
الدرس
2

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

ANALYZING GRAPHS OF FUNCTIONS AND RELATIONS


Welcome

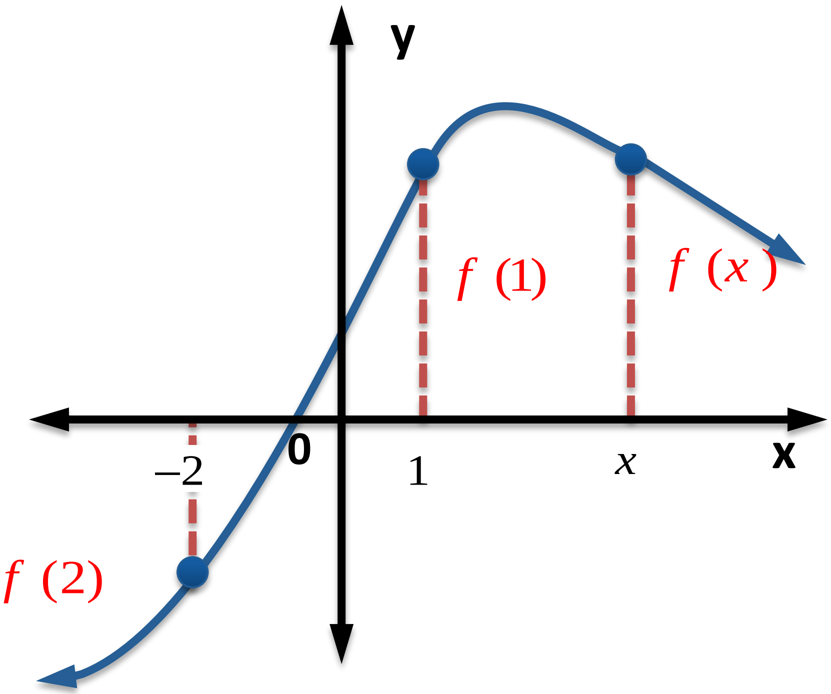
لماذا ؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلاً يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1423 – 1430)هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 + 14.07, 1 \le x \le 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1422هـ. ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي .

تحليل التمثيل البياني للدالة : التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, (f(x))$ ، حيث x أحد عناصر مجال f . وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$ ومن ثم تكون القيمة المطلقة لقيمة الدالة مساوية طول العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة، كما هو موضح في الشكل المجاور.



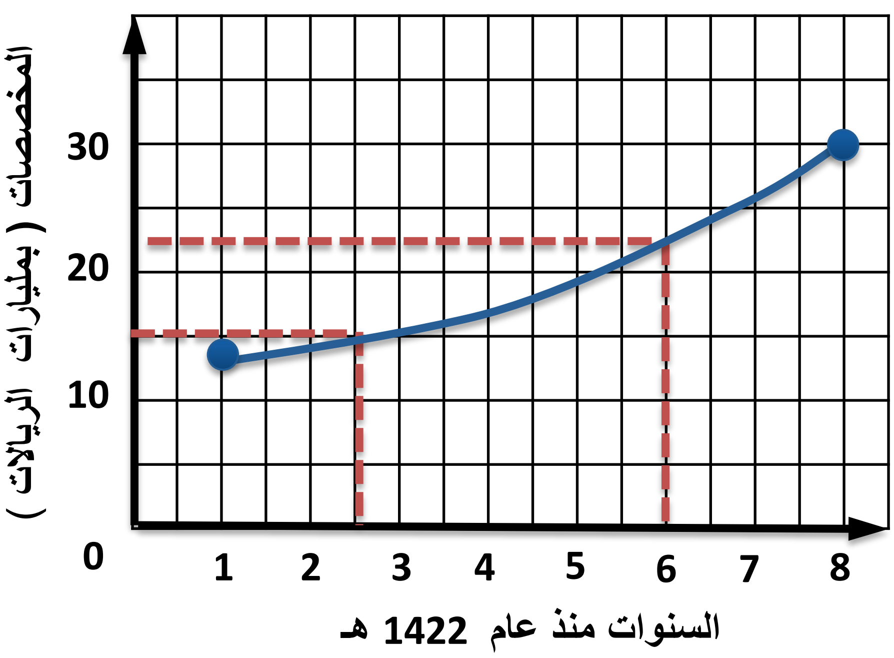
يُستعمل التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة .

مثال 1 من واقع الحياة

تقدير قيم الدوال

مخصصات الصحة و الهلال الأحمر

مخصصات : استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عمّا يأتي :



a) قدّر قيمة المخصصات سنة 1428 هـ ، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا .

السنة 1428هـ هي السنة السادسة بعد 1422 هـ، لذا تُقدّر قيمة الدالة عند x = 6 بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1428 هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا .

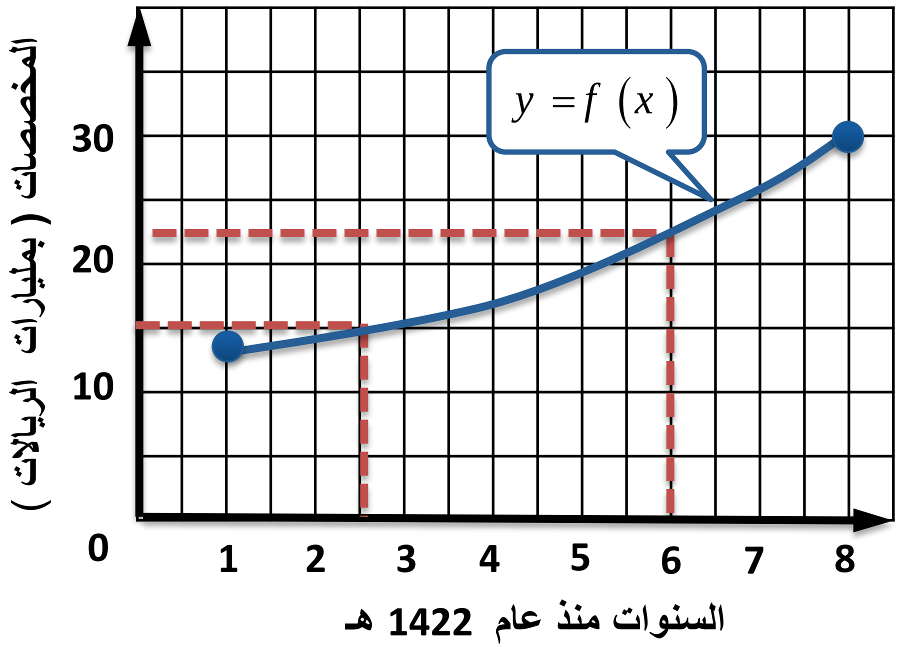
وللتحقق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة f(6) بالتعويض في الدالة .

$$f\ (6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 + 14.07 \approx 22.95$$

لذا يُعدّ التقريب ٢٣ مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولاً.

مخصصات الصحة و الهلال الأحمر

b) قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات ١٥ مليار ريال، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا .



يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1425 هـ، وللتحقق جبريًّا أوجد f(3) .

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 + 14.07 \approx 15.4149$$

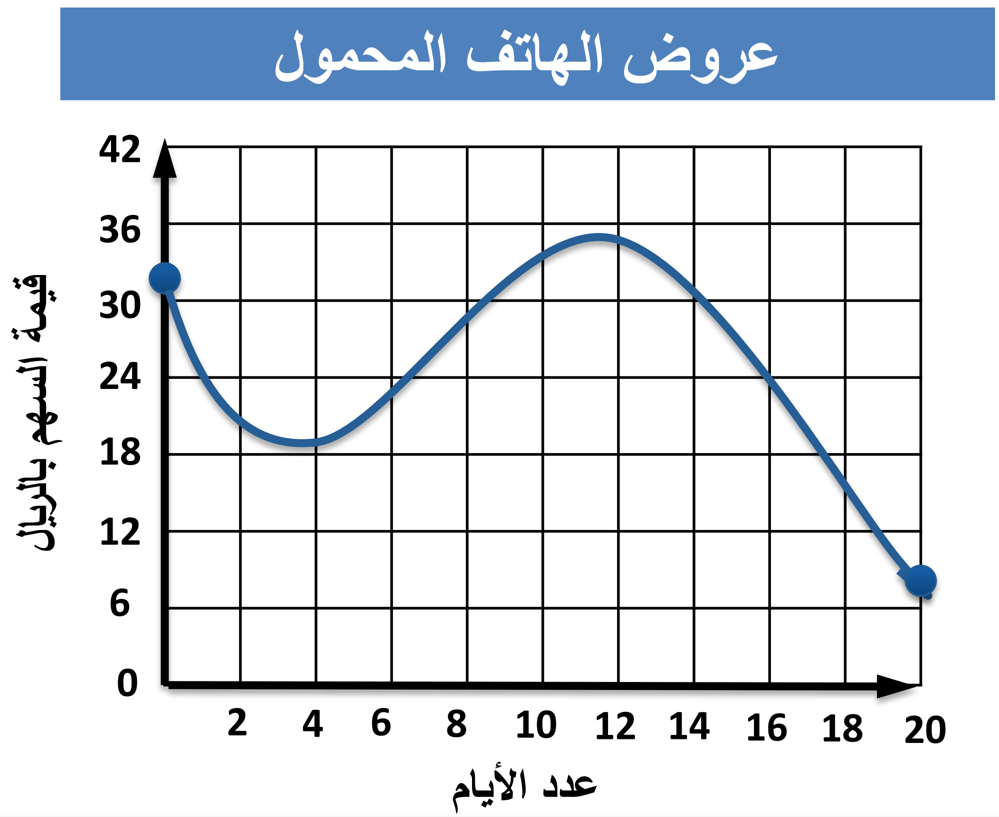
لذا تُعدّ السنة التقريبية 1425 هـ معقولة .

تحقق من نفسك

1) أسهم : تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة :

$$v\left(d\right) = -0.002d^{4} + 0.11d^{3} + 1.77d^{2} - 8.6d + 31.0 \le d \le 20$$

حيث v (d) قيمة السهم بالريال في اليوم d .



