$\frac{١}{١٢}$

النوع (٢):

س١) T

$z = 1+i$

$\vec{w} = -2\vec{u}+3\vec{v}$

$z' = z + \vec{w}$

$= 1+i-2+3i$

$= -1+4i$

س٢) H تحاكي مركزه (٠) ونسبته (3)

$z' - w = K(z-w)$

$z' = 3(z) = 3(1+i)$

$= 3+3i$

س٣) R دوران مركزه (٠) وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$z' - w = e^{i\theta}(z-w)$

$z' = e^{i\frac{\pi}{4}}(1+i) = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})(1+i)$

$= (\frac{1}{\sqrt2} + \frac{1}{\sqrt2}i)(1+i)$

$= (\frac{1}{\sqrt2})(1+i)^2 = \frac{1}{\sqrt2}(2i) = \sqrt2 i$

س٤) S تناظر مركزه $A(1-3i)$

$z' = 2z_A - z$

$z' = 2(1-3i) - (1+i)$

$= 2-6i-1-i$

$= 1-7i$

س٥) R دوران مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

$z' - w = e^{i\theta}(z-w)$

$z' - 2 + i = e^{\frac{2\pi}{3}i}(1+i-2+i)$

$z' - 2 + i = (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})(-1+2i)$

$= (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt3}{2})(-1+2i)$

$= \frac{1}{2} - i - \frac{\sqrt3}{2}i - \sqrt3$

$z' = 2 + \frac{1}{2} - \sqrt3 - 2i - \frac{\sqrt3}{2}i$

$= \frac{5}{2} - \sqrt3 - i(2 + \frac{\sqrt3}{2})$

س٦) S تناظر محوري محوره (ox)

$z' = \bar{z} = 1-i$

س٧) عين طبيعة التحويل الهندسي

$b = a - 1 + 3i$

T: انسحاب شعاعه

$\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

$b = -ia$

R: دوران مركزه (٠) وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$i = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $-i = -\frac{\pi}{2}$

$-1 = \pi$

$b = \bar{a}$

S: تناظر محوري محوره ox.

$b = 2a$

H: تحاكي مركزه (٠) ونسبته

$K = 2$

$b - 1 = -(a-1)$

R: دوران مركزه (1) وزاويته

$\theta = \pi$

H: تحاكي مركزه (1) ونسبته

$K = -1$

$b - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-i)$

R: دوران مركزه (i)

وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$

$b = a + 4 - 3i$

T: انسحاب شعاعه

$\vec{w} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$

$b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a+1-i)$

R: دوران مركزه $(-1+i)$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$G(3-i\sqrt{3})$

$H(3+i\sqrt{3})$

$R(G)=H$

$(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH})$

$$(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}) = \frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{OG}}$$

$$= \frac{H-0}{G-0} = \frac{H}{G}$$

$$= \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3+i\sqrt{3})^2}{9+3}$$

$$= \frac{9+6\sqrt{3}i-3}{12}$$

$$= \frac{6+6\sqrt{3}i}{12} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}) = \frac{\pi}{3}$$

$$z' = e^{\frac{\pi}{3}i} z$$

9

[illegible] $\frac{1}{xc}$

$z_A = -1+i$

$z_B = 2+i$ $\quad z_C = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

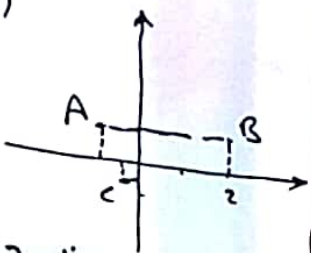
$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ [illegible]

(٢) [illegible] اطوال اضلاع ABC

[illegible] C

$A(-1,1) \qquad B(2,1)$

$C(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$



$z_{\overrightarrow{AB}} = b-a = 2+i+1-i$
$= 3$

$z_{\overrightarrow{AC}} = c-a = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+1-i$
$= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

$z_{\overrightarrow{BC}} = c-b = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-2-i$
$= -\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9} = 3$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$

10

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}}$

$|AB|^2 \overset{?}{=} |AC|^2 + |BC|^2$

$9 \overset{?}{=} \frac{10}{4} + \frac{34}{4}$

$9 \neq 11$

[illegible]

11

$\vec{AB} = \vec{DC} \wedge |\vec{AB}| = |\vec{AD}|$

$\vec{AB} = \vec{DC} \wedge \vec{AC}\cdot\vec{BD} = 0$

• مربع: مستطيل تساوت أبعاده
معينًا فيه زاوية قائمة.

