}=\frac{72-64}{9}=\frac{8}{9}=0.9$$

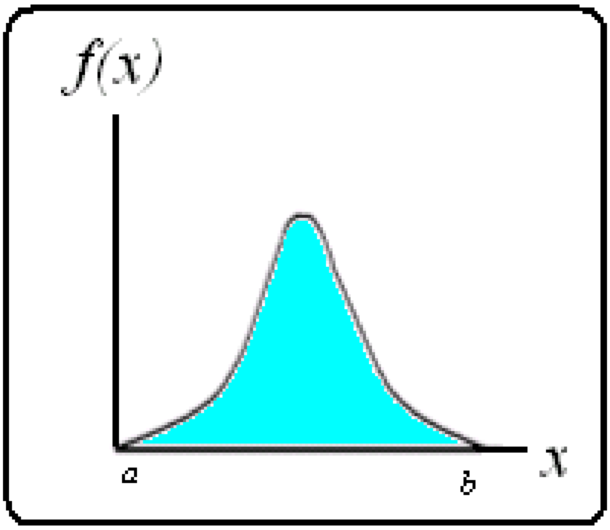
ذكرنا في ما سبق أن المتغير العشوائي المستمر أو المتصل هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى *(a,b)*، أي أن: $\{X=x : a<x<b\}$ ، فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى *(a,b)*. وعند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري نسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل التالي:



<u>التوزيع الطبيعي:</u>

وبفرض أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى $[a, b]$ ، فإن المساحة أسفل المنحنى بين النقطتين a و b تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح.

وتسمى الدالة *f(x)* بدالة كثافة الاحتمال *(p.d.f.)* Probability Distribution Function



<u>الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي المتصل:</u>

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x ، حيث $a < x < b$ ، فإن معادلة الوسط والتباين يمكن كتابتها كما يلي:

$$\mu = E(x) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 \;,\; E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\; dx$$

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي لها دوال كثافة احتمال محددة ومنها:

- التوزيع الطبيعي
- التوزيع الطبيعي (القياسي) المعياري
- توزيع t

- ويعتبر التوزيع الطبيعي Normal Distribution من أكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداماً في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع .

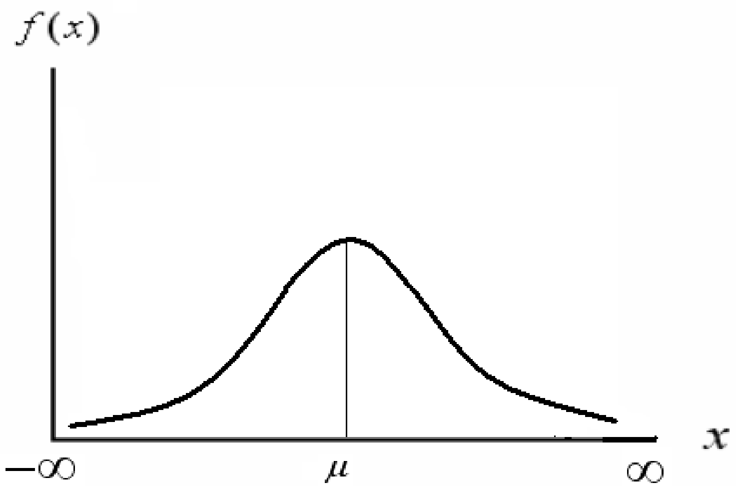
- والتوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي متصل، وهو جرسي الشكل ومتماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد إلى مالا نهاية في الاتجاهين، ولكن معظم المساحة (الاحتمال) تتركز حول الوسط الحسابي .

خصائص التوزيع الطبيعي:

- جرسي أي يشبه الجرس.
- متماثل حول الوسط
- الالتواء (الاطراف) والتفلطح (القمة) يساوي صفر.
- يحوي منوال ووسط ووسيط واحد وذات قيم متساوية بمعنى أن الجزء الذي على يمين الوسط مطابق للجزء الايسر
- الذيلين الايمن والايسر يقتربان من الخط الافقي ولكن لا تلامسه
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد صحيح

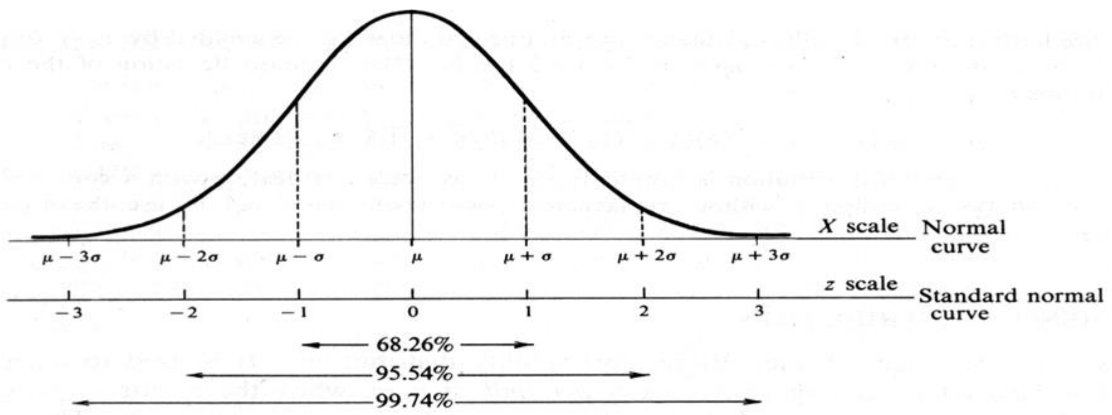
- منحنى دالة الاحتمال للتوزيع الطبيعي له خاصية شكل الجرس. ويتحدد شكل الجرس تماماً لأي توزيع طبيعي خاصة إذا علمنا الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ لهذا التوزيع.
- تدل قيمة μ على مكان مركز الجرس، كما تدل σ على كيفية الانتشار.
- القيمـة الصغـيرة لـ σ تعني أن لدينا جرس طويل مدبب، والقيمة الكبيرة لها تعني أن الجرس قصير ومفرطح.

والشكل التالي يوضح ذلك:



- احتمال وقوع أية مشاهدة على بعد انحراف معياري واحد من الوسط الحسابي هو 0.6827
- احتمال وقوع أي مفردة على بعد إنحر افين معياريين من الوسط الحسابي هو 0.9545

- احتمال وقوع أية مفردة على بعد ثلاثة انحرافات معيارية من الوسط الحسابي هو 0.9973



<u>معالم التوزيع الطبيعي:</u>

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(X) = \mu$ والتباين: $Var(X) = \sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير بالرموز : $X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

<u>شكل دالة كثافة الاحتمال:</u>

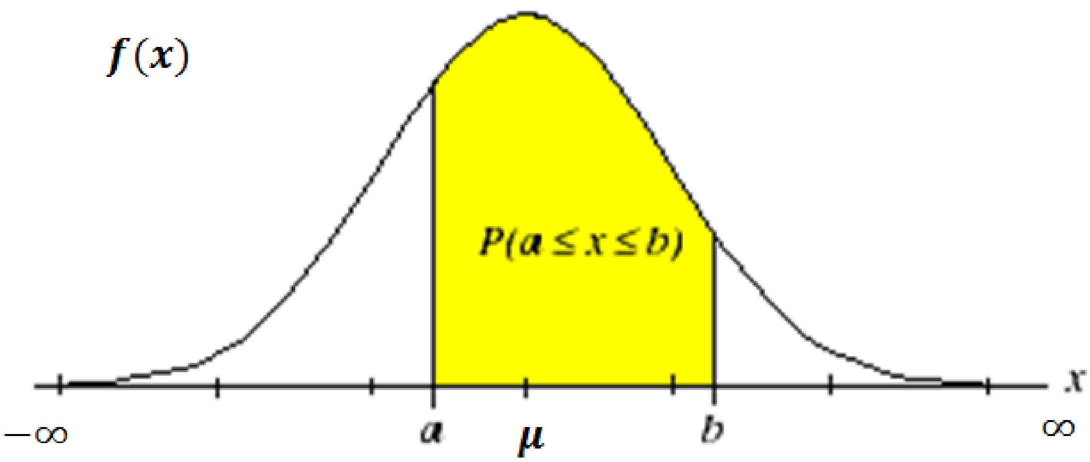
إذا كان لدينا توزيع طبيعي ذو وسط حسابي μ وانحراف معياري σ فإن معادلة منحنى دالة كثافة الاحتمال تكون على الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < \infty, \qquad \pi = 22/7$$

<u>كيفية حساب الاحتمالات:</u>

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(a < X < b)$ وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيون إلى عمل تحويلة رياضية يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات.

حساب الاحتمالات : (التوزيع الطبيعي القياسي)

نلاحظ من الخصائص السابقة للتوزيع الطبيعي أن شكل التوزيع يختلف مع اختلاف المتوسط والتباين ، ولتسهيل حساب الاحتمالات فقد أعد الإحصائيون جدولا خاصا لحساب الاحتمالات المتعلقة بالتوزيع الطبيعي وذلك في حالة واحدة فقط هي عندما تكون قيمة μ تساوي الصفر وقيمة σ تساوي واحد ، ويطلق على التوزيع في هذه الحالة «التوزيع الطبيعي القياسي».

التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري):

العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي القياسي (Z)

إذا كان: $X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$ فإن: $Z \sim N(0, \ 1)$

حيث: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ويطلق على القيمة (z) قيمة قياسية أو معيارية.

ولحساب أي احتمالات تخص التوزيع الطبيعي يجب أولا تحويل القيم إلى قيم قياسية أو معيارية ثم الاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي القياسي لحساب الاحتمالات.

مثال: إذا كان لدينا المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 115 وتباين 49

حول قيم x التالية إلى القيم المعيارية المناظرة لها:

1) $x = 104$

2) $x = 122$

الحل:

1) $z = \frac{104-115}{7} = \frac{-11}{7} = -1.57$

2) $z = \frac{122-115}{7} = \frac{7}{7} = 1$

تمارين المحاضرة الخامسة:

تمرين (1):

إذا كان x متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = k\,x \quad ; \quad 1 < x < 3$$

أحسب:

1. قيمة الثابت k ؟
2. التوقع والانحراف المعياري ؟
3. $P(1 < x < 2)$
4. $P(2 < x < 3)$
5. $E(2 + 3x)$
6. $V(5x - 2)$

تمرين (2):

إذا كان لدينا المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 85 و انحراف معياري 2.5

حول قيم x التالية إلى القيم المعيارية المناظرة لها:

1) $x = 90$

2) $x = 85$

3) $x = 70$

حل تمارين المحاضرة الرابعة:

تمرين (1) إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي:

x	0	2	4	6
P(x)	0.1	0.2	0.4	?

المطلوب :-

١) p(6)
٢) الوسط الحسابي .
٣) التباين .
٤) الانحراف المعياري .
٥) $P(x\geq4)$.
(6 $P(2\leq x\leq5)$

x	0	2	4	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.1	0.2	0.4	0.3	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0	0.4	1.6	1.8	3.8	التوقع
$E(X^2) = x^2. P(x)$	0	0.8	6.4	10.8	18	مربع التوقع
$v(x) =\sigma^2$	$=E(x^2)-E(x)^2$		$=18-3.8^2=3.56$		3.56	التباين
σ	$=\sqrt{\sigma^2}$		$=\sqrt{3.56}$		1.89	الانحراف المعياري

$P(6) = 0.3, \quad P(x \geq 4) = P(4) + P(6) = 0.4 + 0.3 = 0.7$

تمرين (2): إذا كان احتمال انسحاب موظف من العمل قبل بلوغ سن التقاعد هو 60%، وتم اختيار 5 موظفين عشوائيا ، المطلوب :

١. كون جدول توزيع ثنائي الحدين .
٢. أوجد احتمال انسحاب 4 موظفين.
٣. أوجد احتمال استمرار 3 موظفين في العمل حتى التقاعد.
٤. أوجد احتمال انسحاب 3 موظفين على الاقل .

٥. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) .
٦. الانحراف المعياري .

الحل: $P = 0.60$, $(1-P= 0.40)$, $n=5$

1- جدول توزيع ثنائي الحدين:

الناتج	الاحتمال	عدد الموظفين غير المنسحبين	عدد الموظفين المنسحبين
0.01024	$= 5C0 \times (0.60)^0 \times (0.40)^5$	5	0
0.0768	$= 5C1 \times (0.60)^1 \times (0.40)^4$	4	1
0.2304	$= 5C2 \times (0.60)^2 \times (0.40)^3$	3	2
0.3456	$= 5C3 \times (0.60)^3 \times (0.40)^2$	2	3
0.2592	$= 5C4 \times (0.60)^4 \times (0.40)^1$	1	4
0.07776	$= 5C4 \times (0.60)^5 \times (0.40)^0$	0	5

2- احتمال احتمال انسحاب 4 موظفين :-

$P(4) = 0.2592$

3- احتمال استمرار 3 موظفين:-

$P(2) = 0.2304$

4- احتمال انسحاب 3 موظفين على الاقل :-

$P= (p(3) + p(4) + p(5)) = 0.07776+0.2592+0.3456 = 0.68256$

5- القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) :-

$\mu = n \times p = 5 \times 0.60 = 3$

6- الانحراف المعياري =

$$\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{5 \times 0.6 \times 0.4} = 1.095445$$

تمرين (3): إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

- ما نوع المتغير العشوائي؟
- اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.
  - احسب الاحتمالات التالية:
  - احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟
- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.
- حدد شكل التوزيع.

الحل:-

عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو:

$$X:\{x=0,1,2,3,\ldots\}$$

شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\lambda = 3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-3}3^{x}}{x!} \quad , \quad x=0,1,2,\ldots$$

حساب الاحتمالات:

حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، $p(2)$

$$P(2)=\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}=\frac{0.0498(9)}{2\times 1}=0.22404$$

احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X\le 3)=p(3)+p(2)+p(1)+p(0)$$
$$=\left[\frac{3^3}{3!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^1}{1!}+\frac{3^0}{0!}\right]\left[\frac{0.0498}{1}\right]$$
$$=[0.0498]\left(\frac{27}{6}+\frac{9}{2}+\frac{3}{1}+\frac{1}{1}\right)=0.0498(13)=0.6474$$

المحاضره السادسه

تابع... التوزيعات الاحتمالية المتصلة الخاصة

التوزيعات الاحتمالية الخاصة:

1) التوزيع الطبيعي.
2) التوزيع الطبيعي المعياري.
3) توزيع كاي تربيع.
4) توزيع t.
5) توزيع F

١) التوزيع الطبيعي:

الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع طبيعي بوسط حسابي μ وانحراف معياري σ:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

ونكتب رياضيا أن X يتبع توزيع طبيعي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

٢) التوزيع الطبيعي المعياري:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع طبيعي بوسط حسابي μ وانحراف معياري σ فإن المتغير العشوائي $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ يتبع توزيع طبيعي معياري بدالة احتمالية:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}$$

ونكتب رياضيا أن Z يتبع توزيع طبيعي معياري:

$$Z \sim N(0, 1)$$

<u>العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي القياسى (z)</u>

إذا كان: $X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$ فإن: $Z \sim N(0, \ 1)$

حيث: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ويطلق على القيمة (z) قيمة قياسية أو معيارية.

ولحساب أي احتمالات تخص التوزيع الطبيعي يجب أولا تحويل القيم إلى قيم قياسية أو معيارية ثم الاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي القياسي لحساب الاحتمالات.

Tables of the Normal Distribution

Probability Content from -oo to Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

مثال (١): إذا كان z متغير عشوائي له التوزيع الطبيعي المعياري. احسب الاحتمالات الآتية:

1) $P(Z < 1.2)$

2) $P(Z > 0.11)$

3) $P(Z < -0.11)$

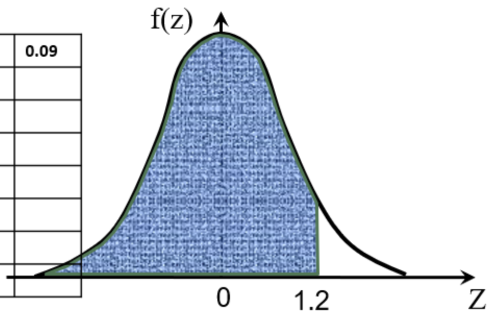
4) $P(0.32 < Z < 1.24)$

الحل:

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة تحت المنحنى ويتم إيجاد هذه المساحة (الاحتمال) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

1. $P(Z < 1.20) = 0.8849$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1									
0.2									
1.2	.8849					.8944			

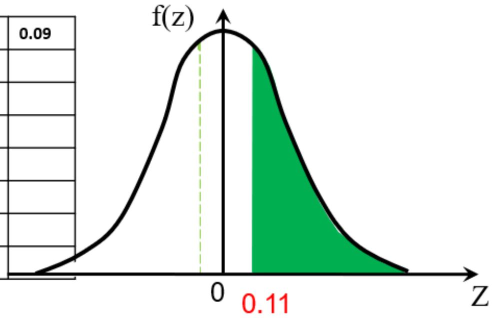


2. $P(Z > 0.11) = 1 - P(Z < 0.11)$

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة الخضراء يمين المنحنى وهى تساوى المساحة الكلية تحت المنحنى (تساوى الواحد) مطروحا منها المساحة البيضاء (من الجدول)

2. $P(Z > 0.11) = 1 - P(Z < 0.11) = 1 - 0.5438 = 0.4562$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1		.5438							
0.2									
1.2	.8849					.8944			

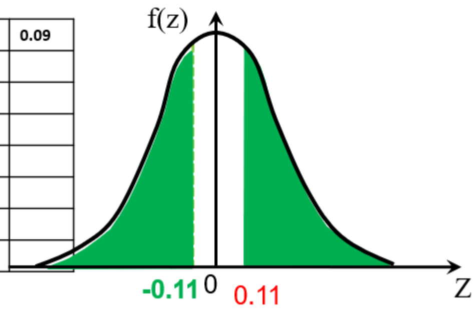


3. $P(Z < -0.11) = 1 - P(Z < 0.11)$

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة الخضراء يسار المنحنى وهى تساوى المساحة الخضراء يمين المنحنى وبالتالي سوف نحسبها بطريقة الفقرة السابقة.

3. $P(Z < -0.11) = P(Z > 0.11) = 1 - P(Z < 0.11) = 1 - 0.5438 = 0.4562$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1		.5438							
0.2									
1.2	.8849					.8944			

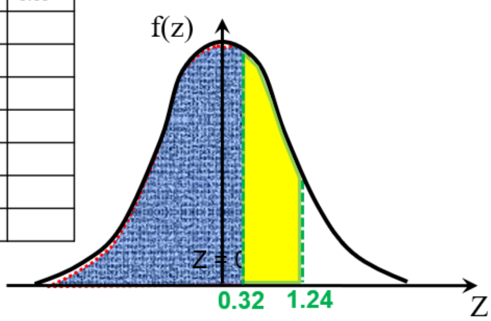


3. $P(0.32 < Z < 1.24) = P(Z < 1.24) - P(Z < 0.32)$

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة الصفراء:

3. $P(0.32 < Z < 1.24) = P(Z < 1.24) - P(Z < 0.32) = 0.8925 - 0.6293 = 0.6270$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1		.5438							
0.2									
0.3			.6293						
1.2	.8849				.8925	.8944			



مثال (٢): إذا كان متوسط طول الطالب يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 170 سم وانحراف معياري 10سم. تم اختيار أحد الطالب عشوائياً ، فأوجد :-

١- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 180 سم.

٢- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 150 سم.

٣- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 175 سم.

٤- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 160 سم.

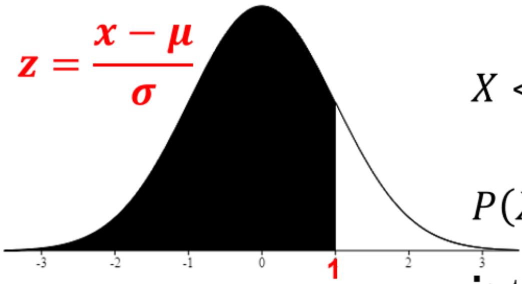
٥- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 175 سم و 185 سم.

٦- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 150 سم و 165 سم.

٨- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 162 سم و 178 سم.

١- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 180 سم (P(X<180)) :-

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$$X < 180 \longrightarrow Z < \frac{180-170}{10}$$

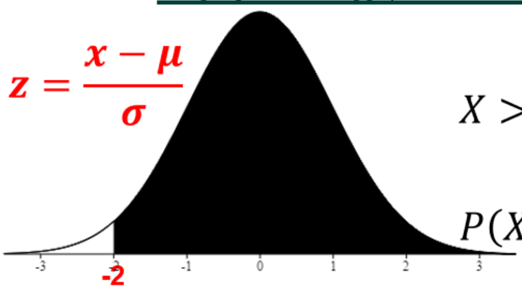
$$P(X < 180) = P(Z < 1)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$P(Z < 1)$ = 0.8413

٢- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 150 سم (P(X>150)) :-

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$$X > 150 \longrightarrow Z > \frac{150-170}{10}$$

$$P(X > 150) = P(Z > -2)$$

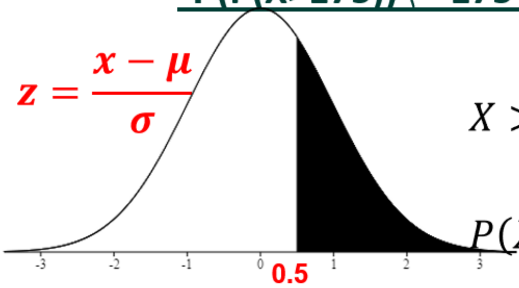
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$P(Z > -2) = P(Z < 2)$

= 0.9772

٣- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 175سم ((P(X>175)) :-

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$$X > 175 \longrightarrow Z > \frac{175-170}{10}$$

$$P(X > 175) \ = \ P(Z > 0.5)$$

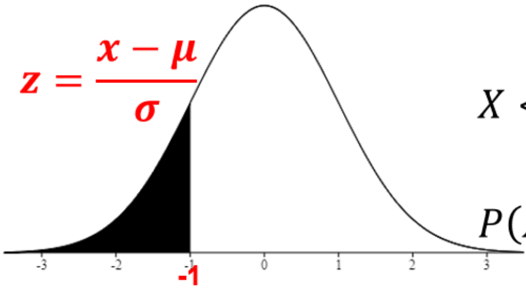
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(Z > 0.5) = 1 - P(Z < 0.5)$$

$$= 1 - 0.6915 = 0.3085$$

٤- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من ١٦٠ سم ((P(X<160)):-

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$$X < 160 \longrightarrow Z < \frac{160-170}{10}$$

$$P(X < 160) \ = \ P(Z < -1)$$

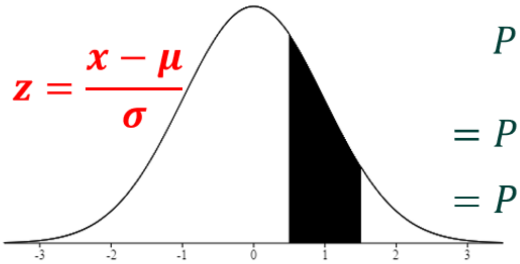
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(Z < -1) = P(Z > 1)$$

$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

٥- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 175 سم و 185 سم ((P(175<X<185)):-

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$$P(175 < X < 185)$$

$$= P\left(\frac{175-170}{10} < Z < \frac{185-170}{10}\right)$$

$$= P(0.5 < Z < 1.5)$$

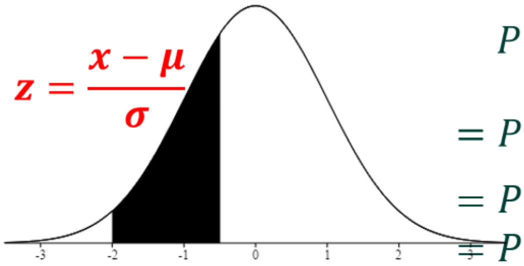
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(Z < 1.5) - P(Z < 0.5)$$

$$= 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$$

٦- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 150 سم و 165 سم ((P(150<X<165):-

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$$P(150 < X < 165)$$
$$= P(\frac{150-170}{10} < Z < \frac{165-170}{10})$$
$$= P(-2 < Z < -0.5)$$
$$= P(0.5 < Z < 2)$$

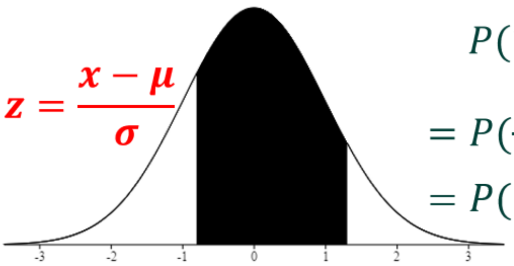
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(Z < 2) - P(Z < 0.5)$$

= **0.9772** - **0.6915** = 0.2857

٧- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 162 سم و 183 سم ((P(162<X<183):-

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$$P(162 < X < 178)$$
$$= P(\frac{162-170}{10} < Z < \frac{183-170}{10})$$
$$= P(-0.8 < Z < 1.3)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$P(Z < 1.3) - P(Z < -0.8)$$
$$P(Z < 1.3) + P(Z < 0.8) - 1$$

= **0.9032** + **0.7881** - 1 = 0.6913

تعليق على المثال السابق: حالات حساب الاحتمالات بالاستعانة بالجدول:

١- أقل من قيمة موجبة.
٢- أكبر من قيمة سالبة.
نفس القاعدة : **احتمال من الجدول مباشرة**

٣- أكبر من قيمة موجبة.
٤- أقل من قيمة سالبة.
نفس القاعدة : **1 – الاحتمال من الجدول**

٥- بين قيمتين موجبتين.
٦- بين قيمتين سالبتين.
نفس القاعدة : **احتمال القيمة الأكبر – احتمال القيمة الأصغر**

٧- بين قيمتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة.
احتمال القيمة الأولى + احتمال القيمة الثانية - 1

٣) توزيع كاي تربيع:

إذا كان المتغير العشوائي Z يتبع توزيع طبيعي معياري فإن المتغير العشوائي $U = Z^2$ يتبع توزيع احتمالي يسمى توزيع كاي تربيع بدرجة حرية تساوي 1

ونكتب رياضيا أن U يتبع توزيع كاي تربيع:

$$U \sim \chi_1^2$$

وإذا كان المتغير المتغير V يمثل مجموع عدد n من المتغيرات التابعة المستقلة التابع كل منها لتوزيع كاي تربيع بدرجة حرية 1:

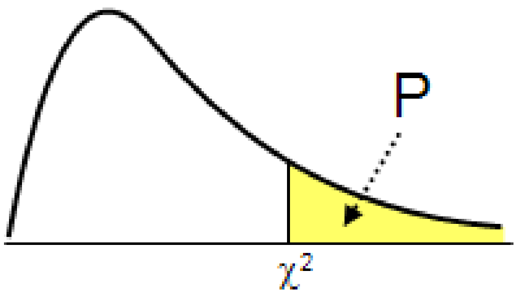
$$V = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

فإن V يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n

ونكتب رياضيا أن V يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n:

$$V \sim \chi_n^2$$

ويتم حساب الاحتمال باستخدام جدول للتوزيع حيث يعطي الجدول نسبة المساحة الموجودة على يمين القيم الحرجة لكل درجة من درجات الحرية n التي تبدأ بالواحد، وكما هو ظاهر في الشكل فإن قيمة الاحتمال هي ما تمثله نسبة المساحة المظللة إلى كامل المساحة.