1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون **32** ريالاً .

$$v\left(10\right)=-0.002\left(10\right)^{4}+0.11\left(10\right)^{3}+1.77\left(10\right)^{2}-8.6\left(10\right)+31.0\approx 32$$

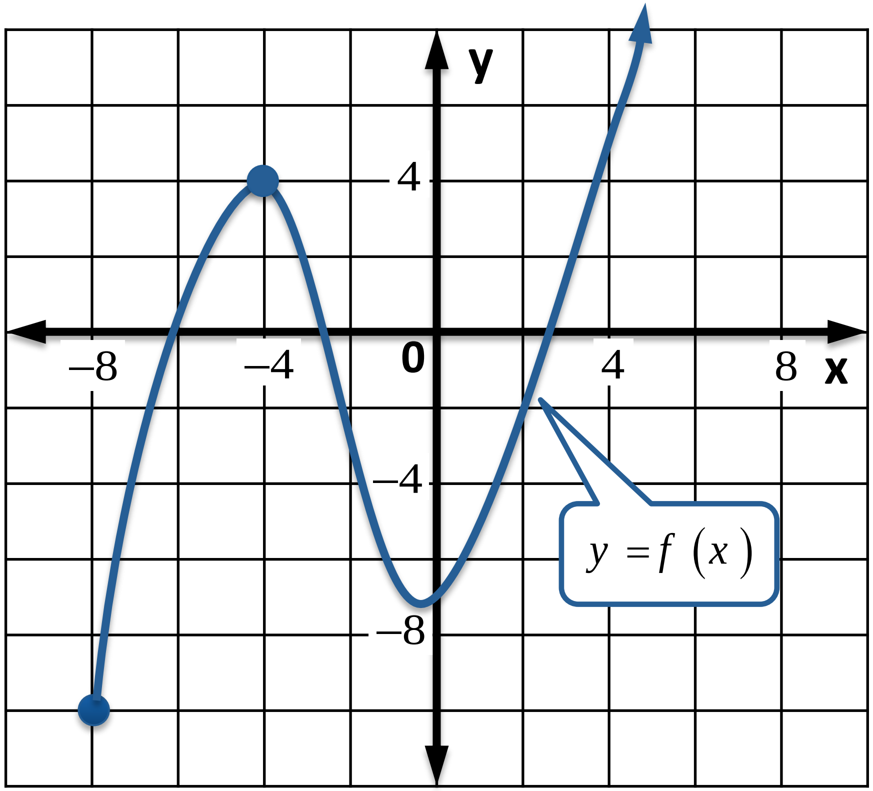
1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم **30** ريالاً، ثم تحقّق من إجابتك .

في بداية متابعة المستثمر (اليوم 0) ، وبين اليومين التاسع و العاشر ، و اليومين الخامس عشر و السادس عشر .

لا يقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها.
حيث يُعدّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدّد بنقطة أو دائرة .

مثال 2

إيجاد المجال و المدي



أوجد مجال الدالة f و مداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .

المجال :

تدل النقطة عند (10 -، 8 -) على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.

تدل النقطة عند النقطة (4، 4 -) على أن $x = -4$ ليست في مجال f .

يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

مما سبق يكون مجال الدالة f هو $\left[-8,-4\right)\cup\left(-4,-\infty\right)$

وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو

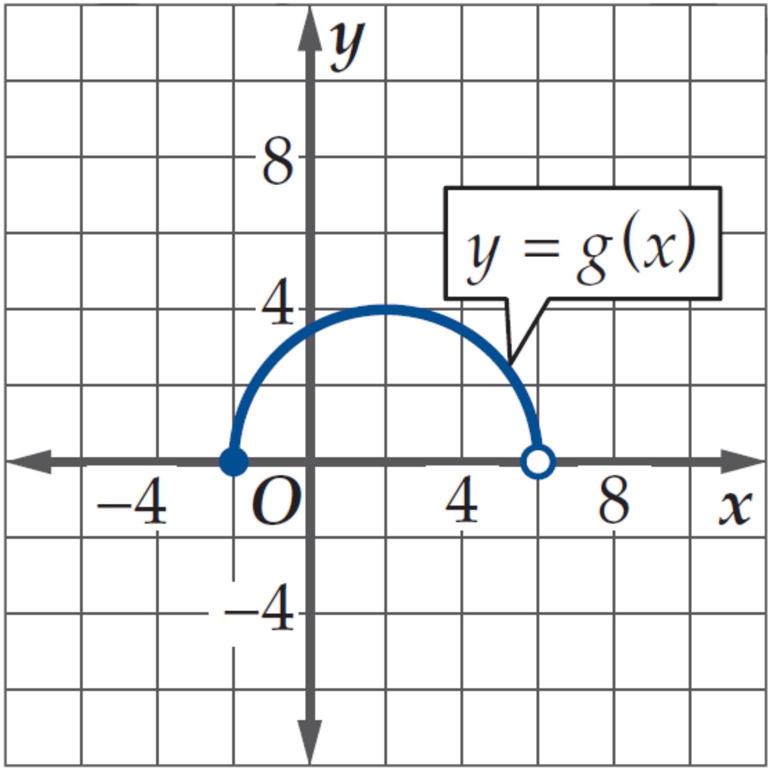
$$\{x \mid -8 \le x , x \ne -4, x \in R\}$$

المدى :

إن أقل قيمة للدالة هي f(-8) أو -١٠ ، وتزداد قيم f(x) بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $\left[-10, \infty\right)$

تحقق من نفسك

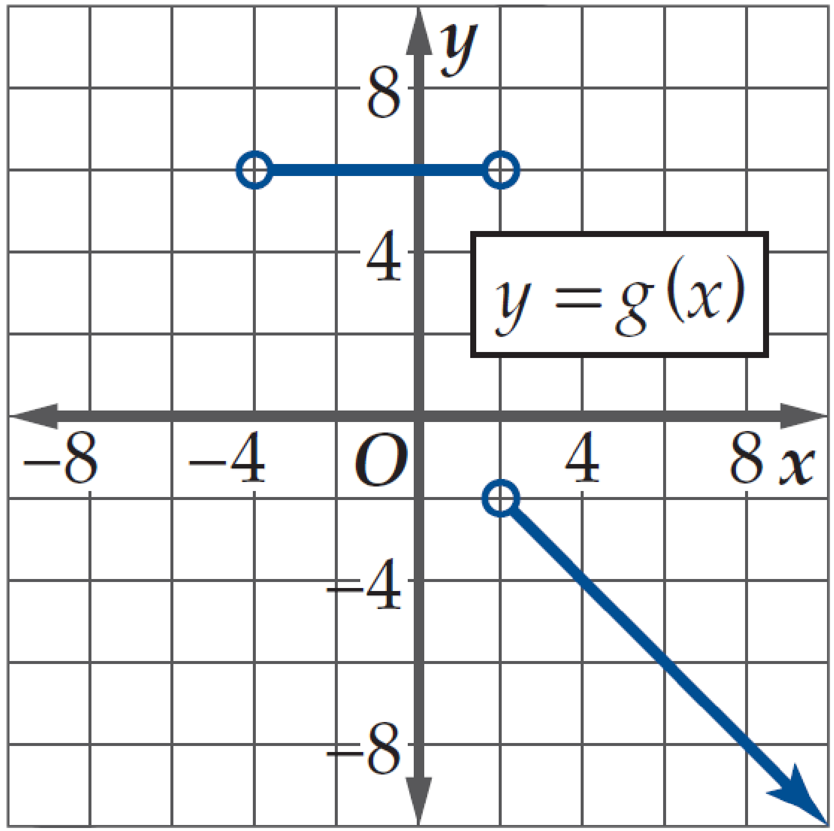
(2A



المجال : $[-2, 6)$

المدي : $[0, 4]$

(2B



المجال : $[-4,2)\cup(2,\infty)$

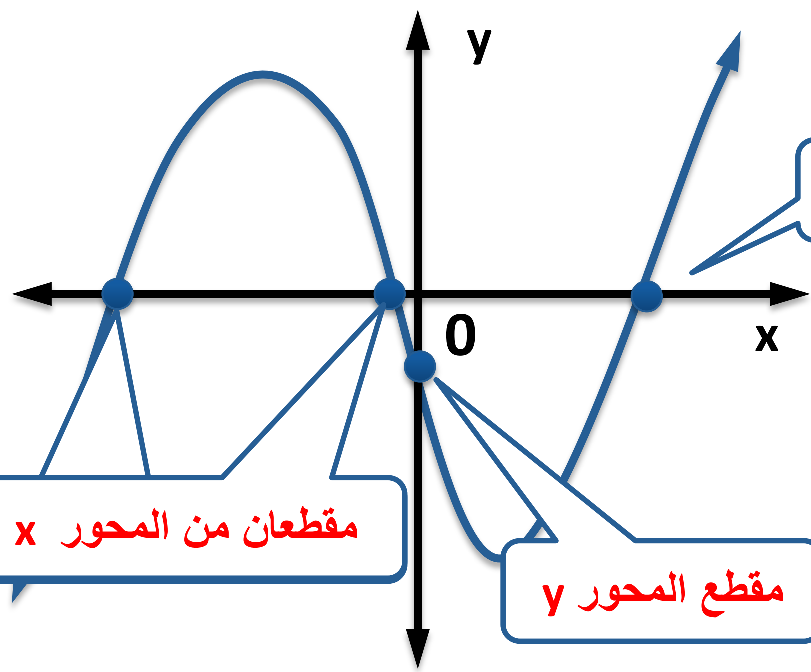
المدي : $(-\infty,-2)\cup\{6\}$

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور

ويمكن الحصول على القطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة .

وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x

وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر .



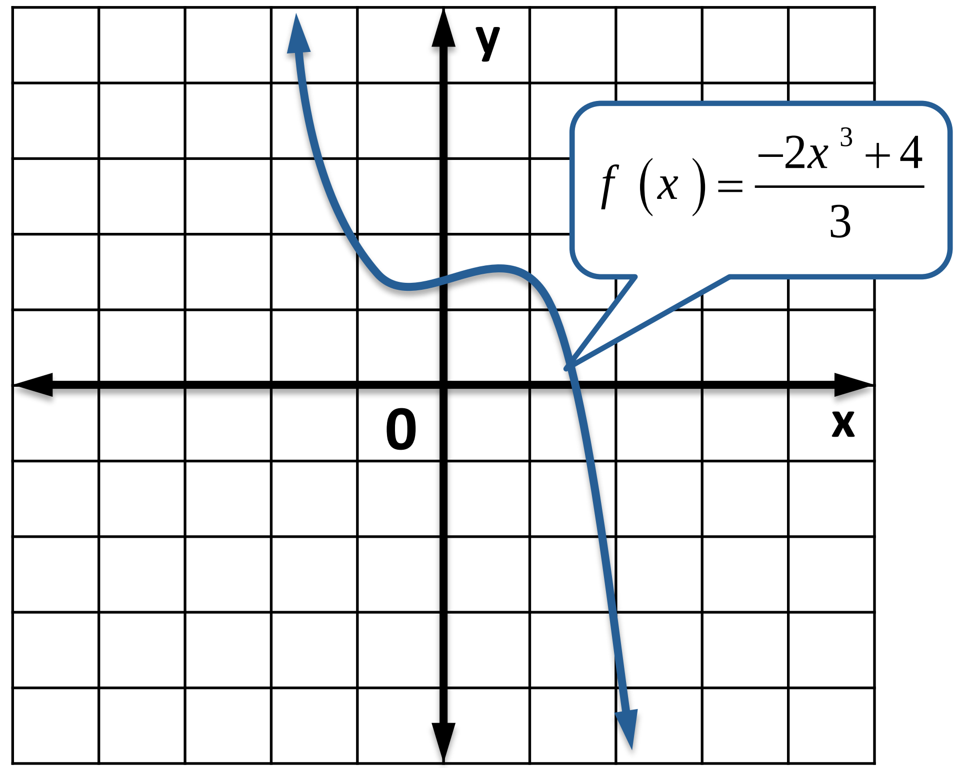
ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نجد $f(0)$.