ثامنًا: شبه المنحرف.

هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان وضلعان متقابلان غير متوازيين

٧) الزاوية:

$$(\vec{AB},\vec{CD}) = \frac{\vec{CD}}{\vec{AB}} = \frac{d-c}{b-a}$$

• الناتج حقيقي: $\vec{CD} \parallel \vec{AB}$

٣

• الناتج تخيلي بحت.

$\vec{CD} \perp \vec{AB}$

• الناتج عدد مركب $(x+iy)$

$(\vec{AB},\vec{CD}) = \arg(x+iy)$.

$$\frac{a-b}{a-c}$$

الناتج حقيقي: A, B, C على استقامة واحدة.

الناتج تخيلي بحت: مثلث ABC قائم في A.

٧)

$\vec{AB} = i\,\vec{CD}$

$\vec{AB} \perp \vec{CD}$

$|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$

$\vec{AB} = a i\,\vec{CD}$ $\quad a \neq 1$, $a \neq 0$

$\vec{AB} \perp \vec{CD}$

$|\vec{AB}| = |a|\,|\vec{CD}|$

أطوال مختلفة.

٤

ثامنًا: التحويلات الهندسية:

١) الانسحاب: T.

$z' = z + \vec{w}$ صورة z بالانسحاب T

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

٢) التحاكي: H.

$z' - w = k(z - w)$ صورة z بالتحاكي الذي مركزه w ونسبته k

٣) الدوران: R.

$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

٤) الانعكاس: S.

تناظر بالنسبة لمحور x: $z' = \bar{z}$

للمبدأ " ": $z' = -z$

لمحور y " ": $z' = -\bar{z}$

للنقطة A " ": $z' = 2z_A - z$

$z_A = \frac{z + z'}{2}$

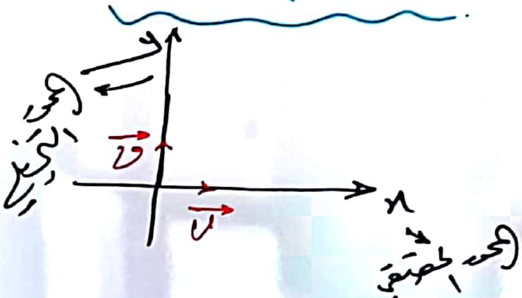
$z \quad A \quad z'$

$2z_A = z + z' \Rightarrow z' = 2z_A - z$

٥

تطبيقات الأعداد العقدية :

- المستوي العقدي :



(1) الشعاع $\vec{AB}$

$$Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A$$

$Z_B = b$ $\quad Z_A = a$

$$Z_{\vec{AB}} = b - a$$

$$\vec{CD} = d - c$$

(2) طويلة شعاع

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|\vec{AB}| = |b - a|$$

١

(3) العدد العقدي لمنتصف قطعة مستقيمة .

$$Z_I = \frac{a+b}{2}$$

(4) العدد العقدي لمركز ثقل مثلث ABC

$$Z_G = \frac{a+b+c}{3}$$

$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

(5) متوازي أضلاع ABDC

.. أنواع الرباعي ..

أولاً : متوازي أضلاع .

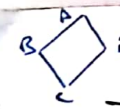
• مستطيل : متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة . قطراه متساويان بالطول

• $\vec{AB} = \vec{DC} \wedge \vec{AB}\cdot\vec{AD} = 0$

• $\vec{AB} = \vec{DC} \wedge |\vec{AC}| = |\vec{DB}|$

٢

• معين :



$$\vec{AB} = \vec{DC} \wedge |\vec{AB}| = |\vec{AD}|$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \wedge \vec{AC}\cdot\vec{BD} = 0$$

• مربع : مستطيل تساوت أبعاده . معين فيه زاوية قائمة .

ثالثاً : شبه المنحرف .

هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان وضلعان آخران متقابلان غير متوازيين

(6) الزاوية :

$$(\vec{AB},\vec{CD}) = \frac{\vec{CD}}{\vec{AB}} = \frac{d-c}{b-a}$$

• الناتج حقيقي $\vec{CD} \parallel \vec{AB}$

٣

2/132

$Z_A = 2(1+i\sqrt{3})$

$Z_B = 2(1-i\sqrt{3})$

① A، B ∈ للدائرة التي مركزها (o)

$R = 4$

② جد c حيث o مركز ثقل المثلث ABC

③ ما طبيعة المثلث ABC

$Z_{\vec{OA}} = a - o$

$= 2 + 2\sqrt{3}\,i$

$|\vec{OA}| = \sqrt{4+12} = 4 \Rightarrow A \in$ للدائرة

$Z_{\vec{OB}} = b - o = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

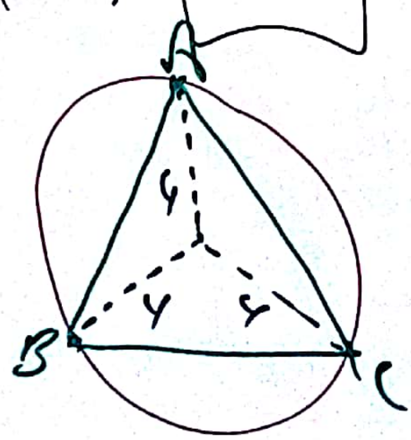
$|\vec{OB}| = \sqrt{4+12} = 4 \Rightarrow B \in$ للدائرة

②

$Z_o = \frac{a+b+c}{3}$

$0 = \frac{2+2\cancel{\sqrt{3}i}+2-2\cancel{\sqrt{3}i}+c}{3}$

$0 = 4 + c \Rightarrow \boxed{c = -4}$



١٢

③ بما ان مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC هو مركز ثقل فالمثلث متساوي الاضلاع

2/132

$Z_A = \frac{3}{2}i \qquad Z_B = \frac{7}{2} + i$

$Z_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

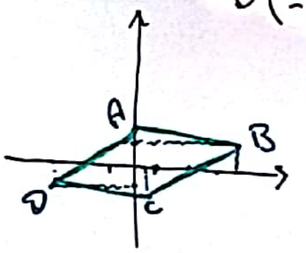
$Z_D = -3 - i$

① ضع النقاط A، B، C، D

② ما طبيعة الشكل ABCD

$A(0, \frac{3}{2}) \quad B(\frac{7}{2}, 1) \quad C(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2})$

$D(-3, -1)$



$\vec{AB} = b - a$

$= \frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i$

$= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$

$\vec{DC} = c - d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + 3 + i$

$= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$

$\vec{AB} = \vec{DC}$ ومنه

الشكل ABCD متوازي اضلاع

١٣

$z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$ 		 $\frac{3}{132}$

$z_B = 2(1 - i\sqrt{3})$

① A, B ∈ للدائرة التي مركزها (O)

$R = 4$

② جد c ← مركز ثقل المثلث ABC

③ ما طبيعة المثلث ABC

$z_{\overrightarrow{OA}} = a - 0$

$= 2 + 2\sqrt{3}\,i$

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4 + 12} = 4 \Rightarrow A \in$ للدائرة

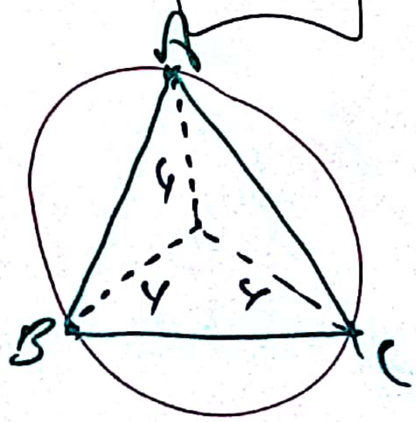
$z_{\overrightarrow{OB}} = b - 0 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{4 + 12} = 4 \Rightarrow B \in$ للدائرة

