حل المسائل العامة في بحث (الأعداد العقدية)

س(1): لتكن النقاط A, B, C, D نقاطاً تمثل بالترتيب الأعداد العقدية:

$a = 1 \quad , \quad b = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$c = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{-\pi}{6}}$

● اكتب c بالشكل الأسي واكتب d بالشكل الجبري

الحل:

$$c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

θ تقع في الربع الأول

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{-\pi}{6}}$$

$$x = r.\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = r.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$y = r.\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = -r.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

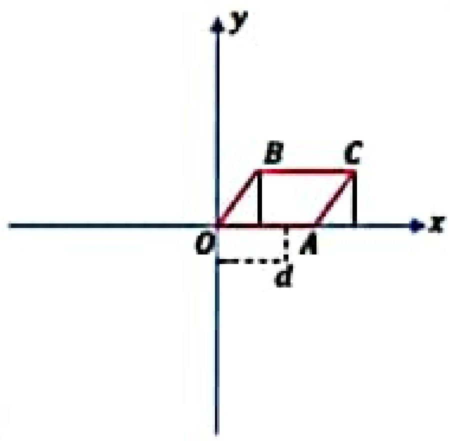
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i}$$

● وضع النقاط A, B, C, D في مستو مزود بمعلم متجانس.

ثم أثبت أن الرباعي $OACB$ معين:

الحل:



$A(1,0)$

$b\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad b = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$x = 1\times\cos\frac{\pi}{3} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = 1\times\sin\frac{\pi}{3} = 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$c\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad r = 1$

$d\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

لإثبات أن $OACB$ معين:

* نريد إثبات أن $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BC}$

أي أن الشعاعين مرتبطين خطياً.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x_a - x_o \\ y_a - y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} x_c - x_b \\ y_c - y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1.y_2 = x_2.y_1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$(1)(0) - (1)(0) \stackrel{?}{=} 0$$

$0 = 0$ فالشعاعين مرتبطين خطيا

س(10): نتأمل كثير الحدود

$$P(Z) = Z^4 - 19Z^2 + 52\,Z - 40$$

- عين عددين حقيقين b , a يحققان

$$P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)$$

- حل في C المعادلة $P(Z) = 0$

الحل:

ننشر المقدار $P(Z)$

$$P(Z) = Z^4 + 4Z^3 + 2aZ^2 + aZ^3 + 4aZ^2 + 2a^2Z + bZ^2 + 4bZ + 2ab$$

$$= Z^4 + (4 + a)Z^3 + (6a + b)Z^2 + (2a^2 + 4b)Z + 2ab$$

بالمقارنة بين شكلي المقدار $P(Z)$ نجد:

$4 + a = 0 \quad \dots \quad (1)$

$6a + b = -19 \quad \dots \quad (2)$

$2a^2 + 4b = 52 \quad \dots \quad (3)$

$2ab = -40 \quad \dots \quad (4)$

من (1) نجد أن: $\boxed{a = -4}$

نعوض في (2) فنجد $6(-4) + b = -19$

$\Longrightarrow -24 + b = -19$

$\Longrightarrow \boxed{b = 5}$

وهو المطلوب

• حل المعادلة $P(Z) = 0$

$$(Z^2 - 4Z + 5)(Z^2 + 4Z - 8) = 0$$

إما $Z^2 - 4Z + 5 = 0$

$$\Delta = 16 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$$

يوجد حلين عقديين مترافقين

$$Z_1 = \frac{4 + 2i}{2} = \boxed{2 + i}$$

$$Z_2 = \frac{4 - 2i}{2} = \boxed{2 - i}$$

أو $Z^2 + 4Z - 8 = 0$

$$\Delta = 16 - 4(1)(-8)$$

$$\Delta = 16 + 32 = 48$$

يوجد حلين حقيقيين

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$Z_3 = \frac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = \boxed{-2 + 2\sqrt{3}}$$

$$Z_4 = \frac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} = \boxed{-2 - 2\sqrt{3}}$$

س(11): حل في C المعادلة

$$Z^3 - (3 + 4i)Z^2 - 6(3 - 2i)Z + 72i = 0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

الحل: بالتجريب نجد:

