# ٥ – العلاقات والدوال (التوابع)

## مقدمة:

نعبر عن الارتباط بين عنصرين باستخدام الأزواج المرتبة المشكلة من العنصرين المرتبطين لذلك نسمي مجموعة الأزواج المرتبة بالعلاقات الثنائية.

## تعريف العلاقة:

لتكن B,A مجموعتين نعرف العلاقة الثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B بأنها مجموعة جزئية من $A\times B$ (الجداء الديكارتي لـ A، B) ونرمز لها بالرمز R مع الإشارة إلى أن الحد الأول من الزوج المرتب يجب أن ينتمي إلى المجموعة A والحد الثاني من الزوج المرتب ينتمي إلى المجموعة B وعليه فإنه من أجل أي زوج مرتب (a,b) من العلاقة R نستطيع أن نكتب أحد التقريرين:

١) $(a,b) \in R$ عندها نقول إن a لها العلاقة R مع b ونكتب $a\,R\,b$.

٢) $(a,b) \notin R$ عندها نقول إن a ليس له علاقة R مع b ونكتب $a \not R\, b$.

## العلاقة من الدرجة n:

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ عبارة عن n مجموعة نعرف العلاقة ذات القياس n على هذه المجموعات بأنها المجموعة الجزئية من $A_1\times A_2\times \ldots \times A_n$ ندعو المجموعات $A_1,A_2,\ldots,A_n$ بساحات العلاقة وندعو n درجة العلاقة.

**ملاحظة:**

يمكن أن نعرف أكثر من علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ونحدد عدد العلاقات من $m = 2^p$ حيث p عدد عناصر الجداء الديكارتي $A \times B$.

نذكر بأن عدد عناصر الجداء الديكارتي $B \times A$ هو عدد عناصر A مضروب بعدد عناصر B أي $|A| \times |B|$.

**مثال (١):**

لتكن المجموعة $A = \{2,3,5,7,1\}$ والمجموعة $B = \{4,9,10,14\}$.

نعرف العلاقة R من A إلى B وفق القاعدة (يقسم) بمعنى أن العنصر من المجموعة A يرتبط بالعنصر من المجموعة B إذا كان قاسم له. المطلوب:

١ – أوجد R.

٢ – أوجد m عدد العلاقات من A إلى B.

**الحل:**

١ – $R = \{(2,4), (2,14), (2,10), (3,9), (5,10), (7,14)\}$

لاحظ $2\,R\,4$ و $2 \not R\, 9$.

٢ – $m = 2^{|A| \times |B|} = 2^{20}$

## تمثيل العلاقة:

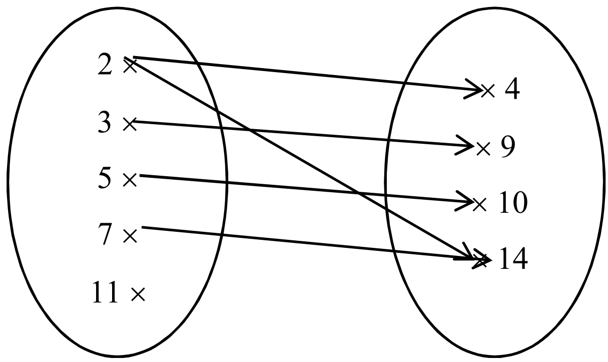
يمكن تمثيل العلاقة:

**١ – باستخدام مخططات فن:**

تمثل المجموعتين بمخططات فن ثم تستخدم الأسهم للوصل بين العناصر من المجموعة الأولى والعناصر المرتبطة بها من المجموعة الثانية.

**مثال (٢):**

مثل العلاقة R الواردة في المثال (١) باستخدام مخططات فن.




## ٢ – طريقة الجداول:

نضع في السطر الأول من الجدول عناصر المجموعة B وفي العمود الأول عناصر المجموعة A ثم نضع إشارة (×) عند تقاطع سطر وعمود العنصرين المرتبطين.

**مثال (٣):**

مثل العلاقة الواردة في المثال (١) باستخدام الجداول.

**الحل:**

| R | 4 | 9 | 10 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | × | | × | × |
| 3 | | × | | |
| 5 | | | × | |
| 7 | | | × | |
| 11 | | | | |

## العلاقة على المجموعة:

لتكن A مجموعة، إذا كانت R علاقة من المجموعة A إلى نفسها أي إذا كانت R هي مجموعة جزئية من المجموعة $A \times A = A^2$ نقول إن R علاقة على A ساحة العلاقة R هي عناصر المجموعة A ومدى العلاقة R هو مجموعة كل الأزواج المربعة التي تنتمي إلى R.

