١) اكتب بالشكل الجبري كل من الأعداد التالية:

$Z_1 = \frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i} + \frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{3}i} - 2i$

$Z_2 = (1-i)^8$

$Z_3 = \left(\frac{-4-6i}{2+3i}\right)\left(\frac{3-2i}{6+4i}\right)$

$Z_4 = 4ie^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

$Z_5 = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]$

---------***---------

٢) اكتب بالشكل المثلثي كل من الأعداد التالية:

$Z_1 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2i}\right)^4$

$Z_2 = -3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$Z_3 = \left[2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right]^5$

$Z_4 = (2-\sqrt{5})ie^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$Z_5 = (\sqrt{2}i)^{400}$

---------***---------

٣) ليكن العدد العقدي w : $w = \frac{-4}{1+\sqrt{3}i}$

١- اكتب w بالشكل الجبري

٢- أثبت أن $(w)^3$ حقيقي

٣- أثبت أن (w) هو حل للمعادلة :

$Z^2 + 2Z + 4 = 0$

واستنتج الحل الآخر بدون حل المعادلة

---------***---------

٤) نتأمل كثير الحدود:

$P(Z) = iZ^4 + (-4+5i)Z^2 + (-8-2i)Z - 20 + 20i$

١- أثبت أن :

$P(Z) = (Z^2 + 2Z + 5)(iZ^2 - 2iZ - 4 + 4i)$

٢- حل في (c) المعادلة : $P(Z) = 0$

---------***---------

٥) لتكن المعادلة:

$Z^3 - 2(2+i)Z^2 + (5+8i)Z - 10i = 0$

١- حل في (c) المعادلة السابقة إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً

٢- لتكن C, B, A تمثل حلول المعادلة : أثبت أن C, B, A, O تشكل رؤوس متوازي أضلاع

---------***---------

٦) لتكن الأعداد العقدية التالية:

$Z_1 = 1 + i$

$Z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$Z_3 = -\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

١- اكتب Z_1 و Z_2 و Z_3 بالشكل الأسي

٢- مستفيداً من الطلب السابق أثبت أن $\left[\frac{(Z_1)^2}{(Z_2)^3(Z_3)^6}\right]$ تخيلي بحت

٣- أوجد $(Z_1.Z_2)$ بالشكل الجبري

٤- أوجد $(Z_1.Z_2)$ بالشكل المثلثي واستنتج $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

---------***---------

٧) حل كل من المعادلتين بالمجهول (Z) :

1- $3Z - 2\bar{Z} = 1 - 10i$

2- $\frac{\bar{Z}-3}{\bar{Z}+3} = i$

---------***---------

٨) حل في (c) كلاً من جمل المعادلات بالمجهولين Z_1 و Z_2 (عين Z_1 و Z_2) :

1 $\begin{cases} Z_1 - Z_2 = -3 \\ 2\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = -3 + 3\sqrt{3}i \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3iZ_1 - Z_2 = 2 - 4i \\ 2Z_1 + iZ_2 = 1 - 5i \end{cases}$

---------***---------

٩) ليكن المقدار $u = \frac{Z+2}{Z-i}$ $Z \neq i$

١- عين (Δ) مجموعة النقاط التي يكون عندها u حقيقي بحت

٢- عين (ε) مجموعة النقاط التي يكون عندها u تخيلي بحت

---------***---------

١٠) ليكن (Z) عدد عقدي ، وليكن (w) عدد عقدي طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد : أثبت أن :

$\left(\frac{w\bar{Z}-Z}{iw-i}\right)$ تخيلي بحت

---------***---------

ملاحظات للحل:

أ.عامر البكا

السؤال الأول:

$$Z_1 = \frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i} + \frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{3}i} - 2i$$
$$(1+\sqrt{3}i) \quad (1-\sqrt{3}i)$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} - 2i$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}i+\sqrt{2}i-\sqrt{6}+1-\sqrt{3}i-\sqrt{2}i-\sqrt{6}}{1+3} - 2i$$

$$Z_1 = \frac{2-2\sqrt{6}}{4} - 2i$$

$$\boxed{Z_1 = \left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right) - 2i}$$