$z_O = \frac{a+b+c}{3}$ 		 ②

$0 = \frac{2 + \cancel{2\sqrt{3}i} + 2 - \cancel{2\sqrt{3}i} + c}{3}$

$0 = 4 + c \Rightarrow \boxed{c = -4}$



١٤

بما أن مركز الدائرة المارة برؤوسه هو مركز ثقل المثلث ABC فالمثلث متساوي الأضلاع

$\frac{2}{142}$

$z_A = \frac{3}{2}i \qquad z_B = \frac{7}{2} + i$

$z_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

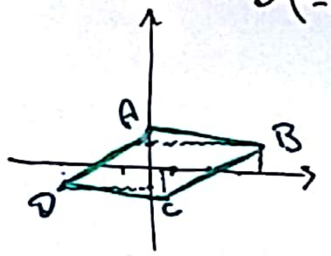
$z_D = -3 - i$

① ضع النقاط A ، B ، C ، D

② ما طبيعة الرباعي ABCD

$A(0, \frac{3}{2}) \quad B(\frac{7}{2}, 1) \quad C(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2})$

$D(-3, -1)$



$\overrightarrow{AB} = b - a$

$= \frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i$

$= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$

$\overrightarrow{DC} = c - d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + 3 + i$

$= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 		 منه

إذن الرباعي ABCD متوازي أضلاع

١٣

ط

$a = 1 + \frac{3}{4}i \qquad b = 2 - \frac{5}{4}i$ $\quad \frac{6}{133}$

$c = 3 + \frac{7}{4}i$

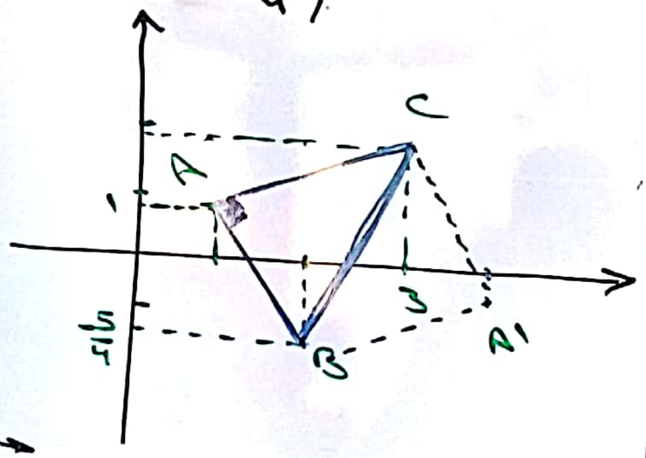
① مثل A ، B ، C ؟ $\vec{AC}$ ، $\vec{AB}$

② ABC قائم ومتساوي الساقين

③ A' بحيث ABA'C مربع

$A\left(1, \frac{3}{4}\right) \qquad B\left(2, -\frac{5}{4}\right)$

$C\left(3, \frac{7}{4}\right)$



$\vec{AB} = b - a = 2 - \frac{5}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$

$= 1 - 2i$

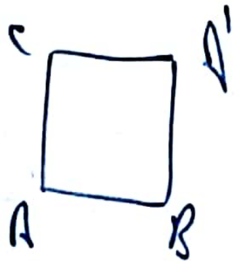
$\vec{AC} = c - a = 3 + \frac{7}{4}i - 1 - \frac{3}{4}i$

$= 2 + i$

$\vec{AC} = i\,\vec{AB}$

$\vec{AB} \perp \vec{AC}$

$|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$ $\Big\}$ ملاحظة ABC قائم ومتساوي الساقين