## العلاقة العكسية:

لتكن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B، نعرف معكوس R أو العلاقة العكسية ونرمز لها بالرمز $R^{-1}$ على أنها علاقة من B إلى A تتكون من الأزواج المرتبة التي عندما يعكس ترتيبها (أي نجعل حدها الأول حد ثاني، والحد الثاني حد أول) تكون تنتمي إلى R.

أي $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b| \in R\}$

**مثال:**

أوجد معكوس العلاقة:

$$R = \{(1,y), (1,z), (3,y)\}$$

من المجموعة $A = \{1,2,3\}$ إلى المجموعة $B = \{x,y,z\}$

$$R^{-1}: B \to A$$

$$R^{-1} = \{(y,1), (z,1), (y,3)\}$$

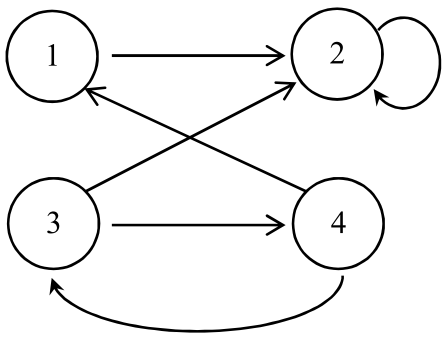
**ملاحظة:**

من الواضح أنه إذا كانت R علاقة فإن $(R^{-1})^{-1} = R$، وتكون الساحة لـ R على الترتيب أي ساحة $R^{-1}$ هي مدى R ومدى $R^{-1}$ هو ساحة R.

## تمثيل العلاقة R المعرفة على مجموعة A:

نكتب عناصر المجموعة A ونرسم سهماً من كل عنصر x إلى كل عنصر عندما يكون x على علاقة مع y.

ندعو هذا المخطط بالمخطط الموجه.



## خواص العلاقات:

### الانعكاسية:

لتكن R علاقة على A، نقول عن R إنها انعكاسية إذا كان a R a لكل a ∈ A (كل عنصر يرتبط بنفسه وفق R) أي:

$(a,a) \in R$ لكل $a \in A$

وإذا وجد $a \in A$ بحيث $(a,a) \notin R$ نقول إن R غير انعكاسية.

### المتناظرة:

نقول عن العلاقة R إنها متناظرة إذا كان:

a R b و b R a وذلك $\forall a,b \in A$

أي $(a,b) \in R$     $(b,a) \in R$

وإذا وجد $(a,b) \in R$ ولكن $(b,a) \notin R$ نقول إن R غير متناظرة.

**المتخالفة:**

نقول عن العلاقة R إنها متخالفة إذا كان:

$a\,R\,b$ , $b\,R\,a$ $\Leftarrow$ $a = b$ أي:

$$(a,b) \in R \text{ and } (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

وتكون غير متخالفة إذا وجد:

$$(a,b) \in R \text{ and } (b,a) \in R$$

وكان $a \neq b$.

**المتعدية:**

نقول عن العلاقة R على المجموعة A إنها متعدية إذا كان:

$$a\,R\,b \text{ and } b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$$

$$(a,b) \in R \text{ and } (b,c) \in R \text{ and } (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

**علاقة التكافؤ:**

لتكن A مجموعة غير خالية و R علاقة على A، تكون R علاقة تكافؤ على A إذا تحقق:

١ – R انعكاسية.

٢ – R متناظرة.

٣ – R متعدية.

أي:

1) $a\,R\,a \qquad a \in A$
2) $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$
3) $a\,R\,b \text{ and } b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$

الفكرة العامة لعلاقة التكافؤ هو أنها تصنف الأشياء المتشابهة بشكل ما في الواقع.

**مثال:**

علاقة (=) على أي مجموعة هي علاقة تكافؤ لأن:

$1)\ a \in A \Rightarrow a = a \Rightarrow a\,R\,a$

$2)\ a,b \in A,\ a\,R\,b \Rightarrow a = b \Rightarrow b = a \Rightarrow b\,R\,a$

$3)\ a, b, c \in A : a\,R\,b \text{ and } b\,R\,c$

$a = b \text{ and } b = c$

$\Rightarrow a = c \Rightarrow a\,R\,c$

**صفوف التكافؤ:**

لتكن لدينا المجموعة A رمزنا للمجموعات الجزئية من المجموعة A بالرمز $\{A_i\}$.