$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3}$

$\boxed{-1} \quad \boxed{-2} \quad \boxed{-3}$

$$Z = -3 \longrightarrow -27 - (3 + 4i)9 - 6(3 - 2i) - 3 + 27i \stackrel{?}{=} 0$$

$$-27 - 36i + 54 - 36i + 72i \stackrel{?}{=} 0$$

$-54 + 54 = 0$ محققة

نقسم المقدار على $Z + 3$ قسمة إقليدية

$$Z^2 - (6 + 4i)Z + 24i$$

$Z + 3 \;\big|\; Z^3 - (3 + 4i)Z^2 - 6(3 - 2i)Z + 72i$

$-Z^3 \mp 3Z^2$

$-(6 + 4i)Z^2$

$\pm(6 + 4i)Z^2 \pm (18 + 12i)Z$

$(18 + 12i)Z - 6(3 - 2i)Z$

$24i\,Z$

$-24i\,Z \mp 72i$

$-72i + 72i$

$\boxed{0}$

$$P(Z) = (Z + 3)(Z^2 - (6 + 4i)Z + 24i) = 0$$

إما $\boxed{Z = -3} \Longleftarrow Z + 3 = 0$

أو $z^3 - (6 + 4i)Z + 24 + i$

التخيلي = التخيلي $\Leftarrow 4xy = 4\alpha\beta$

$$\Rightarrow xy = \alpha\beta$$

ونميز الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $\boxed{\alpha\beta = 0} \Leftarrow xy = 0$

إما $x = 0$ فالمجموعة $\mathcal{E}$ تمثل المحور yy'

أو $y = 0$ فالمجموعة $\mathcal{E}$ تمثل المحور xx'

الحالة الثانية: $\boxed{\alpha\beta \neq 0}$

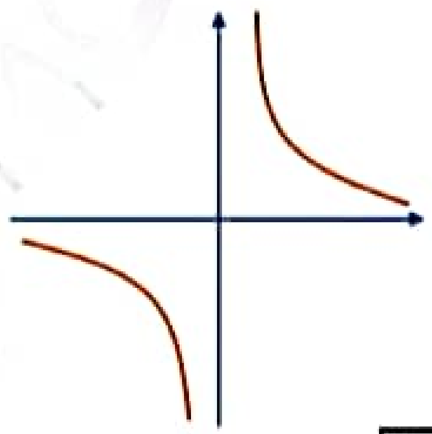
لنفرض أن $\alpha\beta = 0$ تصبح المعادلة

$$x.y = C$$

تابع المقلوب $\Rightarrow y = \frac{C}{x}$

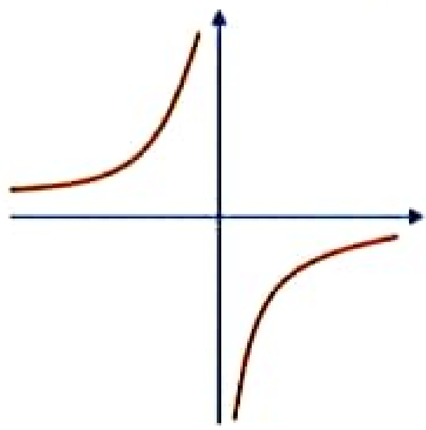
والمعادلة هنا تمثل قطع زائد $\boxed{C > 0}$

القطع يقع في الربعين الأول والثالث.



$\boxed{C < 0}$

القطع يقع في الربعين الثاني والرابع.



س(9): نتأمل عددين عقديين w , Z يحققان:

$$Z.w \neq -1 \quad , \quad |w| = 1 \quad , \quad |Z| = 1$$

أثبت أن العدد العقدي $Z = \frac{Z+w}{1+Z.w}$ حقيقي

الحل:

حتى يكون العدد العقدي Z عدداً حقيقياً، يجب أن تتحقق العلاقة:

$$\overline{Z} = Z$$

$$\Rightarrow \overline{Z} = \overline{\left(\frac{Z+w}{1+Zw}\right)} = \frac{\overline{Z}+\overline{w}}{1+\overline{Z}.\overline{w}}$$

ولكن لدينا من الفرض:

$$|Z| = 1 \Rightarrow Z.\overline{Z} = 1^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{Z} = \frac{1}{Z}} \quad (1)$$

$$|w| = 1 \Rightarrow w.\overline{w} = 1^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{w} = \frac{1}{w}} \quad (2)$$

نعوض العلاقتين (1) و (2) في $\overline{Z}$

$$\Rightarrow \overline{Z} = \frac{\frac{1}{Z}+\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{w}.\frac{1}{Z}} = \frac{\frac{w}{Z.w}+\frac{Z}{Z.w}}{\frac{Z.w+1}{Z.w}}$$

$$= \frac{\frac{w+Z}{Z.w}}{\frac{Z.w+1}{Z.w}} = \frac{w+Z}{Z.w+1} = Z$$

وهو المطلوب.

