الباب الثالث
الأساس والقوة واللوغريثم

الدرس الأول

- الأساس والقوة

نعلم ان حاصل الضرب $2 \times 2 \times 2$ هو 8 ، يمكن كتابته كالتالي:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

لقد حصلنا على العدد 8 بضرب العدد 2 في نفسه 3 مرات، نكتب ذلك $8 = 2^3$

ونسمي العدد 2 الأساس والعدد 3 الأس (أو القوة) ، ونقرأ 2 أس 3 .

المقدار 5^4 يقرأ 5 أس 4 أو العدد 5 مرفوع للقوة 4 .

لاحظ: إذا كانت القوة 2 قلنا العدد أس 2 أو العدد تربيع وإذا كانت القوة 3 قلنا العدد أس 3 أو العدد تكعيب .

بصورة عامة : نسمي x^n القوة رقم n للعدد x ، نسمي x الأساس ونسمي العدد n الأس.

لاحظ:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

بصورة عامة:

لأي عدد حقيقي a فإن a^n تعني أن العدد a مضروبا في نفسه n مرة.

مثال

1) $2^2 = (2)(2) = 4$

2) $3^3 = (3)(3)(3) = 27$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

4) $(x)^6 = (x)(x)(x)(x)(x)(x)$

ضرب المقادير ذات الأساس الموحد

عندما نضرب أعداداً ذات أساس موحد نجمع القوى

$$x^n . x^m = x^{n+m}$$

مثلاً:

$$3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$$

$$(2x)(x^5)(3x^2) = 6x^8$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

ناتج الضرب : $(2ab^3)(3a^2b^4)$ هو

$6ab^4$ (d)	$6a^3b$ (c)	$6a^3b^7$ (b)	$5a^3b^7$ (a)

$$1)\quad (2)^2(2)^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

$$2)\quad (x+3)^4(x+3)^3 = (x+3)^{4+3} = (x+3)^7$$

قسمة المقادير ذات الأساس الموحد

عندما نقسم أعداداً ذات أساس موحد نطرح القوى $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

مثلاً:

$$\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$$

$$\frac{a^3b^2}{a^2b} = a^{3-1}b^{2-1} = a^2b$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $\frac{x^3x^2}{x^4}$ يساوي

1 (a)	x^9 (b)	x^3 (c)	x (d)

1) $\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

2) $\dfrac{(a-b)^7}{(a-b)^4} = (a-b)^{7-4} = (a-b)^3$

رفع القوة إلى قوة أخرى

عندما نرفع قوة العدد إلى قوة أخرى نضرب القوتين

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

مثلاً:

$$(3^2)^5 = 3^{10}$$

$$(x^3)^4 = x^{12}$$

1) $(x^4)^{(-3)} = x^{(4)(-3)} = x^{-12}$

2) $(2^3)^2 = 2^{(3)(2)} = 2^6 = 64$

حاصل ضرب المقادير ذات القوة المشتركة

حاصل ضرب مقدارين ذات قوة واحدة (مشتركة) يعني أن المقدار الأول مرفوعا لهذه القوة مضربا في المقدار الثاني مرفوعا لهذه القوة.

$$(xy)^n = x^n y^n$$

مثلاً:

$$(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$$

$$(abc)^5 = a^5 b^5 c^5$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $(2xy)^4$ يساوي

(a) $2x^4y^4$	(b) $16x^4y$	(c) $16xy^4$	(d) $16x^4y^4$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $(x^4y)^3$ يساوي

(a) $x^{12}y^3$	(b) x^4y	(c) x^4y^4	(d) x^4y^3

المقدار ذو قوة سالبة

العدد مرفوع لقوة سالبة.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^{n}}$$

أيضاً:

$$\frac{1}{x^{-n}} = x^{n}$$

كذلك:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^{n}$$

مثلاً:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^{2}} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{3^{-2}} = 3^{2} = 9$$

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار 5^{-2} يساوي

(a) 1	(b) 10	(c) $\frac{1}{25}$	(d) 25

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$ يساوي

(a) $\frac{y^3}{x^3}$	(b) $\frac{x}{y^{-3}}$	(c) $\frac{x^{-3}}{y}$	(d) $\frac{x^3}{y^3}$