عناصر هذه المجموعة تتمتع بالخواص التالية:

١ — كل عنصر $a \in A$ ينتمي إلى بعض المجموعات الجزئية $A_i$.

٢ — إذا كان $A_i \neq A_j$ فإن $A_i \cap A_j = \phi$.

هذا يعني أن تجزئة A هو تقسيمها إلى مجموعات منفصلة غير خالية.

لنعرف R علاقة تكافؤ على المجموعة A لكل عنصر $a \in A$، لنفرض أن [a] هي المجموعة المكونة من عناصر A التي ترتبط مع a بالعلاقة R أي:

$$[a] = \{x : (a,x) \in R\}$$

ندعو [a] صف التكافؤ للعنصر a في A وأي عنصر $b \in [a]$ ندعوه ممثلاً لصف التكافؤ.

نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ لعناصر المجموعة A وفق العلاقة R بالرمز A/R.

$$A/R = \{[a] : a \in S\}$$

**ملاحظة:**

إن مجموعة صفوف التكافؤ تشكل تجزئة للمجموعة A وعلى وجه الخصوص:

1) $a \in A \Rightarrow a \in [a]$.

2) $(a,b) \in R \Leftrightarrow [a] = [b]$.

3) $[a] \neq [b] \Rightarrow [a], [b]$ منفصلين.

**علاقة الترتيب:**

تكون العلاقة R المعرفة على المجموعة A علاقة ترتيب إذا تحقق ما يلي:

١) R انعكاسية.

٢) R متخالفة.

٣) R متعدية.

**مثال:**

$(\leq)$ علاقة ترتيب على مجموعة الأعداد الحقيقية.

## العمليات على العلاقات:

بينا أن العلاقات من A إلى B هي مجموعات جزئية من $A \times B$ لذلك يمكن أن نطبق عليها نفس العمليات التي مرت معنا في بحث المجموعات، نضح من خلال المثال التالي:

**مثال:**

لتكن $A = \{1,2,3\}$، $B = \{1,2,3,4\}$

نعرف العلاقة $R_1$: $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

نعرف العلاقة $R_2$ على النحو الآتي: $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$

المطلوب أوجد: $R_1 \cup R_2$، $R_1 \cap R_2$، $R_1 - R_2$، $R_2 - R_1$.

**الحل:**

$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$

$R_1 - R_2 = \{(2,2), (3,3)\}$

$R_2 - R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$

## تركيب العلاقات:

لتكن C,B,A ثلاث مجموعات، ولتكن R علاقة من A إلى B و S علاقة من B إلى C. هذا يعني أن R مجموعة جزئية من $A \times B$ و S مجموعة جزئية من $B \times C$، عندها نستطيع تشكيل علاقة من A إلى C باستخدام العلاقتين S, R نرمز لها بـ SoR وتعرف كما يلي:

a (SoR) c إذا كان a R b، b S c حيث $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$.

ندعو العلاقة SoR تركيباً من S, R.

**مثال:**

لتكن لدينا المجموعات:

$$C = \{1,2,3,4\},\ B = \{0,1,2\},\ A = \{1,2,3\}$$

نعرف العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B كما يلي:

$$R = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$$

نعرف العلاقة S من المجموعة B إلى المجموعة C كما يلي:

$$S = \{(1,0), (2,0), (3,1), (4,1)\}$$

المطلوب: أوجد SoR.

**الحل:**

يتم إنشاء SoR باستخدام الأزواج المرتبة الموجودة في S لأن العنصر الثاني من الزوج المرتب الذي ينتمي إلى R يتوافق مع العنصر الأول للزوج المرتب الذي ينتمي إلى S.

مثلاً: $(2,3) \in R$

$(3,1) \in S$

نحصل على الزوجين السابقين على الزوج (2,1) الذي ينتمي إلى SoR.

نأخذ كل الأزواج المرتبة الموجودة في R والتي تتوافق مع الأزواج المرتبة في S نجد:

$$(1,1) \in R \text{ and } (1,0) \in S \Rightarrow (1,0) \in SoR$$
$$(2,3) \in R \text{ and } (3,2) \in S \Rightarrow (2,2) \in SoR$$
$$(3,1) \in R \text{ and } (1,0) \in S \Rightarrow (3,0) \in SoR$$
$$(1,4) \in R \text{ and } (4,1) \in S \Rightarrow (1,1) \in SoR$$
$$(3,4) \in R \text{ and } (4,1) \in S \Rightarrow (3,1) \in SoR$$
$$\Rightarrow SoR = \{(1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1)\}$$

**ملاحظة:**

إذا كانت R علاقة على المجموعة A أي من A إلى A عندها RoR (تركيب R مع نفسها) معرف دائماً ونرمز له بـ $R^2$ وبالمثل $R^3 = R^2oR = RoRoR$.