س(7): ليكن المثلث ABC أثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

- المثلث متساوي الساقين في A
- $22\sin\hat{B}.\cos\hat{C} = \sin\hat{A}$

الحل:

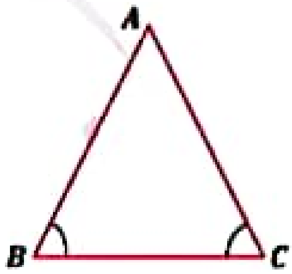
نريد إثبات العلاقة بطرفيها

مثلث متساوي الساقين ورأسه A $\Leftrightarrow$ $\boxed{2\sin B.\cos C = \sin A}$

أولاً: ننطلق من الطرف اليمين للوصول إلى اليسار

بفرض ABC متساوي الساقين رأسه A نريد إثبات العلاقة:

$$2\sin xB.\cos C = \sin A$$
$$\hat{B} = \hat{C}$$
$$\Rightarrow \sin\hat{B} = \sin\hat{C}$$



نضرب الطرفين بـ $\cos C$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\hat{B}.\cos\hat{C} = \sin\hat{C}.\cos\hat{C}} \quad *$$

معلومة عالسريع:

لدينا قانون سابق يقول

$$\sin 2C = 2\sin\hat{C}.\cos\hat{C}$$

نضرب طرفي العلاقة (*) بالعدد (2) فنجد:

$$2\sin\hat{B}.\cos\hat{C} = 2\sin\hat{C}.\cos\hat{C}$$
$$2\sin\hat{B}.\cos\hat{C} = \sin(2C)$$

معلومة ثانية عالسريع:

$$A + \underbrace{B + C}_{\substack{A=B \\ \text{متساوي الساقين}}} = \pi$$
$$A + C + C = \pi$$
$$A + 2C = \pi \Rightarrow \boxed{2C = \pi - A}$$
$$2\sin B.\cos C = \sin\left(\underbrace{\pi - A}_{\text{موجب الربع الثاني } \sin}\right)$$

وهو المطلوب $\boxed{2\sin B.\cos C = \sin A}$

ثانياً: ننطلق من اليسار للوصول إلى اليمين

نفرض أن: $2\sin B.\cos C = \sin A$

ونريد إثبات أن المثلث ABC متساوي الساقين.

$$2\sin B.\cos C = \sin A$$
$$2\sin B.\cos C = \sin(B + C)$$
$$2\sin B.\cos C = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B$$
$$2\sin B.\cos C - \sin B.\cos C - \sin C.\cos B = 0$$
$$\sin B.\cos C - \sin C.\cos B = 0$$
$$\sin(B - C) = 0$$

إما $(B - C) = 0$ $\Rightarrow \boxed{B = C}$ المثلث متساوي الساقين

أو $B - C = \pi$ مرفوضة في المثلث

وهو المطلوب

س8) ليكن a عدداً عقدياً معطى ولتكن $\mathcal{E}$ مجموعة الأعداد العقدية Z التي تحقق:

$$Z^2 - a^2 = \overline{Z}^2 - \overline{a}^2$$

عين المجموعة $\mathcal{E}$ ومثلها في مستو مزود بمعلم.

الحل:

بفرض $\boxed{a = \alpha + \beta i}$ عدد عقدي

وليكن أيضاً $Z = x + yi$

لدينا من الفرض:

$$Z^2 - a^2 = \overline{Z}^2 - \overline{a}^2$$
$$Z^2 - \overline{Z}^2 = a^2 - \overline{a}^2$$
$$\boxed{(Z - \overline{Z})(Z + \overline{Z}) = (a - \overline{a})(a + \overline{a})}$$

ولدينا:

$$a = \alpha + \beta i$$
$$\overline{a} = \alpha - \beta i$$
$$a + \overline{a} = 2\alpha$$
$$a - \overline{a} = 2\beta i$$

وبالتالي نعوض في العبارة *

$$(Z - \overline{Z})(Z + \overline{Z}) = (a - \overline{a})(a + \overline{a})$$
$$(2yi)(2x) = (2\beta i)(2\alpha)$$
$$4xyi = 4\alpha\beta i$$

نفترض أن $u \neq 1$ وأن $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي، أثبت أنه إما أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u| = 1$

الحل: (مفتاح الحل)

إذا كان من الفرض المقدار W حقيقي فإننا ننطلق من $\omega = \overline{\omega}$ ونسير بالطرفين معاً للوصول إلى المطلوب.