Chi-Square (χ^2) Distribution

Area to the Right of Critical Value

Degrees of Freedom	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
1	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.257	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892

مثال(٣): احسب الاحتمالات التالية:

1) $P(X \geq 23.209) \quad ; X \sim \chi^2_{10}$

$$P(X \geq 23.209) = 0.01$$

df	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209

2) $P(X \leq 28.87) \quad ; X \sim \chi^2_{18}$

$$P(X \leq 28.87) = 1 - P(X \geq 28.87) = 1 - 0.05 = 0.95$$

df	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
18	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805

مثال(٤): أوجد قيم x التي تحقق الاحتمالات التالية:

1) $P(X \geq x) = 0.99 \quad ; X \sim \chi_7^2$

$$P(X \geq x) = 0.99 \quad \Rightarrow x = 1.239$$

df	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475

2) $P(X \leq x) = 0.975 \quad ; X \sim \chi_{22}^2$

$$P(X \leq x) = 0.975 \quad \Rightarrow P(X \geq x) = 1 - 0.975 = 0.025 \Rightarrow x = 36.781$$

df	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
22	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289

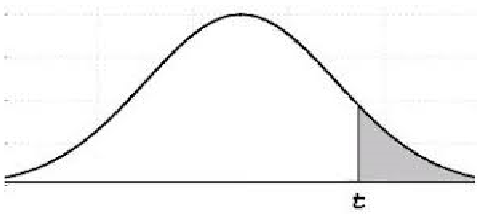
٤) توزيع t:

إذا كان المتغير $Z \sim N(0,1)$ والمتغير $U \sim \chi_n^2$ وكان المتغيران Z، U مستقلين فإن المتغير $\frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$ يتبع توزيع يسمى توزيع t بدرجة حرية n

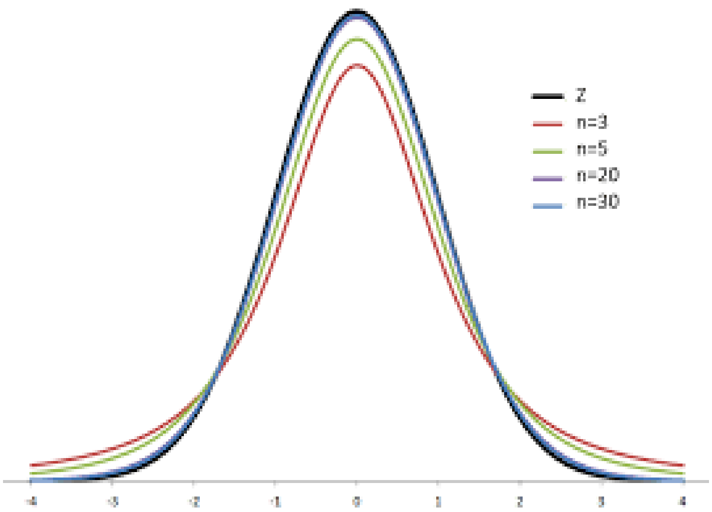
ونكتب ذلك رياضيا:

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}} \sim t_n$$

ويتم حساب الاحتمال باستخدام جدول للتوزيع حيث يعطي الجدول نسبة المساحة الموجودة على يمين القيم الحرجة لكل درجة من درجات الحرية n التي تبدأ بالواحد، وكما هو ظاهر في الشكل فإن قيمة الاحتمال هي ما تمثله نسبة مساحة الجزء المظلل إلى كامل المساحة.



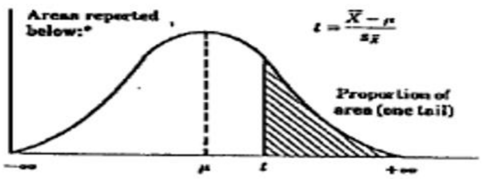
وكلما كانت n كبيرة فإن توزيع t يكون أقل انتشارا وأكثر قربا من شكل توزيع Z، وهذا ما يوضحه الشكل التالي:



الجدول أدناه يعطي قيمة ∝ t

المقابلة للمساحة المظللة وقيمتها ∝

Proportions of Area
for the t Distributions



df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898

df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

مثال(٥): احسب الاحتمالات التالية:

1) $P(X \geq 2.262) \quad ; X \sim t_9$

$$P(X \geq 23.21) = 0.025$$

df	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250

2) $P(X \leq 1.746) \quad ; X \sim t_{16}$

$$P(X \leq 1.746) = 1 - P(X \geq 1.746) = 1 - 0.05 = 0.95$$

df	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921

مثال(٦): أوجد قيم x التي تحقق الاحتمالات التالية:

1) $P(X \geq x) = 0.01 \quad ; X \sim t_5$

$$P(X \geq x) = 0.01 \Rightarrow x = 3.365$$

df	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032

2) $P(X \leq x) = 0.9 \quad ; X \sim t_{20}$

$$P(X \leq x) = 0.9 \Rightarrow P(X \geq x) = 1 - 0.9 = 0.1 \Rightarrow x = 1.325$$

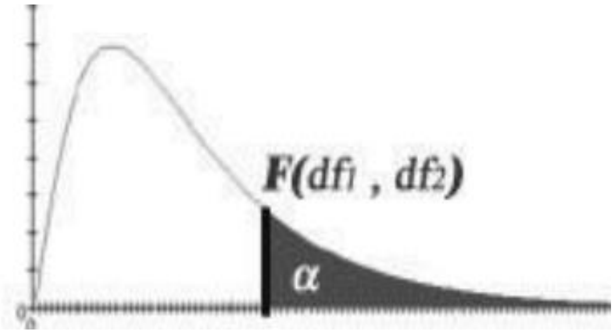
df	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845

٥) توزيع F:

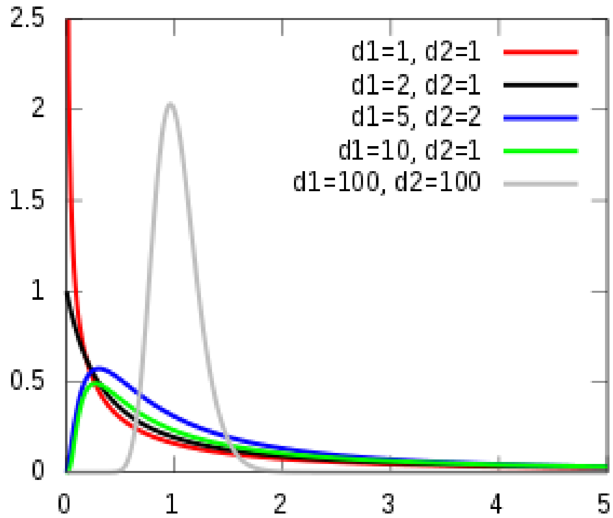
إذا كان المتغير $U \sim \chi^2_m$ والمتغير $V \sim \chi^2_n$ وكان المتغيران U، V مستقلين فإن المتغير $\frac{U/m}{V/n}$ يتبع توزيع يسمى توزيع F بدرجتي حرية m، n ونكتب ذلك رياضيا:

$$\frac{U/m}{V/n} \sim F_{m,n}$$

ويتم حساب الاحتمال باستخدام جدول للتوزيع حيث يعطي الجدول نسبة المساحة الموجودة على يمين القيم الحرجة لكل درجتي حرية m و n، وكما هو ظاهر في الشكل فإن قيمة الاحتمال هي ما تمثله نسبة مساحة الجزء المظلل إلى كامل المساحة، ويتميز توزيع F أن لكل قيمة احتمال (α) جدول خاص بها ولذا فإنه يكتفى بأهم تلك القيم.



ويختلف شكل التوزيع وفقا لدرجتي الحرية؛ كم يظهر في الشكل التالي:



Upper 5% points

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161·4	199·5	215·7	224·6	230·2	234·0	236·8	238·9	240·5	241·9	243·9	245·9	248·0	249·1	250·1	251·1	252·2	253·3	254·3
2	18·51	19·00	19·16	19·25	19·30	19·33	19·35	19·37	19·38	19·40	19·41	19·43	19·45	19·45	19·46	19·47	19·48	19·49	19·50
3	10·13	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·89	8·85	8·81	8·79	8·74	8·70	8·66	8·64	8·62	8·59	8·57	8·55	8·53
4	7·71	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·91	5·86	5·80	5·77	5·75	5·72	5·69	5·66	5·63
5	6·61	5·79	5·41	5·19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·77	4·74	4·68	4·62	4·56	4·53	4·50	4·46	4·43	4·40	4·36
6	5·99	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	4·00	3·94	3·87	3·84	3·81	3·77	3·74	3·70	3·67
7	5·59	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·64	3·57	3·51	3·44	3·41	3·38	3·34	3·30	3·27	3·23
8	5·32	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·35	3·28	3·22	3·15	3·12	3·08	3·04	3·01	2·97	2·93
9	5·12	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3·18	3·14	3·07	3·01	2·94	2·90	2·86	2·83	2·79	2·75	2·71
10	4·96	4·10	3·71	3·48	3·33	3·22	3·14	3·07	3·02	2·98	2·91	2·85	2·77	2·74	2·70	2·66	2·62	2·58	2·54
11	4·84	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2·90	2·85	2·79	2·72	2·65	2·61	2·57	2·53	2·49	2·45	2·40
12	4·75	3·89	3·49	3·26	3·11	3·00	2·91	2·85	2·80	2·75	2·69	2·62	2·54	2·51	2·47	2·43	2·38	2·34	2·30
13	4·67	3·81	3·41	3·18	3·03	2·92	2·83	2·77	2·71	2·67	2·60	2·53	2·46	2·42	2·38	2·34	2·30	2·25	2·21
14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·76	2·70	2·65	2·60	2·53	2·46	2·39	2·35	2·31	2·27	2·22	2·18	2·13
15	4·54	3·68	3·29	3·06	2·90	2·79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·48	2·40	2·33	2·29	2·25	2·20	2·16	2·11	2·07
16	4·49	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·42	2·35	2·28	2·24	2·19	2·15	2·11	2·06	2·01
17	4·45	3·59	3·20	2·96	2·81	2·70	2·61	2·55	2·49	2·45	2·38	2·31	2·23	2·19	2·15	2·10	2·06	2·01	1·96
18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·58	2·51	2·46	2·41	2·34	2·27	2·19	2·15	2·11	2·06	2·02	1·97	1·92
19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·54	2·48	2·42	2·38	2·31	2·23	2·16	2·11	2·07	2·03	1·98	1·93	1·88
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·51	2·45	2·39	2·35	2·28	2·20	2·12	2·08	2·04	1·99	1·95	1·90	1·84
21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·49	2·42	2·37	2·32	2·25	2·18	2·10	2·05	2·01	1·96	1·92	1·87	1·81
22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·46	2·40	2·34	2·30	2·23	2·15	2·07	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·78
23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·44	2·37	2·32	2·27	2·20	2·13	2·05	2·01	1·96	1·91	1·86	1·81	1·76
24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·42	2·36	2·30	2·25	2·18	2·11	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·79	1·73
25	4·24	3·39	2·99	2·76	2·60	2·49	2·40	2·34	2·28	2·24	2·16	2·09	2·01	1·96	1·92	1·87	1·82	1·77	1·71
26	4·23	3·37	2·98	2·74	2·59	2·47	2·39	2·32	2·27	2·22	2·15	2·07	1·99	1·95	1·90	1·85	1·80	1·75	1·69
27	4·21	3·35	2·96	2·73	2·57	2·46	2·37	2·31	2·25	2·20	2·13	2·06	1·97	1·93	1·88	1·84	1·79	1·73	1·67
28	4·20	3·34	2·95	2·71	2·56	2·45	2·36	2·29	2·24	2·19	2·12	2·04	1·96	1·91	1·87	1·82	1·77	1·71	1·65
29	4·18	3·33	2·93	2·70	2·55	2·43	2·35	2·28	2·22	2·18	2·10	2·03	1·94	1·90	1·85	1·81	1·75	1·70	1·64
30	4·17	3·32	2·92	2·69	2·53	2·42	2·33	2·27	2·21	2·16	2·09	2·01	1·93	1·89	1·84	1·79	1·74	1·68	1·62
40	4·08	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·25	2·18	2·12	2·08	2·00	1·92	1·84	1·79	1·74	1·69	1·64	1·58	1·51
60	4·00	3·15	2·76	2·53	2·37	2·25	2·17	2·10	2·04	1·99	1·92	1·84	1·75	1·70	1·65	1·59	1·53	1·47	1·39
120	3·92	3·07	2·68	2·45	2·29	2·17	2·09	2·02	1·96	1·91	1·83	1·75	1·66	1·61	1·55	1·50	1·43	1·35	1·25
∞	3·84	3·00	2·60	2·37	2·21	2·10	2·01	1·94	1·88	1·83	1·75	1·67	1·57	1·52	1·46	1·39	1·32	1·22	1·00

$F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{S_1}{\nu_1}\Big/\dfrac{S_2}{\nu_2}$, where $s_1^2 = S_1/\nu_1$ and $s_2^2 = S_2/\nu_2$ are independent mean squares estimating a common variance σ^2 and based on ν_1 and ν_2 degrees of freedom, respectively.

Upper 1% points

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999·5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98·50	99·00	99·17	99·25	99·30	99·33	99·36	99·37	99·39	99·40	99·42	99·43	99·45	99·46	99·47	99·47	99·48	99·49	99·50
3	34·12	30·82	29·46	28·71	28·24	27·91	27·67	27·49	27·35	27·23	27·05	26·87	26·69	26·60	26·50	26·41	26·32	26·22	26·13
4	21·20	18·00	16·69	15·98	15·52	15·21	14·98	14·80	14·66	14·55	14·37	14·20	14·02	13·93	13·84	13·75	13·65	13·56	13·46
5	16·26	13·27	12·06	11·39	10·97	10·67	10·46	10·29	0·16	10·05	9·89	9·72	9·55	9·47	9·38	9·29	9·20	9·11	9·02
6	13·75	10·92	9·78	9·15	8·75	8·47	8·26	8·10	7·98	7·87	7·72	7·56	7·40	7·31	7·23	7·14	7·06	6·97	6·88
7	12·25	9·55	8·45	7·85	7·46	7·19	6·99	6·84	6·72	6·62	6·47	6·31	6·16	6·07	5·99	5·91	5·82	5·74	5·65
8	11·26	8·65	7·59	7·01	6·63	6·37	6·18	6·03	5·91	5·81	5·67	5·52	5·36	5·28	5·20	5·12	5·03	4·95	4·86
9	10·56	8·02	6·99	6·42	6·06	5·80	5·61	5·47	5·35	5·26	5·11	4·96	4·81	4·73	4·65	4·57	4·48	4·40	4·31
10	10·04	7·56	6·55	5·99	5·64	5·39	5·20	5·06	4·94	4·85	4·71	4·56	4·41	4·33	4·25	4·17	4·08	4·00	3·91
11	9·65	7·21	6·22	5·67	5·32	5·07	4·89	4·74	4·63	4·54	4·40	4·25	4·10	4·02	3·94	3·86	3·78	3·69	3·60
12	9·33	6·93	5·95	5·41	5·06	4·82	4·64	4·50	4·39	4·30	4·16	4·01	3·86	3·78	3·70	3·62	3·54	3·45	3·36
13	9·07	6·70	5·74	5·21	4·86	4·62	4·44	4·30	4·19	4·10	3·96	3·82	3·66	3·59	3·51	3·43	3·34	3·25	3·17
14	8·86	6·51	5·56	5·04	4·69	4·46	4·28	4·14	4·03	3·94	3·80	3·66	3·51	3·43	3·35	3·27	3·18	3·09	3·00
15	8·68	6·36	5·42	4·89	4·56	4·32	4·14	4·00	3·89	3·80	3·67	3·52	3·37	3·29	3·21	3·13	3·05	2·96	2·87
16	8·53	6·23	5·29	4·77	4·44	4·20	4·03	3·89	3·78	3·69	3·55	3·41	3·26	3·18	3·10	3·02	2·93	2·84	2·75
17	8·40	6·11	5·18	4·67	4·34	4·10	3·93	3·79	3·68	3·59	3·46	3·31	3·16	3·08	3·00	2·92	2·83	2·75	2·65
18	8·29	6·01	5·09	4·58	4·25	4·01	3·84	3·71	3·60	3·51	3·37	3·23	3·08	3·00	2·92	2·84	2·75	2·66	2·57
19	8·18	5·93	5·01	4·50	4·17	3·94	3·77	3·63	3·52	3·43	3·30	3·15	3·00	2·92	2·84	2·76	2·67	2·58	2·49
20	8·10	5·85	4·94	4·43	4·10	3·87	3·70	3·56	3·46	3·37	3·23	3·09	2·94	2·86	2·78	2·69	2·61	2·52	2·42
21	8·02	5·78	4·87	4·37	4·04	3·81	3·64	3·51	3·40	3·31	3·17	3·03	2·88	2·80	2·72	2·64	2·55	2·46	2·36
22	7·95	5·72	4·82	4·31	3·99	3·76	3·59	3·45	3·35	3·26	3·12	2·98	2·83	2·75	2·67	2·58	2·50	2·40	2·31
23	7·88	5·66	4·76	4·26	3·94	3·71	3·54	3·41	3·30	3·21	3·07	2·93	2·78	2·70	2·62	2·54	2·45	2·35	2·26
24	7·82	5·61	4·72	4·22	3·90	3·67	3·50	3·36	3·26	3·17	3·03	2·89	2·74	2·66	2·58	2·49	2·40	2·31	2·21
25	7·77	5·57	4·68	4·18	3·85	3·63	3·46	3·32	3·22	3·13	2·99	2·85	2·70	2·62	2·54	2·45	2·36	2·27	2·17
26	7·72	5·53	4·64	4·14	3·82	3·59	3·42	3·29	3·18	3·09	2·96	2·81	2·66	2·58	2·50	2·42	2·33	2·23	2·13
27	7·68	5·49	4·60	4·11	3·78	3·56	3·39	3·26	3·15	3·06	2·93	2·78	2·63	2·55	2·47	2·38	2·29	2·20	2·10
28	7·64	5·45	4·57	4·07	3·75	3·53	3·36	3·23	3·12	3·03	2·90	2·75	2·60	2·52	2·44	2·35	2·26	2·17	2·06
29	7·60	5·42	4·54	4·04	3·73	3·50	3·33	3·20	3·09	3·00	2·87	2·73	2·57	2·49	2·41	2·33	2·23	2·14	2·03
30	7·56	5·39	4·51	4·02	3·70	3·47	3·30	3·17	3·07	2·98	2·84	2·70	2·55	2·47	2·39	2·30	2·21	2·11	2·01
40	7·31	5·18	4·31	3·83	3·51	3·29	3·12	2·99	2·89	2·80	2·66	2·52	2·37	2·29	2·20	2·11	2·02	1·92	1·80
60	7·08	4·98	4·13	3·65	3·34	3·12	2·95	2·82	2·72	2·63	2·50	2·35	2·20	2·12	2·03	1·94	1·84	1·73	1·60
120	6·85	4·79	3·95	3·48	3·17	2·96	2·79	2·66	2·56	2·47	2·34	2·19	2·03	1·95	1·86	1·76	1·66	1·53	1·38
∞	6·63	4·61	3·78	3·32	3·02	2·80	2·64	2·51	2·41	2·32	2·18	2·04	1·88	1·79	1·70	1·59	1·47	1·32	1·00

$F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{S_1}{\nu_1}\Big/\dfrac{S_2}{\nu_2}$, where $s_1^2 = S_1/\nu_1$ and $s_2^2 = S_2/\nu_2$ are independent mean squares estimating a common variance σ^2 and based on ν_1 and ν_2 degrees of freedom, respectively.

مثال(٧): احسب الاحتمالات التالية:

1) $P(X \geq 2.85) \quad ; X \sim F_{6,14}$

$$P(X \geq 2.85) = 0.05$$

$\nu_2 \diagdown \nu_1$	6
14	2.85

$$\alpha = 0.05$$

2) $P(X \leq 2.74) \quad ; X \sim F_{20,24}$

$$P(X \leq 2.74) = 1 - P(X \geq 2.74) = 1 - 0.01 = 0.99$$

$\nu_2 \diagdown \nu_1$	20
24	2.74

$$\alpha = 0.01$$

مثال(٨): أوجد قيم x التي تحقق الاحتمال التالي:

$$P(X \geq x) = 0.01 \quad ; X \sim F_{12,5}$$

$$P(X \geq x) = 0.01 \Longrightarrow x = 9.89$$

$\nu_2 \diagdown \nu_1$	12
5	9.89

$$\alpha = 0.01$$

تمارين المحاضرة السادسة

تمرين (١): إذا كان لدينا المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 115 وتباين 49؛ فاحسب الاحتمالات التالية:

1) $P(X \leq 105) =$

2) $P(X \geq 120) =$

تمرين (٢):افترض أن إدارة المرور بالأحساء وضعت جهازا للرادار على طريق الدمام عند مدخل المبرز وذلك لضبط السيارات المسرعة في فترة معينة من اليوم، افترض أن x تمثل السرعة في الساعة للسيارات التي تمر بمدخل المبرز في فترة عمل الرادار، إذا كانت x تتوزع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 60 ميلا وتباينه 25 ميلا، أوجد التالي:

١) نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا في الساعة .

٢) عدد السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا من بين 5000 سيارة.

تمرين (٣) احسب الاحتمالات التالية:

1) $P(X \leq 6.84) \quad ; X \sim \chi^2_{19}$

2) $P(X \geq 2.485) \quad ; X \sim t_{25}$

3) $P(X \geq 3.52) \quad ; X \sim F_{15,15}$

حل تمارين المحاضرة الخامسة:

تمرين (١):

إذا كان x متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = k\,x \quad ; \quad 1 < x < 3$$

أحسب:

1. قيمة الثابت k ؟
2. التوقع والانحراف المعياري ؟
3. $P(1 < x < 2)$
4. $P(2 < x < 3)$
5. $E(2+3x)$
6. $V(5x-2)$

1) $\int_1^3 kx\,dx = k\frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = k\frac{9-1}{2} = 4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

$$2)\ E(X) = \int_1^3 \frac{1}{4}x^2\,dx = \frac{1}{4}\times\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{1}{4}\times\frac{27-1}{3} = \frac{1}{4}\times\frac{26}{3} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

$$E(X^2) = \int_1^3 \frac{1}{4}x^3\,dx = \frac{1}{4} \times \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{1}{4} \times \frac{81-1}{4} = \frac{80}{16} = 5$$

$$Var(X) = 5 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = 5 - \frac{169}{36} = \frac{180-169}{36} = \frac{11}{36}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{11}}{36}$$

3) $\mathrm{P}(1 < x < 2) = \int_1^2 \frac{1}{4}x\,dx = \frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{4} \times \frac{4-1}{2} = \frac{3}{8}$

4) $\mathrm{P}(2 < x < 3) = 1 - \mathrm{P}(1 < x < 2) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

تمرين (٢):

إذا كان لدينا المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 85 وانحراف معياري 2.5

حول قيم x التالية إلى القيم المعيارية المناظرة لها:

1) $x = 90 \implies z = \frac{90-85}{2.5} = \frac{5}{2.5} = 2$

2) $x = 85 \implies z = \frac{85-85}{2.5} = \frac{0}{2.5} = 0$

3) $x = 70 \implies z = \frac{70-85}{2.5} = \frac{-15}{2.5} = -6$

المحاضره السابعه

توزيعات المعاينة

Sampling Distributions

توزيعات المعاينة: مقدمة

تهتم نظرية العينات بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه فيما يسمى بالاستدلال الإحصائي statistical inference

ويعتبر الاستدلال الإحصائي من أهم الأدوات المساعدة على اتخاذ القرارات في الاقتصاد والأعمال والعلوم، ويشمل الاستدلال الإحصائي اختبار الفرضيات والتقدير.

ولكى يكون التقدير واختبار الفرضيات سليماً، ينبغي أن يبنى على عينة ممثلة للمجتمع، وهناك عدة طرق لأخذ العينات من المجتمع لاستخدامها في الاستدلال الإحصائي ومن أشهر هذه الطرق المعاينة العشوائية حيث تكون لكل مفرده من مفردات المجتمع نفس فرصة الاختيار في العينة.

توزيعات المعاينة: المجتمع والعينة

المجتمع Population

لأي مجموعة من المفردات تشترك في صفة أو صفات محددة وتكون موضوع دراسة أو بحث ، فإن هذه المجموعة يطلق عليها إحصائيا مجتمع الدراسة أو اختصاراً المجتمع Population.

والمجتمع قد يكون مجموعة ما من البشر أو أشجار أنواع معينة من الفاكهة أو الحيوانات الزراعية أو إنتاج دولة ما لسلع معينه خلال فترة زمنية محدده...الخ.

والمجتمع قد يكون محدوداً إذا كان يمكن حصر عدد أفراده مثل سكان مدينة ما أو طلاب مرحلة تعليمية معينة ، وقد يكون المجتمع غير محدود (لانهائي) إذا كان لا يمكن حصر عدد أفراده مثل النجوم والكواكب أو الكائنات الحية بمياه المحيطات والأنهار.

وعند دراسة صفة ما أو صفات معينه لمجتمع ما فإن البيانات الإحصائية عن تلك الصفة أو الصفات تجمع بأحد أسلوبين:

أولاً: أسلوب الحصر الشامل (census): وفيه تجمع البيانات عن كل مفرده من مفردات المجتمع، وهذا الأسلوب لا يتبع عادة إلا في حالة التعدادات التي تجريها الدول وتدعمها بإمكانيات ضخمه مثل تعدادات السكان والتعدادات الصناعية والتعدادات الزراعية.

ثانيا: أسلوب المعاينة (Sampling): وفيه يتم جمع البيانات عن جزء من مفردات المجتمع يختار بطريقة أو بأخرى ويطلق عليه عينة (Sample) ثم بعد ذلك يتم تعميم نتائج الدراسة على المجتمع بأكمله.

يتميز أسلوب المعاينة عن أسلوب الحصر الشامل بمزايا عديده منها:

1) يؤدي استخدام العينات العشوائية إلى خفض تكاليف الدراسات الميدانية بسبب صغر حجم العينة بالنسبة إلى حجم المجتمع وهو ما يؤدي إلى تخفيض الأعباء الإدارية والفنية التي تتطلبها أي دراسة ميدانية.

2) يتحقق وفر واضح في الوقت الذي ينفق في دراسة ميدانية على أساس عينة بدلاً من الحصر الشامل وتتضح أهمية الوقت عندما نقوم بدراسة ظاهرة تتغير بمرور الوقت، فتكون البيانات المجموعة والنتائج وقت ظهورها غير مطابقة لو اقع المجتمع وتصبح النتائج ذات قيمه محدودة بعد أن فقدت عنصر المطابقة مع و اقع الظاهرة وتوزيعها الحالي في المجتمع.

3) في المجتمعات غير المحدودة (اللانهائية) مثل مجتمع الكائنات الحية في البحار والمحيطات لا يمكن أن تتم الدراسة على أساس الحصر الشامل ولكن لابد وأن تتم الدراسة بأسلوب المعاينة.

4) أيضاً هناك بعض الاختبارات لابد وأن تتم بأسلوب المعاينة لأن إجراء مثل هذه الاختبارات على أساس الحصر الشامل يؤدي إلى تلف المادة المختبرة أو هلاكها.. فاختبار صلاحية شحنة من المفرقعات مثلاً لابد وأن يتم على أساس العينة وبالمثل تحليل دم المرضى يتم على أساس عينة.