10

$a = 1 - i \qquad b = 2 + 3i \qquad c = 2 + i$

$a' = -2 + 3i \qquad b' = 3 - i \qquad c' = 4 + i$

① $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'}$

② مركز ثقل $ABC \to G$ $\quad \frac{5}{133}$

③ $A'B'C' \leftarrow G$

$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} =$

$= a' - a + b' - b + c' - c$

$= -2 + 3i - 1 + i + 3 - i - 2 - 3i$
$+ 4 + i - 2 - i = 0$

$- b + c' - c = 0$

② $z_G = \dfrac{a + b + c}{3}$

$= \dfrac{1 - i + 2 + 3i + 2 + i}{3}$

$= \dfrac{5 + 3i}{3} = \frac{5}{3} + i$

③ استنتج

$a' - a + b' - b + c' - c = 0$

$a' + b' + c' = a + b + c$

$\dfrac{a' + b' + c'}{3} = \dfrac{a + b + c}{3}$

$z_{G'} = z_G$

12

الدرس الثالث

ج ② ونكمل كونه مربع يجب نبرهنه متوازي أضلاع

التوازي . أ ي

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA'}$$

$$1-2i = a' - c$$

$$1-2i = a' - 3 - \frac{7}{4}i$$

$$a' = 1-2i+3+\frac{7}{4}i$$

$$a' = 4 - \frac{1}{4}i$$

---

⑦ $a = 2-2i$ $b = -1+7i$

$c = 4+2i$ $d = -4-2i$

① $w = -1+2i$ $r = 5$ D، C، B، A

$$|\overrightarrow{A\Omega}| = \sqrt{9+16} = 5$$

بالمثل $A \in$

وبنفس الطريقة B، C، D $\in$ بالمثل

ⓔ
$$e = \frac{a+b}{2} = \frac{2-2i-1+7i}{2}$$

$$e = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{\frac{-9}{2}-\frac{9}{2}i} \times 2$$

$$= \frac{3-9i}{-9-9i} = \frac{1-3i}{-3-3i}$$

$$= \frac{(1-3i)(-3+3i)}{9+9}$$

$$= \frac{-3+3i+9i+9}{18} = \frac{6+12i}{18}$$

$$= \frac{6}{18} + \frac{12}{18}i$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \quad \text{---} \quad ①$$

بنفس الطريقة

$$\frac{c-e}{a-e} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \quad \text{---} \quad ②$$

من ① و ② ينتج

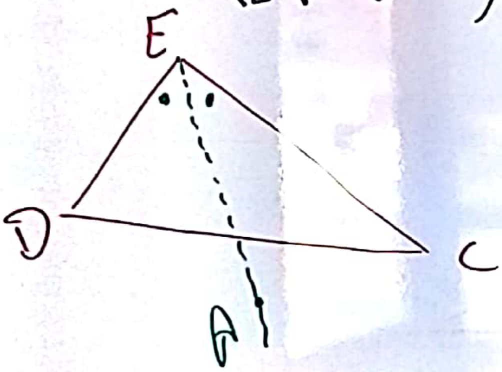
$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$$

DEC ⟵ (EA)

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$$

$$\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{ED}}=\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EA}}$$

$$(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC})$$



ومنه (EA) منصف

داخلي لزاوية E.

١٨

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$$

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{\frac{-9}{2}-\frac{9}{2}i}\times 2$$

$$=\frac{3-9i}{-9-9i}=\frac{1-3i}{-3-3i}$$

$$=\frac{(1-3i)(-3+3i)}{9+9}$$

$$=\frac{-3+3i+9i+9}{18}=\frac{6+12i}{18}$$

$$=\frac{6}{18}+\frac{12}{18}i$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i \quad \text{---} \quad (1)$$

نفس الطريقة

$$\frac{c-e}{a-e}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i \quad \text{---} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد

١٧

ماذا تمثل مجموعة النقاط :

٣ متراكبة .

$$|z-a| = |z-b|$$

يمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

$|z-a| =$ عدد موجب غير معدوم

معادلة دائرة مركزها (a)

$R =$ عدد الموجب الغير معدوم

$$|z-1| = |z-3-2i|$$

$\frac{8}{122}$

مستوي محوري للقطعة $[AB]$

$$|z-3-2i| = 1$$

معادلة دائرة مركزها $(3,2)$

$R = 1$

٣) $|z-3-2i| = 1$

نعوض $z = x+iy$

$$|x+iy-3-2i| = 1$$

$$|(x-3)+i(y-2)| = 1$$

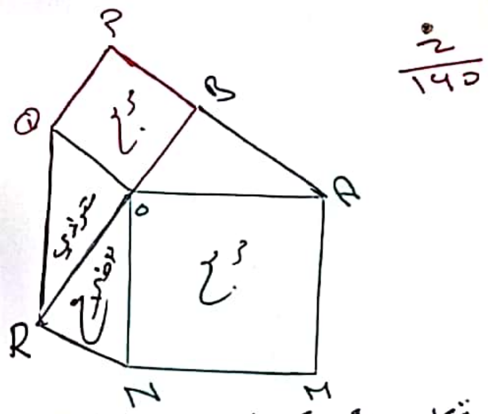
$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 1$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = 1$$