$\bar{z} = z \leftarrow$ نريد z حقيقي

$u.\bar{u} = 1$ أي $|u| = 1$ نريد

أي الوصول إلى $\overbrace{(z.\bar{z})}^{\text{الأول}}\ \overbrace{(u.\bar{u}-1)}^{\text{الثاني}} = 0$

إما الأول صفر أو الثاني صفر

ننطلق من الفرض:

$$\overline{\left(\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\right)} = \left(\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\right)$$

نسير بالطرفين معاً

$$\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}} = \frac{z-u\bar{z}}{1-u}$$

الطرفين بالوسطين

$$(\bar{z}-\bar{u}z)(1-u) = (1-\bar{u})(z-u\bar{z})$$
$$\bar{z}-u\bar{z}-\bar{u}z+\bar{u}uz = z-u\bar{z}-\bar{u}z+\bar{u}u\bar{z}$$
$$\bar{z}+\bar{u}.uz = z+\bar{u}u\bar{z}$$
$$\bar{z}-z+\bar{u}uz-\bar{u}u\bar{z} = 0$$
$$\bar{z}-z-\bar{u}u(\bar{z}-z) = 0$$
$$(\bar{z}-z)[1-\bar{u}u] = 0$$

إما $\boxed{z=\bar{z}} \Leftarrow \bar{z}-z=0$

z حقيقي وهو المطلوب

أو $u.\bar{u} = 1 \Leftarrow 1-u.\bar{u} = 0$

$\Rightarrow |u| = 1$ وهو المطلوب

س(5): اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين:

$$z_1 = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$$
$$z_2 = (3+i)^4$$

الحل:

$$z_1 = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$$
$$z_1 = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{ix}\times e^{ix} = e^{2ix}$$
$$\Longrightarrow \boxed{z = \cos 2x + i\sin 2x}$$

معلومة عالسريع:

الوسيط بين الشكل الجبري والمثلثي هو الشكل الأسي

$$z_2 = [(3+i)^2]^2 = (9+6i-1)^2$$
$$z_2 = [8+6i]^2$$
$$z_2 = 64+96i-36i^2 = \boxed{28+96i}$$

س(6): ليكن Z , Z' عددين:

$$|Z+Z'|^2 + |Z-Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$$

أثبت صحة هذه العلاقة:

الحل:

$$\overbrace{|Z+Z'|^2 + |Z-Z'|^2}^{\ell_1}$$
$$= (Z+Z')\overline{(Z+Z')} + (Z-Z')\overline{(Z-Z')}$$
$$= (Z+Z')(\overline{Z}+\overline{Z'}) + (Z-Z')(\overline{Z}-\overline{Z'})$$
$$= Z\overline{Z} + Z\overline{Z'} + Z'\overline{Z} + Z'\overline{Z'} + Z\overline{Z} - Z.\overline{Z'}$$
$$- Z'\overline{Z} + Z'\overline{Z'}$$
$$= 2Z\overline{Z} + Z'\overline{Z}$$
$$= 2|Z|^2 + 2|Z'|^2 = \ell_2$$

وهو المطلوب

θ تقع في الربع الثالث:

$$\underset{\text{نهائية}}{\theta} = \pi + \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

$$z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

بنفس الطريقة نجد:

$$\boxed{z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}} \qquad \boxed{z_4 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

نريد الآن إثبات أن A, B, C, D هي رؤوس مستطيل.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} x_c - x_a \\ y_c - y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{bmatrix} x_d - x_b \\ y_d - y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

الشعاعان مرتبطان خطيان (متوازيان) أصبح الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع

نريد الآن إثبات أن $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$

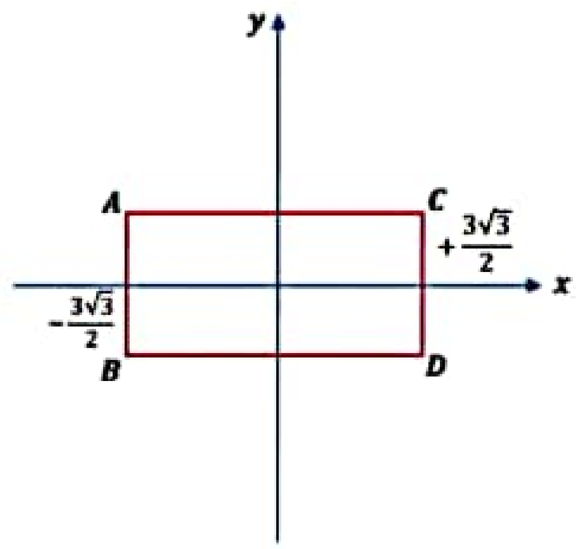
(الجداء السلمي) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_1.x_2 = y_1.y_2 \overset{?}{=} 0$$

$$(3\sqrt{3})(0) + (0)(-3) = 0$$

وبالتالي الشعاعين متعامدين والشكل أصبح متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل.