توزيعات المعاينة: أنواع العينات

تنقسم العينات عادة إلى قسمين رئيسين وهما عينات عشوائية وعينات غير عشوائية

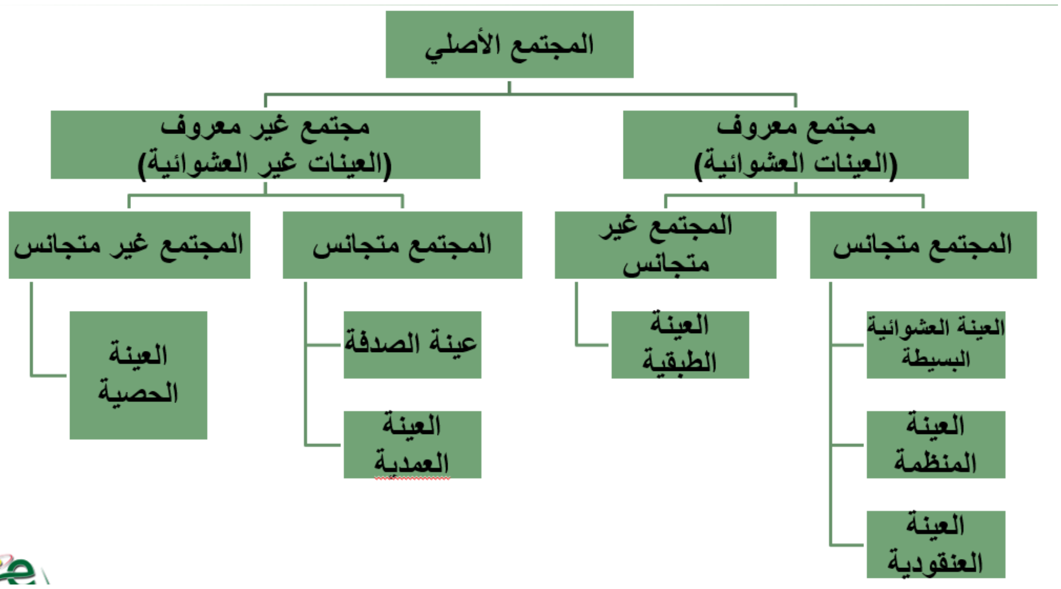
1. العينات العشوائية:

وهي تلك العينات التي يتم اختيار مفرداتها حسب خطه إحصائية لا يكون فيها للباحث أو لمفردات العينة دخل في اختيار أي مفردة فيها ، حيث يتم الاختيار باستخدام أساليب معينة تلعب الصدفة خلالها الدور الأول في اختيار المفردة ولكن بشرط أن يتحقق لجميع المفردات احتمال ثابت ومحدد للاختيار. والعينات العشوائية إذا ما تم اختيارها بالطريقة العلمية السليمة والمناسبة يمكن أن تكفل درجه عالية من دقة التمثيل للمجتمعات المسحوبة منها لذلك فهي الوسيلة الأساسية في حالة البحوث العلمية الدقيقة.

2. العينات غير العشوائية:

وهي تلك العينات التي لا تكفل لجميع مفردات المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، وغالباً يتدخل الباحث في عملية الاختيار بصورة أو بأخرى.

وفيما يلي استعراض لأهم أنواع العينات العشوائية والعينات غير العشوائية.



توزيعات المعاينة: أخطاء البيانات الإحصائية

تتعرض البيانات الإحصائية التي يتم جمعها إلى نوعين من الأخطاء:

1) خطأ التميز أو التحيز: وهو ذلك الخطأ الناتج عن مصادر متعددة، منها أخطاء في تصميم البحث أو التجربة أو أخطاء فنيه أثناء جمع البيانات أو خلال العمليات الحسابية التي تتم على البيانات المتجمعة.. أخطاء التميز تزداد بازدياد الفروق بين الإمكانيات (المادية والفنية) اللازم تو افرها لضمان أقصى درجة دقة ممكنه وبين الإمكانيات الفعلية المتاحة للباحث.

2) خطأ المعاينة العشوائية أو خطأ الصدفة: وهو الخطأ الناتج عن فروق الصدفة بين مفردات المجتمع التي دخلت العينة وبين تلك المفردات التي لم تشأ الصدفة أن تدخل العينة.

توزيعات المعاينة: المعالم والإحصاءات

اعتاد البعض على معاملة القيم التي يحصل عليها من العينة وكأنها قيم مجتمعها، وهذا خطأ فادح. فلكي يستدل على خصائص مجتمع الدراسة تعتمد معادلات عديدة ومتنوعة حسب نوع العينة.

فالمقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات مجتمع الدراسة بأكمله يطلق عليها معالم المجتمع (Parameters of population) ، أما المقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات عينة مسحوبة من مجتمع الدراسة فيطلق عليها إحصاءات (Statistics).

وللتفرقة بين المعالم والإحصاءات يجب أن نرمز لكل منها برموز تختلف عن رموز الأخرى، على سبيل المثال يرمز للمتوسط الحسابي للمجتمع بالرمز μ بينما يرمز للمتوسط الحسابي للعينة بالرمز $\bar{X}$ ، أيضاً يرمز للانحراف المعياري للمجتمع بالرمز σ بينما يرمز للانحراف المعياري للعينة بالرمز S ... وهكذا

وتعتبر كل إحصاءه بمثابة تقدير أو قيمة تقديرية لمعلمة المجتمع المناظرة، فيكون المتوسط الحسابي المحسوب من بيانات العينة تقديرا لمعلمة المجتمع المناظرة وهي المتوسط الحسابي المسحوب منه هذه العينة وهكذا...

إن الهدف من اخذ العينة هو معرفة خصائص مجتمعها، فاخذ العينات ليس القصد منه العينة لذاتها بل المجتمع الذي أخذت منه ، فالعينة وسيلة وليست الهدف.

وتقدم العينات تقديرات لخصائص مجتمعها، وهذه التقديرات تدور حول القيم الحقيقية لمجتمع الدراسة. فمثلا متوسط العينة ليس هو متوسط مجتمعها، بل قيمة تمثل العينة ذاتها ، ويمكن الاعتماد على هذه القيمة في تقدير القيمة المحتملة لمتوسط المجتمع وفق حدود معينة للثقة.

وإذا أخذت جميع العينات المحتملة من مجتمعها فيتوقع أن تكون متوسطات العينات موزعة بالتساوي حول متوسط مجتمع الدراسة. بعبارة أخرى، إن متوسط متوسطات العينات يساوي متوسط مجتمعها.

توزيعات المعاينة

هو ذلك التوزيع التكراري لأحد المقاييس الإحصائية المحسوب من بيانات جميع العينات العشوائية ذات الحجم الواحد والتي يمكن سحبها من مجتمع إحصائي واحد.

نفرض أننا أخذنا عينه حجمها n من مجتمع ما، ثم حسبنا بعض المقاييس الإحصائية مثل المتوسط الحسابي، التباين، ... فإن كل مقياس من هذه المقاييس يعتبر متغير عشوائي في ذاته يختلف من عينة إلى أخرى – هذا المتغير العشوائي يخضع لتوزيع معين – هذا التوزيع يسمى بتوزيع المعاينة.

فمثلاً نقول إن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي هو عبارة عن توزيع جميع المتوسطات الحسابية للعينات المأخوذة من نفس هذا المجتمع ذو الحجم n، وكذلك فإن توزيع المعاينة للتباين هو توزيع جميع التباينات المحسوبة من عينات لها نفس الحجم n ومأخوذة من نفس المجتمع ، وهكذا ...

إذا أخذنا عينات متكررة من مجتمع ما وقمنا بحساب متوسط كل عينة، فإننا نجد أن معظم هذه المتوسطات تختلف عن بعضها البعض، ويسمى التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات " توزيع المعاينة للوسط "

ونلخص ما سبق بهذه النظرية:

إذا X يتبع توزيع وسطه μ وتباينه σ^2، وكان $\overline{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من مجتمع كبير جدا أو لا نهائي فإن:

$$E(\overline{X}) = \mu$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

1) توزيع المعاينة للوسط الحسابي$(\overline{X})$.

2) توزيع المعاينة للنسبة $(\overline{P})$.

3) توزيع المعاينة لتباين العينة (S^2).

4) توزيع المعاينة للفرق بين وسطين حسابيين $(\overline{X}-\overline{Y})$.

5) توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$.

١) توزيع المعاينة للوسط الحسابي$(\overline{X})$: الحالة الأولى

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم.

التوزيع:

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

حيث:

$\overline{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري

مثال (1): أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي معدله 2900 غرام و انحرافه المعياري 600 غرام، احسب مما يلي:

1) التوقع والتباين للوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة.

2) احتمال أن يزيد الوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة عن 3100 غرام.

3) احتمال أن يتراوح الوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة ما بين 2700غرام، 3200 غرام

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العينة العشوائية. (3) البيانات كمية (أوزان).

(4) تباين المجتمع معلوم.

المطلوب:

1) التوقع والتباين للوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة.

وسط العينة $\bar{X}$ يتبع توزيع طبيعي بوسط وتباين:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu = 2900 \ , Var(\bar{X}) = \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(600)^2}{9}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 2900}{600/\sqrt{9}} \sim N(0,1)$$

2) احتمال أن يزيد الوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة عن 3100 غرام.

$$P(\bar{X} > 3100) = P\left(\frac{\bar{X} - 2900}{600/\sqrt{9}} > \frac{3100 - 2900}{600/\sqrt{9}}\right)$$
$$= P(Z > 1)$$
$$= 1 - P(Z < 1)$$
$$= 1 - 0.8413$$
$$= 0.1587$$

z	0.00
1.0	0.8413

3) احتمال أن يتراوح الوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة ما بين 2700غرام، 3200 غرام

$$P(2700 < \bar{X} < 3200)$$
$$= P\left(\frac{2700 - 2900}{600/\sqrt{9}} < \frac{\bar{X} - 2900}{600/\sqrt{9}} < \frac{3200 - 2900}{600/\sqrt{9}}\right)$$
$$= P(-1 < Z < 1.5)$$
$$= P(Z < 1.5) + P(Z < 1) - 1$$
$$= 0.9332 + 0.8413 - 1$$
$$= 0.7745$$

z	0.00
1.0	0.8413
1.5	09332

١) توزيع المعاينة للوسط الحسابي $(\overline{X})$: الحالة الثانيه

الشروط:

(1) التوزيع: غير طبيعي. (2) العشوائية. (3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم. (5) حجم العينة كبير.

التوزيع:

$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ وتسمى بنظرية النهاية المركزية..

حيث:

$\overline{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال (2): تخضع معاملات الذكاء لطلبة الصفوف الأولية في إحدى المحافظات لتوزيع وسطه 110 وتباينه 144. أخذت عينة عشوائية حجمها 100 من هؤلاء الطلبة؛ فما احتمال يتراوح الوسط الحسابي لمعاملات الذكاء في العينة بين 105، 115

الحل:

الخصائص:

(1) التوزيع: غير طبيعي. (2) العشوائية. (3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم. (5) حجم العينة كبير.

إذن سوف نستخدم نظرية النهاية المركزية يعني $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري:

$$P(105 < \overline{X} < 115)$$
$$= P\left(\frac{105-110}{12/\sqrt{100}} < \frac{\overline{X}-110}{12/\sqrt{100}} < \frac{115-110}{12/\sqrt{100}}\right)$$
$$= P(-4.17 < Z < 4.17)$$
$$= 0.99999 + 0.99999 - 1$$
$$\approx 1$$

١) توزيع المعاينة للوسط الحسابي $(\overline{X})$: الحالة الثالثة

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع مجهول

(5) . حجم العينة صغير ($n \leq 30$).

التوزيع

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

حيث:

$\overline{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

s: الانحراف المعياري للعينة.

n: عدد عناصر العينة.

$t_{(n-1)}$: توزيع t بدرجة حرية $n-1$

مثال (3): تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي 65 درجة. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا بانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ فما احتمال أن يزيد الوسط الحسابي لدرجات طلاب العينة عن 70 درجة؟

الحل:

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) نوع البيانات كمية.

(4) تباين المجتمع مجهول. (5) حجم العينة صغير.

إذن سوف يتبع $T = \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ توزيع t بدرجة حرية 15

$$P(\overline{X} > 80) = P\left(\frac{\overline{X} - 65}{8/\sqrt{16}} > \frac{80 - 65}{8/\sqrt{16}}\right)$$
$$= P(T > 2.5)$$
$$\approx 0.01$$

ν	مستوى المعنوية α				
	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947

٢) توزيع المعاينة للنسبة $(\bar{P})$:

الشروط:

(١) التوزيع: ذو الحدين. (2) العشوائية.

(3) حجم العينة كبير.

التوزيع:

$$\bar{P} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

حيث:

$\bar{P}$: نسبة العينة.

p: نسبة المجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري.

مثال (4): إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الاقتصاد الكلي هو 0.90، أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من الطلبة الذين يدرسون هذا المقرر؛ احسب:

$$P(\bar{P} \geq 0.80)$$

الحل:

الخصائص:

(1) التوزيع: ذو الحدين. (2) العشوائية. (3) حجم العينة كبير.

$$\bar{P} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

إذن سوف يتبع $Z = \frac{\bar{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ توزيع طبيعي معياري:

$$P(\bar{P} \geq 0.80) = P\left(\frac{\bar{P}-0.90}{\sqrt{\frac{0.90\times0.10}{49}}} > \frac{0.80-0.90}{\sqrt{\frac{0.90\times0.10}{49}}}\right)$$
$$= P(Z \geq -2.33)$$
$$= P(Z \leq 2.33)$$
$$= 0.9902$$

0.03	z
0.9902	2.3

٣) توزيع المعاينة لتباين العينة (S^2):

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية.

التوزيع:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

حيث:

S^2: التباين للعينة.

σ^2: التباين للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$\chi^2_{(n-1)}$: توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $n-1$

مثال (5): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 11$ من توزيع طبيعي تباينه 70، وكان S^2 تباين العينة؛ فأوجد احتمال أن يكون S^2 أقل من 82.5

الحل:

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية.

إذن $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية 10:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$$P(S^2 \leq 82.5) = P\left(\frac{(10)S^2}{70} \leq \frac{10 \times 82.5}{70}\right)$$
$$= P(\chi^2 \leq 11.79)$$
$$= 1 - P(\chi^2 \geq 11.79)$$
$$= 1 - 0.30$$
$$= 0.70$$

٤) توزيع المعاينة للفرق بين وسطين حسابيين $(\bar{X} - \bar{Y})$: الحالة الأولى

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

التوزيع:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

حيث:

$\bar{X}$: وسط عينة المجتمع الأول.

$\bar{Y}$: وسط عينة المجتمع الثاني.

μ_1: وسط المجتمع الأول.

μ_2: وسط المجتمع الثاني.

σ_1^2: تباين المجتمع الأول.

σ_2^2: تباين المجتمع الثاني.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري

مثال (6): إذا كانت رو اتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي معدله 23 ألف ريال و انحر افه المعياري 4 ألف ريال، ورو اتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي معدله 18 ألف ريال و انحر افه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشو ائية حجمها 16 من أطباء الوزارة وعينة عشو ائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص؛ فما احتمال أن يزيد متوسط العينة الأولى عن متوسط العينة الثانية بثلاثة آلاف ريال.

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشو ائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

$$P(\bar{X}-\bar{Y}\geq 3)=P\left(\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geq\frac{3-(23-18)}{\sqrt{\frac{16}{16}+\frac{36}{10}}}\right)$$
$$=P\left(Z\geq\frac{-2}{\sqrt{4.6}}\right)$$
$$=P(Z\geq -0.93)$$
$$=P(Z\leq 0.93)$$
$$=0.8238$$

z	0.03
0.9	0.8238

٥) توزيع المعاينة للفرق بين وسطين حسابيين $(\bar{X}-\bar{Y})$: الحالة الثانية

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشو ائية. (3) الاستقلالية.

(4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول لكنه متساو. (5) حجم العينتين صغير.

التوزيع:

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

$$s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

حيث:

$\bar{X}$: وسط عينة المجتمع الأول.

$\bar{Y}$: وسط عينة المجتمع الثاني.

μ_1: وسط المجتمع الأول.

μ_2: وسط المجتمع الثاني.

s_1: الانحراف المعياري للعينة الأولى.

s_2: الانحراف المعياري للعينة الثانية.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$t_{(n_1+n_2-2)}$: توزيع t

مثال (7): إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين مستقلتين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط المجتمع	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

فاحسب الاحتمال التالي.

$$P(\bar{X}-\bar{Y}\leq 5)$$

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) الاستقلالية.

(4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول لكنه متساو.

$$s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{14\times16+11\times9}{15+12-2}=12.92$$

$$P(\bar{X}-\bar{Y}\le5)=P\left(\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\le\frac{5-(20-17)}{\sqrt{12.92}\times\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}}}\right)$$

$$=P\left(T\le\frac{2}{1.392121}\right)$$

$$=P(T\le1.437)$$

$$\approx1-0.10=0.90$$

ν	مستوى المعنوية α				
	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787

٦) توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$:

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول.

التوزيع:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$$

حيث:

S_1^2: تباين العينة الأولى.

S_2^2: تباين العينة الثانية.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$F_{(n_1-1,n_2-1)}$: توزيع F

مثال (9): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 11 من توزيع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 16 من توزيع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$؛ فأوجد:

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 3.80\right) \qquad ; \quad \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(10,15)}$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 3.80\right) = 0.01$$

v_2 \ v_1	10
15	3.80

حل تمارين المحاضرة السادسة

تمرين (1): إذا كان لدينا المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 115 وتباين 49؛ فاحسب الاحتمالات التالية:

1) $P(X \leq 105) =$

2) $P(X \geq 120) =$

الحل:

1) $P(X \leq 105) = P\left(Z \leq \frac{105-115}{7}\right) = P(Z \leq -1.43) = 1 - 0.9236$

2) $P(X \geq 120) = P\left(Z \geq \frac{120-115}{7}\right) = P(Z \geq 0.71) = 1 - 0.7611$

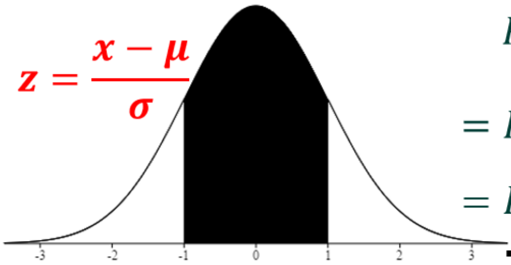
تمرين (2):افترض أن إدارة المرور بالأحساء وضعت جهازا للرادار على طريق الدمام عند مدخل المبرز وذلك لضبط السيارات المسرعة في فترة معينة من اليوم، افترض أن X تمثل السرعة في الساعة للسيارات التي تمر بمدخل المبرز في فترة عمل الرادار، إذا كانت X تتوزع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 60 ميلا وتباينه 25 ميلا، أوجد التالي:

1) نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا في الساعة .

2) عدد السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا من بين 5000 سيارة.

١- نسبة السيارات التى تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 فى الساعة :

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



$$P(55 < X < 65)$$

$$= P(\frac{55-60}{\sqrt{25}} < Z < \frac{65-60}{\sqrt{25}})$$

$$= P(-1 < Z < 1)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

$$= 2 * P(Z < 1) - 1$$

$$= 2\ (0.8413) - 1 = 0.6826$$

∴ النسبة = 68.26%

2) عدد السيارات المتوقع سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا من بين 5000 سيارة:

العدد = إجمالي عدد السيارات × نسبة السيارات التي تتراوح سرعتها بين 55 و 65 ميلا

العدد = 5000 × 0.6826 = 3413 سيارة

تمرين (3) احسب الاحتمالات التالية:

1) $P(X \le 6.84) = 1 - 0.995 = 0.005 \ ; X \sim \chi^2_{19}$

2) $P(X \ge 2.485) = 0.01 \ ; X \sim t_{25}$

3) $P(X \ge 3.52) = 0.01 \ ; X \sim F_{15,15}$

المحاضره الثامنه

التقدير الإحصائي

التقدير:

التقدير: هو عملية استنتاج أو تقدير أحد معالم المجتمع (مثل الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري) بناءً على بيانات عينة مسحوبة من المجتمع . وهناك نوعان (أو أسلوبان) للتقدير:

- الأول تقدير النقطة (أو القيمة الواحدة)
- الثاني تقدير الفترة (أو فترة التقدير أو الثقة)

التقدير بنقطة: يعني أن نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة.

فمثلاً لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة. وكمثال آخر لو أخذنا نسبة الناخبين في العينة الذين يؤيدون مرشحا معيناً كتقدير لهذه النسبة في المجتمع نكون حصلنا على تقدير نقطة للنسبة في مجتمع الناخبين .

أما **التقدير بفترة** فنحصل من خلاله على تقدير لمعلمة المجتمع المجهولة في شكل مدى أو فترة من القيم تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى). ونلاحظ هنا أن فترة التقدير (أو تقدير الفترة) تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائياً في كثير من الحالات

مثلاً: إذا قدرنا أن الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح بين (6 - 40) و (6 + 40) سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و 46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير فترة للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع - ونلاحظ أن هذه الفترة (34, 46) تحتوي على عدد لا نهائي من الأعمار، بمعنى أن العدد لا يقتصر فقط على الأعداد الصحيحة والتي تشمل السنوات، ولكنها تشمل أيضا كسور السنوات، والأيام والشهور، والساعات.. الخ

وفي الجزء التالي نستعرض بإيجاز تقدير كل من متوسط المجتمع (µ) والنسبة في المجتمع (p) باستخدام بيانات عينة عشوائية.

التقدير الإحصائي

1) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع (μ)

2) تقدير النسبة للمجتمع (p)

3) تقدير تباين للمجتمع (σ^2)

4) تقدير الفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$

5) تقدير النسبة بين تبايني مجتمعين $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$

١) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع (μ): الحالة الأولى

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم.

حيث:

$\bar{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

التقدير:

$$\left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

معامل الثقة ($Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$) لفترة ثقة 90%:

$$(1-\alpha) = 0.90 \Longrightarrow \alpha = 0.10 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$$

$$P\left(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.95 \Longrightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.65$$

معامل الثقة ($Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$) لفترة ثقة 95%:

$$(1-\alpha) = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$P\left(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.975 \Longrightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

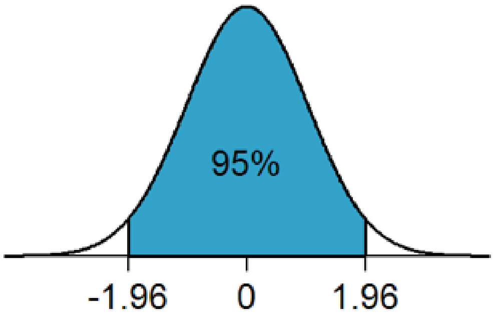
معامل الثقة ($Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$) لفترة ثقة 99%:

$$(1-\alpha) = 0.99 \Longrightarrow \alpha = 0.01 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$P\left(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.995 \Longrightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$$

وباختصار يفضل حفظ معاملات الثقة لمستويات الثقة الأكثر استعمالا ، وهي على النحو التالي:

درجة الثقة	معامل الثقة Z
68.26%	1
90%	**1.65**
95 %	**1.96**
95.44%	2
99%	**2.58**



مثال (1): أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ أوجد فترة ثقة 95% لوسط المجتمع μ

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم.

إذن تقدير فترة الثقة 95% للمعلمة μ يكون على النحو التالي:

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \left(2800 - 1.96 \times \frac{600}{\sqrt{9}}, 2800 + 1.96 \times \frac{600}{\sqrt{9}}\right)$$
$$= (2800 - 392, 2800 + 392)$$
$$= (2408, 3192)$$

ومعنى النتيجة التي توصلنا لها:

$$P(2408 \leq \mu \leq 3192) = 0.95 = 95\%$$

١) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع (μ): الحالة الثانية

الشروط:

(1) التوزيع: غير طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم. (5) حجم العينة كبير.

حيث:

$\bar{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري.

التوزيع:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

التقدير:

$$\left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

مثال (2): تخضع معاملات الذكاء لطلبة الصفوف الأولية في إحدى المحافظات لتوزيع تباينه 144. أخذت عينة عشوائية حجمها 100 من هؤلاء الطلبة، فوجد أن وسط معاملات ذكائهم يساوي 110؛ أوجد فترة ثقة 90% لوسط المجتمع μ

الخصائص:

(1) التوزيع: غير طبيعي. (2) العشوائية. (3) نوع البيانات كمية.

(4) تباين المجتمع معلوم. (5) حجم العينة كبير.

إذن تقدير فترة الثقة 90% للمعلمة μ يكون على النحو التالي:

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \left(110 - 1.65 \times \frac{12}{\sqrt{100}}, 110 + 1.65 \times \frac{12}{\sqrt{100}}\right)$$
$$= (110 - 1.98, 110 + 1.98)$$
$$= (108.02, 111.98)$$
$$\approx (108, 112)$$

١) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع (μ): الحالة الثالثة

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع مجهول. (5) حجم العينة صغير ($n \leq 30$).

حيث:

$\bar{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

S: الانحراف المعياري للعينة.

n: عدد عناصر العينة.

$t_{(n-1)}$:توزيع t بدرجة حرية $n-1$

التوزيع:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

التقدير:

$$\left(\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

معامل الثقة ($t_{\frac{\alpha}{2}}$) لفترة ثقة 90%:

$$(1-\alpha) = 0.90 \implies \alpha = 0.10 \implies \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

ويختلف معامل الثقة ($t_{0.05}$) حسب درجة الحرية

معامل الثقة ($t_{\frac{\alpha}{2}}$) لفترة ثقة 95%:

$$(1-\alpha) = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

ويختلف معامل الثقة ($t_{0.025}$) حسب درجة الحرية

معامل الثقة ($t_{\frac{\alpha}{2}}$) لفترة ثقة 99%:

$$(1-\alpha) = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

ويختلف معامل الثقة ($t_{0.005}$) حسب درجة الحرية

مثال (3): تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن متوسط درجاتهم يساوي 70 وانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ أوجد فترة ثقة 99% لوسط المجتمع μ

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) نوع البيانات كمية.

(4) تباين المجتمع مجهول. (5) حجم العينة صغير.

إذن تقدير فترة الثقة 99% للمعلمة μ يكون على النحو التالي:

$$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \left(70 - 2.947 \times \frac{8}{\sqrt{16}}, 70 + 2.947 \times \frac{8}{\sqrt{16}}\right)$$
$$= (70 - 5.894, 70 + 5.894)$$

$$= (64.106, 75.894)$$

df	0.005
15	2.947

٢) تقدير النسبة للمجتمع (p)

الشروط:

(١) التوزيع: ذو الحدين. (2) العشوائية.

(3) حجم العينة كبير.

حيث:

$\bar{P}$: نسبة العينة.

p: نسبة المجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري.

التوزيع:

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

التقدير:

$$\left(\bar{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

مثال (4): لغرض تقدير نسبة الناجحين بشكل عام في مقرر الاقتصاد الكلي؛ أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من الطلبة الذين درسوا هذا المقرر، فوجد أن 80% منهم نجحوا في المقرر؛ احسب فترة ثقة 99% لنسبة الناجحين في هذا المقرر.

الخصائص:

(1) التوزيع: ذو الحدين. (2) العشوائية. (3) حجم العينة كبير.