$$Z_2 = [(1-i)^2]^4 = [1-2i+i^2]^4$$
$$= (-2i)^4 = (-2)^4(i)^4 = (16)(1)$$

$$\boxed{Z_2 = 16}$$ حقيقي بحت

$$Z_3 = -2\left(\frac{2+3i}{2+3i}\right)\left(\frac{3-2i}{6+4i}\right)$$

$$= -2\frac{(3-2i)}{(6+4i)}\frac{(6-4i)}{(6-4i)}$$

$$= -2\frac{(18-12i-12i-8)}{36+16}$$

$$= \frac{-1\cancel{2}(10-24i)}{\cancel{48}\ 24}$$

$$Z_3 = \frac{-10}{24} + \frac{24}{24}i = \boxed{\frac{-5}{12} + i}$$

$$Z_4 = 4i\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 4i\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]$$

$$Z_4 = -2\sqrt{3}i - 2$$

$$\boxed{Z_4 = -2 - 2\sqrt{3}i}$$

$$Z_5 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right]$$

$$\boxed{Z_5 = \sqrt{3} - i}$$

السؤال الثاني:

$$Z_1 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2i}\right)^4 = \left(\frac{Z}{Z'}\right)^4$$

(*) $Z = 1-\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1+3} = 2 \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \theta \in D_4$

$$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$$

$$Z = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] \quad (*)$$

(*) $Z' = 2+2i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \\ \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\theta \in D_1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z' = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (**)$$

$$Z_1 = \left[\frac{2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]}{2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}\right]^4$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]^4$$
$$(4) \quad (3) \qquad (4) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right]^4$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{-28\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-28\pi}{12}\right)\right]$$

$$\boxed{Z_1 = \frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]}$$

$$\frac{-28\pi}{12} = -\left[\frac{24\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right]$$ حيث

$$= -\left[2\pi + \frac{\pi}{3}\right] = \frac{-\pi}{3}$$

$$Z_5 = \left[\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]\right]^{400}$$

$$= (\sqrt{2})^{400}\left[\cos\left(\frac{400\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{400\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{Z_5 = (2)^{200}\left[\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right]}$$

السؤال الثالث:

1] $$w = \frac{-4(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{-4(1-\sqrt{3}i)}{1+3}$$

$$\boxed{w = -1 + \sqrt{3}i}$$

2] $$w^3 = (-1+\sqrt{3}i)^3$$

$$= (-1)^3 + 3(-1)^2(\sqrt{3}i) + 3(-1)(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$$

$$= -1 + 3\sqrt{3}i + 9 - 3\sqrt{3}i$$

$= 8$ وهو المطلوب

3] $$(-1+\sqrt{3}i)^2 + 2(-1+\sqrt{3}i) + 4 = 0$$

$$= 1 - 2\sqrt{3}i - 3 - 2 + 2\sqrt{3}i + 4 = 0$$

$$0 = 0$$

نفرض w_1 هو الحل الآخر:

$$w + w_1 = \frac{-b}{a}$$

$$-1 + \sqrt{3}i + w_1 = \frac{-2}{1}$$

$$\boxed{w_1 = -1 - \sqrt{3}i}$$

السؤال الرابع

1] $$P(z) = (z^2+2z+5)(iz^2 - 2iz - 4 + 4i)$$

بالنشر كذا المعادلة:

2] $$P(z) = 0$$

$$\Rightarrow (z^2+2z+5)(iz^2-2iz-4+4i) = 0$$

إما $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(5) = -16 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-2+4i}{2} = -1 + 2i$$

$$\Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = -1 - 2i$$

$$Z_2 = -3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 3\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 3\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\boxed{Z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]}$$

$$Z_3 = \left[2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right]^5$$

$$= \left[2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right]^5$$

$$= \left[2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\right]^5$$

$$= (2)^5\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$\boxed{Z_3 = 32\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]}$$

حيث:

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$$

$$Z_4 = (2-\sqrt{5})\, i\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= -i(\sqrt{5}-2)\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)} \cdot (\sqrt{5}-2)\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= (\sqrt{5}-2)\, e^{i\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= (\sqrt{5}-2)\, e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)}$$

$$Z_4 = (\sqrt{5}-2)\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$$

$$Z_5 = (\sqrt{2}i)^{400} = (z')^{400}$$

$$z' = \sqrt{2}i \rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \quad \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\div -8}$ $w^2 - 2iw = 0$

$w(w-2i) = 0$

إما $w = 0$ مرفوض

أو $w = 2i$ مقبول

$$\begin{array}{r|l} & z^2 - 4z + 5 \\ \hline z-2i & z^3 - 2(2+i)z^2 + (5+8i)z - 10i \\ + & \mp z^3 \pm 2iz^2 \\ & -4z^2 + (5+8i)z - 10i \\ + & \pm 4z^2 \mp 8iz \\ & 5z - 10i \\ + & \mp 5z \pm 10i \\ & 0 \end{array}$$