س (3): بسط كتابة العدد العقدي $Z = \frac{1+\cos x - i\sin x}{1+\cos x + i\sin x}$ موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

الحل:

$$Z = \frac{1 + cos(-x) + i\,sin(-x)}{1 + \cos x + i \sin x}$$

$$Z = \frac{1 + e^{-ix}}{1 + e^{ix}} = \frac{e^{-ix}\left[\frac{1}{e^{-ix}} + \frac{e^{-ix}}{e^{-ix}}\right]}{1 + e^{ix}}$$

$$= \frac{e^{-ix}[1 + e^{ix}]}{[1 + e^{ix}]} = \boxed{e^{-ix}}$$

قيم x التي يكون عندها المقدار موجوداً

$$1 + e^{ix} \neq 0 \Rightarrow e^{ix} \neq -1$$

$$e^{ix} \neq e^{i\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \neq \pi + 2\pi k}$$

س(4): ليكن z عدداً عقدياً ما وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أن $\frac{z - u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي.

الحل:

حتى يكون المقدار السابق حقيقي يجب أن يساوي مرافقه.

$$\overline{\left(\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}\right)} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \dots (*)$$

ولكن من الفرض:

$$|u| = 1 \Rightarrow u.\bar{u} = 1^2$$

$$\Rightarrow u.\bar{u} = 1 \Rightarrow \boxed{\bar{u} = \frac{1}{u}}$$

نعوض في العبارة (*)

$$\ell_1 = \frac{\bar{z} - \frac{1}{u}z}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{\frac{u\bar{z}}{u} - \frac{z}{u}}{\frac{u-1}{u}} = \frac{\frac{u\bar{z} - z}{u}}{\frac{u-1}{u}}$$

$$\ell_1 = \frac{u\bar{z} - z}{u - 1} = \frac{-(z - u\bar{z})}{-(1 - u)}$$

$$\ell_1 = \boxed{\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}} = \ell_2$$

فالمقدار حقيقي بحت.

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BC}}$$

* نريد إثبات شعاعين متجاورين متساوين بالطول:

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\|$$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+0^2} = \boxed{1}$$

$$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} x_b - x_o \\ y_b - y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}$$

وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متساويان بالطول

إذن الشكل $OABC$ معين

س(2): اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة :

$$(Z^2+3\sqrt{3}Z+9)(Z^2-3\sqrt{3}Z+9)=0$$

ثم أثبت أن النقاط A ، B ، C ، D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

الحل: نستخدم الجداء الصفري

إما $z^2+3\sqrt{3}\,z+9=0$

$$\Delta = 27-4(1)(9) = 27-36$$

$$\Delta = -9$$

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3}+3i}{2}$$

$$\boxed{z_1 = \frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}$$

$$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3}-3i}{2}$$

$$\boxed{z_2 = \frac{-3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}$$

أو $z^2+3\sqrt{3}\,z+9=0$

$$\Delta = 27-4(1)(9) = 27-36$$

$$\Delta = -9$$

$$z_3 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{3\sqrt{3}+3i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}$$

$A\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \leftarrow A$ تمثله النقطة z_1

$B\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \leftarrow B$ تمثله النقطة z_2

$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \leftarrow C$ تمثله النقطة z_3

$D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \leftarrow D$ تمثله النقطة z_4

نريد كتابة الحلول السابقة z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 بالشكل الأسي:

$$z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \ominus$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{+\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \qquad \oplus$$

θ تقع في الربع الثاني:

$$\underset{\text{نهائية}}{\theta} = \pi - \underset{\text{بدائية}}{\theta} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$z_2 = \frac{-3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}} = \boxed{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\frac{-3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \ominus$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \ominus$$

③ أثبت أن مجموعة $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل:

حتى يكون Z تخيلياً بحتاً يجب أن ينعدم القسم الحقيقي.

$$\Rightarrow X = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 = -2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4} - 2$$

$$\boxed{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}}$$

وبالتالي فإن مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل دائرة مركزها $O\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ ومركزها $\frac{1}{2}$ محذوف منها النقطة $(-1,0)$ النقطة التي تعدم المقام.

س(16): عين في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية Z التي تحقق الشرط المعطى:

① المقدار $(Z + 1)(\overline{Z} - 2)$ حقيقي:

الحل: نفرض

$$Z = x + yi$$

$$\Rightarrow \overline{Z} = x - yi$$

$$(x + yi + 1)(x - yi - 2)$$

$$= x^2 - xyi - 2x + xyi - y^2i^2 - 2yi + x - yi - 2$$

$$= x^2 + y^2 - x - 2 - 3yi$$

بما أن المقدار المعطى حقيقي فإن قسمه التخيلي معدوم

$$\Rightarrow -3y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

وبالتالي فإنّ مجموعة الأعداد العقدية تمثل جميع الأعداد التي تقع على محور الفواصل أي أنها مجموعة الأعداد الحقيقية البحتة $\mathbb{R}$.

② المقدار $\boxed{\frac{z+2i}{z-4i}}$ عدد حقيقي حيث z تختلف عن $4i$.