إذن تقدير فترة الثقة 99% للمعلمة P يكون على النحو التالي:

$$\left(\bar{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}, \bar{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

$$= \left(0.80 - 2.58 \times \sqrt{\frac{0.80(0.20)}{49}}, 0.80 + 2.58 \times \sqrt{\frac{0.80(0.20)}{49}}\right)$$
$$\approx (0.80 - 0.15, 0.80 + 0.15)$$
$$= (0.65, 0.95)$$

تمارين محلولة:

تمرين (1): عينة عشوائية حجمها 25 أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري $\sigma = 4$، فوجد أن متوسط العينة $\bar{x} = 60$؛ أوجد فترة ثقة 99% لوسط المجتمع μ

حل تمرين (1):

المطلوب تقدير وسط المجتمع μ (الحالة الأولى):

فترة الثقة المطلوبة 99% وبالتالي معامل الثقة هو:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$$

فترة التقدير:

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \left(60 - 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{25}}, 60 + 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{25}}\right) \approx (58\,,\ 62)$$

تمرين (2): عينة عشوائية حجمها 25 أخذت من مجتمع طبيعي، فوجد أن متوسط العينة $\bar{x} = 60$ وانحرافها المعياري $s = 2.1$؛ أوجد فترة ثقة 90% لوسط المجتمع μ

حل تمرين (2):

المطلوب تقدير وسط المجتمع μ (الحالة الثالثة):

فترة الثقة المطلوبة 90% بدرجة حرية 24 وبالتالي معامل الثقة هو:

$$t_{\left[\frac{\alpha}{2};n-1\right]} = t_{[0.05;24]} = 1.711$$

فترة التقدير:

$$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= \left(60 - 1.711 \times \frac{2.1}{\sqrt{25}}, 60 + 1.711 \times \frac{2.1}{\sqrt{25}}\right) \approx (59.28\,,\ 60.72)$$

تمرين (3): عينة عشوائية حجمها 121 أخذت من مجتمع ذي انحراف معياري $\sigma = 10$، فوجد أن متوسط العينة $\bar{x} = 80$؛ أوجد فترة ثقة 95% لوسط المجتمع μ

حل تمرين (3):

المطلوب تقدير وسط المجتمع μ (الحالة الثانية):

فترة الثقة المطلوبة 95% وبالتالي معامل الثقة هو:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

فترة التقدير:

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(80 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{121}}, 80 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{121}}\right) \approx (78.22\,,\,81.78)$$

تمرين (4): لغرض تقدير نسبة الناجحين بشكل عام في مقرر الاقتصاد الكلي؛ أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب من الطلبة الذين درسوا هذا المقرر، فوجد أن 70 طالبا منهم نجحوا في المقرر؛ احسب فترة ثقة 90% لنسبة الناجحين في هذا المقرر.

حل تمرين (4):

المطلوب نسبة المجتمع p:

فترة الثقة المطلوبة 90% وبالتالي معامل الثقة هو:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.65$$

فترة التقدير:

$$\left(\bar{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}, \bar{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

$$= \left(0.70 - 1.65 \times \sqrt{\frac{0.70 \times 0.30}{100}}, 0.70 + 1.65 \times \sqrt{\frac{0.70 \times 0.30}{100}}\right)$$

$$\approx (0.62, 0.78)$$

المحاضره التاسعه

تابع...التقدير الإحصائي

التقدير الإحصائي

1) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع (μ)

2) تقدير النسبة للمجتمع (p)

3) تقدير تباين للمجتمع (σ^2)

4) تقدير الفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$

5) تقدير النسبة بين تبايني مجتمعين $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$

٣) تقدير التباين للمجتمع (σ^2)

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية.

حيث:

S^2: التباين للعينة.

σ^2: التباين للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$\chi^2_{(n-1)}$: توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $n-1$

التوزيع:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

التقدير:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\left[\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}\right)$$

معاملا الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$ لفترة ثقة 90%:

$$(1-\alpha) = 0.90 \Longrightarrow \alpha = 0.10 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$$

معاملا الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$ لفترة ثقة 95%:

$$(1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}$$

معاملا الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$ لفترة ثقة 99%:

$$(1-\alpha) = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$$

معاملا الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$ لفترات الثقة:

فترة الثقة	معامل الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$	معامل الثقة $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$
90%	$\chi^2_{[0.05,n-1]}$	$\chi^2_{[0.95,n-1]}$
95%	$\chi^2_{[0.025,n-1]}$	$\chi^2_{[0.975,n-1]}$
99%	$\chi^2_{[0.005,n-1]}$	$\chi^2_{[0.995,n-1]}$

ويختلف معاملا الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$ حسب درجة الحرية

مثال (5): عينة عشوائية حجمها $n = 20$ من توزيع طبيعي، فأعطت التباين $s^2 = 16$؛ فأوجد فترة ثقة 90% لتباين المجتمع σ^2، وأوجد فترة ثقة 95% لتباين المجتمع σ^2

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية.

فترة الثقة 90% للمعلمة σ^2:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{[0.05;n-1]}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{[0.95;n-1]}}\right)$$
$$= \left(\frac{19\times16}{30.144}, \frac{19\times16}{10.117}\right) = (3.18, 5.48)$$

df	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
19	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191

تقدير فترة الثقة 95% للمعلمة σ^2:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{[0.025;n-1]}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{[0.975;n-1]}}\right)$$
$$= \left(\frac{19\times16}{32.852}, \frac{19\times16}{8.907}\right) = (3.04, 5.84)$$

df	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
19	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191

٤) تقدير الفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$: الحالة الأولى

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

حيث:

$\bar{X}$: وسط عينة المجتمع الأول.

$\bar{Y}$: وسط عينة المجتمع الثاني.

μ_1: وسط المجتمع الأول.

μ_2: وسط المجتمع الثاني.

σ_1^2: تباين المجتمع الأول.

σ_2^2: تباين المجتمع الثاني.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

التقدير:

$$\left((\bar{x} - \bar{y}) \pm z \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

مثال (6): إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ فأوجد فترة ثقة 95% للفرق بين وسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

مثال (6): إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ فأوجد فترة ثقة 95% للفرق بين وسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

تقدير فترة الثقة 95% للفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$:

$$\left((\bar{x}-\bar{y}) - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{x}-\bar{y}) + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$= \left((22-19) - 1.96\sqrt{\frac{16}{16}+\frac{36}{10}}, (22-19) + 1.96\sqrt{\frac{16}{16}+\frac{36}{10}}\right)$$

$$\approx (3 - 4.20, 3 + 4.20)$$
$$= (-1.2, 7.2)$$

٥) تقدير الفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$: الحالة الثانية

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) الاستقلالية.

(4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول لكنه متساو. (5) حجم العينتين صغير.

حيث:

$\bar{X}$: وسط عينة المجتمع الأول.

$\bar{Y}$: وسط عينة المجتمع الثاني.

μ_1: وسط المجتمع الأول.

μ_2: وسط المجتمع الثاني.

S_1: الانحراف المعياري للعينة الأولى.

S_2: الانحراف المعياري للعينة الثانية.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$t_{(n_1+n_2-2)}$: توزيع t

التوزيع:

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

حيث:

$$s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

التقدير:

$$\left((\bar{x}-\bar{y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\times s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

مثال (7): إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلتين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط العينة	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

أوجد فترة ثقة 90% للفرق وسطي مجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) الاستقلالية.

(4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول لكنه متساو.

$$s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{14\times16+11\times9}{15+12-2}=12.92$$

$$\left((\bar{x}-\bar{y})-t_{\frac{\alpha}{2}}\times s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},(\bar{x}-\bar{y})+t_{\frac{\alpha}{2}}\times s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

$$=\left((20-17)-1.708\times\sqrt{12.92}\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}},(20-17)\right.$$

$$\left.+1.708\times\sqrt{12.92}\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}}\right)$$

$$\approx(3-2.38,3+2.38)=(0.62,5.38)$$

ν	مستوى المعنوية α				
	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787

٦) تقدير النسبة بين تبايني مجتمعين $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول.

حيث:

S_1^2: تباين العينة الأولى.

S_2^2: تباين العينة الثانية.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]}$ ، $F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]}$

التوزيع:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$$

التقدير:

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]}},\frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]}\right)$$

مثال (8): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من توزيع طبيعي $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ فوجد أن تباينها يساوي 18، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 11 من توزيع $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فوجد أن تباينها يساوي 12؛ فأوجد فترة ثقة 90% للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

$$F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]} = F_{[0.05;8;10]} = 3.07$$

$$F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]} = F_{[0.05;10;8]} = 3.35$$

التقدير:

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]}},\frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]}\right)$$
$$=\left(\frac{18}{12}\times\frac{1}{3.07},\frac{18}{12}\times 3.35\right)$$
$$\approx(0.49,5.03)$$

تمارين محلولة:

تمرين(1): إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ فأوجد فترة ثقة 90% للفرق بين وسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

تقدير فترة الثقة 90% للفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$:

$$\left((\bar{x}-\bar{y})-z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\bar{x}-\bar{y})+z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$
$$=\left((22-19)-1.65\sqrt{\frac{16}{16}+\frac{36}{10}},(22-19)+1.65\sqrt{\frac{16}{16}+\frac{36}{10}}\right)$$
$$\approx(3-3.54,3+3.54)$$
$$=(-0.54,6.54)$$

تمرين (2): إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلتين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط العينة	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

أوجد فترة ثقة 95% للفرق وسطي مجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) الاستقلالية.

(4) نوع البيانات كمية (5) تباين الم $s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{14\times16+11\times9}{15+12-2}=12.92$

$$\left((\bar{x}-\bar{y})-t_{\frac{\alpha}{2}}\times s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},(\bar{x}-\bar{y})+t_{\frac{\alpha}{2}}\times s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

$$=\left((20-17)-2.060\times\sqrt{12.92}\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}},(20-17)\right.$$

$$\left.+2.060\times\sqrt{12.92}\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}}\right)$$

$$\approx(3-2.87,3+2.87)=(0.13,5.87)$$

ν	مستوى المعنوية α				
	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787

تمرين(3): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 10 من توزيع طبيعي $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ فوجد أن تباينها يساوي 20، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 13 من توزيع $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فوجد أن تباينها يساوي 10؛ فأوجد فترة ثقة 98% للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

$$F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]}=F_{[0.01;9;12]}=4.39$$

$$F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]}=F_{[0.01;12;9]}=5.11$$

التقدير:

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]}},\frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]}\right)$$

$$=\left(\frac{20}{10}\times\frac{1}{4.39},\frac{20}{10}\times 5.11\right)$$

$$\approx(0.46,10,22)$$

المحاضره العاشره

الاختبارات الإحصائية المعلمية

اختبارات الفروض الاحصائية

Testing Statistical Hypotheses

المقصود بالفروض هنا الفروض الإحصائية statistical hypotheses بمعنى الفروض التي تتعلق بالمجتمع الإحصائي المسحوبة منه العينة، أو توزيع هذا المجتمع أو معالمه كالوسط الحسابي أو النسبة في المجتمع.

والفرض Hypothesis ما هو إلا تخمين أو استنتاج مبدئي مبني على حيثيات معقولة أو منطقية ولكنه ليس مبنياً على حسابات دقيقة خاصة بالمجتمع لأننا نفترض أنه لا يمكن دراسة المجتمع بالكامل عن طريق الحصر الشامل بل نحاول استنتاج أو الاستدلال على مقاييس المجتمع باستخدام بيانات ونتائج العينة.

اختبارات الفروض الاحصائية

فمثلاً : قد يفترض الباحث أن متوسط الدخل الشهري للفرد في دولة ما هو 200 ريال (بناءً على ما يراه من مستوى المعيشة في هذا البلد وأوضاعه الاقتصادية)، ويحتاج إلى اختبار علمي (إحصائي) لمعرفة مدى صحة هذا الفرض أو قد يفترض باحث آخر أن نسبة الناخبين في إحدى الدوائر الذين يؤيدون مرشحاً معيناً لا تقل عن 30 % وهكذا... والمطلوب هو اختيار مدى صحة هذه الفروض. أي أن يصل الباحث إلى قرار إما بقبول الفرض أو عدم قبوله (أي رفضه) وذلك باحتمال معين.

وقبل تناول كيفية إجراء الاختبارات الإحصائية نستعرض أولاً بعض المفاهيم والتعريفات الأساسية اللازمة لهذا الموضوع حتى تكون الصورة أكثر وضوحاً..

الفرض العدمي (أو الصفري) The Null Hypothesis

الفرض العدمي هو "الفرض الأساسي المراد اختباره". ويرمز له عادة بالرمز H_0. هذا الفرض يأخذ – عادة – شكل معادلة أو مساواة. فمثلاً إذا كان الفرض العدمي المراد اختباره هو أن متوسط دخل الفرد في إحدى المناطق هو 200 ريال شهرياً فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$H_0 : \mu = 200$$

ويقرأ بالشكل التالي :

الفرض العدمي هو أن متوسط دخل الفرد في المنطقة هو 200 ريال شهرياً.

وكمثال آخر : إذا كان الفرض المراد اختباره هو أن نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين بين عمال أحد المصانع هي 30 %، فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$H_0 : P = 0.30$$

ويقرأ بالشكل التالي :

الفرض العدمي هو أن نسبة المؤيدين للبرنامج الاقتصادي بين عمال المصنع هي 0.30

الفرض البديل : The Alternative Hypothesis

في اختبارات الفروض يتحتم وضع فرض آخر غير الفرض العدمي المراد اختباره يسمى الفرض البديل.

وهذا الفرض " هو الذي سيقبل في حالة رفض الفرض العدمي " أي لابد من تحديد فرض آخر بديل في الوقت الذي نحدد فيه الفرض العدمي، وبالتالي فإن الفرض البديل يعرف كما يلي :

"الفرض البديل هو الفرض الآخر الذي سيقبل في حالة رفض الفرض العدمي" ويرمز له عادة بالرمز : H_1

والفرض البديل له أهمية كبيرة في قياس الظواهر الاجتماعية – كما سوف نرى – فهو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم لذلك فهو يأخذ أحد أشكال ثلاثة هي :-

أ- أن يأخذ شكل " لا يساوي ". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى : اختبار الطرفين

فمثلاً : إذا كان الفرض العدمي هو أن متوسط الدخل الشهري لفئة معينة في المجتمع

هو 200 ريال . $H_0 : \mu = 200$

فإن الفرض البديل في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي : $H_1 : \mu \neq 200$

بمعنى أن متوسط دخل هذه الفئة من المجتمع " لا يساوي " 200 ريال شهرياً.

ب- أو أن يأخذ شكل " أكبر من ". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى " اختبار الطرف الأيمن ".

فمثلاً : قد يكون الفرض البديل كما يلي : $H_1 : \mu > 200$

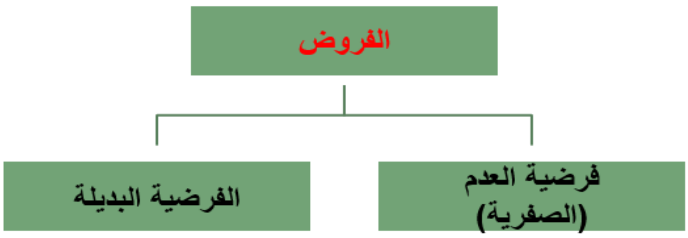
أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أكبر من 200 ريال شهرياً.

ج- وأخيراً قد يأخذ الفرض البديل شكل " أقل من " ، وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى " اختبار الطرف الأيسر".

فمثلاً : قد يكون الفرض البديل هو : $H_1 : \mu < 200$

أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أقل من 200 ريال شهرياً.

والخلاصة هي أن الفروض الإحصائية تعتبر بمثابة اقتراح عن معالم المجتمع موضوع الدراسة، والتي ما زالت غير معلومة للباحث، فهي حلول ممكنة لمشكلة البحث.



الخطأ في اتخاذ القرار :-

في حالة قبول الباحث لفرضه العدمي، فلا مجال للبحث في الفرض البديل، أما في حالة حدوث العكس بمعنى رفض الفرض العدمي فإنه يتحتم في هذه الحالة قبول الفرض البديل، على أنه من الجدير بالذكر أن الباحث هنا عرضة للوقوع في الخطأ عند اتخاذ قراره بقبول الفرض العدمي أو رفضه، فقد يرفض

فرضاً هو في الو اقع صحيح، وقد يقبل فرضا هو في الو اقع غير صحيح. لذلك فقد تم تصنيف هذه الأخطاء إلى نوعين هما :

الخطأ من النوع الأول : Type I Error

الخطأ من النوع الأول هو "رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح ". أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي في الو اقع صحيح وكان من الواجب قبوله فقد تم أخذ قرار خاطئ برفضه. وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الأول هو : " رفض فرض صحيح".

الخطأ من النوع الثاني : Type II Error

وفي المقابل فإن الخطأ من النوع الثاني يعني " قبول الفرض العدمي بينما هو خاطئ " أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي خاطئ وكان من الواجب رفضه فقد تم أخذ قرار خاطئ بقبوله وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الثاني هو " قبول فرض خاطئ ".

مستوى المعنوية : Level of Significance

المقصود بمستوى المعنوية هو " احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول ". أو نسبة حدوثه " أي احتمال رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح ".

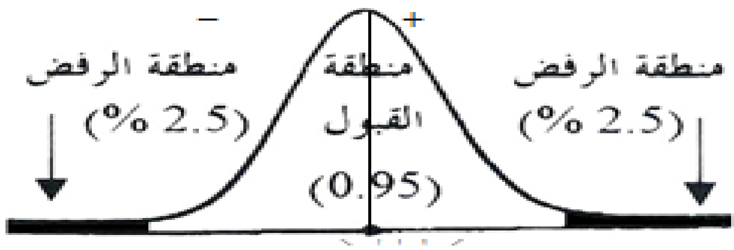
وعادة ما يرمز إلى مستوى المعنوية بالرمز اللاتيني ألفا α وأشهر قيم مستوى المعنوية هي 10% ، 5%، 1 %، ولكن ليس هناك ما يمنع من أن يأخذ قيما أخرى.

ومن الملاحظات المهمة هنا هو أن "مستوى المعنوية" والذي يسمى أحياناً "مستوى الدلالة" هو المكمل لدرجة الثقة بمعنى أن مجموعهما يساوي 100% أو واحد صحيح. فإذا كانت درجة الثقة 95% فإن مستوى المعنوية يساوي 5%. والعكس صحيح فإذا كان مستوى المعنوية 5% فإن هذا يعني أن درجة الثقة 95 %.

ولعل من أهم الملاحظات هنا هو استخدام تعبير "مستوى المعنوية" في حالات اختبارات الفروض، بينما يستخدم مصطلح "درجة أو مستوى الثقة" في حالات التقدير.

والفكرة الأساسية في اختبار الفرض هي تقسيم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين: أحداهما تسمى " منطقة القبول " أي منطقة قبول الفرض العدمي. والأخرى تسمى " منطقة الرفض"، أي منطقة رفض الفرض العدمي والتي تسمى أحيانا " بالمنطقة الحرجة Critical region ". والنقطة الجديرة بالملاحظة هنا هي أن منطقة القبول تمثل درجة الثقة، بينما تمثل منطقة الرفض مستوى المعنوية. وهناك ثلاث حالات مختلفة لمنطقتي القبول والرفض هي :

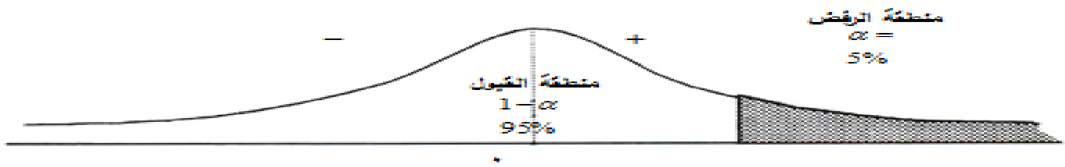
الأولى : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل " لا يساوي " كأن يكون الفرض في هذه الحالة هو أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 200 ريال فإن منطقة الرفض تكون موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي، ويسمى الاختبار في هذه الحالة " اختبار الطرفين "، والذي يأخذ الشكل التالي (بافتراض أن α=5%) :



فالفرض العدمي هنا يعني أن متوسط دخل الفرد يساوي 200 ريال شهريا، والفرض البديل في هذه الحالة هو بمعنى أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 200 ريال شهرياً. حيث تمثل المنطقة البيضاء غير المظللة منطقة القبول والتي قد تساوي 95% وبالتالي فمنطقة الرفض مقسمة بالتساوي على طرفي المنحنى في هذه الحالة تكون قيمة كل منهما 2.5 %.

والنتيجة هو أن القرار أيا كان نوعه سيكون بمستوى معنوية 5 % بمعنى أن احتمال أو نسبة الخطأ فيه من النوع الأول تساوي 5 %.

الثانية : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل "أكبر من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيمن للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الأيمن. والذي يأخذ الشكل التالي أدناه :

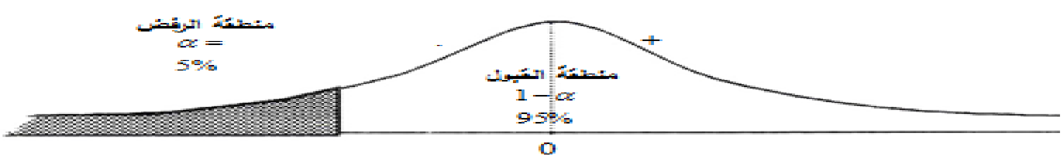


اختبار الطرف الأيمن

فالفرض العدمي هنا نفس فرض المثال السابق، بينما الفرض البديل هو $H_1 : \mu > 200$

بمعنى أن متوسط دخل الفرد أكبر من 200 ريال شهرياً. وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلاً 5% مركز في الطرف الأيمن من المنحنى.

الثالثة : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل " أقل من " فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيسر للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الأيسر. والشكل التالي يوضح ذلك :



اختبار الطرف الأيسر

مع افتراض ثبات الفرض العدمي كما في المثال السابق، بينما الفرض البديل هو$H_1:\mu<200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أقل من 200 ريال شهرياً، وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلاً 5 % مركز في الطرف الأيسر من المنحنى.

اختبارات الفروض الاحصائية

خطوات اختبار الفروض تتلخص في الآتي:

- صياغة الفروض (العدمي والبديل)
- تحديد منطقة القبول والرفض (تحديد القيم الحرجة).
- حساب إحصاءة الاختبار.
- المقارنة بين القيمة أو القيم الحرجة وإحصاءة الاختبار.
- اتخاذ قرار بشأن قبول أو عدم قبول الفرض العدمي(النتيجة).

الاختبارات الإحصائية المعلمية

1) اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي للمجتمع (μ)

2) اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة للمجتمع (p)

3) اختبار الفرضيات المتعلقة بتباين للمجتمع (σ^2)

4) اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$

5) اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة بين تبايني مجتمعين $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$

١) اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي للمجتمع (μ) : الحالة الأولى

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم.

حيث:

$\bar{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

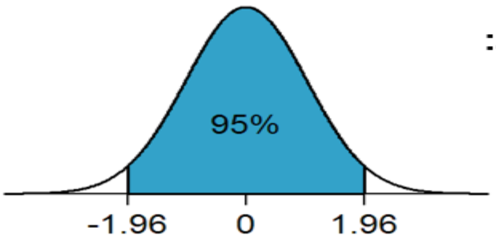
التقدير:

$$\left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

الإحصاءة:

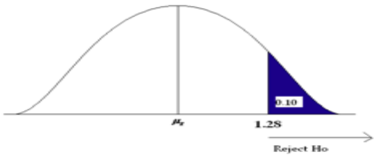
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

معاملات الثقة (القيم الحرجة) لاختبار ذي طرفين:



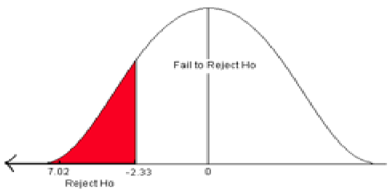
مستوى الدلالة	درجة الثقة	معامل الثقة Z
10%	90%	±1.65
5%	95 %	±1.96
1%	99%	±2.58

معاملات الثقة (القيم الحرجة) لاختبار ذي طرف أيمن:



مستوى الدلالة	درجة الثقة	معامل الثقة Z
10%	90%	+1.28
5%	95 %	+1.65
1%	99%	+2.33

معاملات الثقة (القيم الحرجة) لاختبار ذي طرف أيسر:



مستوى الدلالة	درجة الثقة	معامل الثقة Z
10%	90%	−1.28
5%	95 %	−1.65
1%	99%	−2.33

مثال (1): أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$:

$$H_0: \mu = 3000$$
$$H_1: \mu \neq 3000$$

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم.

أولا: القيم الحرجة:

$$\alpha = 0.05 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = -1.96 \;\; \& \;\; z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = +1.96$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2800 - 3000}{600/\sqrt{9}} = \frac{-200}{200} = -1$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$-1.96 < -1 < 1.96$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0: \mu = 3000$$

مثال (2): أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$:

$$H_0: \mu = 2000$$
$$H_1: \mu > 2000$$

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم.

أولا: القيمة الحرجة:

$$\alpha = 0.05 \implies z_{1-\alpha} = z_{0.95} = +1.65$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرف أيمن.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2800 - 2000}{600/\sqrt{9}} = \frac{800}{200} = 4$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيمة الحرجة:

$$z \nless z_{1-\alpha}$$
$$4 \nless 1.65$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة الرفض.

رابعا: النتيجة:

رفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل وهو:

$$H_1: \mu > 2000$$

1) اختبار الفرضيات المتعلقة بـ (μ) : الحالة الثانية

الشروط:

(1) التوزيع: غير طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم. (5) حجم العينة كبير.

حيث:

$\bar{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

σ: الانحراف المعياري للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري.

التوزيع:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

التقدير:

$$\left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

الإحصاءة:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

مثال (3): تخضع معاملات الذكاء لطلبة الصفوف الأولية في إحدى المحافظات لتوزيع تباينه 144. أخذت عينة عشوائية حجمها 36 من هؤلاء الطلبة، فوجد أن وسط معاملات ذكائهم يساوي 110؛ اختبر الفرضية أن وسط معاملات الذكاء لطلبة الصفوف الأولية على مستوى المحافظة يساوي 105 مقابل أنه لا يساوي ذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$

الخصائص:

(1) التوزيع: غير طبيعي. (2) العشوائية. (3) نوع البيانات كمية.

(4) تباين المجتمع معلوم. (5) حجم العينة كبير.

الفرضيتان العدمية والبديلة هما:

$H_0: \mu = 105$

$H_1: \mu \neq 105$

أولا: القيم الحرجة:

$$\alpha = 0.01 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = -2.58 \;\; \& \;\; z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = +2.58$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{110 - 105}{12/\sqrt{36}} = \frac{5}{2} = +2.50$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$-2.58 < +2.50 < 2.58$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0 : \mu = 105$$

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع مجهول. (5) حجم العينة صغير ($n \leq 30$).

حيث:

$\bar{X}$: وسط العينة.

μ: وسط المجتمع.

s: الانحراف المعياري للعينة.

n: عدد عناصر العينة.

$t_{(n-1)}$:توزيع t بدرجة حرية $n-1$

التوزيع:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

التقدير:

$$\left(\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

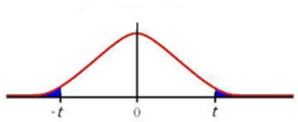
الإحصاءة:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

١) اختبار الفرضيات المتعلقة بـ (μ) : الحالة الثالثة

القيم الحرجة لاختبار ذي طرفين:

مستوى الدلالة	درجة الثقة	معامل الثقة t
10%	90%	$\pm t_{0.05}$
5%	95 %	$\pm t_{0.025}$
1%	99%	$\pm t_{0.005}$



مثال (4): تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن متوسط درجاتهم يساوي 70 وانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ اختبر الفرضية أن وسط درجات الطلاب بشكل عام يساوي 80 مقابل أنه لا يساوي ذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) نوع البيانات كمية.

(4) تباين المجتمع مجهول. (5) حجم العينة صغير.

الفرضيتان العدمية والبديلة هما:

$$H_0: \mu = 80$$
$$H_1: \mu \neq 80$$

أولا: القيم الحرجة لمستوى دلالة $\alpha = 0.05$:

$$\alpha = 0.05 \implies t_{[0.025,15]} = 2.131 \;\; \& \;\; -t_{[0.025,15]} = -2.131$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{70 - 80}{8/\sqrt{16}} = \frac{-10}{2} = -5$$

df	0.025
15	2.131

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} \nless t < t_{\frac{\alpha}{2}}$$

$-2.131 \nless -5 < +2.131$ نلاحظ أن الإحصاءة في فترة الرفض.

رابعا: النتيجة:

رفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل وهو:

$$H_1: \mu \neq 80$$

تمارين محلولة:

تمرين (1): أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.10$:

$$H_0: \mu = 2000$$
$$H_1: \mu \neq 2000$$

الخصائص: (1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم.

أولا: القيم الحرجة:

$\alpha = 0.10 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = -1.65 \quad \& \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.95} = +1.65$ وذلك لأن الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2800 - 2400}{600/\sqrt{9}} = \frac{400}{200} = 2$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} < z \nless z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$-1.65 < 2 \nless 1.65$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة الرفض.