معادلة دائرة مركزها $(3,2)$

$R = 1$

$\frac{2}{145}$



نختار معلماً متجانساً كيفياً $(O,\vec{u},\vec{v})$

A: صورة N دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بالاتجاه الموجب

$z' - w = e^{i\theta}(z-w)$

$a = in \xrightarrow{\times -i} -ia = n$

Q: صورة B دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بالاتجاه الموجب

$q = ib \xrightarrow{\times -i} -iq = b$

$\vec{OR} = \vec{ON} + \vec{OQ}$

$= n + q$

$= -ia + ib = i(b-a)$

$= i\vec{AB}$

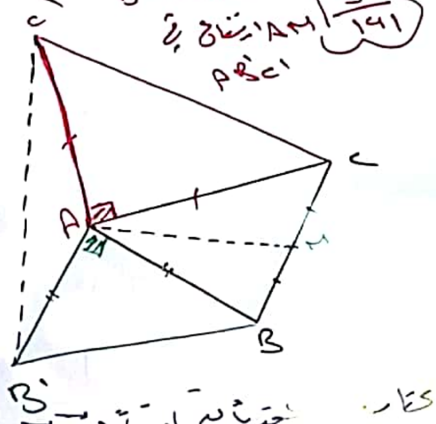
$\vec{AB} \perp \vec{OR}$

$|\vec{AB}| = |\vec{OR}|$

$\frac{3}{141}$

$B'C' = 2AM$

ارتفاع AM في $AB'C'$



نختار معلماً متجانساً $(A;\vec{u},\vec{v})$

$z_A = a = 0$

B: صورة B' دوران مركزه (A) وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بالاتجاه الموجب

$z' - w = e^{i\theta}(z-w)$

$b = ib' \xrightarrow{\times -i} -ib = b'$

C': صورة C دوران مركزه (A) وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بالاتجاه الموجب

$c' = ic \xrightarrow{\times -i} -ic' = c$

$m = \frac{b+c}{2}$

الدرس الرابع

$m - 0 = \frac{b+c}{2}$

$m - a = \frac{b+c}{2}$

$\vec{AM} = \frac{b+c}{2}$

$2\vec{AM} = b + c$

$= ib' - ic'$

$= i(b' - c')$

$= i\vec{C'B'}$

$\vec{C'B'} \perp \vec{AM}$

ومنه AM ارتفاع في $AB'C'$

$2|\vec{AM}| = |\vec{C'B'}|$

Scanned by CamScanner

E: صورت D دوران یافته حول مرکز A به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی است.

$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

$$e - a = i(d - a)$$

$$e - a = id - ia \Rightarrow \boxed{e = id - ia + a}$$

$$I = \frac{a+b}{2} \qquad J = \frac{d+c}{2} \qquad K = \frac{d+e}{2}$$

$$\overrightarrow{IK} = K - I = \frac{d+e}{2} - \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{d+e-a-b}{2} = \frac{d+id-ia+\cancel{a}-\cancel{a}-b}{2}$$

$$= \frac{d(1+i) - ia - ia}{2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}d(1+i) - ia}$$