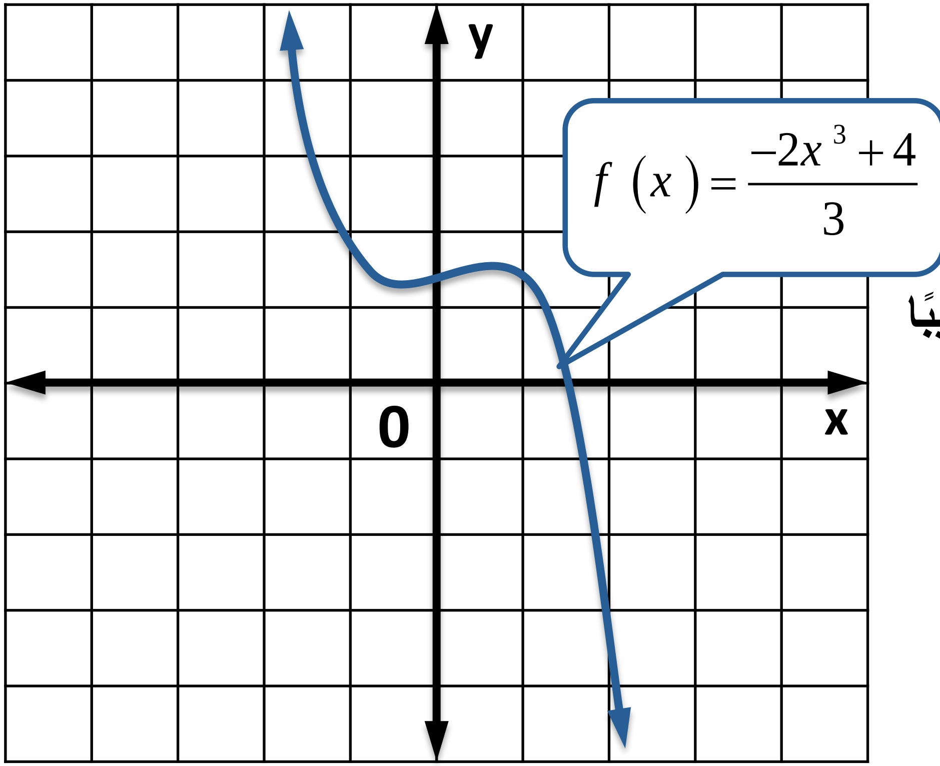
مثال 3

إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين آذناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا :

(a





التقدير من التمثيل البياني :

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $\left(0,1\frac{1}{3}\right)$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع yوهو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا

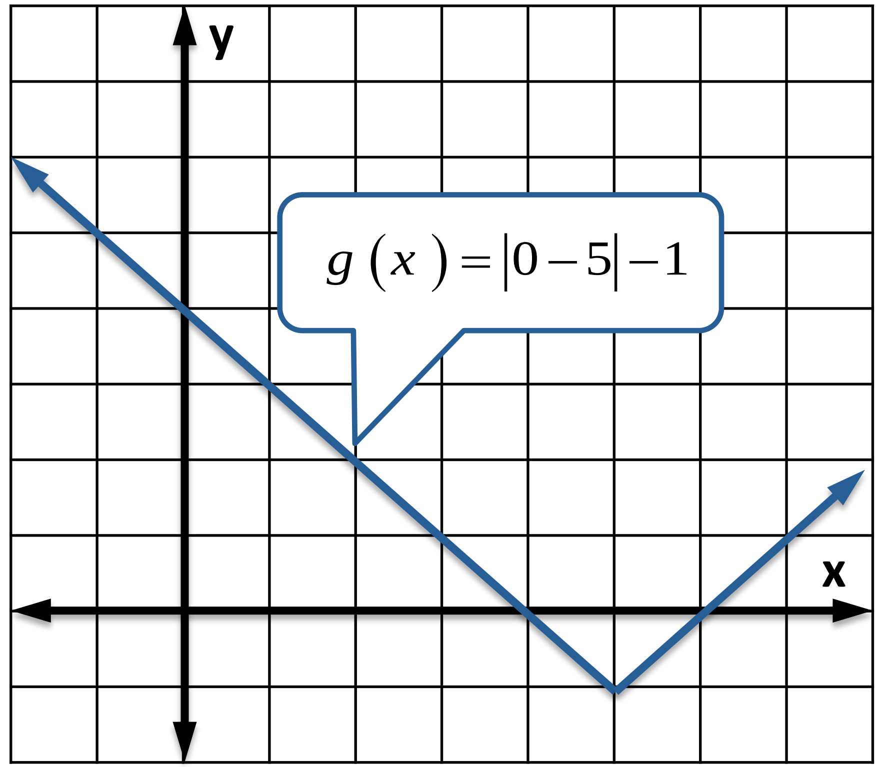
الحل جبريًّا :

أوجد قيمة $f(0)$

$$f(0)=\frac{-2(0)^3+4}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

أي أن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ أو $\frac{4}{3}$

(b



التقدير من التمثيل البياني :

يتضح من الشكل أن g(x) يقطع المحور y عند النقطة (4 ، 0) ، وعليه فإن المقطع y هو 4 .

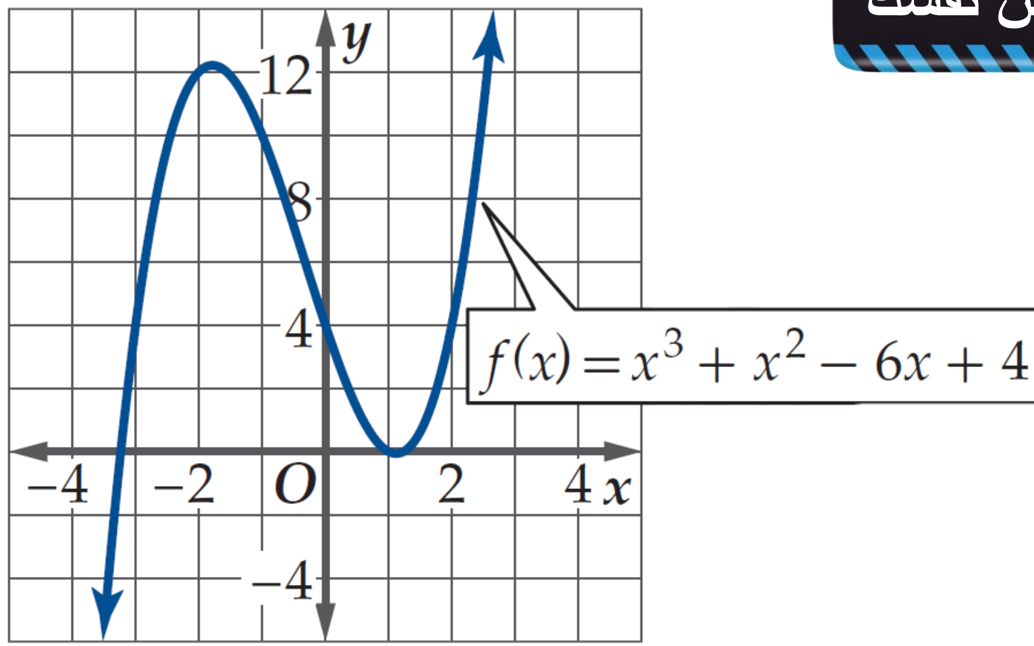
الحل جبريًّا : أوجد قيمة f(0)

$$g(0) = |0-5| - 1 = 4$$

أي أن المقطع y هو 4

تحقق من نفسك

(3A



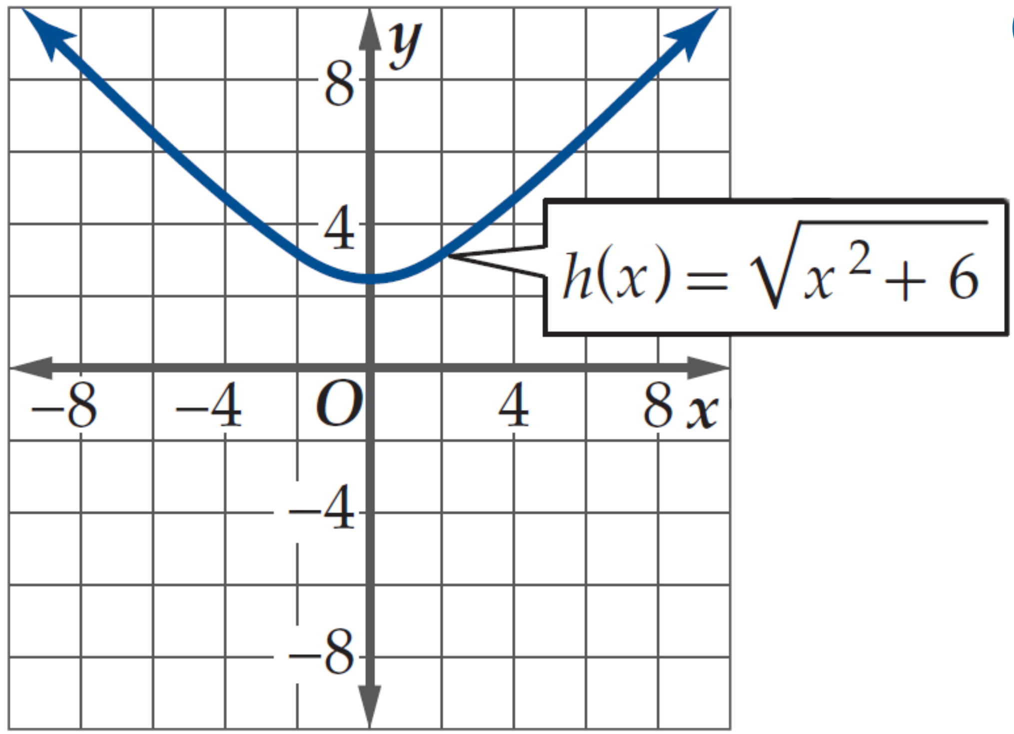
الحل جبريًّا :