رابعا: النتيجة: رفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل وهو:

$$H_1: \mu \neq 2000$$

تمرين (2): أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.01$:

$$H_0: \mu = 3000$$
$$H_1: \mu < 3000$$

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية. (4) تباين المجتمع معلوم.

أولا: القيمة الحرجة:

$$\alpha = 0.01 \implies z_{\alpha} = -2.33$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرف أيسر.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2800 - 3000}{600/\sqrt{9}} = \frac{-200}{200} = -1$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيمة الحرجة:

$$z_\alpha < z$$
$$-2.33 < -1$$

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0: \mu = 3000$$

تمرين (3): ترغب شركة أن تعرف بدرجة ثقة 95% ما إذا كان يمكنها الادعاء بأن صناديق الصابون المسحوق الذي تبيعها تحتوي على اكثر من 500 جرام (حوالي 1.1 رطل) من الصابون. وتعرف الشركة من الخبرة الماضية أن أوزان الصابون بالصناديق تتبع التوزيع الطبيعي. وقد أخذت الشركة عينة عشوائية حجمها $n = 25$ ووجدت أن $\bar{x} = 520$ جرام و $s = 75$ جرام.

الحل

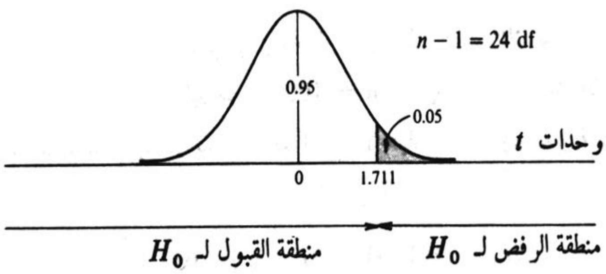
وحيث أن الشركة ترغب في اختبار ما إذا كانت $\mu > 500$، فإن :

$H_0: \mu = 500$ $\qquad$ $H_1: \mu > 500$

وحيث أن التوزيع طبيعي ، $n < 30$ ، وكذلك σ غير معلومة، فعلينا أن نستخدم توزيع t (بدرجة حرية $n-1$ =24) لتحديد المنطقة الحرجة، أي منطقة الرفض، للاختبار بمستوى معنوية 5%. ونجد ذلك في الجدول المخصص لاختبار t ، ويسمى هذا اختبار الذيل الأيمن. وأخيراً ، حيث أن إحصائية الاختبار هي

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{520 - 500}{75/\sqrt{25}} = \frac{20}{15} = 1.33$$

وهي تقع داخل منطقة القبول، وبالتالي يقبل الفرض العدمي H_0 ، ($\mu = 500$)، عند مستوى معنوية 5% (أو بدرجة ثقة 95%) .



المحاضره الحادية عشر

تابع ... الاختبارات الإحصائية المعلمية

٢) اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة للمجتمع (p):

الشروط:

(١) التوزيع: ذو الحدين. (2) العشوائية.

(3) حجم العينة كبير.

حيث:

$\bar{P}$: نسبة العينة.

p: نسبة المجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري.

التوزيع:

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

التقدير:

$$\left(\bar{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

الإحصاءة:

$$Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

مثال (5): أظهرت سجلات مديرية الأمن العام في إحدى المحافظات أن نسبة من يربط حزام الأمان - قبل سن نظام إلزام استخدامه- هي 0.8، درست عينة عشوائية حجمها 100 سائق - بعد صدور النظام بإلزامية ربط الحزام – فوجد أن 85 منهم يربطون الحزام؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ ما إذا كان النظام الجديد أدى إلى زيادة نسبة من يتقيد بربط حزام الأمان:

$$H_0: p = 0.8$$
$$H_1: p > 0.8$$

الخصائص:

(1) التوزيع: ذو الحدين. (2) العشوائية. (3) حجم العينة كبير.

أولا: القيمة الحرجة:

$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \mathrm{z}_{1-\alpha} = \mathrm{z}_{0.95} = +1.65$ وذلك لأن الاختبار ذو طرف أيمن.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$\mathrm{z} = \frac{\bar{\mathrm{p}} - \mathrm{p}_0}{\sqrt{\frac{\mathrm{p}_0(1-\mathrm{p}_0)}{\mathrm{n}}}} = \frac{0.85 - 0.80}{\sqrt{\frac{0.80 \times 0.20}{100}}} = \frac{0.05}{0.04} = +1.25$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$\mathrm{z} < \mathrm{z}_{1-\alpha}$$
$$1.25 < 1.65$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة: قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0: p = 0.8$$

إذن فالفرض البديل مرفوض وهذا يعني أن سن النظام لم يغير نسبة من يتقيد بربط حزام الأمان.

٣) اختبار الفرضيات الشروط:

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية.

حيث:

S^2: التباين للعينة.

σ^2: التباين للمجتمع.

n: عدد عناصر العينة.

$\chi^2_{(n-1)}$: توزيع كاي تربيع بدرجة حرية $n-1$

التوزيع:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

التقدير:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\left[\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}\right)$$

الإحصاءة:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

معاملا الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$ لاختبار ذي طرفين:

مستوى الدلالة	معامل الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$	معامل الثقة $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$
0.10	$\chi^2_{[0.05,n-1]}$	$\chi^2_{[0.95,n-1]}$
0.05	$\chi^2_{[0.025,n-1]}$	$\chi^2_{[0.975,n-1]}$
0.01	$\chi^2_{[0.005,n-1]}$	$\chi^2_{[0.995,n-1]}$

ويختلف معاملا الثقة $(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}})$ حسب درجة الحرية

مثال (6): عينة عشوائية حجمها $n = 25$ من توزيع طبيعي، فأعطت وسطا حسابيا $\bar{x} = 60$ وتباينا $s^2 = 12$؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أن تباين المجتمع $\sigma^2 = 9$ مقابل أنه لا يساوي ذلك.

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية.

الفرضيات:

$$H_0: \sigma^2 = 9$$
$$H_1: \sigma^2 \neq 9$$

أولا: القيم الحرجة لمستوى دلالة $\alpha = 0.05$:

$$\alpha = 0.05 \implies \chi^2_{[0.025,24]} = 39.346 \quad \& \quad \chi^2_{[0.975,24]} = 12.401$$

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \times 12}{9} = 32$$

df	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
24		12.401					39.346	

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$\chi^2_{[0.975,24]} < \chi^2 < \chi^2_{[0.025,24]}$$
$$12.401 < 32 < 39.346$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة: قبول الفرض العدمي وهو:

$H_0: \sigma^2 = 9$

٤) اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$: الحالة الأولى

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

حيث:

$\bar{X}$: وسط عينة المجتمع الأول.

$\bar{Y}$: وسط عينة المجتمع الثاني.

μ_1: وسط المجتمع الأول.

μ_2: وسط المجتمع الثاني.

σ_1^2: تباين المجتمع الأول.

σ_2^2: تباين المجتمع الثاني.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$N(0,1)$: التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

التقدير:

$$\left((\bar{x} - \bar{y}) \pm z \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

الإحصاءة:

$$z = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

صياغة الفروض:

الفرض العدمي:

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2\ \ (\mu_1 - \mu_2 = 0)$$

الفرض البديل (ذو طرفين):

$$H_1:\ \mu_1 \neq \mu_2\ \ (\mu_1 - \mu_2 \neq 0)$$

الفرض البديل (ذو طرف أيمن):

$$H_1:\ \mu_1 > \mu_2\ \ (\mu_1 - \mu_2 > 0)$$

الفرض البديل (ذو طرف أيسر):

$$H_1:\ \mu_1 < \mu_2\ \ (\mu_1 - \mu_2 < 0)$$

مثال (7): إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أنه لا يوجد فرق معنوي بين وسطي المجتمعين مقابل أنه يوجد فرق معنوي بينهما.

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

$H_0:\ \mu_1 = \mu_2\ \ (\mu_1 - \mu_2 = 0)$ لا يوجد فرق معنوي:

$H_1:\ \mu_1 \neq \mu_2\ \ (\mu_1 - \mu_2 \neq 0)$ يوجد فرق معنوي:

أولا: القيم الحرجة:

$$\alpha = 0.05\ \Longrightarrow \mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{z}_{0.025} = -1.96\ \ \&\ \ \mathrm{z}_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{z}_{0.975} = +1.96$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$z = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(22 - 19)}{\sqrt{\frac{16}{16} + \frac{36}{10}}} \approx \frac{3}{2.145} \approx 1.40$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$\mathrm{z}_{\frac{\alpha}{2}} < \mathrm{z} < \mathrm{z}_{1-\frac{\alpha}{2}}$$
$$-1.96 < 1.40 < 1.96$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2\ \ (\mu_1 - \mu_2 = 0)$$

أي أنه لا يوجد فرق معنوي.

٥) اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين وسطي مجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$: الحالة الثانية

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) الاستقلالية.

(4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول لكنه متساو. (5) حجم العينتين صغير.

حيث:

$\bar{X}$: وسط عينة المجتمع الأول.

$\bar{Y}$: وسط عينة المجتمع الثاني.

μ_1: وسط المجتمع الأول.

μ_2: وسط المجتمع الثاني.

s_1: الانحراف المعياري للعينة الأولى.

s_2: الانحراف المعياري للعينة الثانية.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$t_{(n_1+n_2-2)}$: توزيع t

التوزيع:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

حيث:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

التقدير:

$$\left((\bar{x} - \bar{y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \times s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

الإحصاءة:

$$T = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

مثال (8): إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط العينة	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

اختبر أنه لا فرق بين وسطي المجتمعين مقابل أن يوجد فرق بينهما عند مستوى دلالة $\alpha = 0.01$

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) الاستقلالية.

(4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول لكنه متساو.

أولا: القيم الحرجة:

$$\alpha = 0.01 \implies \mathrm{t}_{\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{t}_{0.005} = 2.787 \;\&\; \mathrm{t}_{1-\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{t}_{0.995} = -2.787$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{14 \times 16 + 11 \times 9}{15 + 12 - 2} = 12.92$$

$$T = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(20 - 17)}{\sqrt{12.92} \times \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{12}}} \approx \frac{3}{1.39} = 2.158$$

v	مستوى المعنوية α				
	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mathrm{t} < \mathrm{t}_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$-2.787 < 2.158 < +2.787$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \ \ (\mu_1 - \mu_2 = 0)$$

٦) اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة بين تبايني مجتمعين $(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})$

الشروط:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول.

حيث:

S_1^2: تباين العينة الأولى.

S_2^2: تباين العينة الثانية.

n_1: عدد عناصر العينة الأولى.

n_2: عدد عناصر العينة الثانية.

$F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]}$ ، $F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]}$

التوزيع:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$$

التقدير:

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]}}, \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]}\right)$$

الإحصاءة:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

الفرض العدمي:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \ \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$$

الفرض البديل (ذو طرفين):

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \ \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1\right)$$

الفرض البديل (ذو طرف أيمن):

$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \ \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1\right)$$

الفرض البديل (ذو طرف أيسر):

$$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1\right)$$

معاملا الثقة $(F_{\frac{\alpha}{2}})$ و $(F_{1-\frac{\alpha}{2}})$ لاختبار ذي طرفين:

مستوى الدلالة	معامل الثقة $(F_{\frac{\alpha}{2}})$	معامل الثقة $(F_{1-\frac{\alpha}{2}})$
0.10	$F_{[0.05,n_1-1,n_2-1]}$	$F_{[0.95,n_1-1,n_2-1]}$
0.02	$F_{[0.01,n_1-1,n_2-1]}$	$F_{[0.99,n_1-1,n_2-1]}$

$$F_{[0.95,n_1-1,n_2-1]} = \frac{1}{F_{[0.05,n_2-1,n_1-1]}}$$

$$F_{[0.99,n_1-1,n_2-1]} = \frac{1}{F_{[0.01,n_2-1,n_1-1]}}$$

معاملا الثقة $(F_{\frac{\alpha}{2}})$ لاختبار ذي طرف أيمن:

مستوى الدلالة	معامل الثقة $(F_{\frac{\alpha}{2}})$
0.05	$F_{[0.05,n_1-1,n_2-1]}$
0.01	$F_{[0.01,n_1-1,n_2-1]}$

مثال (9): أخذ عينتان مستقلتان من مجتمعين طبيعيين فأعطتا

	العينة الأولى	العينة الثانية
الحجم	8	9
الوسط الحسابي	17.4	13.2
التباين	16	22

اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.10$ أن تبايني المجتمعين متساويان مقابل أنهما غير متساويين.

أولا: القيم الحرجة:

$$\alpha = 0.10 \implies F_{[0.05,7,8]} = 3.50 \,, F_{[0.95,7,8]} = \frac{1}{F_{[0.05,8,7]}} = \frac{1}{3.73} = 0.58$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{16}{22} = 0.73$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$F_{[0.95,7,8]} < \text{F} < F_{[0.05,7,8]}$$

$$0.58 < 0.73 < 3.50$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$$

تمارين محلولة:

تمرين (1): لغرض تقدير نسبة الناجحين بشكل عام في مقرر الاقتصاد الكلي؛ أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من الطلبة الذين درسوا هذا المقرر، فوجد أن 80% منهم نجحوا في المقرر؛ اختبر الفرضيتين التاليتين بمستوى دلالة $\alpha = 0.01$:

$$H_0: p = 0.90$$
$$H_1: p \neq 0.90$$

الخصائص:

(1) التوزيع: ذو الحدين. (2) العشوائية. (3) حجم العينة كبير.

أولا: القيم الحرجة:

$$\alpha = 0.01 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = -2.58 \quad \& \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = +2.58$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0.80 - 0.90}{\sqrt{\frac{0.90 \times 0.10}{49}}} \approx \frac{-0.10}{0.043} \approx -2.33$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$-2.58 < -2.33 < 2.58$ نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0: p = 0.90$$

تمرين (2): عينة عشوائية حجمها $n = 25$ من توزيع طبيعي، فأعطت وسطا حسابيا $\bar{x} = 60$ وتباينا $s^2 = 12$؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أن تباين المجتمع $\sigma^2 = 9$ مقابل أنه أكبر من ذلك.

الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) نوع البيانات كمية.

الفرضيات:

$$H_0: \sigma^2 = 9$$
$$H_1: \sigma^2 > 9$$

أولا: القيمة الحرجة لمستوى دلالة $\alpha = 0.05$:

$$\alpha = 0.05 \implies \chi^2_{[0.05,24]} = 36.415$$

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \times 12}{9} = 32$$

df	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
24						36.415		

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$\chi^2 < \chi^2_{[0.05,24]}$$
$$32 < 36.415$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0: \sigma^2 = 9$$

تمرين (3): إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أن رواتب أطباء الوزارة أعلى من أطباء القطاع الخاص

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية.

(3) الاستقلالية. (4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين معلوم.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \ \ (\mu_1 - \mu_2 = 0)$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2 \ \ (\mu_1 - \mu_2 > 0)$$

أولا: القيمة الحرجة:

$\alpha = 0.05 \implies z_{1-\alpha} = z_{0.95} = +1.65$ وذلك لأن الاختبار ذو طرف أيمن.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$z=\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{(22-19)}{\sqrt{\frac{16}{16}+\frac{36}{10}}}\approx\frac{3}{2.145}\approx 1.40$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$z<z_{1-\alpha}$$
$$1.40<1.65$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة: قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0:\ \mu_1=\mu_2\ \ (\mu_1-\mu_2=0)$$

أي أنه لا يوجد فرق معنوي بين رواتب كلا الفئتين.

تمرين (4): إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط العينة	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

اختبر أنه لا فرق بين وسطي المجتمعين مقابل أن يوجد فرق بينهما عند مستوى دلالة $\alpha=0.05$

الحل: الخصائص:

(1) التوزيع: طبيعي. (2) العشوائية. (3) الاستقلالية.

(4) نوع البيانات كمية (5) تباين المجتمعين مجهول لكنه متساو.

أولا: القيم الحرجة:

$\alpha=0.05\ \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}=t_{0.025}=2.060\ \&\ \ t_{1-\frac{\alpha}{2}}=t_{0.975}=-2.060$ وذلك لأن

الاختبار ذو طرفين.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{14\times16+11\times9}{15+12-2}=12.92$$

$$T=\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{(20-17)}{\sqrt{12.92}\times\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}}}\approx\frac{3}{1.39}=2.158$$

v	مستوى المعنوية α				
	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} < \mathrm{t} \nless \mathrm{t}_{\frac{\alpha}{2}}$$
$$-2.060 < 2.158 \nless +2.060$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة الرفض.

رابعا: النتيجة:

رفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل وهو:

$$H_1:\ \mu_1 \neq \mu_2\ \ (\mu_1 - \mu_2 \neq 0)$$

تمرين (5): أخذا عينتان مستقلتان من مجتمعين طبيعيين فأعطتا:

	العينة الأولى	العينة الثانية
الحجم	8	9
الوسط الحسابي	17.4	13.2
التباين	16	22

اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أن تبايني المجتمعين متساويان مقابل أن الثاني أكبر من الأول.

أولا: القيم الحرجة:

$$\alpha = 0.05\ \Longrightarrow F_{[0.05,8,7]} = 3.73$$

وذلك لأن الاختبار ذو طرف أيمن.

ثانيا: نحسب الإحصاءة:

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{22}{16} = 1.375$$

ثالثا: مقارنة الإحصاءة بالقيم الحرجة:

$$\mathrm{F} < F_{[0.05,8,7]}$$
$$1.375 < 3.73$$

نلاحظ أن الإحصاءة في فترة القبول.

رابعا: النتيجة:

قبول الفرض العدمي وهو:

$$H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2\ \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1\right)$$

المحاضرة الثانيه عشر

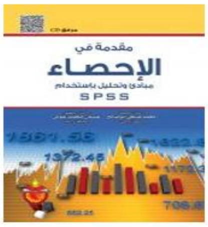
استخدام برنامج SPSS للتقدير الإحصائي والاختبارات الإحصائية المعلمية

استخدام برنامج SPSS في التحليل الإحصائي:

برنامج (SPSS) هو اختصار (Statistical package for social sciences) أو الحزم الإحصائية للعلوم الاجتماعية, ويستخدم برنامج SPSS على نطاق واسع في الأبحاث الإدارية والتربوية وعموم الأبحاث الاجتماعية والإنسانية.

يحوي برنامج (SPSS) نافذة تعريف المتغيرات وهو ما يقوم الباحث به أولا، ثم يقوم بإدخال بيانات هذه المتغيرات في نافذة عرض البيانات، ثم يقوم الباحث من خلال لائحة الأوامر بإجراء أي أمر إحصائي متاح في البرنامج، وأخيرا تظهر النتائج الإحصائية في نافذة النتائج.

وسوف نركز على تفسير النتائج، ويمكن التعرف على كيفية تعريف المتغيرات وإدخال البيانات ولوائح الأوامر المتاحة من خلال الرجوع إلى المراجع.



تتطلب الاختبارات المعلمية تحقق شروط استخدمها ومن أهم الشروط التي يتطلب الاختبار المعلمي تحققها أو تحقق بعضها:

١) الاعتدالية.
٢) التجانس.
٣) العشوائية.
٤) الاستقلال.
٥) البيانات الكمية.

وبشكل عام؛ إذا لم تتحقق شروط اختبار معلمي ما يتم استخدام الاختبار اللامعلمي الذي يقوم مقامه.

والمقصود بشرط الاعتدالية أن تتبع البيانات التوزيع الطبيعي، ويتم التحقق من اعتدالية التوزيع باستخدام (Kolmogrov-Smirnov Test) أو (Shapiro-Wilk Test)

والمقصود بشرط التجانس عند سحب أكثر من عينتين؛ أن للمجتمعات المسحوبة منها العينات نفس التباين، ويمكن التحقق من شرط التجانس باستخدام (Levene's Test)

وأما الشروط الأخرى فلا يتم اختبار تحققها وإنما يعمل الباحث على التأكد عند جمع البيانات أنها كمية ومن مجتمعات مستقلة وأنه تم اختيارها بشكل عشوائي.

يوضح الجدول التالي الاختبارات المعلمية التي سوف نتناولها بالدراسة وشروط كل منها:

الاختبار	الاعتدالية	التجانس	العشوائية	الاستقلال	البيانات الكمية
One – Sample T Test	*		*		*
Independent – Samples T Test	*		*	*	*
Paired– Samples T Test	*		*		*
One – Way ANOVA	*	*	*	*	*

ويوضح الجدول التالي كل من الاختبارات المعلمية والاختبارات اللامعلمية التي سوف نتناولها بالدراسة:

الحالة	الاختبار المعلمي	الاختبار اللامعلمي
عينة واحدة	One – Sample T Test	-----------
عينتين مستقلتين	Independent – Samples T Test	Mann-Whitney
عينتين مرتبطتين	Paired– Samples T Test	Wilcoxon
عينات مستقلة	One – Way ANOVA	Kruskal-Wallis
عينات غير مستقلة	-----------	Friedman

1) اختبار t لعينة واحدة (One – Sample T Test).

2) اختبار t لعينتين مستقلتين (Independent – Samples T Test).

3) اختبار t لعينتين غير مستقلتين (Paired – Samples T Test).

4) اختبار تحليل التباين الأحادي (One – Way ANOVA).

١) اختبار t لعينة واحدة (One – Sample T Test):

مثال (1): يوضح الجدول التالي عينة من درجات طلاب في مقرر الاقتصاد الكلي:

80	85	75	65	55	52	44
33	30	25	45	80	95	50
30	95	88	90	77	72	75
60	40	57	55	52	48	84

المطلوب: استخدم برنامج SPSS لاختبار أن الوسط الحسابي للمجتمع يساوي 68 مقابل أن لا يساوي ذلك بمستوى دلالة 0.05

أولا: نتحقق من أن البيانات مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي باستخدام اختبار (Kolmogrov-Smirnov).

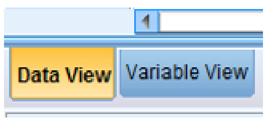
الفرض العدمي:

بيانات العينة مسحوبة من مجتمع تتبع بياناته التوزيع الطبيعي.

الفرض البديل:

بيانات العينة مسحوبة من مجتمع لا تتبع بياناته التوزيع الطبيعي.

١) يتم كتابة بيانات المتغير بعد تعريفه بشكل مناسب وتحديد اسم له (Marks)



2) يتم اتباع الخطوات التالية:

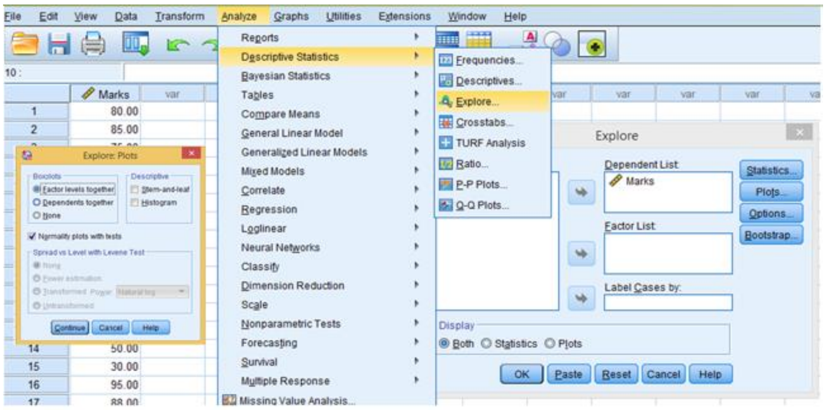
Analyze → Descriptive Statistics → Explore

3) بعد فتح نافذة (Explore) يتم نقل اسم المتغير (Marks) إلى تبويب (Dependent List)

4) من تبويب (Statistics) نجد أن فترة الثقة هي 95% ويمكن تغييرها إلى أي فترة أخرى ونضغط على (continue).

5) من تبويب (Plots) نضع المؤشر على (Normality plots with tests) ونضغط على (continue)

6) يتم اختيار (OK) لتظهر النتائج.



النتائج:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Marks	.124	28	.200*	.953	28	.231

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

اختبار (Kolmogrov-Smirnov):

$$P - Value > \alpha$$

$$0.200 > 0.05$$

اختبار (Shapiro-Wilk):

$$P - Value > \alpha$$

$$0.231 > 0.05$$

النتيجة: نقبل الفرض العدمي وهو بيانات العينة مسحوبة من مجتمع تتبع بياناته التوزيع الطبيعي.

ثانيا: نقوم بإجراء الاختبار المطلوب.

الفرض العدمي:

وسط المجتمع يساوي 68

الفرض البديل:

وسط المجتمع لا يساوي 68

١) يتم كتابة بيانات المتغير بعد تعريفه بشكل مناسب وتحديد اسم له (Marks)

2) يتم اتباع الخطوات التالية:

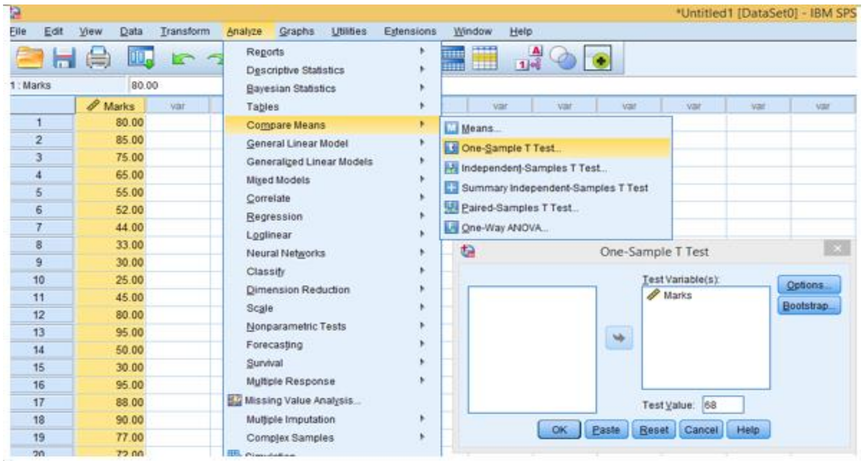
Analyze → Compare Means → One-Sample T Test

3) بعد فتح نافذة (One-Sample T Test) يتم نقل اسم المتغير (Marks) إلى تبويب (Test Variable)

4) نكتب القيمة التي نود اختبارها في مربع النص المعنون (Test Value)

5) من تبويب (Option) نجد أن فترة الثقة هي 95% ويمكن تغييرها إلى أي فترة أخرى.

6) يتم اختيار (OK) لتظهر النتائج.



T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

حجم العينة: $n = 28$

درجة الحرية: $n - 1 = 27$

وسط العينة ($\bar{x}$): $\bar{x} = 62.0357$

الانحراف المعياري للعينة (s): $s = 21.07567$

فترة الثقة: $(68 - 14.1366 , 68 + 2.2080) = (53.8634 , 70.2080)$

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

نوع الاختبار: ذو طرفين.

نتيجة الاختبار: قبول الفرض العدمي $\mu = 68$

السبب: الطريقة الأولى:

$$53.8634 \leq 68 \leq 70.2080$$

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

الطريقة الثانية:

$$-t_{[0.025,27]} \leq t \leq t_{[0.025,27]}$$

$$-2.052 \leq -1.497 \leq 2.052$$

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

الطريقة الثالثة:

$$P - Value > \alpha$$

$$0.146 > 0.05$$

٢) اختبار t لعينتين مستقلتين (Independent – Samples T Test):

مثال (2): يوضح الجدول التالي عينتين مستقلتين من درجات طلاب وطالبات في مقرر الاقتصاد الكلي الذي تتوزع درجات الطلاب فيه بشكل طبيعي:

30	25	52	80	84	50	30	77	75	**الطلاب**
73	80	85	75	65	55	52	44	33	
60	40	57	55	45	48	95	87	78	

65	44	77	75	79	38	84	45	85	70	الطالبات
95	85	98	75	77	30	25	30	44	40	
	77	66	65	98	95	36	48	60	61	

المطلوب: استخدم برنامج SPSS لاختبار أن وسطي المجتمعين متساويان مقابل أنهما ليس كذلك بمستوى دلالة 0.05، ولتقدير فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين.