وعليه فإن $R^n$ معرفة لجميع الأعداد الموجبة n.

أي:

$$R^1 = R$$
$$R^{n+1} = R^n oR$$

ومنه نستطيع أن نكتب:

$$R^2 = RoR,\ R^3 = R^2oR = (RoR)\, oR, \ldots.$$

وهكذا.

**مثال:**

لتكن العلاقة R معرفة على النحو الآتي:

$$R = \{1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$$

أوجد قوى هذه العلاقة $R^n$ من أجل $n = 1,2,3,\ldots$.

**الحل:**

$R^1 = R$
$R^2 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$
$R^3 = R^2 o R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$
$R^4 = R^3 o R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\} = R^3$

بالاستمرار بالحساب نجد أيضاً: $R^3 = R^n$

## نظرية:

تكون العلاقة R على المجموعة A متعدية إذا وفقط إذا كانت $R \subseteq R^n$ من أجل $n = 1,2,3\ldots$.

## العلاقات وقواعد المعطيات:

إن الزمن الذي تتطلبه عملية معالجة المعلومات في قاعدة معطيات يتعلق بكيفية تخزين هذه المعلومات. فعمليات إضافة حذف السجلات (records)، تحديثها والبحث فيها، بالإضافة إلى تشكيل وبناء سجلات جديدة من تراكب قواعد معطيات تحدث ملايين المرات ربما في اليوم الواحد في قاعدة معطيات ضخمة. ومن المهم لهذه العمليات الطرق والأساليب المختلفة المتبعة في تمثيل قواعد المعطيات المطوَّرة. سوف نتوقف عند واحدة من هذه الطرائق، والتي تدعى بنموذج المعطيات العلائقي (relational data model) المرتكزة على مفهوم العلاقة. تتألف قاعدة المعطيات من سجلات (records) من نمط متعددات العناصر (ذات الطول n). وتتشكل هذه السجلات من حقول (fields)، وهذه الحقول هي عناصر المتعدد. وكمثال على ذلك قاعدة سجلات الطلاب التي يمكن أن تتشكل من حقول تتضمن: اسم الطالب، رقم الطالب، الاختصاص، المعدل التراكمي للطالب. إن نموذج المعطيات العلائقي يتمثل في قاعدة معطيات مكونة من سجلات كعلاقة من

النوع n (الدرجة n). إن سجلات الطلاب معطاة في هذا المثال من خلال متعددات عناصر من الطول 4 على النحو الآتي:

(Student name, IQ number, Major, GPA)

لنأخذ بعض من هذه السجلات:

(Ahmad, 241555, Mathematics, 4.67)
(Basel, 882233, Physics, 3.56)
(Sara, 102144, Computer Science, 3.62)
(Eiad, 234821, Mathematics, 4.32)
(Amaar, 623482, Computer Science, 3.98)

إن العلاقات المستخدمة في تمثيل قواعد المعطيات هي الجداول (tables) حيث يتم إظهار هذه العلاقات في الغالب كجداول، وكل عامود في الجدول يتعلق بصفة (attribute) لقاعدة المعطيات. إن قاعدة المعطيات السابقة يتم إظهارها في الجدول الموضّح بالشكل (3-4). هناك أساليب متعددة لتمثيل العلاقة بين مجموعة منتهية. إن احد هذه الأساليب هو أن نضع العلاقة كقائمة لأزواج مرتبة أو أن نضعها في جدول. سوف نستخدم أسلوبين لتمثيل العلاقة:

– استخدام المصفوفات ذات العناصر الصفرية والواحدية.

– استخدام التمثيلات التصويرية (pictorial).

والتي تدعى بالبيانات الموجهة (Direct Graphs).

| **Student name** | **ID – Number** | **Major** | **GPA** |
|---|---|---|---|
| Ahmad | 241555 | Mathematics | 4.67 |
| Basel | 882233 | Physics | 3.56 |
| Sara | 102144 | Computer Science | 3.62 |
| Eiad | 234821 | Mathematics | 4.32 |
| Amaar | 623482 | Computer Science | 3.98 |

إن المصفوفات هي أداة ملائمة لتمثيل العلاقات في البرامج الحاسوبية. كما أن تمثيل العلاقات بالأسلوب التصويري سوف يكون مغيراً لفهم خواص هذه العلاقات.