الحل:

يكون المقدار Z حقيقي إذا تحققت $Z = \overline{Z}$

$$\frac{z + 2i}{z - 4i} = \overline{\left(\frac{z + 2i}{z - 4i}\right)}$$

الطرفين بالوسطين

$$\frac{Z + 2i}{Z - 4i} = \frac{\overline{Z} - 2i}{\overline{Z} + 4i}$$

$$(Z + 2i)(\overline{Z} + 4i) = (Z - 4i)(\overline{Z} - 2i)$$

$$Z\overline{Z} + 4iZ + 2\overline{Z}i + 8i^2 = Z\overline{Z} - 2Zi - 4\overline{Z}i + 8i^2$$

$$4Zi + 2Zi = -4\overline{Z}i - 2\overline{Z}i$$

$$\Rightarrow 6iZ = -6i\overline{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = -\overline{Z}}$$

وبالتالي مجموعة الأعداد العقدية في مجموعة الأعداد العقدية البحتة.

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 5} \\ \boxed{y = -5} \end{cases}$$

وبما أن $x.y > 0$ فإن إشارتي x ، y لهما الإشارة نفسها:

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = 1 + 5i} \ , \boxed{w_2 = -1 - 5i}$$

$$Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-3 - 7i + -1 - 5i}{4i}$$

$$= \frac{-2 - 2i}{4i} = \frac{(-2 - 2i)(4i)}{(4i)(-4i)}$$

الحل الأول $$\Rightarrow Z_1 = \frac{8i + 8i^2}{16} = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{-3 - 7i + 1 + 5i}{4i}$$

$$= \frac{-4 - 12i}{4i} = \frac{(-4 - 12i)(-4i)}{(4i)(-4i)}$$

الحل الثاني $$\Rightarrow Z_2 = \frac{16i + 48i^2}{16} = \boxed{-3 + i}$$

● $z^2 + (1 + 8i)z - 17 + i = 0$

الحل:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (1 + 8i)^2 - 4(1)(-17 + i)$$
$$= 1 + 16i + 64i^2 + 68 - 4i$$
$$\Delta = 5 + 12i$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \quad ...(1)$$
$$x^2 - y^2 = 5 \quad ...(2)$$
$$2x.y = 12 \quad ...(3)$$

نجمع المعادلتين (1) و (2) فنجد:

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3} \\ \boxed{x = -3} \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 2} \\ \boxed{y = -2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = 3 + 2i} \ , \boxed{w_2 = -3 - 2i}$$

$$Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-1 - 8i + 3 + 2i}{2}$$

$$Z_1 = \frac{2 - 6i}{2} \Rightarrow \boxed{Z_1 = 1 - 3i}$$

$$Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{-1 - 8i - 3 - 2i}{2}$$

$$Z_2 = \frac{-4 - 16i}{2} \Rightarrow \boxed{Z_2 = -2 - 6i}$$

س (15):

في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نضع $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+z}$ ونفترض أن $\boxed{z = x + yi}$ ، $\boxed{Z = X + Yi}$

حيث x, y, X, Y أعداد حقيقية.

① احسب X, Y بدلالة العددين x, y

الحل:

$$Z = \frac{2 + \bar{z}}{1 + z}$$

$$\Rightarrow X + Yi = \frac{2 + x - yi}{1 + x - yi}$$

نضرب ونقسم على مرافق المقام للتخلص من القسم التخيلي.

$$X + Yi = \frac{(2 + x - yi)(1 + x + yi)}{(1 + x - yi)(1 + x + yi)}$$

$$= \frac{2 + 2x + 2yi + x + x^2 + xyi - yi - xyi - y^2 i^2}{(1 + x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1 + x)^2 + y^2} + \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2} i$$

بالمطابقة نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{X = \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1 + x)^2 + y^2}} \\ \boxed{Y = \frac{y}{(1 + x)^2 + y^2}} \end{cases}$$

② أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً في مستقيم محذوف منه نقطة.

الحل:

حتى يكون Z حقيقياً يجب أن ينعدم القسم التخيلي

$$\Rightarrow Y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

وبالتالي مجموعة النقاط تمثل مستقيم منطبق على محور الفواصل محذوف منه النقطة $(-1,0)$

● $w = -21 - 20i$

$Z^2 = w \Rightarrow Z^2 = 21 - 20i$

نجذر الطرفين بطريقة المعادلات الثلاث:

$x^2 + y^2 = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29 \dots (1)$

$x^2 - y^2 = -21 \dots (2)$

$2x.y = -20 \quad \dots (3)$

نجمع المعادلتين (1) و (2) فنجد:

$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ \boxed{x = -2} \end{cases}$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد:

$2y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 5} \\ \boxed{y = -5} \end{cases}$