الفرض العدمي:

درجات الطلاب مساوية لدرجات الطالبات (لا يوجد فرق معنوي)

الفرض البديل:

درجات الطلاب غير مساوية لدرجات الطالبات (يوجد فرق معنوي)

١) يتم كتابة بيانات العينتين أسفل نفس المتغير وليكن (Marks)، ثم يتم تعريف متغير آخر للجنس (Gender) ويتم اختيار رمز للطلاب (1) وآخر للطالبات (2).

2) يتم اتباع الخطوات التالية:

Analyze → Compare Means → Independent-Samples T Test

3) بعد فتح نافذة (Independent-Samples T Test) يتم نقل اسم المتغير (Marks) إلى تبويب (Test Variable) والمتغير (Gender) إلى تبويب (Grouping Variable) ويتم تحديد أن رمز الطلاب (1) والطالبات (2).

4) من تبويب (Option) نجد أن فترة الثقة هي 95% ويمكن تغييرها إلى أي فترة أخرى.

5) يتم اختيار (OK) لتظهر النتائج.

T-Test

Group Statistics

	Gender	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	1.00	27	60.3704	19.87876	3.82567
	2.00	29	64.3793	22.23160	4.12830

ملخص النتائج:

	العينة الأولى	العينة الثانية
حجم العينة	27	29
الوسط الحسابي	60.3704	64.3793
الانحراف المعياري	19.87876	22.23160

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper
Marks	Equal variances assumed	0.366	0.548	-0.709	54	0.481	-4.00894	5.65123	-15.33897	7.32109
	Equal variances not assumed			-0.712	53.918	0.479	-4.00894	5.62838	-15.29355	7.27567

ملخص النتائج في حالة تساوي تبايني المجتمعين:

معلومات الاختبار	النتائج
درجة الحرية (df)	54
الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{x}-\bar{y})$	-4.00894
فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$	$(-15.33897, 7.32109)$
قيمة الإحصاءة (القيمة المحسوبة)	-0.709
P-Value	0.481

نتيجة الاختبار: قبول الفرض العدمي $\mu_1 - \mu_2 = 0$

السبب: الطريقة الأولى:

$$-15.33897 \leq 0 \leq 7.32109$$

الطريقة الثانية:

$$-t_{[0.025,54]} \leq t \leq t_{[0.025,54]}$$

$$-2.005 \leq -0.709 \leq 2.005$$

الطريقة الثالثة:

$$P - Value > \alpha$$

$$0.481 > 0.05$$

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference Lower	95% Confidence Interval of the Difference Upper
Marks	Equal variances assumed	0.366	0.548	-0.709	54	0.481	-4.00894	5.65123	-15.33897	7.32109
	Equal variances not assumed			-0.712	53.918	0.479	-4.00894	5.62838	-15.29355	7.27567

ملخص النتائج في حالة عدم تساوي تبايني المجتمعين:

معلومات الاختبار	النتائج
درجة الحرية (df)	53.918
الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{x} - \bar{y})$	-4.00894
فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$	$(-15.29355 , 7.27567)$
قيمة الإحصاءة (القيمة المحسوبة)	-0.712
P-Value	0.479

نتيجة الاختبار: قبول الفرض العدمي $\mu_1 - \mu_2 = 0$

السبب: الطريقة الأولى:

$$-15.29355 \leq 0 \leq 7.27567$$

الطريقة الثانية:

$$-t_{[0.025,54]} \leq t \leq t_{[0.025,54]}$$

$$-2.005 \leq -0.712 \leq 2.005$$

الطريقة الثالثة:

$$P - Value > \alpha$$

$$0.479 > 0.05$$

٢) اختبار t لعينتين غير مستقلتين (Paired – Samples T Test)

مثال (3): يوضح الجدول التالي عينتين من درجات الاختبار الدوري الأول والاختبار الدوري الثاني لنفس الطلاب في مقرر الاقتصاد الكلي الذي تتوزع درجات الطلاب فيه بشكل طبيعي:

Exam1	٩٣	٩٥	٦٣	٩٢	١٠٠	٩٨	٨٦	١٠٠	٩٥	٧١
Exam2	٩٣	٩٨	٨٤	٩٦	٩٨	١٠٠	٨٦	١٠٠	٩٧	١٠٠

المطلوب: استخدم برنامج SPSS لاختبار هل تغير أداء الطلاب في الاختبار الدوري الثاني عنه في الاختبار الدوري الأول مقابل أنه لم يحصل تغير بمستوى دلالة 0.05، ولتقدير فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين

الفرض العدمي:

درجات الطلاب في الاختبار الأول مساوية لدرجاتهم في الاختبار الثاني (لم يطرأ تغير معنوي)

الفرض البديل:

درجات الطلاب في الاختبار الأول غير مساوية لدرجاتهم في الاختبار الثاني (طرأ تغير معنوي)

النتائج:

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Exam1	95.2000	10	5.80804	1.83666
	Exam2	89.3000	10	12.59674	3.98344

Paired Samples Correlations				
		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Exam1 & Exam2	10	0.578	.080

ويظهر في الجدول الأول ملخص بيانات الاختبار الأول والاختبار الثاني (الوسط والانحراف المعياري وحجم العينة)، ويظهر في الجدول الثاني قيمة معامل الارتباط بين الاختبارين وهي قيمة متوسطة.

Paired Samples Test									
		Paired Differences							
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper	t	df	Sig. (2-tailed)
Pair 1	Exam1 - Exam2	5.90000	10.38642	3.28448	-1.53000-	13.33000	1.796	9	0.106

النتائج: يظهر في هذا الجدول متوسط الفرق بين وسطي العينتين (5.9) وفترة الثقة للفرق بين وسطي المجتمعين (-1.53 , 13.33) وقيمة الإحصاءة (1.796) ودرجة الحرية (٩).

القرار:

$$P - Value > \alpha$$

$$0.106 > 0.05$$

نقبل الفرض العدمي أي أنه لم يطرأ تغير معنوي.

٣) اختبار تحليل التباين الأحادي (One – Way ANOVA):

مثال (4): يوضح الجدول التالي ثلاث عينات مستقلة من أسعار أسهم مالية تتبع توزيع طبيعي

٢١	١٥	٢٠	١٩	١٨	١٦	١٥	١٤	١٥	١٣	١٤	١٥	١٧	١٦	١٥
٢٥	٢٣	٢٠	١٨	١٩	١٨	٢٤	٢٥	٢٣	٢٠	١٩	١٦	١٤	١٨	١٦
٢٠	١٦	٢٠	١٨	١٧	١٥	١٦	٢٤	٢١	٢٠	٢٠	١٩	١٦	١٥	١٨
٢٤	٢٢	١٩	١٩	١٨	١٩	٢٥	٢٤	٢٢	١٩	١٨	١٧	١٥	١٧	١٥
٢٤	٢٣	٢١	٢٠	١٢	٢٦	٢٤	٢١	٢٩	٢٨	٢٦	٢٤	٢٤	٢٤	٢٥
٢٥	٢٣	٢٠	٢١	٢١	١٦	١٥	١٧	١٨	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٣	٢٥

اختبر أن متوسطات أسعار كل من الأسهم الثلاثة متساوية مقابل أن اثنين منهما على الأقل غير متساويين بمستوى دلالة 0.05

أولا: نتحقق من تحقق شرط التجانس.

الفرض العدمي:

تباينات المجتمعات المسحوبة منها العينات متساوية (يوجد تجانس).

الفرض البديل:

تباينات المجتمعات المسحوبة منها العينات غير متساوية (لا يوجد تجانس).

ثانيا: نتحقق من المطلوب.

الفرض العدمي هو:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

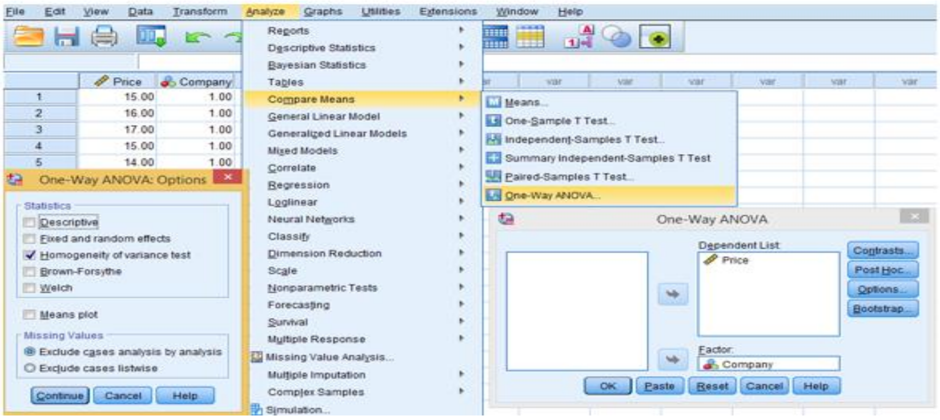
الفرض البديل هو:

يوجد اثنين منهما على الأقل غير متساويين

باستخدام تحليل التباين الأحادي حسب الطريقة الموضحة في الشريحة القادمة.

Analyze → Compare Means → One-Way Anova

ويمكن إجراء الاختبارين معا وذلك باختيار تبويب (options)، ومن ثم وضع المؤشر على الخيار (homogeneity of variance test)



Test of Homogeneity of Variances

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Price	Based on Mean	1.313	2	87	.274
	Based on Median	1.312	2	87	.275
	Based on Median and with adjusted df	1.312	2	83.657	.275
	Based on trimmed mean	1.290	2	87	.280

باستخدام P-Value؛ نلاحظ أن:

$$P - \text{Value} > \alpha$$

$$0.274 > 0.05$$

وبالتالي نقبل الفرض العدمي وهذا يعني أن تباينات المجتمعات المسحوبة منها العينات متساوية (يوجد تجانس).

Oneway

ANOVA

Price

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	227.756	2	113.878	9.711	.000
Within Groups	1020.200	87	11.726		
Total	1247.956	89			

اعتمادا على اختبار F وباستخدام P-Value؛ نلاحظ أن:

$$P - \text{Value} < \alpha$$

$$0.000 < 0.05$$

وبالتالي نرفض الفرض العدمي وهذا يعني أنه يوجد وسطين على الأقل غير متساويين.

نقوم بإعادة الاختبار من أجل معرفة ما هي الأوساط غير المتساوية:

نعيد الخطوات السابقة وفي الخطوة الثالثة نختار التبويب (Post Hoc Test) ومنه نضع المؤشر على (LSD)

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

Dependent Variable: Price
LSD

(I) company	(J) company	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	-.90000-	.88417	.312	-2.6574-	.8574
	3.00	-3.73333-*	.88417	.000	-5.4907-	-1.9759-
2.00	1.00	.90000	.88417	.312	-.8574-	2.6574
	3.00	-2.83333-*	.88417	.002	-4.5907-	-1.0759-
3.00	1.00	3.73333*	.88417	.000	1.9759	5.4907
	2.00	2.83333*	.88417	.002	1.0759	4.5907

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

نلاحظ أن P-Value وهي (0.312) بين الشركتين الأولى والثانية أكبر من مستوى الدلالة وهذا يعني أن هذين المتوسطين ليس بينهما فرق معنوي.

تمارين محلولة:

تمرين (1): يوضح الجدول التالي عينة من درجات طلاب في مقرر الاقتصاد الكلي الذي تتوزع درجات الطلاب فيه بشكل طبيعي:

44	52	55	65	75	85	80
50	95	80	45	25	30	33
75	72	77	90	88	95	30
84	48	52	55	57	40	60

المطلوب: استخدم برنامج SPSS لاختبار أن الوسط الحسابي للمجتمع يساوي 68 مقابل أن لا يساوي ذلك بمستوى دلالة 0.01

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	99% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	.146	-5.96429	-16.9997	5.0711

حجم العينة: $n = 28$

درجة الحرية: $n - 1 = 27$

وسط العينة $(\bar{x})$: $\bar{x} = 62.0357$

الانحراف المعياري للعينة (s): $s = 21.07567$

فترة الثقة: $(68 - 16.9997, 68 + 5.0711) = (51.0003, 73.0711)$

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	99% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	.146	-5.96429	-16.9997	5.0711

نوع الاختبار: ذو طرفين.

نتيجة الاختبار: قبول الفرض العدمي $\mu = 68$

السبب: الطريقة الأولى:

$$51.0003 \leq 68 \leq 73.0711$$

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	99% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	.146	-5.96429	-16.9997	5.0711

الطريقة الثانية:

$$-t_{[0.005,27]} \leq t \leq t_{[0.005,27]}$$
$$-2.771 \leq -1.497 \leq 2.771$$

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	99% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	.146	-5.96429	-16.9997	5.0711

الطريقة الثالثة:

$$P - Value > \alpha$$
$$0.146 > 0.01$$

تمرين (2): يوضح الجدول التالي عينتين مستقلتين من درجات طلاب وطالبات في مقرر الاقتصاد الكلي الذي تتوزع درجات الطلاب فيه بشكل طبيعي:

30	25	52	80	84	50	30	77	75	**الطلاب**
73	80	85	75	65	55	52	44	33	
60	40	57	55	45	48	95	87	78	

65	44	77	75	79	38	84	45	85	70	الطالبات
95	85	98	75	77	30	25	30	44	40	
	77	66	65	98	95	36	48	60	61	

المطلوب: استخدم برنامج SPSS لاختبار أن وسطي المجتمعين متساويان مقابل أنهما ليس كذلك بمستوى دلالة 0.01، ولتقدير فترة ثقة 99% للفرق بين الوسطين.

T-Test

Group Statistics

	Gender	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	1	27	60.37	19.879	3.826
	2	29	64.38	22.232	4.128

ملخص النتائج:

	العينة الأولى	العينة الثانية
حجم العينة	27	29
الوسط الحسابي	60.38	64.37
الانحراف المعياري	19.879	22.232

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									99% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Marks	Equal variances assumed	.366	.548	-.709-	54	.481	-4.009-	5.651	-19.098-	11.080
	Equal variances not assumed			-.712-	53.918	.479	-4.009-	5.628	-19.037-	11.020

ملخص النتائج في حالة تساوي تبايني المجتمعين:

معلومات الاختبار	النتائج
درجة الحرية (df)	54
الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{x}-\bar{y})$	-4.009
فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$	$(-19.098\,, 11.080)$
قيمة الإحصاءة (القيمة المحسوبة)	-0.709
P-Value	0.548

نتيجة الاختبار: قبول الفرض العدمي $\mu_1-\mu_2=0$ السبب:

الطريقة الأولى:

$$-19.098 \le 0 \le 11.080$$

الطريقة الثانية:

$$-t_{[0.005,54]} \le t \le t_{[0.005,54]}$$

$$2.680\ -2.680 \le -0.709 \le 2.680$$

الطريقة الثالثة:

$$P-Value > \alpha$$

$$0.548 > 0.01$$

تمرين (3): إذا كان لدينا ثلاث منتجات لإحدى الشركات الصناعية ، وتم تقييمها من قبل مجموعة من المستهلكين وحصلنا على النتائج التالية :

المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث
٧	٤	٢
١٠	٦	٢
١٠	٧	٣
١١	٩	٧
١٢	٩	٦

هل هناك فروق ذات دلالة بين المنتجات الثلاثة ؟

Oneway

Test of Homogeneity of Variances

		Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Assessment	Based on Mean	.686	2	12	.522
	Based on Median	.246	2	12	.786
	Based on Median and with adjusted df	.246	2	10.949	.786
	Based on trimmed mean	.650	2	12	.539

ANOVA

Assessment

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	90.000	2	45.000	10.000	.003
Within Groups	54.000	12	4.500		
Total	144.000	14			

ملخص النتائج:

يوجد تجانس ولكن هناك منتجان على بينهما فروق معنوية.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

Dependent Variable: Assessment

LSD

(I) Product	(J) Product	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
1.00	2.00	3.00000*	1.34164	.045	.0768	5.9232
	3.00	6.00000*	1.34164	.001	3.0768	8.9232
2.00	1.00	-3.00000-*	1.34164	.045	-5.9232-	-.0768-
	3.00	3.00000*	1.34164	.045	.0768	5.9232
3.00	1.00	-6.00000-*	1.34164	.001	-8.9232-	-3.0768-
	2.00	-3.00000-*	1.34164	.045	-5.9232-	-.0768-

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

نلاحظ أن P-Value كلها أصغر من مستوى الدلالة وهذا يعني أن كل المنتجات مختلفة عن بعضها البعض.

المحاضره الثالثة عشر

استخدام برنامج SPSS للاختبارات اللامعلمية

استخدام برنامج SPSS للاختبارات اللامعلمية:

ويوضح الجدول التالي كل من الاختبارات المعلمية والاختبارات اللامعلمية التي سوف نتناولها بالدراسة:

الحالة	الاختبار المعلمي	الاختبار اللامعلمي
عينة واحدة	One – Sample T Test	-----------
عينتين مستقلتين	Independent – Samples T Test	Mann-Whitney
عينتين مرتبطتين	Paired– Samples T Test	Wilcoxon
عينات مستقلة	One – Way ANOVA	Kruskal-Wallis
عينات غير مستقلة	-----------	Friedman

1) اختبار مان وتني Mann – Whitney Test

2) اختبار ويلكوكسون Wilcoxon Test

3) اختبار كروسكال واليس Kruskal-Wallis Test

4) اختبار فريدمان للعينات غير المستقلة Friedman Test

١) اختبار مان وتني Mann – Whitney :

هذا الاختبار بديل لاختبار t لعينتين مستقلتين عندما لا تتحقق شروطه.

مثال (1): فيما يلي بيان بدرجات مجموعة من الطلاب في مادة المحاسبة، في كل من جامعة الملك فيصل وجامعة الإمام عبدالرحمن الفيصل:

جامعة الملك فيصل	١٠	١٤	٧	٨	١٦
	٣	٧	١٥	١٤	٧
جامعة الإمام عبدالرحمن الفيصل	١٣	٦	٥	١٢	٣
	١٠	١١	١٠	١٠	١٤

بإستخدام إختبار مان – ويتنى: اختبر هل هناك اختلاف في متوسط درجات مادة المحاسبة بين جامعة الملك فيصل وجامعة الإمام عبدالرحمن الفيصل وذلك عند مستوى معنوية 5% .

Ranks

	CODES	N	Mean Rank	Sum of Ranks
SAMPLES	2	10	11.10	111.00
	3	10	9.90	99.00
	Total	20		

Test Statistics[b]

	SAMPLES
Mann-Whitney U	44.000
Wilcoxon W	99.000
Z	-.457
Asymp. Sig. (2-tailed)	.648
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	.684[a]

النتيجة: قبول الفرض العدمي أي أنه لا يوجد فرق معنوي بين طلاب الجامعتين والسبب أن:

$$P - Value > \alpha$$

$$0.684 > 0.05$$

كما يمكن مقارنة إحصاءة الاختبار z=-0.457 مع القيم الجدولية من جدول Z ويلاحظ أن هذه الإحصاءة موجودة داخل منطقة القبول.

٢) اختبار ويلكوكسون Wilcoxon Test :

هذا الاختبار بديل لاختبار t لعينتين غير مستقلتين عندما لا تتحقق شروطه.

مثال (2): تم أخذ عينة من الأشخاص وتم قياس أوزانهم، وبعد اشتراكهم في برنامج رياضي معين تم قياس أوزانهم مرة أخرى؛ يوضح الجدول التالي بيانات هذه العينة:

الوزن قبل ممارسة الرياضة	٨٥	٩٦	٨٠	٩٥	٩٠	٨٨	١٠٣	٩٨
الوزن بعد ممارسة الرياضة	٨٠	٨٥	٨٥	٨٢	٧٥	٨٠	٨٤	٨٦

اختبرهل هناك اختلاف معنوي في الوزن بسبب ممارسة الرياضة، باستخدام اختبار ويلكوكسون Wilcoxon عند مستوى معنوية 5% .

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
AFTER - BEFORE	Negative Ranks	7[a]	4.93	34.50
	Positive Ranks	1[b]	1.50	1.50
	Ties	0[c]		
	Total	8		

Test Statistics[b]

	AFTER - BEFORE
Z	-2.313[a]
Asymp. Sig. (2-tailed)	.021

النتيجة: رفض الفرض العدمي أي أنه يوجد فرق معنوي بين أوزان الأشخاص قبل وبعد البرنامج الرياضي؛ مما قد يرجح أن البرنامج الرياضي يساهم في إنقاص الوزن.

$$P - Value < \alpha$$

$$0.021 < 0.05$$

كما يمكن مقارنة إحصاءة الاختبار z=-2.313 مع القيم الجدولية من جدول Z ويلاحظ أن هذه الاحصاءة موجودة خارج منطقة القبول.

٣) اختبار كروسكال واليس Kruskal-Wallis Test:

يعتبر هذا الاختبار بديلاً لامعلميا لاختبار تحليل التباين في اتجاه واحد، ويستعمل لاختبار الفروق بين ثلاث مجموعات أو أكثر.

مثال (3): الجدول التالي يوضح درجات مجموعة من الطلاب في مادة الاقتصاد في ثلاث جامعات هي: جامعة الملك فيصل – جامعة الإمام عبدالرحمن الفيصل – جامعة الملك سعود، والمطلوب هو دراسة مدى وجود اختلاف بين مستوى الطلاب في الجامعات الثلاثة السابقة باستخدام اختبار كروسكال- والس، وذلك عند مستوى معنوية 5%:

جامعة الملك فيصل	جامعة الإمام عبدالرحمن الفيصل	جامعة الملك سعود
١٣	٤	٥
١٤	٧	٦
١٤	١٠	١٥
١٥	١٢	١٠
١٥	٦	١٤
١٧	١٠	٦
٤	١٣	٦
١٦	١٨	١٢

Ranks			
	CODES	N	Mean Rank
SAMPLES	1	8	16.88
	2	8	10.75
	3	8	9.88
	Total	24	

Test Statistics[a,b]	
	SAMPLES
Chi-Square	4.706
df	2
Asymp. Sig.	.095

النتيجة: قبول الفرض العدمي أي أنه لا يوجد فرق معنوي بين مستويات الطلاب في الجامعات الثلاث.

$$P - Value > \alpha$$
$$0.095 > 0.05$$

كما يمكن مقارنة إحصاءة الاختبار χ^2=4.706 مع القيم الجدولية من جدول χ^2 ويلاحظ أن هذه الإحصاءة موجودة داخل منطقة القبول.

٤) اختبار فريدمان للعينات غير المستقلة (Friedman):

مثال (4): الجدول التالي يوضح درجات مجموعة من الطلاب في مادة الاقتصاد من ثلاثة أقسام من كلية إدارة الأعمال، والمطلوب هو دراسة مدى وجود اختلاف بين مستوى الطلاب في الأقسام الثلاثة باستخدام اختبار فريدمان للعينات غير المستقلة، وذلك عند مستوى معنوية 5%:

الإدارة	نظم المعلومات	المالية
٥	٤	١٣
٦	٧	١٤
١٥	١٠	١٤
١٠	١٢	١٥
١٤	٦	١٥
٦	١٠	١٧
٦	١٣	٤
١٢	١٨	١٦

Ranks	
	Mean Rank
Management	2.50
MIS	1.88
Finance	1.63

Test Statistics	
N	8
Chi-Square	3.250
df	2
Asymp Sig.	0.197

النتيجة: قبول الفرض العدمي أي أنه لا يوجد فرق معنوي بين مستويات الطلاب في الأقسام الثلاثة.

$$P - Value > \alpha$$
$$0.197 > 0.05$$

كما يمكن مقارنة إحصاءة الاختبار χ^2=3.250 مع القيم الجدولية من جدول χ^2 ويلاحظ أن هذه الإحصاءة موجودة داخل منطقة القبول.

اختبارات لا معلمية أخرى.

وهناك اختبارات لامعلمية أخرى ومن أهمها:

١) اختبار كاي تربيع لدراسة استقلال ظاهرتين.

٢) اختبار كاي تربيع لجودة التوفيق.

٣) اختبار كلومجروف – سيمنروف لجودة التوفيق.

تمارين محلولة

تمرين (1): قام أحد الباحثين بمقارنة عينة من رواتب موظفي قطاع حكومي من مدينة الرياض بآخر من مدينة مسقط وذلك بصدد الوقوف على ما إذا كان هناك اختلاف في متوسط الرواتب وذلك عند مستوى معنوية 5%، وباستخدام البرنامج الاحصائي SPSS حصلنا على النتائج التالية:

	SAMPLES
Mann-Whitney U	**55.000**
Wilcoxon W	**95.000**
Z	**-0.037**
Asymp . Sig . (2-tailed)	**0.028**
Exact Sig .[2*(1-tailed Sig.)]	**0.034**

(١) الاختبار المستخدم لدراسة الفرق بين متوسطي مجتمعين في هذه الحالة :-
(أ) كا٢ .
(ب) مان وتني .
(ج) ويلكوكسون .
(د) لا شيء مما سبق

(٢) قيمة إحصائي الاختبار تساوي :-
(أ) -.037
(ب) .028
(ج) .034
(د) لا شيء مما سبق

(٣) من خلال مقارنة قيمة إحصائي الاختبار بقيمة حدود منطقتي القبول والرفض يمكن :-
(أ) قبول الفرض البديل .
(ب) قبول الفرض العدمي .
(ج) عدم قبول أي من الفرضين .
(د) لا شيء مما سبق .

.

تمرين (2) إذا علمت أنه لدراسة تأثير أحد البرامج التدريبية على مجموعة من الطلاب تم اختبار عينة من 8 طلاب قبل البرنامج التدريبي وتم قياس تحصيلهم قبل البرنامج التدريبي ثم تم قياس تحصيلهم مرة أخرى بعد البرنامج التدريبي، ولاختبار هل هناك اختلاف معنوي في مستوى تحصيل الطلاب عند مستوى معنوية 5%؛ استخدم الباحث اختبار ويلكوكسون Wilcoxon وحصل على النتائج التالية:

Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
AFTER-BEFORE	Negative Ranks	7	2.36	43.50
	Positive Ranks	1	3.54	3.54
	Ties	0		
	Total	8		

Test Statistics

	AFTER-BEFORE
Z	-.313
Asymp . Sig . (2-tailed)	.421

(١) من الجداول السابقة يمكن توضيح أن:

(أ) مستوى الطلاب قبل الحصول على البرنامج التدريبي أفضل من المستوى بعد الحصول على البرنامج .

(ب) مستوى الطلاب بعد الحصول على البرنامج التدريبي أفضل من المستوى قبل الحصول على البرنامج .

(ج) مستوى الطلاب قبل الحصول على البرنامج التدريبي مساوي لمستوى بعد الحصول على البرنامج .

(د) لا شيء مما سبق

(٢) من خلال مقارنة قيمة إحصائي الاختبار بقيمة حدود منطقتي القبول والرفض يمكن:

(أ) قبول الفرض البديل .

(ب) قبول الفرض العدمي .

(ج) عدم قبول أي من الفرضين .

(د) لا شيء مما سبق .

تمرين (3) قام أحد الباحثين بدراسة درجات مجموعة من الطلاب في مادة التحليل الاحصائي في ثلاث جامعات هي: جامعة الملك فيصل – جامعة الإمام عبدالرحمن الفيصل – جامعة الملك سعود، وذلك لدراسة مدى وجود اختلاف بين مستوى الطلاب في الجامعات الثلاثة السابقة باستخدام اختبار كروسكال- والس، وذلك عند مستوى معنوية 5%، تم الحصول على النتائج التالية باستخدام البرنامج الاحصائي SPSS:

Test Statistics

	SAMPLES
Ci-Square	0.706
df	2
Asymp . Sig .	0.025

(١) من الجدول السابق يمكن :

(أ) قبول الفرض البديل القائل بمعنوية الفروق بين الجامعات الثلاثة .