## تمثيل العلاقات باستخدام المصفوفات:

تمثل العلاقة بين مجموعات منتهية باستخدام مصفوفة عناصرها هي 0 و 1.

لنفرض بأن R هي علاقة من $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ إلى $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. نشير إلى أن عناصر A و B قد وضعت في ترتيب خاص لكن كيفي. عندما تكون $A = B$، فإننا نستخدم نفس الترتيب من أجل A و B. يمكن للعلاقة R أن تمثل من خلال المصفوفة:

$$M_R = [m_{ij}]$$

حيث:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 : (a,a) \in R \\ 0 : (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

بتعبير آخر، إن المصفوفة التي تمثل العلاقة R يكون فيها 1 في الموضع (i,j) عندما تكون $a_i$ مرتبطة بالعنصر $b_j$. ويكون 0 في هذا الموضع إن لم تكن $a_i$ مرتبطة بالعنصر $b_j$ وفق العلاقة R.

**مثال:**

لتكن $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2\}$ لتكن R علاقة من A إلى B تحوي (a,b) إذا كانت $a \in A$ و $b \in B$ بحيث $a > b$. لنوجد المصفوفة التي تمثل العلاقة R. إذا اخترنا:

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$
$b_1 = 1, b_2 = 2$

فإننا نجد بأن:

$$R = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$$

والمصفوفة الممثلة للعلاقة R هي:

$$M_R = \begin{bmatrix} (a_1,b_1) & (a_1,b_2) \\ (a_2,b_1) & (a_2,b_2) \\ (a_3,b_1) & (a_3,b_2) \end{bmatrix} \Rightarrow M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إن العناصر الواحدية في المصفوفة تبيّن انتماء الأزواج (3,2) ,(3,1) ,(2,1) إلى العلاقة R. وتشير الأصفار إلى عدم وجود ثنائيات أخرى تنتمي إلى R.

**مثال:**

إذا كانت $A = \{a_1,a_2,a_3\}$ و $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$. إذا كانت مصفوفة العلاقة R من A إلى B معطاة على النحو الآتي:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى العلاقة R هي الثنائيات $(a_i,b_j)$ حيث $m_{ij} = 1$، من ذلك نكتب:

$$R = \{(a_1,b_2), (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_2,b_4), (a_3,b_1), (a_3,b_3), (a_3,b_5)\}$$

إن مصفوفة علاقة على مجموعة، هي مصفوفة مربعة ويمكن استخدامها أيضاً لمعرفة فيما إذا كانت هذه العلاقة تتمتع بخواص محددة.

تكون العلاقة R انعكاسية، إذا كانت $(a,a) \in R$ و $a \in A$ والخاصة الانعكاسية للعلاقة R على A تتحقق إذا وفقط إذا كانت $(a_i,a_i) \in R$ ومن أجل $i = 1,2,k,n$. ومن خلال تمثيل العلاقة في مصفوفة فإنها تكون انعكاسية إذا وفقط إذا كانت $m_{ii} = 1$ من أجل

$i = 1,2,\ldots,n$ (أي إذا كانت عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة $M_R$ للعلاقة R جميعها تساوي 1).

تكون العلاقة R تناظرية، إذا وفقط إذا كانت $(a,b) \in R$ تقتضي أن يكون $(b,a) \in R$.

إذاً العلاقة R على A تكون تناظرية إذا وفقط إذا كانت $(a_j,b_i) \in R$ تقتضي أن يكون $(a_i,b_j) \in R$ بالتالي من خلال $M_R$ مصفوفة العلاقة R على A، تكون هذه العلاقة تناظرية إذا وفقط إذا كانت $m_{ij} = 1$ حيث $m_{ji} = 1$. إن هذا يعني بأن $m_{ji} = 0$ حيث $m_{ij} = 0$. من ذلك فإن العلاقة R على A تكون تناظرية إذا كان $m_{ji} = m_{ij}$. هذا يعني بأن المصفوفة $M_R$ تساوي منقولها $(M_R)'$ أي أن R تناظرية إذا وفقط إذا كانت:

$$M_R = (M_R)'$$

وذلك من أكل كل الأزواج: $i = 1,2,3,\ldots,n \,;\, j = 1,2,3,\ldots,n$

أي إذا كانت $M_R$ تناظرية.