هذا الملف ملحق ب أفكار وحدة النهايات

البحث عن مقارب مائل :

$$\Delta: y = ax + b$$

الحالة العامة:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$$

وبالمثل يتم البحث جوار $-\infty$

مثال : لدينا $\Delta: y = \underbrace{-2}_{a}x \underbrace{+3}_{b}$ مقارب مائل ل C_f جوار $+\infty$ عندئذٍ :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + 2x) = b = +3$$

حالات خاصة:

الحالة ١ : التابع من الشكل :

$$f(x) = ax + b \mp g(x)$$ حيث $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

معادلة المقارب المقابل جوار $+\infty$ هي $\Delta: y = ax + b$

وبالمثل جوار $-\infty$

مثال 1 : $f(x) = 2x - 1 - \frac{3}{1-x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{1-x} = 0 \quad \Rightarrow \Delta: y = 2x - 1$$

مثال 2 : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \Delta: y = \frac{1}{2}x - 1$$

ملحق ١ بهذه الحالة(تعميم لها) :

التابع من الشكل :

$$f(x) = p(x) + g(x)$$ حيث

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = c \text{ (ثابت حقيقي)}$$

$p(x)$ (تابع تآلفي (درجة أولى))

معادلة المقارب المائل جوال $+\infty$ هي :

$$\Delta: y = P(x) + c$$

بأسلوب مشابه نجد المقارب جوار الانهاية السالبة اذا كانت نهاية g مختلفة ،

مثال 1 : $f(x) = 2x - 1 - \frac{3x}{1-x}$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{3x}{1-x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{3x}{-x} = -(-3) = 3$$

$$\Delta: y = 2x - 1 + 3 = 2x + 2$$

طريقة ثانية : (غير سريعة)

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{3x}{1-x}$$

بالقسم الاقليدية ل $\frac{3x}{1-x}$ نجد :

$$\begin{array}{r|l} & -3 \\ 1-x & 3x \\ & 3x-3 \\ \hline & +3 \end{array}$$

$$\frac{3x}{1-x} = \text{خارج} + \frac{\text{باقي}}{\text{مقام}} = -3 + \frac{3}{1-x}$$

$$f(x) = 2x - 1 - \left(-3 + \frac{3}{1-x}\right)$$

$$f(x) = \underbrace{2x + 2}_{\Delta} - \frac{3}{1-x}$$

مثال ٢ : $f(x) = x + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

البحث عن مقارب:

$$\lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Delta: y = x + 1$$

مثال 3 : $f(x) = -x + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

البحث عن مقارب:

لاحظ :

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\sin(t) = 1 \, ; \, t = \frac{1}{x}$$

تذكر $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$

$$\Delta: y = -x + 1$$

ملحق 2 بهذه الحالة :

التابع الكسري الحدودي من الشكل :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث البسط والمقام كثيرتي حدود ودرجة البسط أعلى من درجة المقام ب مرتبة واحدة ...

نعود الى الشكل العام بعد قسمة البسط على المقام .

مثال١ : $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{2x + 1}$

العمل كالتالي :

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \\
\hline
2x + 1 & 3x^2 - x + 1 \\
 & 3x^2 + \frac{3}{2}x \\
\hline
 & -\frac{5}{2}x + 1 \\
 & -\frac{5}{2}x - \frac{5}{4} \\
\hline
 & \frac{9}{4}
\end{array}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{2x + 1}$$

...... لا داعي لنكمل اذا كان الهدف هو فقط معادلة المقارب المائل نتوقف فور الحصول على تابع تألفي في خارج القسمة ...

$$\Delta: y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

مثال٢ : $f(x) = \frac{2x^3 - x}{(x-1)^2}$

للبحث عن مقارب مائل :

$$f(x) = \frac{2x^3 - x}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x + 4 \\
\hline
x^2 - 2x + 1 & 2x^3 - x \\
 & 2x^3 - 4x^2 + 2x \\
\hline
 & 4x^2 - 3x \\
 & 4x^2 - 8x + 4 \\
\hline
 & 5x - 4
\end{array}$$

توقف هنا

$$f(x) = 2x + 4 + \frac{5x - 4}{(x-1)^2}$$

$$\Delta: y = 2x + 4$$

الحالة ٢: التابع من الشكل:

$$f(x) = \sqrt{(ax + b)^2 + c}$$

$$f(x) = \sqrt{\text{مربع كامل} + \text{ثابت}}$$

جوار الانهاية نهمل الثابت c ونأخذ:

$$\sqrt{\text{المربع الكامل}}$$

$\sqrt{(ax+b)^2} = |ax+b|$ ثم نكتب بعبارة مستقلة عن القيمة المطلقة ل نجد معادلة مقاربين مائلين ل الخط البياني C_f .