$$\overrightarrow{AJ} = J - a = \frac{d+c}{2} - a$$

$$= \frac{d - id}{2} - a = \frac{1}{2}d(1-i) - a$$

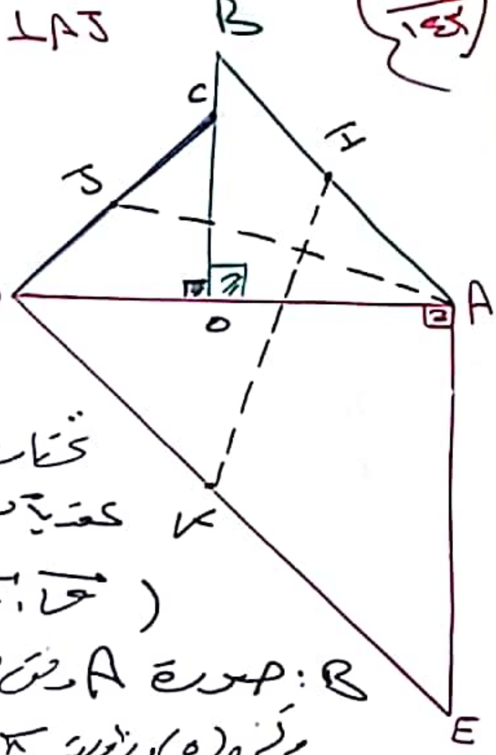
$$i\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}d(i+1) - ia$$

$$= \overrightarrow{IK} \longrightarrow AJ \perp IK$$

$$\longrightarrow AJ = IK$$

$$IK = AJ$$

$$IK \perp AJ$$



تحت دستگاه مختصات

$(O, \vec{u}, \vec{v})$

B: صورت A تحت دوران به مرکز (O) و زاویه $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی است.

$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

$$b = ia \xrightarrow{-i} -ib = a$$

D: صورت C تحت دوران به مرکز (O) و زاویه $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی است.

$$d = ic \xrightarrow{-i} -id = c$$

الدرس الخامس

6 / 142

$a = 2 \qquad b = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$

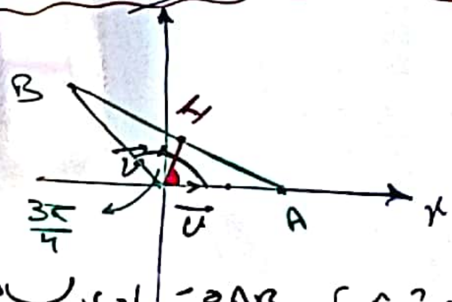
I منتصف AB

1.a) ارسم و بين طبيعة OAB

1.b) استنتج قيس $(\vec{u}, \vec{OI})$

2.a) اكتب z_I جبريا

2.b) استنتج $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$



المثلث OAB متساوي الساقين لأن $OB = OA$

1.b) لدينا OI متوسط في مثلث متساوي الساقين فهو منصف إذن

$$(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

2.a)

$$z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2 + 2e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2}$$

$$z_I = 1 + e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$z_I = 1 + \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$= 1 - \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$r = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \sqrt{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}}$$

$$\boxed{r = \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$\boxed{\arg(z_I) = \frac{3\pi}{8}}$$

$$z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\, e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

$$z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8}\, i$$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي و الشكل الجبري

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

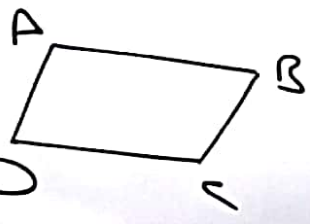
$$\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$a + c = b + d$

$\frac{5}{142}$

$a - b = d - c$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$



إذن $ABCD$ متوازي أضلاع

$\frac{8}{142}$

$$z' = \frac{z + 2i}{1 - 2iz}$$

Γ دائرة مركزها (O) $r = 1$

$M \in \Gamma \Rightarrow M' \in \Gamma$

الفرض: $M \in \Gamma \Leftrightarrow |z| = 1$

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

الطلب: $M' \in \Gamma \Leftrightarrow |z'| = 1$

$$\bar{z'} = \frac{1}{z'}$$

البرهان:

$$\bar{z'} = \frac{\bar{z} - 2i}{1 + 2i\bar{z}} = \frac{\frac{1}{z} - 2i}{1 + \frac{2i}{z}} = \frac{\frac{1 - 2iz}{z}}{\frac{z + 2i}{z}} = \frac{1 - 2iz}{z + 2i} = \frac{1}{z'}$$

$\Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow M' \in \Gamma$

$$z' = \frac{z+2}{z-i} \qquad \frac{4}{141}$$

$$z = x + iy$$

$$z' = X + iY$$

$$X + iY = \frac{x+iy+2}{x+iy-i}$$

$$= \frac{(x+2)+iy}{x+i(y-1)}$$

$$= \frac{(x+2+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - ix(y-1) + 2x - 2i(y-1) + iyx + y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