وبما أن $x.y < 0$ فإن إشارتي x , y متعاكستين:

$\Rightarrow \boxed{w_1 = 2 - 5i} \ , \boxed{w_2 = -2 + 5i}$

● $w = -7 + 24i$

$x^2 + y^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \dots (1)$

$x^2 - y^2 = -7 \dots (2)$

$2x.y = 24 \quad \dots (3)$

نجمع المعادلتين (1) و (2) فنجد:

$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3} \\ \boxed{x = -3} \end{cases}$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد:

$2y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 4} \\ \boxed{y = -4} \end{cases}$

وبما أن $x.y > 0$ فإن إشارتي x , y لهما الإشارة نفسها:

$\Rightarrow \boxed{w_1 = 3 + 4i} \ , \boxed{w_2 = -3 - 4i}$

حل في C كلاً من المعادلات التالية:

● $Z^2 + (1 + 4i)Z - 5 - i = 0$

الحل:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (1 + 4i)^2 - 4(1)(-5 - i)$

$= 1 + 8i + 16i^2 + 20 + 4i$

$\Delta = 5 + 12i$

نفرض $\sqrt{\Delta} = w = x + yi$

نوجد كلاً من x , y بطريقة المعادلات الثلاث:

$x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \dots (1)$

$x^2 - y^2 = 5 \quad \dots (2)$

$2x.y = 12 \quad \dots (3)$

نجمع المعادلتين (1) و (2) فنجد:

$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3} \\ \boxed{x = -3} \end{cases}$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد:

$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 2} \\ \boxed{y = -2} \end{cases}$

وبما أن $x.y > 0$ فإن إشارتي x , y لهما الإشارة نفسها:

$\Rightarrow \boxed{w_1 = 3 + 2i} \ , \boxed{w_2 = -3 - 2i}$

$Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2}$

$Z_1 = \frac{2 - 2i}{2} = \boxed{1 - i}$ الحل الأول

$Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2}$

$Z_2 = \frac{-4 - 6i}{2} = \boxed{-2 - 3i}$ الحل الثاني

● $2iz^2 + 3(3 + 7i)z + 4 + 2i = 0$

الحل:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (3 + 7i)^2 - 4(2i)(4 + 2i)$

$= 9 + 42i + 49i - 8i(4 + 2i)$

$= -40 + 42i + 32i - 16i^2$

$\Delta = -24 + 10i$

$x^2 + y^2 = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \quad \dots (1)$

$x^2 - y^2 = -24 \dots (2)$

$2x.y = 10 \quad \dots (3)$

نجمع المعادلتين (1) و (2) فنجد:

$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = -1} \\ \boxed{x = 1} \end{cases}$

أثبت صحة العلاقات التالية:

- $$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

الحل:

$$\sin\theta = \frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}}}+\underbrace{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}_{(1)}}$$

$$= \frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \sin\theta = L_1$$

- $$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

بعد توحيد المقامات نحذفها

$$= \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \cos\theta = L_1$$

- $$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

الحل:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

من العلاقتين (1) و (2) نعوضهم في (3)

$$\tan\theta = \frac{\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = L_2$$

وهو المطلوب.

س (14):

1) حل في C المعادلات $z^2 = w$ في الحالات الآتية:

- $w = -3+4i$

$$Z^2 = w \Rightarrow Z^2 = -3+4i$$

نجذر الطرفين ولإيجاد الجذر نستخدم طريقة المعادلات الثلاث:

$$x^2+y^2 = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$x^2-y^2 = -3$$
$$2x.y = 4$$

نجمع المعادلتين (1) و (2) فنجد:

$$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases}\boxed{x=1}\\ \boxed{x-1}\end{cases}$$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases}\boxed{y=2}\\ \boxed{y=-2}\end{cases}$$

بما أن $x.y > 0$ فإن إشارة كل من y ، x نفسها.

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = 1+2i} \quad , \quad \boxed{w_2 = -1-2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{A+B=-1} \dots (1)$$ محققة

$$A.B = (\alpha+\alpha^2)(\alpha^3+\alpha^4)$$
$$= \alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7$$
$$= \alpha^3+\alpha^4+\alpha.\alpha^5+\alpha^2.\alpha^5$$

ولكن $\alpha^5 = 1 \leftarrow$ من الطلب السابق

$$= \alpha^3+\alpha^4+\alpha+\alpha^2$$

نضيف العدد (1) إلى الطرفين:

$$A.B+1 = \underbrace{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4}_{\text{يساوي الصفر}}$$

$$\Rightarrow A.B+1=0$$

$$\Rightarrow \boxed{A.B=-1} \dots (2)$$ محققة

إذن A , B جذري المعادلة

$$x^2+x-1=0$$

عبر عن Δ بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

الحل:

$$A = \alpha+\alpha^4$$
$$= e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}$$
$$= \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$$
$$= \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\left(\frac{10\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$= \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$= \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}$$
$$= 2\cos\frac{2\pi}{5} \Rightarrow \boxed{A = 2\cos\frac{2\pi}{5}}$$

وهو المطلوب.