مثال 1 : $f(x) = \sqrt{4x^2+3}$

لايجاد معادلة المقاربات المائلة :

$$\sqrt{4x^2} = |2x| = \begin{cases} 2x \ ; \ x \geq 0 \\ -2x \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 : y = 2x & \text{جوار } +\infty \\ \Delta_2 : y = -2x & \text{جوار } -\infty \end{cases}$$

مثال 2 : $f(x) = \sqrt{(1-\frac{x}{2})^2 + 3}$

لايجاد معادلة المقاربات المائلة :

$$\sqrt{(1-\tfrac{x}{2})^2} = \left|1-\tfrac{x}{2}\right|$$

لاحظ :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$1-\frac{x}{2}$	+	0	-

$$\begin{cases} \Delta_1 : y = -1 + \frac{x}{2} & \text{جوار } +\infty \\ \Delta_2 : y = 1 - \frac{x}{2} & \text{جوار } -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 : y = \frac{1}{2}x - 1 & \text{جوار } +\infty \\ \Delta_2 : y = -\frac{1}{2}x + 1 & \text{جوار } -\infty \end{cases}$$

مثال 3 : $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1}$

لايجاد معادلة المقاربات المائلة :

$$f(x) = \sqrt{2(x^2 - \frac{1}{2}x) + 1}$$

$$f(x) = \sqrt{2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) + 1}$$

$$f(x) = \sqrt{2((x-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}) + 1}$$

$$f(x) = \sqrt{2(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1}$$

ثم نأخذ : $\sqrt{2(x-\frac{1}{4})^2} = \sqrt{2}\left|x - \frac{1}{4}\right|$

$$\begin{cases} \Delta_1 : y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4} & \text{جوار } +\infty \\ \Delta_2 : y = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} & \text{جوار } -\infty \end{cases}$$

تعميم : طريقة أسرع من البرق :

التابع من الشكل :

$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ حيث $a > 0$

$$\begin{cases} \Delta_1 : y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} & \text{جوار } +\infty \\ \Delta_2 : y = -\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}} & \text{جوار } -\infty \end{cases}$$

أمثلة : ① $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1}$

لاحظ :

نعوض في القانون السابق :

$a = 2 \quad , \quad b = -1$

$$\begin{cases} \Delta_1 : y = \sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{جوار } +\infty \\ \Delta_2 : y = -\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \text{جوار } -\infty \end{cases}$$

② $f(x) = \sqrt{4x^2 + 8x + 1}$

لاحظ :

نعوض في القانون السابق :

$a = 4 \quad , \quad b = 8$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = \sqrt{4}x + \dfrac{8}{2\sqrt{4}} & +\infty \text{ جوار}\\ \Delta_2: y = -\sqrt{4}x - \dfrac{8}{2\sqrt{4}} & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = 2x + 2 & +\infty \text{ جوار}\\ \Delta_2: y = -2x - 2 & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

ونجد ملحق الشكل التالي :

$f(x) = p(x) + \sqrt{\text{مربع كامل} + c}$ **حيث**

$p(x)$ **تابع تآلفي(درجةأولى) أو ثابت حقيقي**

جوار اللانهاية نهمل الثابت c لنجد معادلة المقاربين من الشكل : $p(x) + \sqrt{\text{مربع كامل}}$ بعد الكتابة بصيغة مستقلة عن القيمة المطلقة.

مثال 1 :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 3} - 2x$$

لايجاد معادلة المقاربات :

$$\sqrt{4x^2} = |2x| = \begin{cases}2x\ ;\ x \geq 0\\ -2x\ ;\ x < 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = 2x - 2x & +\infty \text{ جوار}\\ \Delta_2: y = -2x - 2x & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = 0 & +\infty \text{ جوار} \text{ مقارب أفقي}\\ \Delta_2: y = -4x & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

مثال 2 :

$$f(x) = \sqrt{|9x^2 - 1|} - x + 1$$

لايجاد معادلة المقاربات المائلة :

واضح أن مضمون القيمة المطلقة موجب جوار اللانهاية الموجبة والسالبة (يكن تعويض ∞ للتأكد) لذلك سنتعامل مع $\sqrt{9x^2 - 1} - 2x + 1$

$$\sqrt{9x^2} = |3x| = \begin{cases}3x\ ;\ x \geq 0\\ -3x\ ;\ x < 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = 3x - 2x + 1 & +\infty \text{ جوار}\\ \Delta_2: y = -3x - 2x + 1 & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = x + 1 & +\infty \text{ جوار}\\ \Delta_2: y = -5x + 1 & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

مثال 3 :

$$f(x) = x - \sqrt{|1 - x^2|} + 1$$

لايجاد معادلة المقاربات :

واضح أن مضمون القيمة المطلقة سالب جوار(اللانهاية الموجبة والسالبة) (يكن تعويض ∞ للتأكد) لذلك سنتعامل جوار اللانهاية مع $x - \sqrt{x^2 - 1} + 1$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases}x\ ;\ x \geq 0\\ -x\ ;\ x < 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = x - (x) + 1 & +\infty \text{ جوار}\\ \Delta_2: y = x - (-x) + 1 & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = +1 & +\infty \text{ جوار} \text{ مقارب أفقي}\\ \Delta_2: y = 2x + 1 & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

مثال 4 :

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 3} + 1$$

لايجاد المقارب المائل :

$$\sqrt{9x^2 + 3} + 1 \to |3x| + 1$$

$$\begin{cases}\Delta_1: y = 3x + 1 & +\infty \text{ جوار}\\ \Delta_2: y = -3x + 1 & -\infty \text{ جوار}\end{cases}$$

بنك التمارين الشامل سينشر في ملف مستقل والحل بطرق سريعة غير تقليدية.....

ولتحقيق أكبر فائدة يجب دراسة ملف ((الطرق الذهنية والسريعة ل معرفة نهاية تابع فور نشره))