المقدار مرفوعا للقوة صفر

العدد مرفوع للصفر يساوي 1.

$$x^0 = 1$$

مثلاً:

$$2^0 = 1$$

$$(3x)^0 = 1$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

المقدار $\left(\frac{-4}{2}\right)^0$ يساوي

-4 (d)	1 (c)	-2 (b)	2 (a)

امثلة

1) $1^0 = 1$

2) $(-2)^0 = 1$

3) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

4) $\frac{(-2)^{-3}}{(-5)^{-2}} = \frac{(-5)^2}{(-2)^3} = \frac{25}{-8}$

5) $\frac{2^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{2^3} = \frac{25}{8}$

6) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{(-3)(-3)(-3)} = \frac{1}{-27}$

مثال

$$\left(x^{-3}y\right)^4 = x^{-12}y^4 = \frac{y^4}{x^{12}}$$

$$\left(\frac{9x^5y^4}{3x^3y}\right)^2 = \left(3x^2y^3\right)^2 = 3^2x^4y^6 = 9x^4y^6$$

$$\left(\frac{-x}{y}\right)^4 = \frac{(-x)^4}{y^4} = \frac{x^4}{y^4}$$

$$\left(x^2y^{-3}\right)^4 = \left(x^2\right)^4\left(y^{-3}\right)^4 = x^8y^{-12}$$

الدرس الثاني

اللوغريثم

عرفنا أن

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

لنحل المسألة التالية:

أوجد قيمة المتغير x حيث $2^x = 8$.

نريد أن نعرف عدد مرات ضرب العدد 2 في نفسه للحصول على 8، بالطبع 3 مرات.

في هذه الحالة نقول أن لوغريثم العدد 8 للأساس 2 هو 3 .

ونكتب ذلك:

$$\log_2 8 = 3$$

حيث أن لوغريثم العدد لأي أساس هو عدد مرات ضرب هذا الأساس في نفسه للحصول على هذا العدد.

مثلاً: لوغريثم العدد 27 للأساس 3 هو عدد مرات ضرب العدد 3 في نفسه للحصول على 27 ، (ثلاث مرات)

أي ان لوغريثم العدد 27 للأساس 3 هو 3 ، نكتب ذلك كما يلي:

$$\log_3 27 = 3$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

$\log_4 16$ يساوي

4 (d)	1 (c)	3 (b)	2 (a)

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

$\log_2 32$ يساوي

5 (d)	1 (c)	4 (b)	2 (a)

لاحظ: عندما يتساوى العدد والأساس يكون ناتج اللوغريثم 1

مثلاً: لنحسب $\log_5 5$ ، عدد مرات ضرب الأساس 5 في نفسه للحصول على 5 هي مرة واحدة، بالتالي:

$$\log_5 5 = 1$$

بصورة عامة: (a عدد حقيقي موجب)

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

لاحظ: 2^3 تعني أن العدد 2 مضروبا في نفسه ثلاث مرات .

بالتالي فإن :

$$\log_2 2^3 = 3$$

بصورة عامة :

$$\boxed{\log_a a^n = n}$$

نعلم أن $3^0 = 1$

$$\log_3 1 = 0$$

بصورة عامة : $(a \neq 1)$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

الدرس الثالث

اللوغريثم العشري

اللوغريثم الذي أساسه 10 يسمى اللوغاريثم العشري وعادة نعبر عنه بدون كتابة الأساس، فمثلاً:

$$\log x$$

تعني لوغريثم العدد x للأساس 10 (أي عدد مرات ضرب الأساس 10 في نفسه للحصول على x).

مثلا:

لنوجد $\log 100$

نريد عدد مرات ضرب العدد 10 في نفسه للحصول على 100 (هي مرتان)

بالتالي :

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

لنوجد $\log 0.1$

لاحظ: $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

بالتالي:

$$\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1$$

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

$\log 10000$ يساوي

4 (d)	1 (c)	3 (b)	2 (a)

مثال: اختر الإجابة الصحيحة

$\log 0.001$ يساوي

-4 (d)	3 (c)	-3 (b)	-2 (a)