أوجد قيمة f(0)

$$f\ (0) = (0)^3 + (0)^2 - 6(0) + 4 = 4$$

أي أن المقطع y هو 4

(3B



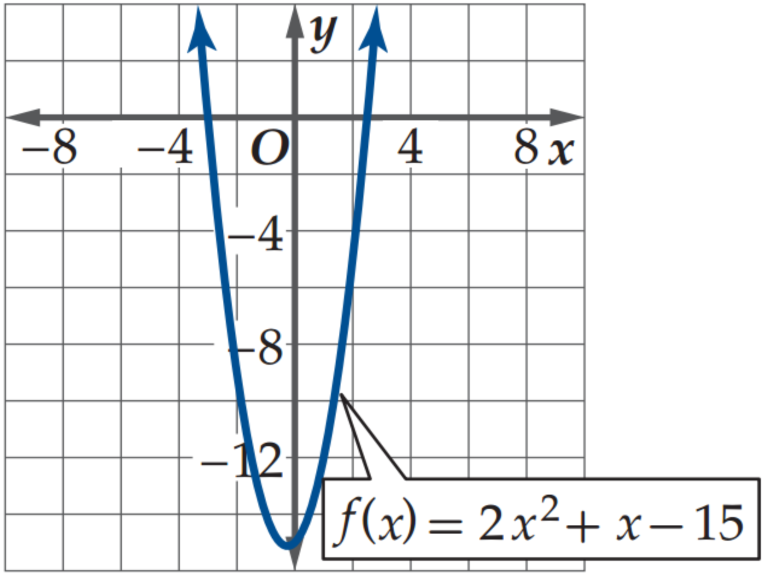
الحل جبريًّا :

أوجد قيمة h(0)

$$h(0) = \sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{6}$$

أي أن المقطع y هو $\sqrt{6}$

تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة أصفار الدالة، وتسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة جذور المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة ، f فإننا نحل المعادلة $f(x)=0$ بالنسبة للمتغير المستقل.



مثال ٤

إيجاد الاصفار

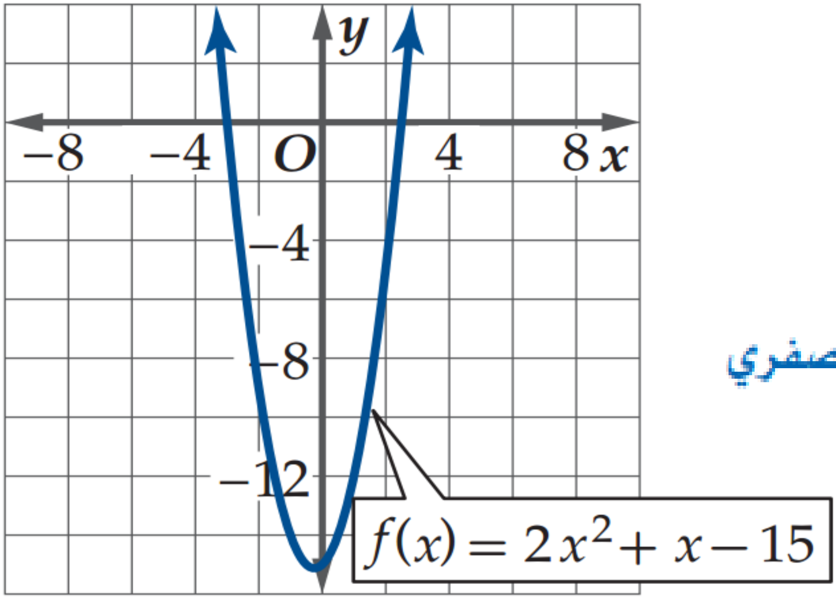
استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$

لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبرياً.

التقدير من المنحنى :

تضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 و 2.5 تقريباً.

لذا فإن صفري الدالة F هما -3 و ٢,٥



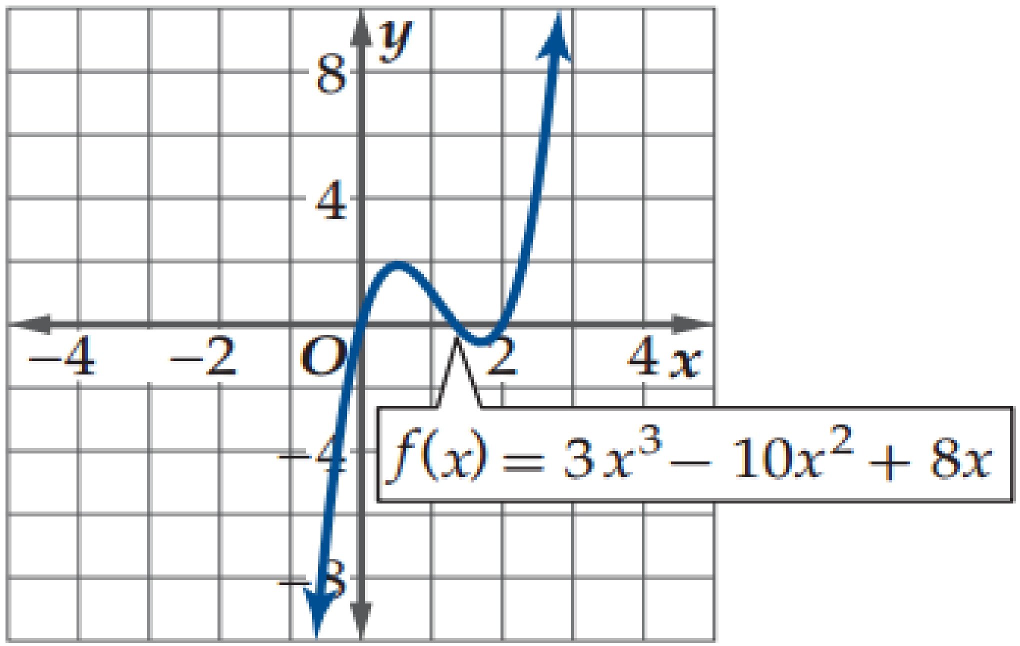
الحل جبريا :

$2x^2 + x - 15 = 0$	ضع $f(x) = 0$
$(2x - 5)(x + 3) = 0$	حلّل
$2x - 5 = 0$ أو $x + 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2.5$ $x = -3$	حل كل معادلة

أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 وَ 2.5 وهما صفرا الدالة f .

تحقق من فهمك :

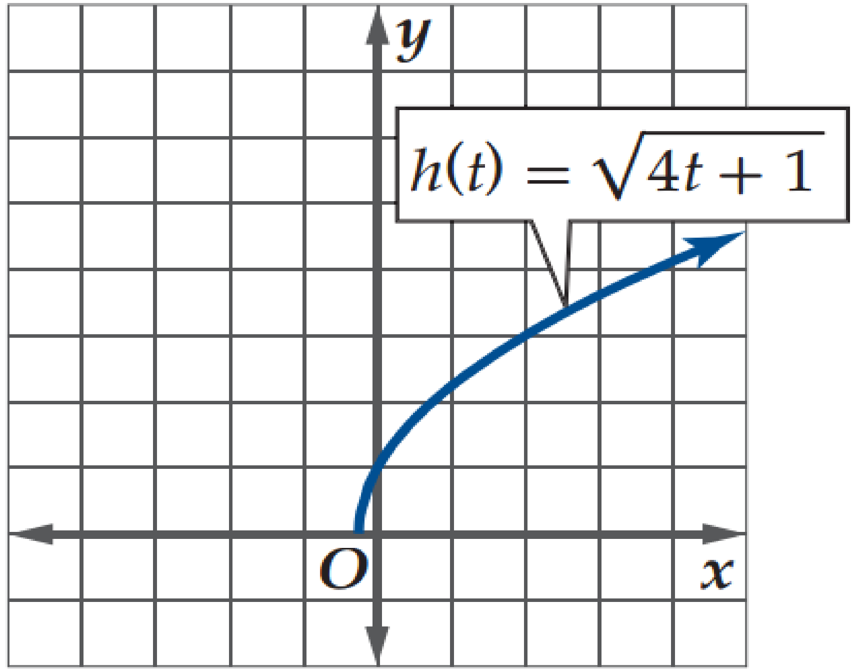
(4A



$$0, \frac{4}{3}, 2$$

تحقق من فهمك :

4B)



$$-\frac{1}{4}$$

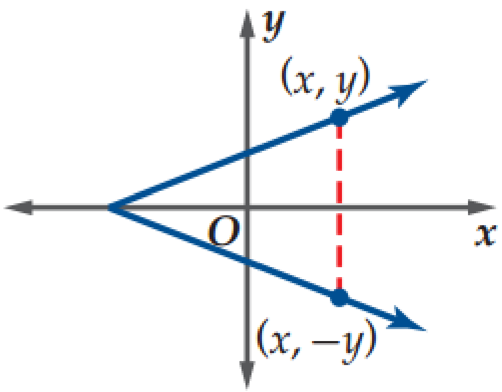
التمثيل :- يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها $180°$ حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأهم أنواع التماثل:

اختبارات التمثيل :

اختبار التمثيل البياني

يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور x، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.

النموذج

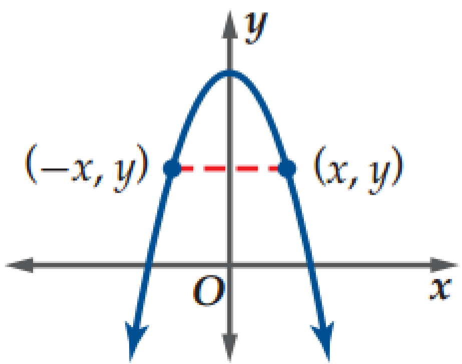


الاختبار الجبري

إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة .

اختبارات التمثيل :

النموذج



اختبار التمثيل البياني

يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول المحور y ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.

الاختبار الجبري

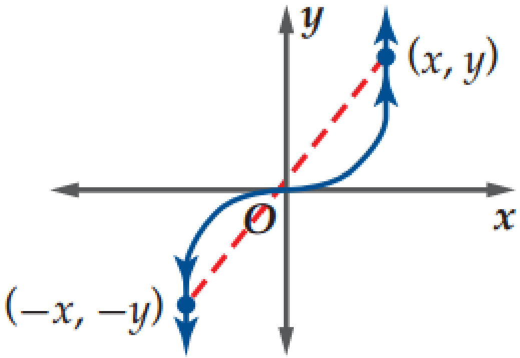
إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة .

اختبارات التمثيل :

اختبار التمثيل البياني

يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلًا حول نقطة الأصل ، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني ، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.