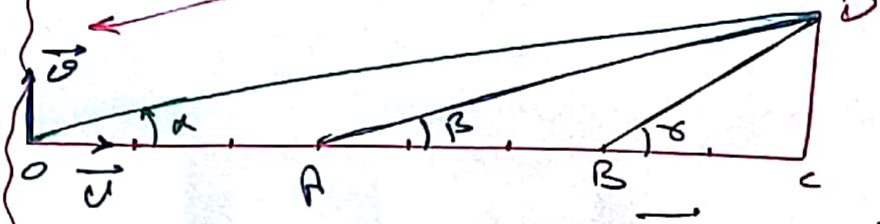
$$= \frac{x^2+y^2+2x-y+i(\cancel{-xy}+x-2y+2+\cancel{xy})}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+2x-y+i(x-2y+2)}{x^2+(y-1)^2}$$

٣١

7

C.C:
2



$8 + i = \sqrt{65}\, e^{\alpha i}$ لاحقة $\vec{OD}$:

$5 + i = \sqrt{26}\, e^{\beta i}$ لاحقة AD:

$2 + i = \sqrt{5}\, e^{\gamma i}$ لاحقة BD:

$$(8+i)(5+i)(2+i) = \sqrt{65}\sqrt{26}\sqrt{5}\, e^{(\alpha+\beta+\gamma)i}$$

$$\cancel{65}(1+i) = \cancel{65}\sqrt{2}\, e^{(\alpha+\beta+\gamma)i}$$

$$e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$$

٢.

$$z' = \frac{z+2}{z-i}$$

$$z = x+iy$$

$$z' = X+iY$$

$$X+iY = \frac{x+iy+2}{x+iy-i}$$

$$= \frac{(x+2)+iy}{x+i(y-1)}$$

$$= \frac{(x+2+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - ix(y-1) + 2x - 2i(y-1) + iyx + y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+2x-y+i(\cancel{-xy}+x-2y+2+\cancel{xy})}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+2x-y+i(x-2y+2)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$X+iY = \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$$

بالمطابقة:

$$X = \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Y = \frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$$

$Y = 0 \iff$ z' حقيقي

$\Rightarrow x-2y+2=0$

وهي معادلة مستقيم ونستثني منه النقطة $(0,1)$

$X = 0 \iff$ z' تخيلي بحت

$x^2+y^2+2x-y=0$

وهي معادلة دائرة مركزها $(-1,\frac{1}{2})$

$R^2 = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ونستثني منها النقطة $(0,1)$

١/١٤٠ ص

$a = 8$ $b = -4+4i$

$c = -4i$

أ) تحقق

$b - c = i(a - c)$

ب) ماذا تستنتج

$b - c = -4 + 4i + 4i = -4 + 8i$

$i(a - c) = i(8 + 4i) = 8i - 4$

$b - c = i(a - c)$

$\overrightarrow{CB} = i\overrightarrow{CA}$

فالمثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$

(٢)

أ) ما التحويل

ب) a', b', c'

أ) دوران مركزه $(0,0)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالاتجاه الموجب.

$a' = e^{i\frac{\pi}{3}} a = 4 + 4\sqrt{3}\,i$

$b' = -2 - 2\sqrt{3} + (2 - 2\sqrt{3})i$

$c' = 2\sqrt{3} - 2i$

ج) P, Q, R

$p = \frac{a' + b}{2} = 2(1+\sqrt{3})i$

$q = \frac{b' + c}{2} = -1 - \sqrt{3} - (1+\sqrt{3})i$

$r = \frac{c' + a}{2} = 4 + \sqrt{3} - i$

د) تحقق أن

$r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$

$r - p = 4 + \sqrt{3} - (3 + 2\sqrt{3})i$

$q - p = -1 - \sqrt{3} - 3(1+\sqrt{3})i$

ومنه نجد

$r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$

$\overrightarrow{PR} = e^{i\frac{\pi}{3}}\overrightarrow{PQ}$

ومنه فالمثلث PRQ متساوي الساقين رأسه P وزاويته $\frac{\pi}{3}$ فهو متساوي الأضلاع.