$z^3 - 2(2+i)z^2 + (5+8i)z - 10i = 0$

$\Longleftrightarrow$

$(z-2i)(z^2-4z+5) = 0$

إما $z - 2i = 0 \Rightarrow \boxed{z = 2i}$

أو $z^2 - 4z + 5 = 0$

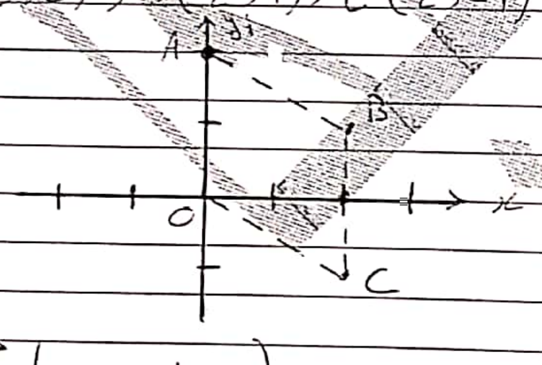
$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$

المعادلة حلان عقديان مترافقان:

$z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

$\Rightarrow z_2 = \overline{z_1} = 2-i$

$A(0,2)$, $B(2,1)$, $C(2,-1)$ {ج



$\overrightarrow{AB}(2-0, 1-2)$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(2, -1) \\ \overrightarrow{OC}(2, -1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

أي أن ABCO متوازي أضلاع

2) $iz^2 - 2iz - 4 + 4i = 0$

$\Delta = (-2i)^2 - 4(i)(-4+4i)$

$= -4 + 16i + 16$

$\Delta = 12 + 16i$

لنوجد جذور Δ:

① $x^2 - y^2 = 12$ $= a$

② $x^2 + y^2 = 20$ $= r = \sqrt{144+256}$

③ $2xy = 16$ $= b > 0$

نجمع ① و ② نجد:

$2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16$

$\Rightarrow x_1 = +4$, $x_2 = -4$

نعوض $x^2 = 16$ في المعادلة ②

$16 + y^2 = 20 \Rightarrow y^2 = 4$

$\Rightarrow y_1 = +2$, $y_2 = -2$

$\left.\begin{array}{l} w_1 = 4 + 2i \\ w_2 = -4 - 2i \end{array}\right\}$ جذرا Δ

ومنه حلول المعادلة:

$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{2i + 4 + 2i}{2i}$

$z_1 = \frac{4+4i}{2i} = \frac{2+2i}{i}$ $\left(\times \frac{-i}{-i}\right)$ المرافق $\Rightarrow \boxed{z_1 = 2 - 2i}$

$z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{2i - 4 - 2i}{2i}$

$z_2 = \frac{-4}{2i} = \frac{-2}{i} = \boxed{2i}$

السؤال الثالث:

1) نفرض أن (w) هو حل المعادلة $\Leftarrow$

① $w^3 - 2(2+i)w^2 + (5+8i)w - 10i = 0$

بأخذ مرافق الطرفين:

$\overline{w}^3 - 2(2-i)\overline{w}^2 + (5-8i)\overline{w} + 10i = 0$

وبما أن الحل تخيلي بحت $\Leftarrow \overline{w} = -w$

② $-w^3 - 2(2-i)w^2 - (5-8i)w + 10i = 0$

بجمع المعادلتين ① و ② طرفاً لطرف:

$-8w^2 + 16iw = 0$

السؤال السادس:

① $z_1 = 1+i$ ، $r = \sqrt{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$

$* \; z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$* \; z_2 = 2\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

$* \; z_3 = e^{i\pi} \cdot \sqrt{3}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$* \; z_3 = \sqrt{3}\, e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$

② $\dfrac{(z_1)^2}{(z_2)^3 (z_3)^6} = \dfrac{2\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{8\, e^{i(2\pi)} \cdot 27\, e^{i7\pi}}$

$= \dfrac{1}{108}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi - 7\pi\right)}$

$= \dfrac{1}{108}\, e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{108}(-i)$

$= \dfrac{-1}{108}\, i$ وهو كذلك

نجد:

③ $z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$= 2\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\boxed{z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i}$

$z_1 \cdot z_2 = (1+i)(-1+\sqrt{3}\, i)$

$= -1 + \sqrt{3}\, i - i - \sqrt{3}$

$\boxed{z_1 z_2 = (-1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}$ ☆

④ $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$

$\boxed{= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\, 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$ ☆☆

بالمقارنة بين ☆ و ☆☆ نجد:

$2\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\boxed{\Rightarrow \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

السؤال السابع:

① $3z - 2\bar{z} = 1 - 10i$

نفرض $z = x + iy$

$\Rightarrow \bar{z} = x - iy$

نعوض $\Rightarrow 3x + 3iy - 2x + 2iy = 1 - 10i$

$x + 5iy = 1 - 10i$

بالمقارنة $\boxed{x = 1}$

نجد $5y = -10 \Rightarrow \boxed{y = -2}$

$\xrightarrow[\text{المعادلة}]{\text{حل}} \boxed{z = 1 - 2i}$

② $\dfrac{\bar{z} - 3}{\bar{z} + 3} = i \Rightarrow \bar{z} - 3 = i\bar{z} + 3i$

$\bar{z} - i\bar{z} = 3 + 3i$

$(1-i)\bar{z} = 3 + 3i$

$\bar{z} = \dfrac{3+3i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i}$

$\bar{z} = \dfrac{3 + 3i + 3i - 3}{1+1} = \dfrac{6i}{2} = 3i$

$\Rightarrow \bar{z} = 3i$

$\xrightarrow[\text{المعادلة}]{\text{حل}} \boxed{z = -3i}$

السؤال الثاني:

1) بأخذ المرافق لطرفي المعادلة الثانية ① وجمعها مع المعادلة الأولى نجد:

$$z_1 - z_2 = -3$$

$$2z_1 + z_2 = -3 - 3\sqrt{3}i \quad +$$

$$3z_1 = -6 - 3\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = -2 - \sqrt{3}i}$$

نعوض (z_1) بالمعادلة الأولى نجد:

$$-2 - \sqrt{3}i - z_2 = -3$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = 1 - \sqrt{3}i}$$

2) نضرب المعادلة الأولى بـ (i) ونجمعها مع المعادلة ②

$$-3z_1 - iz_2 = 4 + 2i$$

$$2z_1 + iz_2 = -1 - 5i \quad +$$

$$-z_1 = 5 - 3i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = -5 + 3i}$$

نعوض (z_1) بالمعادلة الأولى

$$3i(-5+3i) - z_2 = 2 - 4i$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -11 - 11i}$$

السؤال الثالث:

① $\bar{u} = -u \Rightarrow \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+i} = \frac{z+2}{z-i}$

$$(\bar{z}+2)(z-i) = (\bar{z}+i)(z+2)$$

بنشر الطرفين وكتابة في الطرف واحد:

$$-i\bar{z} - iz + 2z - 2\bar{z} - 2i - 2i = 0$$

$$-i(\bar{z}+z) + 2(z-\bar{z}) - 4i = 0$$

$$-i(2x) + 2(2iy) - 4i = 0$$

نقسم الطرفين بـ $(\frac{i}{2})$

$$x - 2y + 2 = 0$$

مجموعة النقاط هي مستقيم (Δ) عدا النقطة (0,1)

لأن $z \neq i$

② $\bar{u} = -u \Rightarrow \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+i} = -\frac{z+2}{z-i}$

بضرب الطرفين وسطين بطرفين وكتابة في الطرف واحد نجد:

$$2\bar{z}z - i\bar{z} + iz + 2z + 2\bar{z} = 0$$

$$2\bar{z}z + i(z-\bar{z}) + 2(z+\bar{z}) = 0$$

$$2(x^2+y^2) + i(2iy) + 2(2x) = 0$$

نقسم الطرفين على 2

$$x^2 + y^2 - y + 2x = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

مجموعة النقاط (M) هي دائرة (C) مركزها $(-1,\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

عدا النقطة (0,1)

لأن $z \neq i$

أ.عامر البكار

السؤال العاشر

$$u = \frac{w\bar{z} - z}{iw - i}$$

يجب أن يكون: $\bar{u} = -u$

$$L_1: \bar{u} = \frac{\bar{w}z - \bar{z}}{-i\bar{w} + i}$$

بما أن $|w| = 1 \Leftarrow \bar{w} = \frac{1}{w}$

$$= \frac{\frac{1}{w}z - \frac{\bar{z}}{1}}{\frac{-i}{w} + \frac{i}{1}}$$

بتوحيد المقامات:

$$= \frac{\frac{z - w\bar{z}}{w}}{\frac{-i + iw}{w}}$$

$$= \frac{z - w\bar{z}}{-i + iw}$$

$$= \frac{-(w\bar{z} - z)}{iw - i}$$

$$= -u : L_2$$

$$\Rightarrow \bar{u} = -u$$

أي أن $\left(u = \frac{w\bar{z} - z}{iw - i}\right)$

كذلك طلب