النموذج



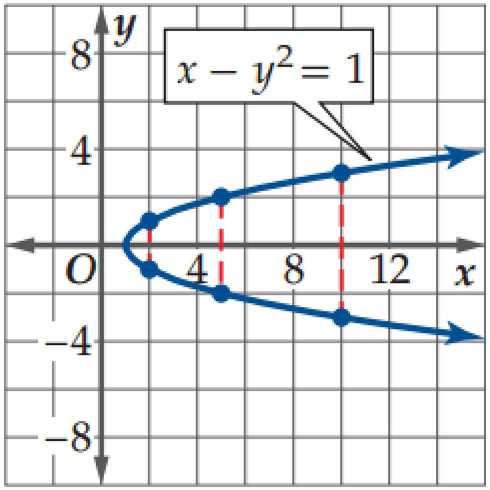
الاختبار الجبري

إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

مثال ٥ :- استعمل التمثيل البياني لكلٍ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزّز إجابتك عدديًا، ثم تحقق منها جبريًا.

(a $x - y^2 = 1$

التحليل بيانيًا :



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x :

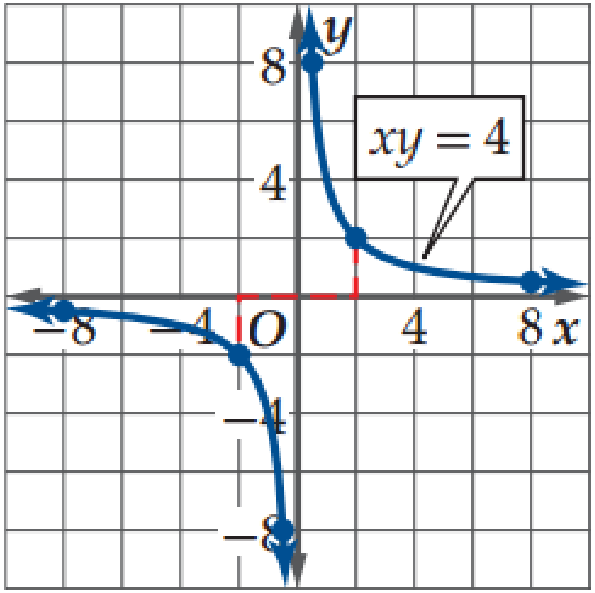
x	2	2	5	5	10	10
y	1	−1	2	−2	3	−3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

التحقق جبريًا :

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

$xy = 4$ (b

التحليل بيانيًّا:

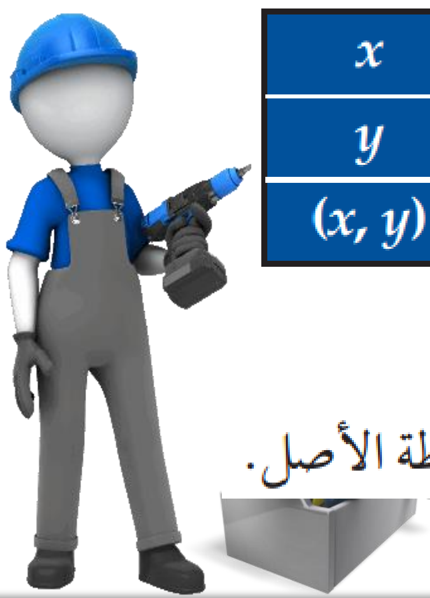


يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (**x,y**) على المنحنى، فإن النقطة (**- x , -y**) تقع أيضا على المنحنى

التعزيز عدديًّا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

x	-8	-2	-0.5	0.5	2	8
y	-0.5	-2	-8	8	2	0.5
(x, y)	$(-8, -0.5)$	$(-2, -2)$	$(-0.5, -8)$	$(0.5, 8)$	$(2, 2)$	$(8, 0.5)$



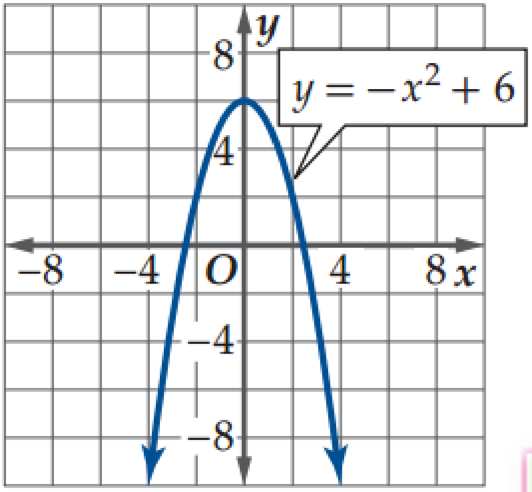
التحقيق الجبري :

بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

تحقق من فهمك : -

5A)

يستضح من التمثيل البياني أنم المنحنى متماثل حول المحور y لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى تقع النقطة (− x , y)على المنحنى نفسه .



التحقق عددياً :

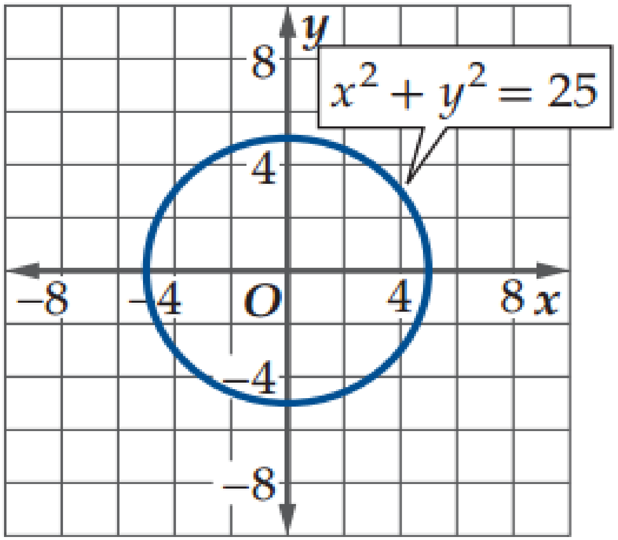
يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول المحور y :

x	2	-2	3	-3
y	2	2	-3	-3
(x, y)	$(2, 2)$	$(-2, 2)$	$(3, -3)$	$(-3, -3)$

التحقق جبرياً :

بما أن المعادلة $y = -(-x)^2 + 6$ تكافيء $y = -x^2 + 6$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

(5B



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(x, -y)$ على المنحنى نفسه. وهو متماثل حول المحور y أيضًا؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(-x, y)$ على المنحنى نفسه. وهو متماثل حول نقطة الأصل؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(-x, -y)$ على المنحنى نفسه. ويمكن التحقق من ذلك عدديًّا وجبريًّا.

يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان .

الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y **الدوال الزوجية**.

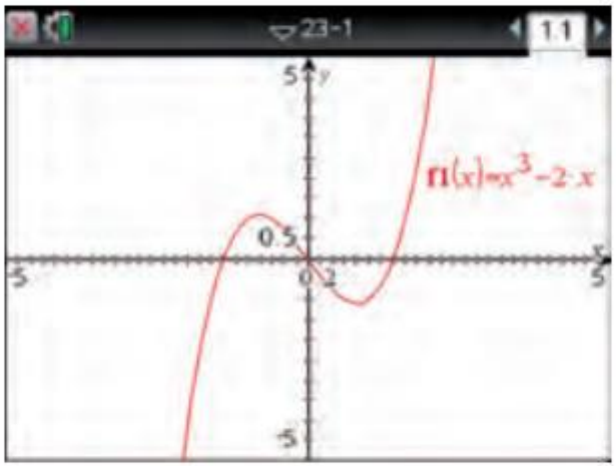
الاختبار الجبري لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.

نوع الدالة تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل **الدوال الفردية**.

الاختبار الجبري لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال ٦ : تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية .

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا . ثمّ حلّل منحناها لتحدد إن كانت الدالة زوجية أم فرديةّ أم غير ذلك. ثم تحقًّق من إجابتك جبريا.



a) $f(x) = x^3 - 2x$

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلكّ جبريا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ عوِّض $-x$ مكان x

$= -x^3 + 2x$ بسِّط

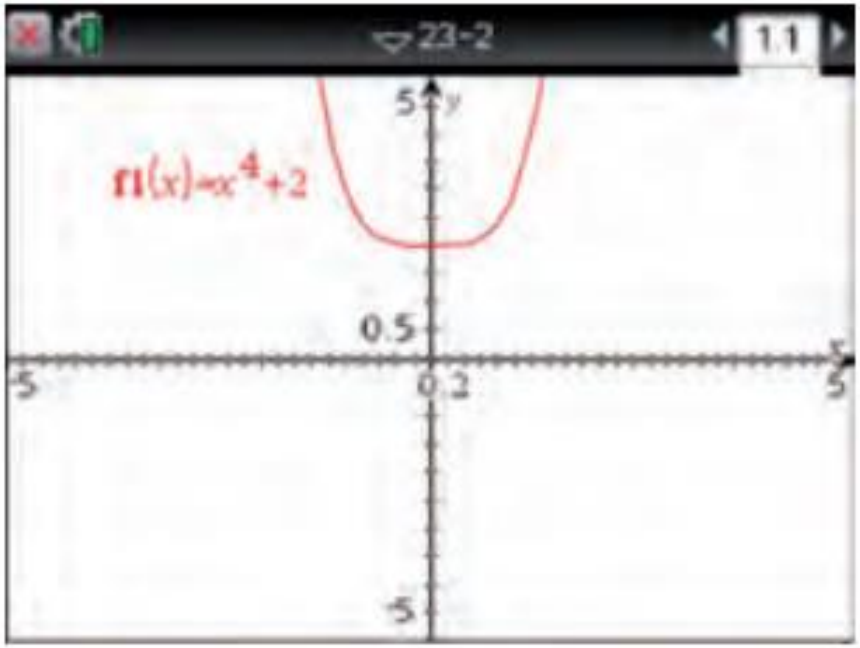
$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

$f(x) = x^4 + 2$ (b

يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y ، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبريا نجد:



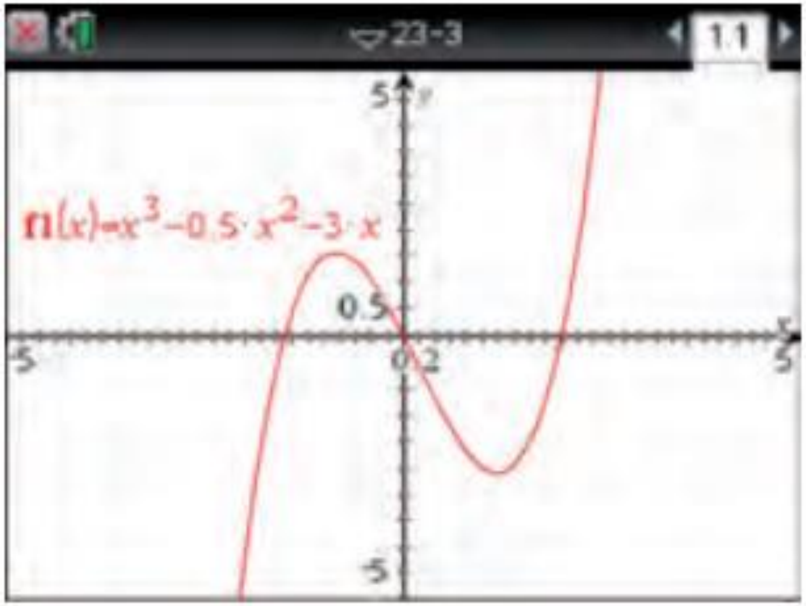
$f(-x) = (-x)^4 + 2$ عوّض $-x$ مكان x

$= x^4 + 2$ بسّط

$= f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^4 + 2$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

c) $f(x) = x^3 - 0.5\,x^2 - 3x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة قد تكون متماثلة حول نقطة الأصل وللتحقق من ذلك جبريا نجد:

عوِّض $-x$ مكان x

$$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$$

بسِّط

$$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$$

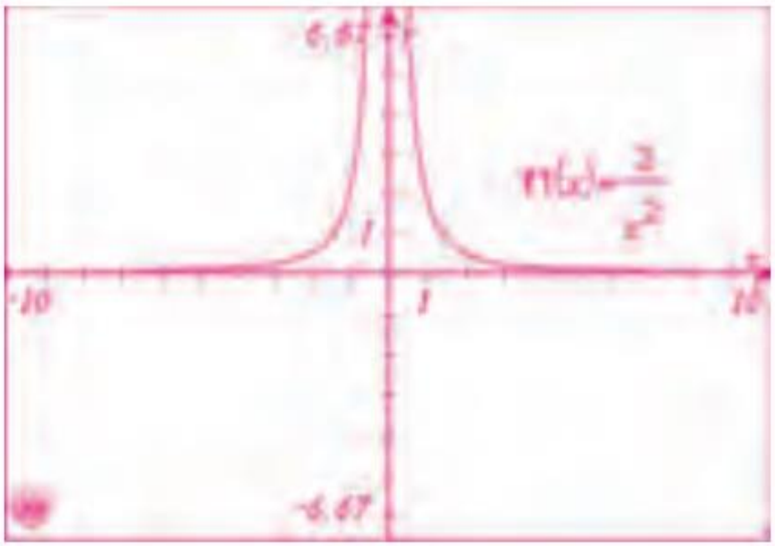
وبما أن $-f(x) = -x^3 + 0.5\,x^2 + 3x$ ،

فإن $f(-x) \neq f(x)$، وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$؛

لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

تحقق من فهمك : -

(6A $f(x) = \frac{2}{x^2}$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة زوجية، لأنها متماثلة حول المحور y.

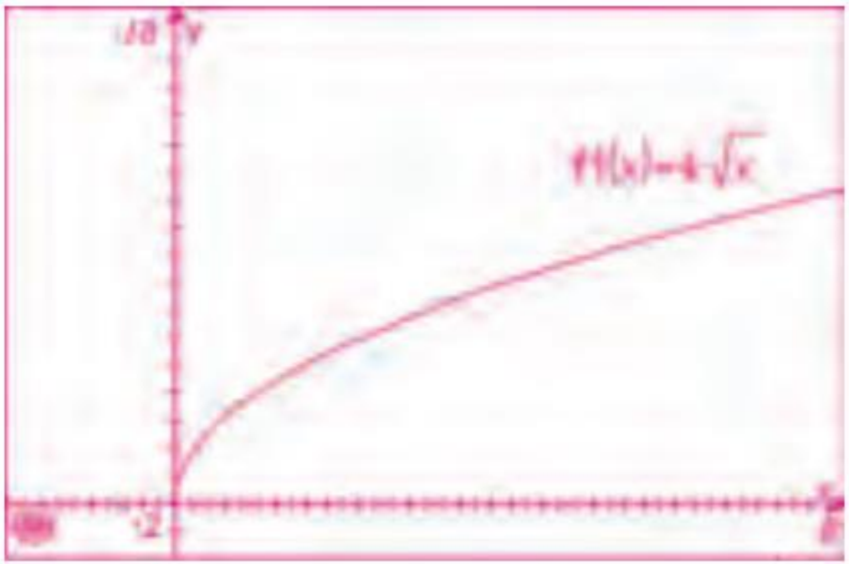
$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2} = \frac{2}{x^2} = f(x)$$ ،

وهذا يعني أن الدالة زوجية لأن :

$$f(-x) = f(x)$$

تحقق من فهمك : -

(6B $g(x) = 4\sqrt{x}$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست زوجية وليست فردية ؛ لأنها غير متماثلة حول المحور y، وغير متماثلة حول نقطة الأصل.

$f(-x) = 4\sqrt{-x}$ ،

$-f(x) = -4\sqrt{x}$

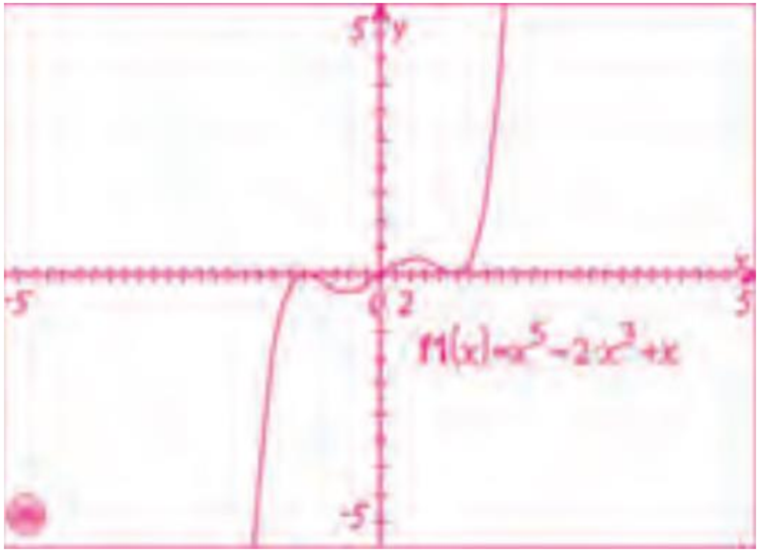
إذن $f(-x) \neq f(x)$

وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$

وهذا يعني أن الدالة ليست وجية وليست فردية.

تحقق من فهمك : -

6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$



$h(-x) =$ ،

$(-x)^5 - 2\,(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x$

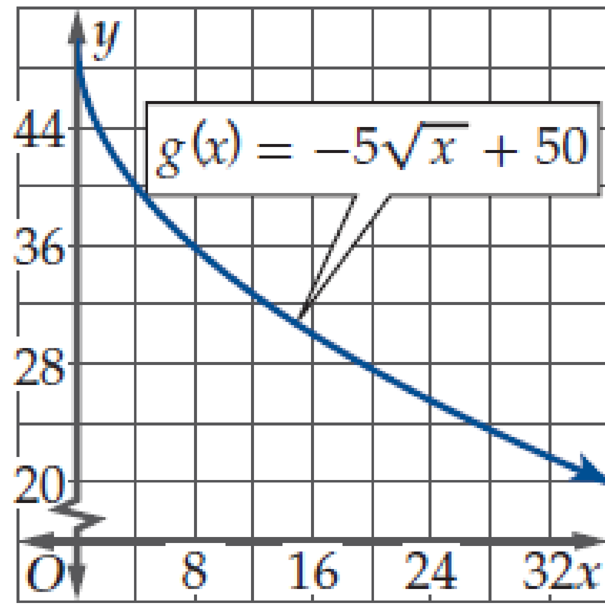
إذن $h(-x) = -h(x)$؛

وهذا يعني أن الدالة فردية .

تدريب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:

(1



a) $g(6)$

37.75

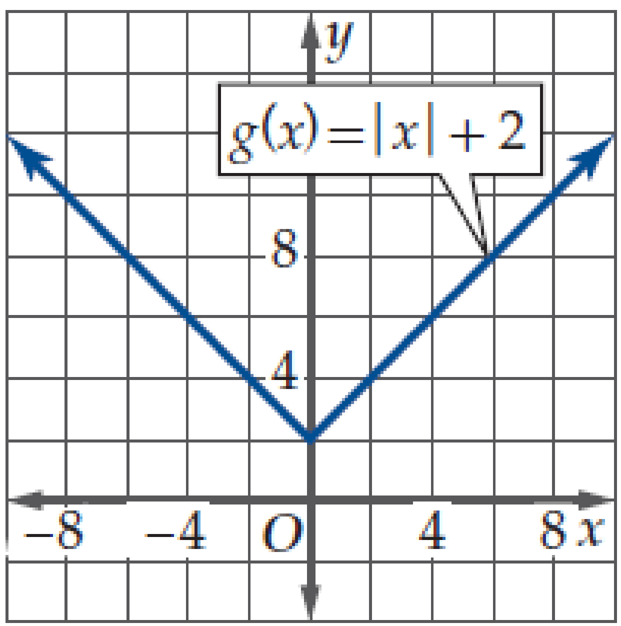
b) $g(12)$

32.68

c) $g(19)$

28.21

(2



a) $g(-8)$

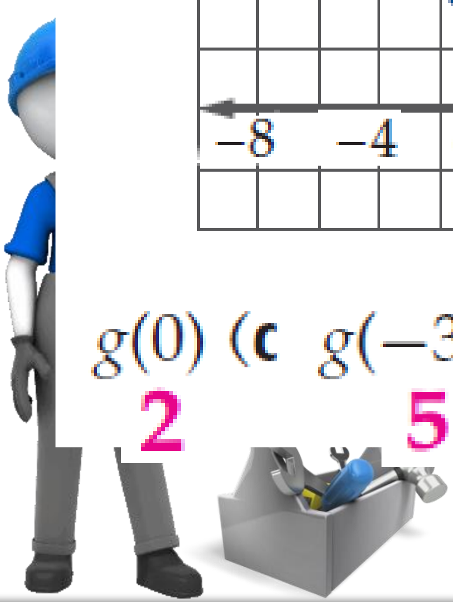
10

b) $g(-3)$

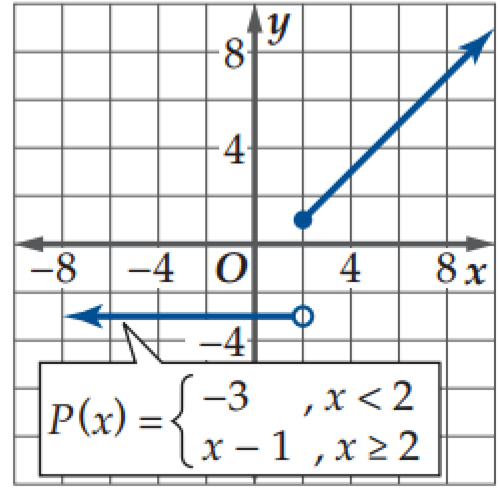
5

c) $g(0)$

2



(3



(a $P(-6)$

-3

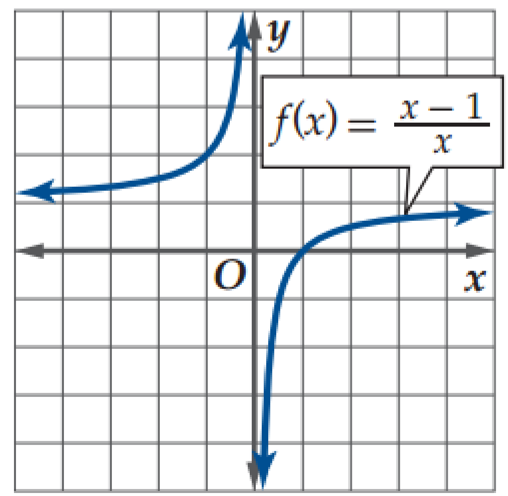
(b $P(2)$

1

(c $P(9)$

8

(4



(a $f(-3)$

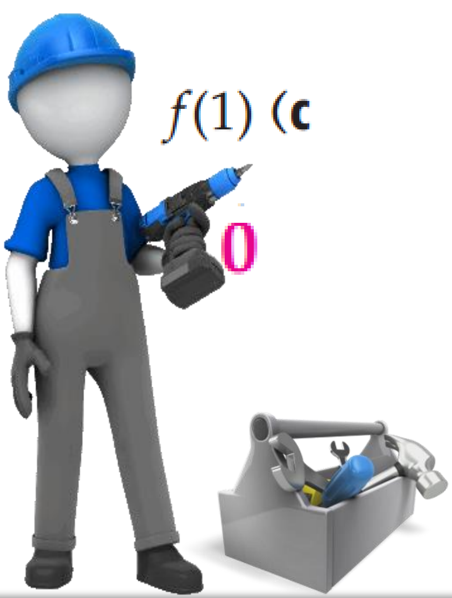
$\frac{4}{3}$

(b $f(0.5)$

-1

(c $f(1)$

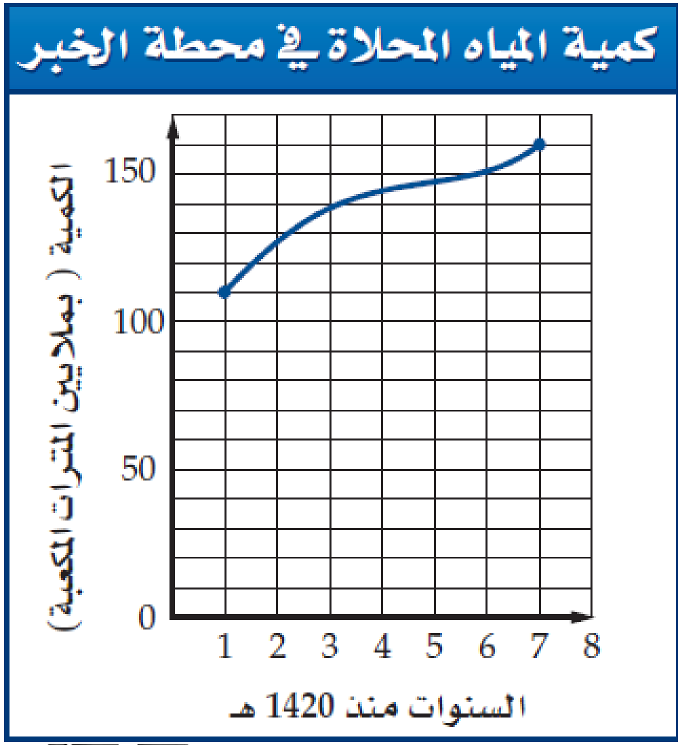
0



5) مياه: إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1421هـ إلى 1427هـ) معطاة بالدالة

$$f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1420 هـ . (مثال 1)



a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ باستعمال التمثيل البياني.

145 مليون متر مكعب

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ جبريًّا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

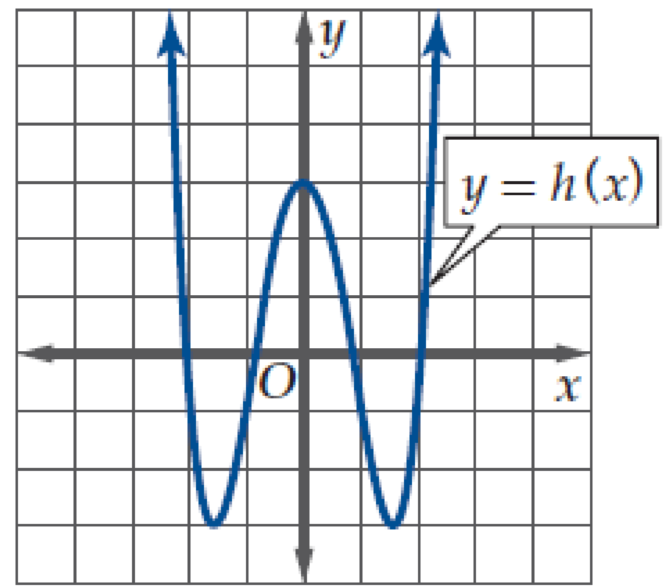
147.4 مليون متر مكعب

c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًّا.

1422

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. (مثال 2)

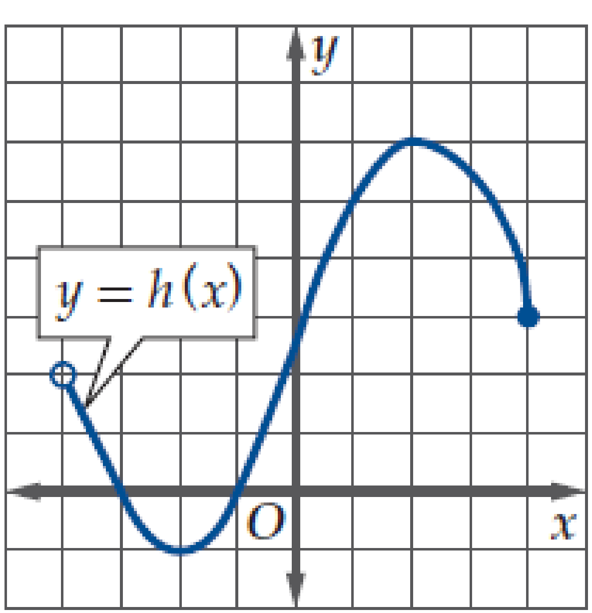
6)



المجال: $\{x \mid x \in R\}$،

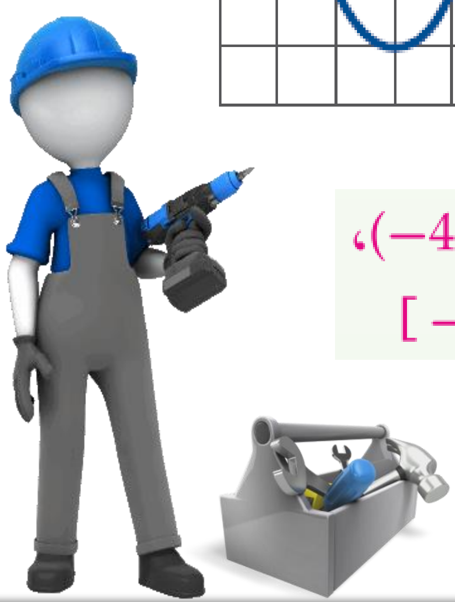
المدى: $[-3, \infty)$

7)

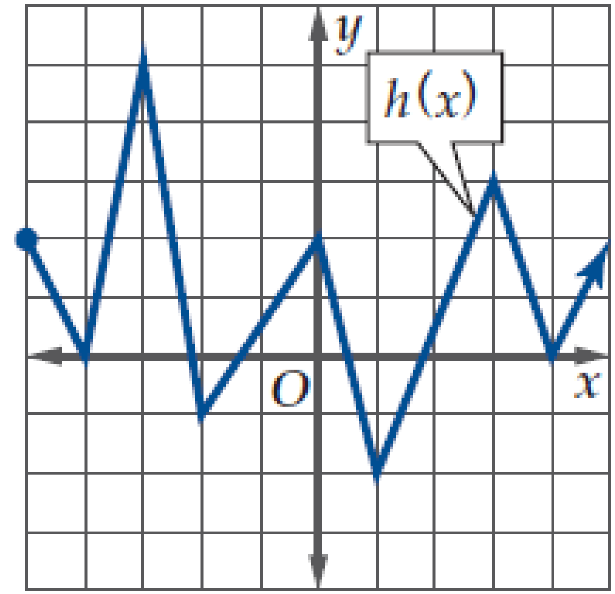


المجال: $(-4, 4]$،

المدى: $[-1, 6]$



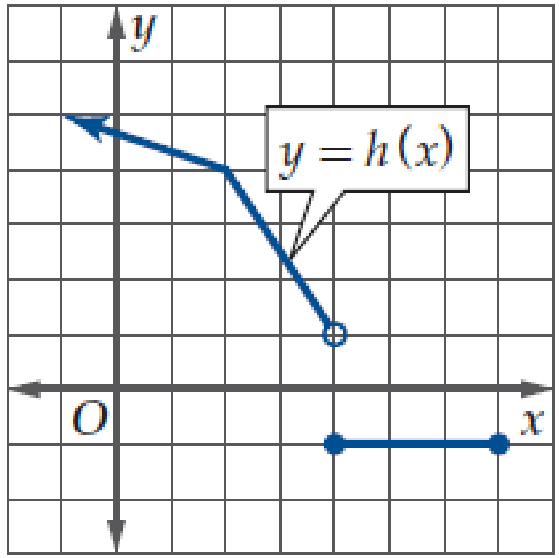
(8



المجال: $[-5, \infty)$،

المدى: $[-2, \infty)$

(9



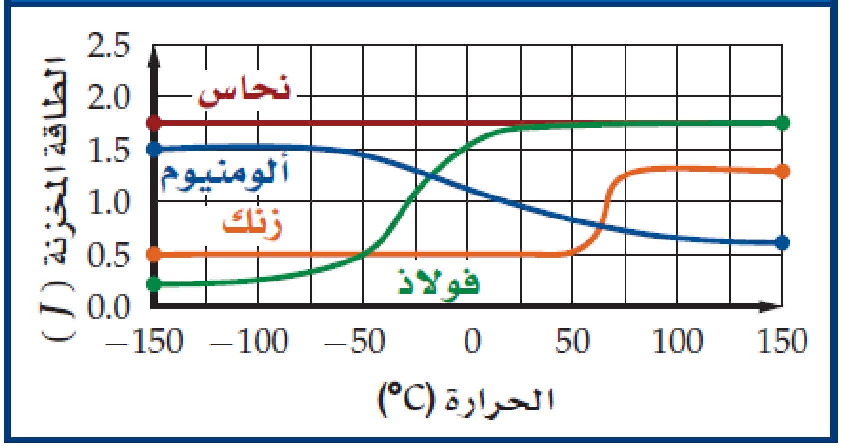
المجال: $(-\infty, 7]$،

المدى: $(1, \infty) \cup \{-1\}$

10) **هندسة:** أُجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أُخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. فإذا كانت الطاقة المخزَّنة أو الممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضّح في الشكل أدناه، فأجب عما يأتي:

a) أوجد المجال والمدى لكل دالة.