(ب) قبول الفرض العدمي القائل بأن الفروق بين الجامعات الثلاثة غير معنوية .

(ج) قبول الفرض العدمي القائل بأن الفروق بين الجامعات الثلاثة معنوية .

(د) لا شيء مما سبق .

المحاضره الرابعه عشر

مراجـــــــــــعة

ملاحظات مهمة:

- الهدف من هذه المحاضرة إعطاء صورة عامة عن المقرر، وهي ليست شاملة لكل شيء.
- هناك العديد من الأفكار التي لم يتم التطرق إليها وخاصة النظرية.
- ينبغي الحرص على فهم وتحليل المحتوى، وتجنب حفظ الأسئلة.

المحاضره الاولى

١) إذا كانت $A = \{2,3,4,5,6\}$، وكانت Z ترمز لمجموعة الأعداد الصحيحة؛ فإنه يمكن كتابة A بطريقة القانون كالتالي:

أ- $A = \{x: 1 < x < 6, x \in Z\}$

ب- $A = \{x: 1 \leq x < 6, x \in Z\}$

ج- $A = \{x: 1 < x \leq 6, x \in Z\}$

د- $A = \{x: 1 \leq x \leq 6, x \in Z\}$

٢) إذا كانت Z تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة، وكانت A تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية، وكانت B تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية؛ فإن:

أ- $A \cap B = \emptyset$

ب- $A \cap B = A$

ج- $A \cap B = B$

د- $A \cap B = Z$

٣) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$، وكانت $A = \{1,3,5,7,9\}$، وكانت $B = \{1,2,3,4,5\}$؛ فإن:

أ- $A \cap B = \{2,4\}$

ب- $A \cap B = \{7,9\}$

ج- $A \cap B = \{1,3,5\}$

د- $A \cap B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$

٤) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$، وكانت $A = \{1,3,5,7,9\}$، وكانت $B = \{1,2,3,4,5\}$؛ فإن:

أ- $A \cup B = \{2,4\}$

ب- $A \cup B = \{7,9\}$

ج- $A \cup B = \{1,3,5\}$

د- $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$

٥) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$، وكانت $A = \{1,3,5,7,9\}$، وكانت $B = \{1,2,3,4,5\}$؛ فإن:

أ- $A - B = \{2,4\}$

ب- $\underline{A - B = \{7,9\}}$

ج- $A - B = \{1,3,5\}$

د- $A - B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$

٦) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$، وكانت $A = \{1,3,5,7,9\}$، وكانت $B = \{1,2,3,4,5\}$؛ فإن:

أ- $\underline{B - A = \{2,4\}}$

ب- $B - A = \{7,9\}$

ج- $B - A = \{1,3,5\}$

د- $B - A = \{1,2,3,4,5,7,9\}$

---

٧) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$، وكانت $A = \{1,3,5,7,9\}$، وكانت $B = \{1,2,3,4,5\}$؛ فإن:

أ- $\bar{A} = \{1,3,5,7,9\}$

ب- $\bar{A} = \{2,4,6,8,10\}$

ج- $\underline{\bar{A} = \{0,2,4,6,8,10\}}$

د- $\bar{A} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

٨) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = [0,8]$، وكانت $A = [1,5]$، وكانت $B = [3,7]$؛ فإن:

أ- $\underline{A \cap B = [3,5]}$

ب- $A \cap B = [1,3)$

ج- $A \cap B = (5,7]$

د- $A \cup B = [1,7]$

٩) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = [0,8]$، وكانت $A = [1,5]$، وكانت $B = [3,7]$؛ فإن:

أ- $A \cup B = [3,5]$

ب- $A \cup B = [1,3)$

ج- $A \cup B = (5,7]$

د- $\underline{A \cup B = [1,7]}$

١٠) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = [0,8]$، وكانت $A = [1,5]$، وكانت $B = [3,7]$؛ فإن:

أ- $A - B = [3,5]$

ب- $A - B = [1,3)$

ج- $A - B = (5,7]$

د- $A \cup B = [1,7]$

١١) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = [0,8]$، وكانت $A = [1,5]$، وكانت $B = [3,7]$؛ فإن:

أ- $B - A = [3,5]$

ب- $B - A = [1,3)$

ج- $B - A = (5,7]$

د- $A \cup B = [1,7]$

١٢) إذا كانت المجموعة الشاملة $S = [0,8]$، وكانت $A = [1,5]$، وكانت $B = [3,7]$؛ فإن:

أ- $\overline{A} = [0,1] \cup [5,8]$

ب- $\overline{A} = (0,1] \cup [5,8)$

ج- $\overline{A} = [0,1) \cup (5,8]$

د- $\overline{A} = (0,1) \cup (5,8)$

المحاضره الثانيه

١٣) ما هو الفضاء العيني لنتيجة مباراة الذهاب والإياب للفريق A؟

أ- $S = \{ww,dd,ll\}$

ب- $S = \{ww,wd,wl,dd,dl,ll\}$

ج- $S = \{wd,wl,dw,dl,lw,ld\}$

د- $S = \{ww,wd,wl,dw,dd,dl,lw,ld,ll\}$

١٤) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ فإن احتمال فوز الفريق A في المباراتين هو:

أ- $P(A) = 1/3$

ب- $P(A) = 1/4$

ج- $P(A) = 1/6$

د- $P(A) = 1/9$

١٥) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ فإن احتمال فوز الفريق A في مباراة واحدة فقط هو:

أ- $P(A) = 4/6$
ب- $P(A) = 5/6$
ج- $P(A) = 4/9$
د- $P(A) = 5/9$

١٦) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ فإن احتمال فوز الفريق A في مباراة واحدة على الأقل هو:

أ- $P(A) = 4/6$
ب- $P(A) = 5/6$
ج- $P(A) = 4/9$
د- $P(A) = 5/9$

١٧) إذا كان:

$$P(A) = 0.20, P(B) = 0.70, P(A \cap B) = 0.10$$

فإن:

أ- $P(A \cup B) = 0.10$
ب- $P(A \cup B) = 0.60$
ج- $P(A \cup B) = 0.80$
د- $P(A \cup B) = 0.90$

١٨) إذا كان:

$$P(A) = 0.20, P(B) = 0.70, P(A \cap B) = 0.10$$

فإن:

أ- $P(A \cap \bar{B}) = 0.10$
ب- $P(A \cap \bar{B}) = 0.60$
ج- $P(A \cap \bar{B}) = 0.80$
د- $P(A \cap \bar{B}) = 0.90$

١٩) إذا كان:

$$P(A) = 0.20, P(B) = 0.70, P(A \cap B) = 0.10$$

فإن:

أ- $P(\bar{A} \cap B) = 0.10$
ب- $P(\bar{A} \cap B) = 0.60$
ج- $P(\bar{A} \cap B) = 0.80$
د- $P(\bar{A} \cap B) = 0.90$

٢٠) إذا كان:

$$P(A) = 0.20, \mathrm{P}(B) = 0.70, \mathrm{P}(A \cup B) = 0.80$$

فإن:

أ- $\underline{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = 0.10}$

ب- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = 0.60$

ج- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = 0.80$

د- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B) = 0.90$

٢١) إذا كان:

$$P(A) = 0.20, \mathrm{P}(B) = 0.70, \mathrm{P}(A \cap B) = 0.10$$

فإن:

أ- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0$

ب- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0.20$

ج- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0.30$

د- $\underline{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0.80}$

٢٢) إذا كان:

$$P(A) = 0.20, \mathrm{P}(B) = 0.70, \mathrm{P}(A \cap B) = 0.10$$

فإن:

أ- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.10$

ب- $\underline{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.20}$

ج- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.80$

د- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 0.90$

٢٣) إذا كان:

$$P(A) = 0.20, \mathrm{P}(B) = 0.70, \mathrm{P}(A \cap B) = 0.10$$

فإن:

أ- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) = 0.10$

ب- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) = 0.20$

ج- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) = 0.80$

د- $\underline{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}) = 0.90}$

٢٤) إذا كان:

$$P(A) = 0.20, \mathrm{P}(B) = 0.70, \mathrm{P}(A \cap B) = 0$$

فإن:

أ- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B) = 0.10$

ب- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B) = 0.60$

ج- $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0.80$

د- $\underline{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B) = 0.90}$

المحاضره الثالثه

٢٥) إذا كان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.20$$

فإن:

أ- $P(A \mid B) = 0.20$

ب- $P(A \mid B) = 0.25$

ج- $P(A \mid B) = 0.40$

د- $P(A \mid B) = 0.50$

٢٦) إذا كان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.20$$

فإن:

أ- $P(B \mid A) = 0.20$

ب- $P(B \mid A) = 0.25$

ج- $P(B \mid A) = 0.40$

د- $P(B \mid A) = 0.50$

٢٧) إذا كان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50, P(A \mid B) = 0.40$$

فإن:

أ- $P(A \cap B) = 0.20$

ب- $P(A \cap B) = 0.25$

ج- $P(A \cap B) = 0.32$

د- $P(A \cap B) = 0.40$

٢٨) إذا كان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50, P(B \mid A) = 0.25$$

فإن:

أ- $P(A \cap B) = 0.20$

ب- $P(A \cap B) = 0.25$

ج- $P(A \cap B) = 0.32$

د- $P(A \cap B) = 0.40$

٢٩) إذا كان الحادثان A و B مستقلين وكان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50$$

فإن:

أ- $P(A \cap B) = 0.30$

ب- $P(A \cap B) = 0.40$

ج- $P(A \cap B) = 0.50$

د- $P(A \cap B) = 0.80$

٣٠) إذا كان الحادثان A و B مستقلين وكان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50$$

فإن:

أ- $P(A | B) = 0.30$

ب- $P(A | B) = 0.40$

ج- $P(A | B) = 0.50$

د- $P(A | B) = 0.80$

٣١) إذا كان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.20$$

فإن:

أ- الحادثين مستقلان.

ب- الحادثين غير مستقلين.

٣٢) إذا كان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.40$$

فإن:

أ- الحادثين مستقلان.

ب- الحادثين غير مستقلين.

٣٣) إذا كان:

$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0$$

فإن:

أ- $P(A | B) = 0$

ب- $P(A | B) = 0.30$

ج- $P(A | B) = 0.50$

د- $P(A | B) = 0.80$

٣٤) إذا كان الحادثان A و B مستقلين وكان:
$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.40$$
فإن:

أ- $P(\bar{A} \cap B) = 0.08$

ب- $P(\bar{A} \cap B) = 0.12$

ج- $P(\bar{A} \cap B) = 0.32$

د- $P(\bar{A} \cap B) = 0.48$

٣٥) إذا كان الحادثان A و B مستقلين وكان:
$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.40$$
فإن:

أ- $P(A \cap \bar{B}) = 0.08$

ب- $P(A \cap \bar{B}) = 0.12$

ج- $P(A \cap \bar{B}) = 0.32$

د- $P(A \cap \bar{B}) = 0.48$

٣٦) إذا كان الحادثان A و B مستقلين وكان:
$$P(A) = 0.80, P(B) = 0.40$$
فإن:

أ- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.08$

ب- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.12$

ج- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.32$

د- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.48$

المحاضره الرابعه

٣٧) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ وتم تعريف المتغير العشوائي X أنه عدد النقاط التي يمكن أن يحصل عليها الفريق من المباراتين؛ فإن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X هي:

أ- $X = \{0,1,3\}$

ب- $X = \{0,1,2,3,4\}$

ج- $X = \{0,1,2,3,4,5\}$

د- $X = \{0,1,2,3,4,6\}$

٣٨) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ وتم تعريف المتغير العشوائي X أنه عدد النقاط التي يمكن أن يحصل عليها الفريق من المباراتين؛ فإن:

أ- $P(X = 0) = {}^{0}/_{9}$

ب- $P(X = 0) = {}^{1}/_{9}$

ج- $P(X = 0) = {}^{2}/_{9}$

د- $P(X = 0) = {}^{6}/_{9}$

٣٩) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ وتم تعريف المتغير العشوائي X أنه عدد النقاط التي يمكن أن يحصل عليها الفريق من المباراتين؛ فإن:

أ- $P(X=1)={}^{0}/_{9}$

ب- $P(X=1)={}^{1}/_{9}$

ج- $P(X=1)={}^{2}/_{9}$

د- $P(X=1)={}^{6}/_{9}$

٤٠) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ وتم تعريف المتغير العشوائي X أنه عدد النقاط التي يمكن أن يحصل عليها الفريق من المباراتين؛ فإن:

أ- $P(X>1)={}^{0}/_{9}$

ب- $P(X>1)={}^{1}/_{9}$

ج- $P(X>1)={}^{2}/_{9}$

د- $P(X>1)={}^{6}/_{9}$

٤١) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ وتم تعريف المتغير العشوائي X أنه عدد النقاط التي يمكن أن يحصل عليها الفريق من المباراتين؛ فإن القيمة المتوقعة للمتغير X هي:

أ- $E(X)={}^{2}/_{3}$

ب- $E(X)={}^{4}/_{3}$

ج- $E(X)={}^{6}/_{3}$

د- $E(X)={}^{8}/_{3}$

٤٢) إذا تم اعتبار لعب مباراة الذهاب والإياب للفريق A تجربة إحصائية نتائجها متساوية الحدوث؛ وتم تعريف المتغير العشوائي X أنه عدد النقاط التي يمكن أن يحصل عليها الفريق من المباراتين؛ فإن التباين للمتغير X هو:

أ- $\mathrm{Var}(X)={}^{27}/_{9}$

ب- $\mathrm{Var}(X)={}^{28}/_{9}$

ج- $\mathrm{Var}(X)={}^{29}/_{9}$

د- $\mathrm{Var}(X)={}^{30}/_{9}$

٤٣) العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية:

أ- يمكن أن تتبع نتائج مباريات الدوري ومباريات كأس ولي العهد توزيع ذي الحدين.

ب- يمكن لمباريات الدوري بينما لا يمكن ذلك لمباريات كأس ولي العهد.

ج- يمكن لمباريات كأس ولي العهد بينما لا يمكن ذلك لمباريات الدوري.

د- لا يمكن لمباريات الدوري ولا لمباريات كأس ولي العهد.

٤٤) في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة خمس مرات؛ احسب التوقع.

أ- $E(X) = {}^{3}/_{2}$

ب- $E(X) = {}^{5}/_{2}$

ج- $E(X) = {}^{7}/_{2}$

د- $E(X) = {}^{9}/_{2}$

٤٥) في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة خمس مرات؛ احسب التباين.

أ- $\mathrm{Var}(X) = {}^{3}/_{4}$

ب- $\mathrm{Var}(X) = {}^{5}/_{4}$

ج- $\mathrm{Var}(X) = {}^{7}/_{4}$

د- $\mathrm{Var}(X) = {}^{9}/_{4}$

٤٦) في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة خمس مرات؛ أوجد احتمال ظهور الصورة ثلاث مرات.

أ- $P(X = 3) = {}^{1}/_{32}$

ب- $P(X = 3) = {}^{5}/_{32}$

ج- $P(X = 3) = {}^{6}/_{32}$

د- $P(X = 3) = {}^{10}/_{32}$

٤٧) في كمية من القطع المصنعة ، كان من المعلوم أن نسبة القطع المعيبة بها هي 0.3%. أخذت عينة عشوائية حجمها 350 قطعة؛ فما احتمال وجود قطعتان معيبتان؟

أ- $P(X = 2) = 0.193$

ب- $P(X = 2) = 0.293$

ج- $P(X = 2) = 0.393$

د- $P(X = 2) = 0.493$

٤٨) في كمية من القطع المصنعة ، كان من المعلوم أن نسبة القطع المعيبة بها هي 0.3%. أخذت عينة عشوائية حجمها 350 قطعة؛ فما احتمال وجود قطعة واحدة معيبة على الأقل؟

أ- $P(X \geq 1) = 0.25$

ب- $P(X \geq 1) = 0.35$

ج- $P(X \geq 1) = 0.65$

د- $P(X \geq 1) = 0.75$

المحاضره الخامسه

٤٩) الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x$ هي دالة كثافة احتمالية على:

أ- الفترة $[0,1]$

ب- الفترة $[0,2]$

ج- الفترة $[0,3]$

د- الفترة $[0,4]$

٥٠) إذا كانت الدالة $f(x) = kx$ هي دالة كثافة احتمالية على الفترة $[1,3]$ فما هي قيمة k:

أ- $k = 1/2$

ب- $k = 1/3$

ج- $k = 1/4$

د- $k = 1/5$

٥١) إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{4}x$ هي دالة كثافة احتمالية على الفترة $[1,3]$؛ فإن:

أ- $E(X) = 9/6$

ب- $E(X) = 11/6$

ج- $E(X) = 13/6$

د- $E(X) = 15/6$

٥٢) إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{4}x$ هي دالة كثافة احتمالية على الفترة $[1,3]$؛ فإن:

أ- $Var(X) = 9/36$

ب- $Var(X) = 11/36$

ج- $Var(X) = 13/36$

د- $Var(X) = 15/36$

٥٣) إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{4}x$ هي دالة كثافة احتمالية على الفترة $[1,3]$؛ فإن:

أ- $P(1 \le X \le 2) = 1/8$

ب- $P(1 \le X \le 2) = 3/8$

ج- $P(1 \le X \le 2) = 5/8$

د- $P(1 \le X \le 2) = 7/8$

٥٤) إذا كانت الدالة $f(x)=\frac{1}{4}x$ هي دالة كثافة احتمالية على الفترة $[1,3]$؛ فإن:

أ- $P(2 \leq X \leq 3) = {}^{1}/_{8}$

ب- $P(2 \leq X \leq 3) = {}^{3}/_{8}$

ج- $P(2 \leq X \leq 3) = {}^{5}/_{8}$

د- $P(2 \leq X \leq 3) = {}^{7}/_{8}$

المحاضره السادسه

٥٥) إذا كان لدينا المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 85 وانحراف معياري 2.5؛ فما هي القيمة المعيارية للقيمة $x = 90$؟

أ- $z = -6$

ب- $z = -2$

ج- $z = 0$

د- $z = 2$

٥٦) إذا كان لدينا المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 85 وانحراف معياري 2.5؛ فما هي القيمة المعيارية للقيمة $x = 85$؟

أ- $z = -6$

ب- $z = -2$

ج- $z = 0$

د- $z = 2$

٥٧) إذا كان لدينا المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 85 وانحراف معياري 2.5؛ فما هي القيمة المعيارية للقيمة $x = 70$؟

أ- $z = -6$

ب- $z = -2$

ج- $z = 0$

د- $z = 2$

٥٨) الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(Z \leq 1.20) = 0.1151$

ب- $P(Z \leq 1.20) = 0.1539$

ج- $P(Z \leq 1.20) = 0.8461$

د- $P(Z \leq 1.20) = 0.8849$

٥٩) الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(Z \geq -1.20) = 0.1151$

ب- $P(Z \geq -1.20) = 0.1539$

ج- $P(Z \geq -1.20) = 0.8461$

د- $\underline{P(Z \geq -1.20) = 0.8849}$

٦٠) الإجابة الصحيحة هي:

أ- $\underline{P(Z \geq 1.20) = 0.1151}$

ب- $P(Z \geq 1.20) = 0.1539$

ج- $P(Z \geq 1.20) = 0.8461$

د- $P(Z \geq 1.20) = 0.8849$

٦١) الإجابة الصحيحة هي:

أ- $\underline{P(Z \leq -1.20) = 0.1151}$

ب- $P(Z \leq -1.20) = 0.1539$

ج- $P(Z \leq -1.20) = 0.8461$

د- $P(Z \leq -1.20) = 0.8849$

٦٢) الإجابة الصحيحة هي:

أ- $\underline{P(0.32 \leq Z \leq 1.24) = 0.2670}$

ب- $P(0.32 \leq Z \leq 1.24) = 0.4820$

ج- $P(0.32 \leq Z \leq 1.24) = 0.5180$

د- $P(0.32 \leq Z \leq 1.24) = 0.7330$

٦٣) الإجابة الصحيحة هي:

أ- $\underline{P(-1.24 \leq Z \leq -0.32) = 0.2670}$

ب- $P(-1.24 \leq Z \leq -0.32) = 0.4820$

ج- $P(-1.24 \leq Z \leq -0.32) = 0.5180$

د- $P(-1.24 \leq Z \leq -0.32) = 0.7330$

٦٤) الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(-0.32 \leq Z \leq 1.24) = 0.2670$

ب- $P(-0.32 \leq Z \leq 1.24) = 0.4820$

ج- $\underline{P(-0.32 \leq Z \leq 1.24) = 0.5180}$

د- $P(-0.32 \leq Z \leq 1.24) = 0.7330$

٦٥) الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(0.32 \le Z \le -1.24) = 0.2670$

ب- $P(0.32 \le Z \le -1.24) = 0.4820$

ج- $P(0.32 \le Z \le -1.24) = 0.5180$

د- $P(0.32 \le Z \le -1.24) = 0.7330$

٦٦) إذا كان $X \sim \chi^2_{10}$؛ فإن الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(X \ge 23.209) = 0.01$

ب- $P(X \ge 23.209) = 0.05$

ج- $P(X \ge 23.209) = 0.95$

د- $P(X \ge 23.209) = 0.99$

٦٧) إذا كان $X \sim \chi^2_{10}$؛ فإن الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(X \le 23.209) = 0.01$

ب- $P(X \le 23.209) = 0.05$

ج- $P(X \le 23.209) = 0.95$

د- $P(X \le 23.209) = 0.99$

٦٨) إذا كان $X \sim \chi^2_7$؛ وكان $P(X \ge x) = 0.99$؛ فإن:

أ- $x = 1.239$

ب- $x = 1.690$

ج- $x = 16.013$

د- $x = 18.475$

٦٩) إذا كان $X \sim \chi^2_7$؛ وكان $P(X \le x) = 0.99$؛ فإن:

أ- $x = 1.239$

ب- $x = 1.690$

ج- $x = 16.013$

د- $x = 18.475$

٧٠) إذا كان $X \sim t_9$؛ فإن الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(X \ge 2.262) = 0.025$

ب- $P(X \ge 2.262) = 0.05$

ج- $P(X \ge 2.262) = 0.95$

د- $P(X \ge 2.262) = 0.975$

٧١) إذا كان $X \sim t_9$؛ فإن الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(X \leq 2.262) = 0.025$

ب- $P(X \leq 2.262) = 0.05$

ج- $P(X \leq 2.262) = 0.95$

د- $\underline{P(X \leq 2.262) = 0.975}$

٧٢) إذا كان $X \sim t_5$؛ وكان $P(X \geq x) = 0.01$؛ فإن:

أ- $x = 1.476$

ب- $x = 2.015$

ج- $x = 2.571$

د- $\underline{x = 3.365}$

٧٣) إذا كان $X \sim t_5$؛ وكان $P(X \leq x) = 0.95$؛ فإن:

أ- $x = 1.476$

ب- $\underline{x = 2.015}$

ج- $x = 2.571$

د- $x = 3.365$

٧٤) إذا كان $X \sim F_{6,14}$؛ فإن الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(X \geq 2.85) = 0.01$

ب- $\underline{P(X \geq 2.85) = 0.05}$

ج- $P(X \geq 2.85) = 0.95$

د- $P(X \geq 2.85) = 0.99$

٧٥) إذا كان $X \sim F_{6,14}$؛ فإن الإجابة الصحيحة هي:

أ- $P(X \leq 2.85) = 0.01$

ب- $P(X \leq 2.85) = 0.05$

ج- $\underline{P(X \leq 2.85) = 0.95}$

د- $P(X \leq 2.85) = 0.99$

٧٦) إذا كان $X \sim F_{12,5}$؛ وكان $P(X \geq x) = 0.01$؛ فإن:

أ- $x = 3.89$

ب- $x = 6.89$

ج- $\underline{x = 9.89}$

د- $x = 12.89$

٧٧) إذا كان $X\sim F_{12,5}$؛ وكان $P(X \leq x) = 0.99$؛ فإن:

أ- $x = 3.89$

ب- $x = 6.89$

ج- $x = 9.89$

د- $x = 12.89$

المحاضره السابعه

٧٨) إذا X يتبع توزيع وسطه μ وتباينه σ^2، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من مجتمع كبير جدا أو لا نهائي فإن:

أ- $E(\bar{X}) = \mu$

ب- $E(\bar{X}) = \frac{\mu}{n}$

ج- $E(\bar{X}) = \sigma^2$

د- $E(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

٧٩) إذا X يتبع توزيع وسطه μ وتباينه σ^2، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من مجتمع كبير جدا أو لا نهائي فإن:

أ- $Var(\bar{X}) = \mu$

ب- $Var(\bar{X}) = \frac{\mu}{n}$

ج- $Var(\bar{X}) = \sigma^2$

د- $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

٨٠) توزيع المعاينة للوسط الحسابي إذا تحققت الشروط ومنها أن المجتمع طبيعي وتباين المجتمع معلوم هو:

أ- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

ب- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/n} \sim N(0,1)$

ج- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$

د- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/n} \sim t_{(n-1)}$

٨١) توزيع المعاينة <u>للوسط الحسابي</u> إذا تحققت الشروط ومنها أن تباين المجتمع معلوم وحجم العينة كبير هو:

أ- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

ب- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/n} \sim N(0,1)$

ج- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$

د- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/n} \sim t_{(n-1)}$

٨٢) توزيع المعاينة <u>للوسط الحسابي</u> إذا تحققت الشروط ومنها أن المجتمع طبيعي وتباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير هو:

أ- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

ب- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/n} \sim N(0,1)$

ج- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$

د- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/n} \sim t_{(n-1)}$

٨٣) توزيع المعاينة <u>للنسبة</u> إذا تحققت الشروط ومنها أن للمجتمع توزيع ذي الحدين وأن حجم العينة كبير هو:

أ- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

ب- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/n} \sim N(0,1)$

ج- $Z = \frac{\bar{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

د- $Z = \frac{\bar{P}-p}{\frac{p(1-p)}{n}} \sim N(0,1)$

٨٤) توزيع المعاينة <u>للتباين</u> إذا تحققت الشروط ومنها أن للمجتمع توزيع طبيعي هو:

أ- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$

ب- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

ج- $\frac{(n-1)\sigma^2}{S^2} \sim \chi^2_{(n)}$

د- $\frac{(n-1)\sigma^2}{S^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

٨٥) توزيع المعاينة للفرق بين وسطين حسابيين إذا تحققت الشروط ومنها أن تبايني المجتمعين معلوم هو:

أ- $Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$

ب- $Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

ج- $T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$

د- $T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$

٨٦) توزيع المعاينة للفرق بين وسطين حسابيين إذا تحققت الشروط ومنها أن تبايني المجتمعين مجهول ومتساو وحجم العينتين صغير هو:

أ- $Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$

ب- $Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

ج- $T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$

د- $T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$

٨٧) توزيع المعاينة للنسبة بين تباينين إذا تحققت الشروط هو:

أ- $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$

ب- $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n_2-1,n_1-1)}$

ج- $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim \chi^2_{(n_1+n_2-2)}$

د- $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim \chi^2_{(n_1+n_2)}$

٨٨) أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي معدله 2900 غرام وانحرافه المعياري 600 غرام، احسب احتمال أن يزيد الوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة عن 3100 غرام :

أ- $P(\bar{X} > 3100) = 0.1384$

ب- $P(\bar{X} > 3100) = 0.1587$

ج- $P(\bar{X} > 3100) = 0.8413$

د- $P(\bar{X} > 3100) = 0.8715$

٨٩) تخضع معاملات الذكاء لطلبة الصفوف الأولية في إحدى المحافظات لتوزيع وسطه 110 وتباينه 144. أخذت عينة عشوائية حجمها 100 من هؤلاء الطلبة؛ فما احتمال يتراوح الوسط الحسابي لمعاملات الذكاء في العينة بين 105، 115:

أ- $P(105 \leq \bar{X} \leq 115) \approx 0$

ب- $P(105 \leq \bar{X} \leq 115) \approx 0.20$

ج- $P(105 \leq \bar{X} \leq 115) \approx 0.80$

د- $P(105 \leq \bar{X} \leq 115) \approx 1$

٩٠) تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي 65 درجة. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا بانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ فما احتمال أن يزيد الوسط الحسابي لدرجات طلاب العينة عن 70 درجة؟

أ- $P(\bar{X} > 70) \approx 0.01$

ب- $P(\bar{X} > 70) \approx 0.10$

ج- $P(\bar{X} > 70) \approx 0.90$

د- $P(\bar{X} > 70) \approx 0.99$

٩١) إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الاقتصاد الكلي هو 0.90، أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من الطلبة الذين يدرسون هذا المقرر؛ احسب احتمال أن تزيد نسبة الناجحين في العينة عن 0.80؟

أ- $P(\bar{P} \geq 0.80) = 0.0098$

ب- $P(\bar{P} \geq 0.80) = 0.0098$

ج- $P(\bar{P} \geq 0.80) = 0.9800$

د- $P(\bar{P} \geq 0.80) = 0.9902$

٩٢) إذا أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 11$ من توزيع طبيعي تباينه 70، وكان S^2 تباين العينة؛ فأوجد احتمال أن يكون S^2 أقل من 82.5؟

أ- $P(S^2 \leq 82.5) = 0.20$

ب- $P(S^2 \leq 82.5) = 0.30$

ج- $P(S^2 \leq 82.5) = 0.70$

د- $P(S^2 \leq 82.5) = 0.80$

٩٣) إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي معدله 23 ألف ريال وانحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي معدله 18 ألف ريال وانحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص؛ فما احتمال أن يزيد متوسط العينة الأولى عن متوسط العينة الثانية بثلاثة آلاف ريال؟

أ- $P(\bar{X}-\bar{Y}\geq 3)=0.12$

ب- $P(\bar{X}-\bar{Y}\geq 3)=0.28$

ج- $P(\bar{X}-\bar{Y}\geq 3)=0.72$

د- $P(\bar{X}-\bar{Y}\geq 3)=0.82$

٩٤) إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين مستقلتين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط المجتمع	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

فاحسب الاحتمال التالي:

أ- $P(\bar{X}-\bar{Y}\leq 5)=0.10$

ب- $P(\bar{X}-\bar{Y}\leq 5)=0.20$

ج- $P(\bar{X}-\bar{Y}\leq 5)=0.80$

د- $P(\bar{X}-\bar{Y}\leq 5)=0.90$

٩٥) إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 11 من توزيع طبيعي $N(\mu_1,\sigma_1^2)$، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 16 من توزيع $N(\mu_2,\sigma_2^2)$؛ فأوجد:

فاحسب الاحتمال التالي:

أ- $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq 3.80\right)=0.01$

ب- $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq 3.80\right)=0.05$

ج- $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq 3.80\right)=0.95$

د- $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq 3.80\right)=0.99$

المحاضرة الثامنة والمحاضرة التاسعة

٩٦) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع إذا تحققت الشروط ومنها أن المجتمع طبيعي وتباين المجتمع معلوم هو:

أ- $\left(\bar{x}\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{n}\right)$

ب- $\left(\bar{x}\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

ج- $\left(\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

د- $\left(\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{n}\right)$

٩٧) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع إذا تحققت الشروط ومنها أن تباين المجتمع معلوم وحجم العينة كبير هو:

أ- $\left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{n}\right)$

ب- $\left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

ج- $\left(\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

د- $\left(\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{n}\right)$

٩٨) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع إذا تحققت الشروط ومنها أن المجتمع طبيعي وتباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير هو:

أ- $\left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{n}\right)$

ب- $\left(\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

ج- $\left(\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

د- $\left(\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{n}\right)$

٩٩) تقدير النسبة للمجتمع إذا تحققت الشروط ومنها أن للمجتمع توزيع ذي الحدين وأن حجم العينة كبير هو:

أ- $\left(\bar{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}\right)$

ب- $\left(\bar{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{n}\right)$

ج- $\left(\bar{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{\sqrt{n}}\right)$

د- $\left(\bar{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$

١٠٠) تقدير التباين للمجتمع إذا تحققت الشروط ومنها أن للمجتمع توزيع طبيعي هو:

أ- $\left(\frac{(n-1)s}{\chi^2_{\left[\frac{\alpha}{2};n\right]}}, \frac{(n-1)s}{\chi^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2};n\right]}}\right)$

ب- $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\left[\frac{\alpha}{2};n\right]}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2};n\right]}}\right)$

ج- $\left(\frac{(n-1)s}{\chi^2_{\left[\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}, \frac{(n-1)s}{\chi^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}\right)$

د- $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\left[\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\left[1-\frac{\alpha}{2};n-1\right]}}\right)$

١٠١) تقدير الفرق بين وسطين حسابيين لمجتمعين إذا تحققت الشروط ومنها أن تبايني المجتمعين معلوم هو:

أ- $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm z\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\right)$

ب- $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

ج- $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \times s\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right)$

د- $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \times s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$

ط

١٠٢) تقدير الفرق بين وسطين حسابيين لمجتمعين إذا تحققت الشروط ومنها أن تبايني المجتمعين مجهول ومتساو وحجم العينتين صغير هو:

أ- $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm z\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\right)$

ب- $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

ج- $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \times s\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\right)$

د- $\left((\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \times s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$

١٠٣) تقدير النسبة بين تبايني مجتمعين إذا تحققت الشروط هو:

أ- $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1;n_2-1\right]}}, \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1;n_1-1\right]}\right)$

ب- $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{t_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1\right]}}, \frac{s_1^2}{s_2^2}t_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1\right]}\right)$

ج- $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{t_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1\right]}}, \frac{s_1^2}{s_2^2}t_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1\right]}\right)$

د- $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{t_{\left[\frac{\alpha}{2};n_1-1\right]}}, \frac{s_1^2}{s_2^2}t_{\left[\frac{\alpha}{2};n_2-1\right]}\right)$

١٠٤) أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ أوجد فترة ثقة 95% لوسط المجتمع μ :

أ- (2406,3392)

ب- (2407,3292)

ج- (2408,3192)

د- (2409,3092)

١٠٥) تخضع معاملات الذكاء لطلبة الصفوف الأولية في إحدى المحافظات لتوزيع تباينه 144. أخذت عينة عشوائية حجمها 100 من هؤلاء الطلبة، فوجد أن وسط معاملات ذكائهم يساوي 110؛ أوجد فترة ثقة 90% لوسط المجتمع μ:

أ- (108,112)

ب- (107,113)

ج- (106,114)

د- (105,115)

١٠٦) تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن متوسط درجاتهم يساوي 70 وانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ أوجد فترة ثقة 99% لوسط المجتمع μ:

أ- (65.106,74.894)

ب- (64.106,75.894)

ج- (63.106,76.894)

د- (62.106,77.894)

١٠٧) لغرض تقدير نسبة الناجحين بشكل عام في مقرر الاقتصاد الكلي؛ أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من الطلبة الذين درسوا هذا المقرر، فوجد أن 80% منهم نجحوا في المقرر؛ احسب فترة ثقة 99% لنسبة الناجحين في هذا المقرر:

أ- (0.725,0.875)

ب- (0.700,0.900)

ج- (0.675,0.925)

د- (0.650,0.950)

١٠٨) عينة عشوائية حجمها $n = 20$ من توزيع طبيعي، فأعطت التباين $s^2 = 16$؛ فأوجد فترة ثقة 90% لتباين المجتمع σ^2:

أ- (1.18,7.48)

ب- (2.18,6.48)

ج- (3.18,5.48)

د- (4.18,4.48)

١٠٩) إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ فأوجد فترة ثقة 95% للفرق بين وسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$:

أ- $(-3.2,9.2)$

ب- $(-2.2,8.2)$

ج- $(-1.2,7.2)$

د- $(0.2,6.2)$

١١٠) إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلتين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط العينة	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

أوجد فترة ثقة 90% للفرق وسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$

أ- $(0.62,5.38)$

ب- $(0.52,5.48)$

ج- $(0.42,5.58)$

د- $(0.32,5.68)$

١١١) إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من توزيع طبيعي $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ فوجد أن تباينها يساوي 18، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 11 من توزيع $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فوجد أن تباينها يساوي 12؛ فأوجد فترة ثقة 90% للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

أ- $(0.39,5.13)$

ب- $(0.49,5.03)$

ج- $(0.59,4.93)$

د- $(0.69,4.83)$

المحاضره العاشرة والحاديه عشر

١١٢) أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$

$H_0: \mu = 3000$

$H_1: \mu \neq 3000$

أ- القيم الحرجة هي: ± 1.28

ب- القيم الحرجة هي: ± 1.65

ج- القيم الحرجة هي: ± 1.96

د- القيم الحرجة هي: ± 2.58

١١٣) أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$

$H_0: \mu = 3000$

$H_1: \mu \neq 3000$

أ- الإحصاءة هي: $z = -1$

ب- الإحصاءة هي: $z = +1$

ج- الإحصاءة هي: $t = -1$

د- الإحصاءة هي: $t = +1$

١١٤) أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$

$H_0: \mu = 3000$

$H_1: \mu \neq 3000$

أ- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

ب- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

ج- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

د- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

١١٥) أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$

$H_0: \mu = 2000$

$H_1: \mu > 2000$

أ- القيمة الحرجة هي: -1.28

ب- القيمة الحرجة هي: $+1.28$

ج- القيمة الحرجة هي: -1.65

د- القيمة الحرجة هي: $+1.65$

١١٦) أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$

$H_0: \mu = 2000$

$H_1: \mu > 2000$

أ- الإحصاءة هي: $z = -4$

ب- الإحصاءة هي: $z = +4$

ج- الإحصاءة هي: $t = -4$

د- الإحصاءة هي: $t = +4$

١١٧) أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات؛ فإذا علم أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 600 غرام، فوجد أن وسط العينة يساوي 2800 غرام؛ اختبر الفرضيتين الصفرية والبديلة على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$

$H_0: \mu = 2000$

$H_1: \mu > 2000$

أ- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

ب- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

ج- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

د- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

١١٨) تخضع معاملات الذكاء لطلبة الصفوف الأولية في إحدى المحافظات لتوزيع تباينه 144. أخذت عينة عشوائية حجمها 36 من هؤلاء الطلبة، فوجد أن وسط معاملات ذكائهم يساوي 110؛ اختبر الفرضية أن وسط معاملات الذكاء لطلبة الصفوف الأولية على مستوى المحافظة يساوي 105 مقابل أنه لا يساوي ذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$

أ- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

ب- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

ج- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

د- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

١١٩) تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن متوسط درجاتهم يساوي 70 وانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ اختبر الفرضية أن وسط درجات الطلاب بشكل عام يساوي 80 مقابل أنه لا يساوي ذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

أ- الفرض العدمي هو: $H_0: \mu = 80$

ب- الفرض العدمي هو: $H_0: \mu \neq 80$

ج- الفرض العدمي هو: $H_0: \mu > 80$

د- الفرض العدمي هو: $H_0: \mu < 80$

١٢٠) تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن متوسط درجاتهم يساوي 70 وانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ اختبر الفرضية أن وسط درجات الطلاب بشكل عام يساوي 80 مقابل أنه لا يساوي ذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

أ- الفرض البديل هو: $H_1: \mu = 80$

ب- الفرض البديل هو: $H_1: \mu \neq 80$

ج- الفرض البديل هو: $H_1: \mu > 80$

د- الفرض البديل هو: $H_1: \mu < 80$

١٢١) تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن متوسط درجاتهم يساوي 70 وانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ اختبر الفرضية أن وسط درجات الطلاب بشكل عام يساوي 80 مقابل أنه لا يساوي ذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

أ- القيم الحرجة هي: ± 1.131

ب- القيم الحرجة هي: ± 2.131

ج- القيم الحرجة هي: ± 3.131

د- القيم الحرجة هي: ± 4.131

١٢٢) تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن متوسط درجاتهم يساوي 70 وانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ اختبر الفرضية أن وسط درجات الطلاب بشكل عام يساوي 80 مقابل أنه لا يساوي ذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

أ- الإحصاءة هي: $z = -5$

ب- الإحصاءة هي: $z = +5$

ج- الإحصاءة هي: $t = -5$

د- الإحصاءة هي: $t = +5$

١٢٣) تخضع درجات الطلاب في اختبار القدرات العامة لتوزيع طبيعي. أخذت عينة عشوائية حجمها 16 طالبا فوجد أن متوسط درجاتهم يساوي 70 وانحراف معياري مقداره 8 درجات؛ اختبر الفرضية أن وسط درجات الطلاب بشكل عام يساوي 80 مقابل أنه لا يساوي ذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$

أ- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

ب- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

ج- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

د- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

١٢٤) أظهرت سجلات مديرية الأمن العام في إحدى المحافظات أن نسبة من يربط حزام الأمان - قبل سن نظام إلزام استخدامه- هي 0.8، درست عينة عشوائية حجمها 100 سائق - بعد صدور النظام بإلزامية ربط الحزام – فوجد أن 85 منهم يربطون الحزام؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ ما إذا كان النظام الجديد أدى إلى زيادة نسبة من يتقيد بربط حزام الأمان

أ- الفرض العدمي هو: $H_0: p = 0.80$
ب- الفرض العدمي هو: $H_0: p \neq 0.80$
ج- الفرض العدمي هو: $H_0: p > 0.80$
د- الفرض العدمي هو: $H_0: p < 0.80$

١٢٥) أظهرت سجلات مديرية الأمن العام في إحدى المحافظات أن نسبة من يربط حزام الأمان - قبل سن نظام إلزام استخدامه- هي 0.8، درست عينة عشوائية حجمها 100 سائق - بعد صدور النظام بإلزامية ربط الحزام – فوجد أن 85 منهم يربطون الحزام؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ ما إذا كان النظام الجديد أدى إلى زيادة نسبة من يتقيد بربط حزام الأمان

أ- الفرض البديل هو: $H_1: p = 0.80$
ب- الفرض البديل هو: $H_1: p \neq 0.80$
ج- الفرض البديل هو: $H_1: p > 0.80$
د- الفرض البديل هو: $H_1: p < 0.80$

---

١٢٦) أظهرت سجلات مديرية الأمن العام في إحدى المحافظات أن نسبة من يربط حزام الأمان - قبل سن نظام إلزام استخدامه- هي 0.8، درست عينة عشوائية حجمها 100 سائق - بعد صدور النظام بإلزامية ربط الحزام – فوجد أن 85 منهم يربطون الحزام؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ ما إذا كان النظام الجديد أدى إلى زيادة نسبة من يتقيد بربط حزام الأمان

أ- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة أصغر من القيمة الحرجة.
ب- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة أكبر من القيمة الحرجة.
ج- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة أصغر من القيمة الحرجة.
د- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة أكبر من القيمة الحرجة.

١٢٧) عينة عشوائية حجمها $n = 25$ من توزيع طبيعي، فأعطت وسطا حسابيا $\bar{x} = 60$ وتباينا $s^2 = 12$؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أن تباين المجتمع $\sigma^2 = 9$ مقابل أنه لا يساوي ذلك.

أ- القيم الحرجة هي: $\chi^2_{[0.95,24]} = 12.401 \;\&\; \chi^2_{[0.05,24]} = 39.346$
ب- القيم الحرجة هي: $\chi^2_{[0.05,24]} = 12.401 \;\&\; \chi^2_{[0.95,24]} = 39.346$
ج- القيم الحرجة هي: $\chi^2_{[0.975,24]} = 12.401 \;\&\; \chi^2_{[0.025,24]} = 39.346$
د- القيم الحرجة هي: $\chi^2_{[0.025,24]} = 12.401 \;\&\; \chi^2_{[0.975,24]} = 39.346$

١٢٨) عينة عشوائية حجمها $n = 25$ من توزيع طبيعي، فأعطت وسطا حسابيا $\bar{x} = 60$ وتباينا $s^2 = 12$؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أن تباين المجتمع $\sigma^2 = 9$ مقابل أنه لا يساوي ذلك.

أ- الإحصاءة هي: $\chi^2 = 31$

ب- الإحصاءة هي: $\chi^2 = 32$

ج- الإحصاءة هي: $\chi^2 = 33$

د- الإحصاءة هي: $\chi^2 = 34$

١٢٩) عينة عشوائية حجمها $n = 25$ من توزيع طبيعي، فأعطت وسطا حسابيا $\bar{x} = 60$ وتباينا $s^2 = 12$؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أن تباين المجتمع $\sigma^2 = 9$ مقابل أنه لا يساوي ذلك.

أ- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

ب- قبول الفرض العدمي لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

ج- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة القبول.

د- قبول الفرض البديل لأن الإحصاءة في منطقة الرفض.

130) إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أنه لا يوجد فرق معنوي بين وسطي المجتمعين مقابل أنه يوجد فرق معنوي بينهما.

أ- القيم الحرجة هي: $z_{0.05} = -1.96 \;\&\; z_{0.95} = +1.96$

ب- القيم الحرجة هي: $z_{0.95} = -1.96 \;\&\; z_{0.05} = +1.96$

ج- القيم الحرجة هي: $z_{0.025} = -1.96 \;\&\; z_{0.975} = +1.96$

د- القيم الحرجة هي: $z_{0.975} = -1.96 \;\&\; z_{0.025} = +1.96$

131) إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أنه لا يوجد فرق معنوي بين وسطي المجتمعين مقابل أنه يوجد فرق معنوي بينهما.

أ- الإحصاءة هي: $z = 1.40$

ب- الإحصاءة هي: $z = 2.40$

ج- الإحصاءة هي: $z = 3.40$

د- الإحصاءة هي: $z = 4.40$

132) إذا كانت رواتب أطباء وزارة الصحة تخضع لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 4 ألف ريال، ورواتب أطباء المستشفيات الخاصة تخضع أيضا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 6 ألف ريال. إذا أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من أطباء الوزارة فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 22 ألف ريال، وعينة عشوائية أخرى حجمها 10 من أطباء القطاع الخاص فوجد أن متوسط رواتبهم يساوي 19 ألف ريال؛ اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ أنه لا يوجد فرق معنوي بين وسطي المجتمعين مقابل أنه يوجد فرق معنوي بينهما.

أ- يوجد فرق معنوي لأن الإحصاءة في فترة القبول.

ب- يوجد فرق معنوي لأن الإحصاءة في فترة الرفض.

ج- لا يوجد فرق معنوي لأن الإحصاءة في فترة القبول.

د- لا يوجد فرق معنوي لأن الإحصاءة في فترة الرفض.

133) إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط العينة	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

اختبر أنه لا فرق بين وسطي المجتمعين مقابل أن يوجد فرق بينهما عند مستوى دلالة $\alpha = 0.01$

أ- القيم الحرجة هي: $t_{0.995} = 2.787 \ \& \ t_{0.005} = -2.787$

ب- القيم الحرجة هي: $t_{0.005} = 2.787 \ \& \ t_{0.995} = -2.787$

ج- القيم الحرجة هي: $t_{0.99} = 2.787 \ \& \ t_{0.01} = -2.787$

د- القيم الحرجة هي: $t_{0.01} = 2.787 \ \& \ t_{0.99} = -2.787$

134) إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط العينة	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

اختبر أنه لا فرق بين وسطي المجتمعين مقابل أن يوجد فرق بينهما عند مستوى دلالة $\alpha = 0.01$

أ- قبول الفرض العدمي وهو: $H_0: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

ب- قبول الفرض العدمي وهو: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

ج- قبول الفرض البديل وهو: $H_0: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

د- قبول الفرض البديل وهو: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

135) إذا كان لدينا البيانات التالية لعينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين ولهما نفس التباين:

العينة	وسط العينة	تباين العينة	حجم العينة
الأولى	20	16	15
الثانية	17	9	12

اختبر أنه لا فرق بين وسطي المجتمعين مقابل أن يوجد فرق بينهما عند مستوى دلالة $\alpha = 0.01$

أ- قبول الفرض العدمي وهو: $H_0: \mu_1 \neq \mu_2$

ب- قبول الفرض العدمي وهو: $H_0: \mu_1 = \mu_2$

ج- قبول الفرض البديل وهو: $H_0: \mu_1 \neq \mu_2$

د- قبول الفرض البديل وهو: $H_0: \mu_1 = \mu_2$

136) العبارة الصحيحة هي:

أ- $F_{[0.95,n_1-1,n_2-1]} = \frac{1}{F_{[0.95,n_1-1,n_2-1]}}$

ب- $F_{[0.95,n_1-1,n_2-1]} = \frac{1}{F_{[0.05,n_1-1,n_2-1]}}$

ج- $F_{[0.95,n_1-1,n_2-1]} = \frac{1}{F_{[0.95,n_2-1,n_1-1]}}$

د- $F_{[0.95,n_1-1,n_2-1]} = \frac{1}{F_{[0.05,n_2-1,n_1-1]}}$

137) أخذا عينتان مستقلتان من مجتمعين طبيعيين فأعطتا:

	العينة الأولى	العينة الثانية
الحجم	8	9
الوسط الحسابي	17.4	13.2
التباين	16	22

اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.10$ أن تبايني المجتمعين متساويان مقابل أنهما غير متساويين.

أ- القيم الحرجة هي: $F_{[0.05,7,8]}$ & $F_{[0.95,7,8]}$

ب- القيم الحرجة هي: $F_{[0.05,7,8]}$ & $F_{[0.95,8,7]}$

ج- القيم الحرجة هي: $F_{[0.05,7,8]}$ & $F_{[0.05,7,8]}$

د- القيم الحرجة هي: $F_{[0.05,7,8]}$ & $F_{[0.05,8,7]}$

138) أخذا عينتان مستقلتان من مجتمعين طبيعيين فأعطتا:

	العينة الأولى	العينة الثانية
الحجم	8	9
الوسط الحسابي	17.4	13.2
التباين	16	22

اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.10$ أن تبايني المجتمعين متساويان مقابل أنهما غير متساويين.

أ- القيم الحرجة هي: $F_{[0.05,7,8]}$ & $\frac{1}{F_{[0.05,8,7]}}$

ب- القيم الحرجة هي: $F_{[0.05,7,8]}$ & $\frac{1}{F_{[0.05,7,8]}}$

ج- القيم الحرجة هي: $F_{[0.05,7,8]}$ & $\frac{1}{F_{[0.95,8,7]}}$

د- القيم الحرجة هي: $F_{[0.05,7,8]}$ & $\frac{1}{F_{[0.95,7,8]}}$

139) أخذا عينتان مستقلتان من مجتمعين طبيعيين فأعطتا:

	العينة الأولى	العينة الثانية
الحجم	8	9
الوسط الحسابي	17.4	13.2
التباين	16	22

اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.10$ أن تبايني المجتمعين متساويان مقابل أنهما غير متساويين.

أ- قبول الفرض العدمي وهو: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

ب- قبول الفرض العدمي وهو: $H_0: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

ج- قبول الفرض البديل وهو: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

د- قبول الفرض البديل وهو: $H_0: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

140) أخذا عينتان مستقلتان من مجتمعين طبيعيين فأعطتا:

	العينة الأولى	العينة الثانية
الحجم	8	9
الوسط الحسابي	17.4	13.2
التباين	16	22

اختبر على مستوى دلالة $\alpha = 0.10$ أن تبايني المجتمعين متساويان مقابل أنهما غير متساويين.

أ- قبول الفرض العدمي وهو: $H_0: \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$

ب- قبول الفرض العدمي وهو: $H_0: \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1\right)$

ج- قبول الفرض البديل وهو: $H_0: \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$

د- قبول الفرض البديل وهو: $H_0: \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1\right)$

المحاضره الثانيه عشر

141) الاختبار المعلمي الذي لا يشترط الاستقلالية:

أ- اختبار t لعينتين مستقلتين بتباينين مجهولين ومتساويين.

ب- اختبار t لعينتين مستقلتين بتباينين مجهولين ومختلفين.

ج- اختبار t لعينتين مرتبطتين.

د- اختبار تحليل التباين الأحادي.

142) الاختبار اللامعلمي الوحيد من بين الاختبارات التالية:

أ- One – Sample T Test

ب- Independent – Samples T Test

ج- Mann-Whitney

د- Paired– Samples T Test

143) الاختبار المعلمي الوحيد من بين الاختبارات التالية:

أ- Wilcoxon

ب- Kruskal-Wallis

ج- Mann-Whitney

د- Paired– Samples T Test

144) يوضح الجدول التالي عينة من درجات طلاب في مقرر الاقتصاد الكلي:

44	52	55	65	75	85	80
50	95	80	45	25	30	33
75	72	77	90	88	95	30
84	48	52	55	57	40	60

عند التحقق من أن البيانات مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي؛ يتم استخدام:

أ- اختبار كلومجروف – سميرنوف.

ب- اختبار مان ويتني.

ج- اختبار ويلكوكسون.

د- اختبار كروسكال واليس.

145) نتيجة اختبار الاعتدالية التالي عند مستوى دلالة 0.05 توضح:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Marks	.124	28	.200*	.953	28	.231

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

أ- قبول الفرض العدمي لأن: $P - Value < \alpha$

ب- قبول الفرض العدمي لأن: $P - Value > \alpha$

ج- قبول الفرض البديل لأن: $P - Value < \alpha$

د- قبول الفرض البديل لأن: $P - Value > \alpha$

146) يمثل الجدولان التاليان نتيجة اختبار t لعينة واحدة (One – Sample T Test) عند مستوى دلالة 0.05:

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

أ- حجم العينة هو: 21.07567

ب- حجم العينة هو: 27

ج- حجم العينة هو: 28

د- حجم العينة هو: 62.0357

147) يمثل الجدولان التاليان نتيجة اختبار t لعينة واحدة (One – Sample T Test) عند مستوى دلالة 0.05:

T-Test

One-Sample Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test						
	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

أ- درجة الحرية هي: 21.07567

ب- درجة الحرية هي: 27

ج- درجة الحرية هي: 28

د- درجة الحرية هي: 62.0357

148) يمثل الجدولان التاليان نتيجة اختبار t لعينة واحدة (One – Sample T Test) عند مستوى دلالة 0.05:

T-Test

One-Sample Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test						
	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

أ- وسط العينة هو: 21.07567

ب- وسط العينة هو: 27

ج- وسط العينة هو: 28

د- وسط العينة هو: 62.0357

يمثل الجدولان التاليان نتيجة اختبار t لعينة واحدة (One – Sample T Test) عند مستوى دلالة 0.05:

T-Test

One-Sample Statistics				
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test						
	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

أ- انحراف العينة هو: 21.07567

ب- انحراف العينة هو: 27

ج- انحراف العينة هو: 28

د- انحراف العينة هو: 62.0357

150) يمثل الجدولان التاليان نتيجة اختبار t لعينة واحدة (One – Sample T Test) عند مستوى دلالة 0.05:

T-Test

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Marks	28	62.0357	21.07567	3.98293

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Marks	-1.497	27	0.146	-5.96429	-14.1366	2.2080

أ- قبول الفرض العدمي لأن: $P - Value < \alpha$

ب- قبول الفرض العدمي لأن: $P - Value > \alpha$

ج- قبول الفرض البديل لأن: $P - Value < \alpha$

د- قبول الفرض البديل لأن: $P - Value > \alpha$

المحاضرتان الثانية عشرة والثالثة عشرة

نكتفي بالأسئلة السابقة، ويمكنكم عمل أسئلة على نفس النسق للجزء المتبقي من المحاضرة الثانية عشرة والثالثة عشرة.,,

تم بحمد الله الانتهاء من الملخص .. ان اصبت فمن الله وإن اخطأت فمن نفسي والشيطان

دعواتكم لي .. هي مطلبي ,,

أتمنى لكم التوفيق والنجاح

لوسيندا العصامية ✍