حل المعادلة $x^2+x-1=0$

واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

الحل:

$$x^2+x-1=0$$
$$\Delta = b^2-4a.c$$
$$= 1-4(1)(-1) = 1+4 = 5$$

يوجد جذرين للمعادلة.

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \rightarrow$$ مقبول

$$A = x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \rightarrow$$ مرفوض

لأن الزاوية $\frac{2\pi}{5}$ تقع في الربع الأول.

س 13) ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi,+\pi[$

نعرف: $t = \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}$

احسب المقادير $\frac{2t}{1+t^2}$ و $\frac{2t}{1-t^2}$ و $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد θ

الحل:

$$t = \frac{2i\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}}{2\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}}{2}} = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = i\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = i.\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2i\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2i\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

وهو المطلوب.

وهي معادلة من الدرجة الثانية بأمثال ليست حقيقة ونحل بطريقة الإتمام إلى مربع كامل.

أمثال $Z \longleftarrow 6+4i$

نصف أمثال $Z \longleftarrow 3+2i$

مربع نصف أمثال $Z \longleftarrow (3+2i)^2$

نضيف ونطرح $(3+2i)^2$

$$z^3-(6+4i)Z+(3+12i)-(3+2i)^2+24i=0$$

$$\left(Z-(3+2i)\right)^2-(3+2i)^2+24i=0$$

$$(Z-3-2i)^2=(3+2i)^2-24i$$

$$(Z-3-2i)^2=9+12i+4i^2-24i$$

$$\boxed{(Z-3-2i)^2=5-12i} \quad *$$

نوجد الجذور التربيعية للعدد $(5-12i)$ بطريقة المعادلات الثلاث:

$$x^2+y^2=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

$$x^2+y^2=13 \quad \dots \quad (1)$$

$$x^2-y^2=5 \quad \dots \quad (2)$$

$$2xy=-12 \quad \dots \quad (3)$$

نجمع المعادلتين (1) و (2) فنجد:

$$2x^2=18 \Rightarrow x^2=9 \quad \boxed{x=3} \quad \boxed{x=-3}$$

نطرح المعادلتين (1) و (2) فنجد:

$$2y^2=8 \Rightarrow y^2=4 \quad \boxed{y=2} \quad \boxed{y=-2}$$

وبما أن إشارة $x-y<0$ فإن إشارتي x, y متعاكستين

عندئذ جذور العدد $5-12i$ هي:

$$\boxed{3-2i} \quad \boxed{-3+2i}$$

نجذر المعادلة * فنجد:

$$Z-3-2i=3-2i$$

$$Z=3+2i+3-2i$$

$$\boxed{Z=6}$$

$$Z-3-2i=-3+2i$$

$$Z=3+2i-3+2i$$

$$\Rightarrow \boxed{Z=4i}$$

وهو المطلوب.

س(12): ليكن $\alpha=e^{\frac{2\pi}{5}i}$ نضع

$$A=\alpha+\alpha^4 \quad , \quad B=\alpha^2+\alpha^3$$

أثبت أن

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

واستنتج أن A , B هما جذران للمعادلة من الدرجة الثانية

$$x^2+x-1=0$$

الحل:

نفرض أن $\boxed{1=\alpha^0}$

تصبح العلاقة السابقة:

$$\alpha^0+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

وبالتالي هذا المجموع هو مجموع خمس حدود متتالية هندسية أساسها $q=\alpha$

$$\Rightarrow S=\alpha\frac{1-q^n}{1-q}=1\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}$$

حسب الفرض

$$\Rightarrow \alpha^5=\left[e^{2i\frac{\pi}{5}}\right]^5$$
$$=e^{2i\pi}$$
$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$
$$=1+0=1$$

نعوض في عبارة S

$$S=1\frac{1-1}{1-\alpha}=1\times\frac{0}{1-\alpha}=1\times 0=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4}_{S}=0$$

وهو المطلوب.

حتى يكون A , B جذري المعادلة يجب أن يتحقق.

$$A+B=\frac{-b}{a}\overset{?}{=}-1$$

$$A.B=\frac{c}{a}\overset{?}{=}-1$$

$$A+B=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$$

نضيف العدد (1) إلى الطرفين:

$$A+B+1=\underbrace{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4}_{\text{يساوي الصفر من الطلب السابق}}$$

$$A+B+1=0$$