نتائج اختبار خصائص المواد



إجابة ممكنة: النحاس:

$\{x \mid -150 \leq x \leq 150, x \in R\}$,

$\{y \mid y = 1.75\}$؛

الألومنيوم:

$\{x \mid -150 \leq x \leq 150, x \in R\}$,

$\{y \mid 0.6 \leq y \leq 1.5, y \in R\}$؛

الزنك:

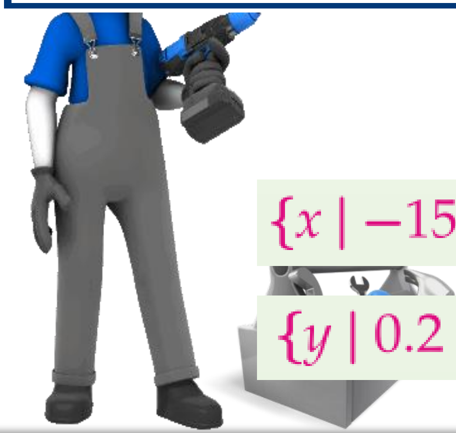
$\{x \mid -150 \leq x \leq 150, x \in R\}$,

$\{y \mid 0.5 \leq y \leq 1.25, y \in R\}$؛

الفولاذ:

$\{x \mid -150 \leq x \leq 150, x \in R\}$,

$\{y \mid 0.2 \leq y \leq 1.75, y \in R\}$



b) استعمل التمثيل البياني لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند الصفر السيليزي.

إجابة ممكنة:

النحاس ≈ 1.75 جول،

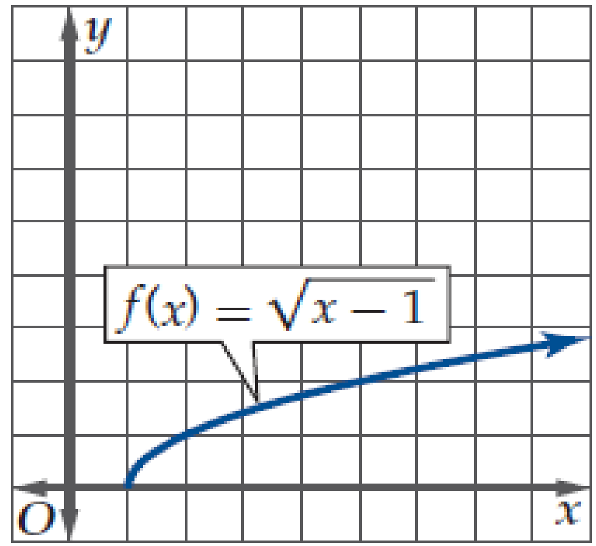
الألومنيوم: ≈ 1.2 جول،

الزنك ≈ 0.5 جول،

الفولاذ ≈ 1.5 جول.

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y،
وأصفار الدالة، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا: (المثالان 3, 4)

(11



لا يوجد مقطع y، صفر الدالة هو 1 .

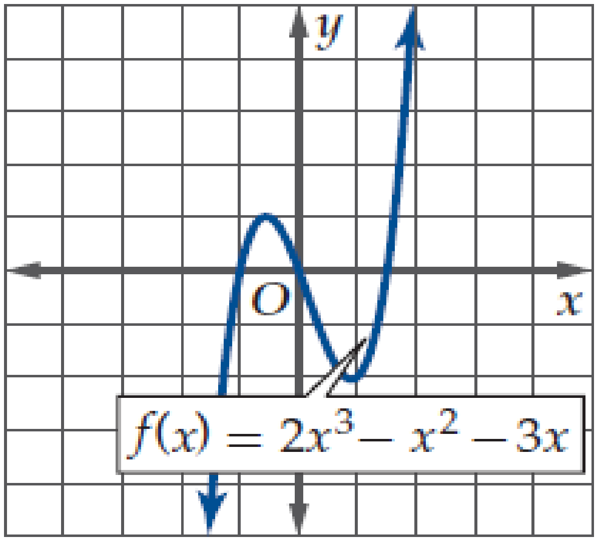
$$0 = \sqrt{x-1}$$

$$(0)^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$$

$$0 = x - 1$$

$$x = 1$$

(12



المقطع y، هو 0 ،

أصفار الدالة $-1, 0, \frac{3}{2}$؛

$$0 = 2x^3 - x^2 - 3x$$

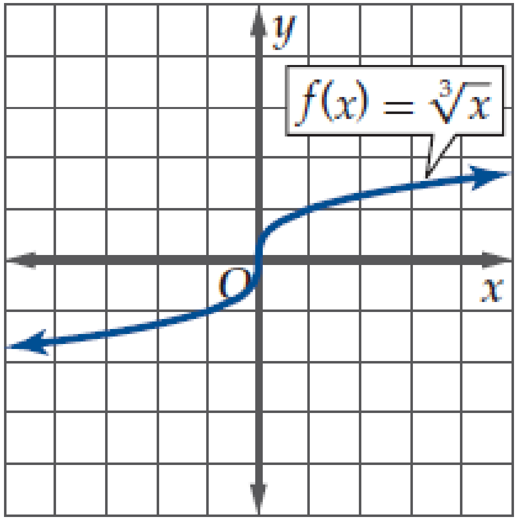
$$0 = x(2x^2 - x - 3)$$

$$0 = x(2x-3)(x+1)$$

$x = 0$ أو $2x - 3 = 0$ أو $x + 1 = 0$

$x = 0$ أو $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -1$

(13



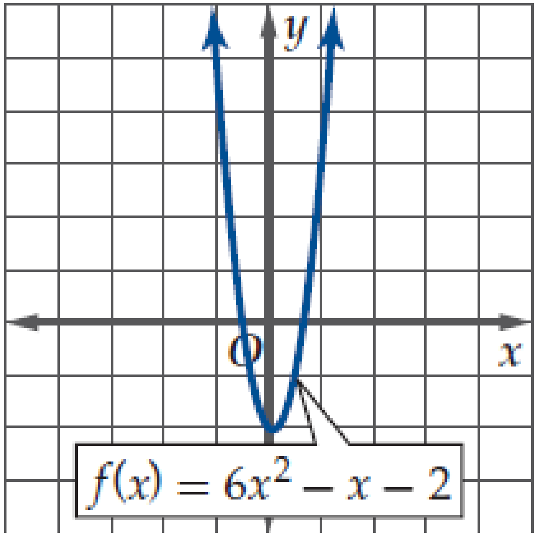
المقطع y هو 0 ، صفر الدالة هو 0 .

$$0 = \sqrt[3]{x}$$

$$(0)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$$

$$0 = x$$

(14



المقطع y هو -2 , صفرا الدالة هما:

$-\frac{1}{2}$ وَ $\frac{2}{3}$.

$$0 = 6x^2 - x - 2$$

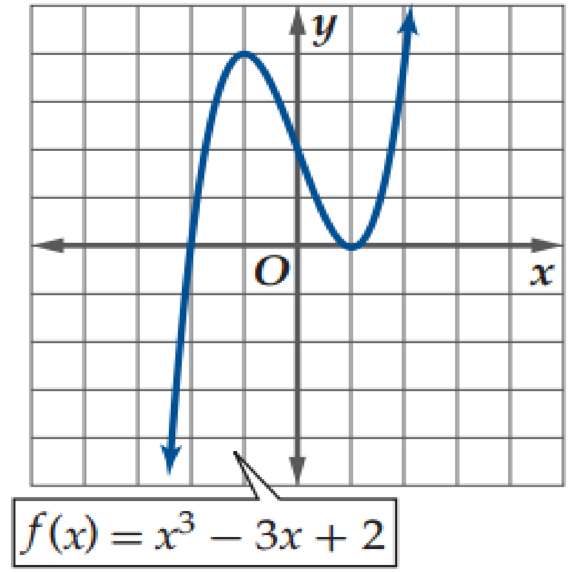
$$0 = (2x + 1)(3x - 2)$$

$2x + 1 = 0$ أو $3x - 2 = 0$

$2x = -1$ أو $3x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{2}{3}$

(15



المقطع y هو 2 ، صفرا الدالة

هما -2 وَ 1

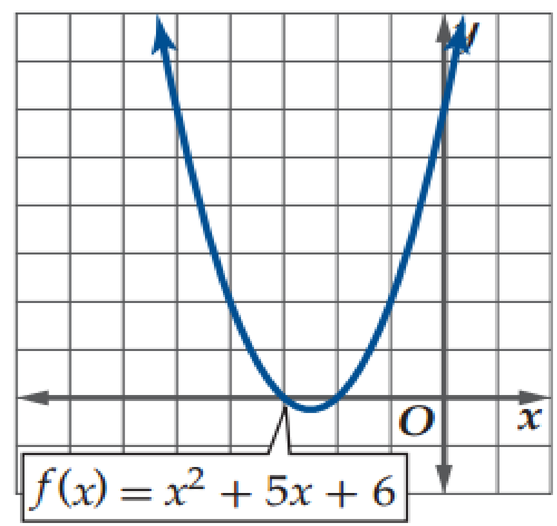
$$0 = x^3 - 3x + 2$$

$$0 = (x + 2)(x - 1)(x - 1)$$

$x + 2 = 0$ أو $x - 1 = 0$

$x = -2$ أو $x = 1$

(16



المقطع y هو 6 ; صفرا الدالة

هما -3 وَ -2

$$0 = x^2 + 5x + 6$$

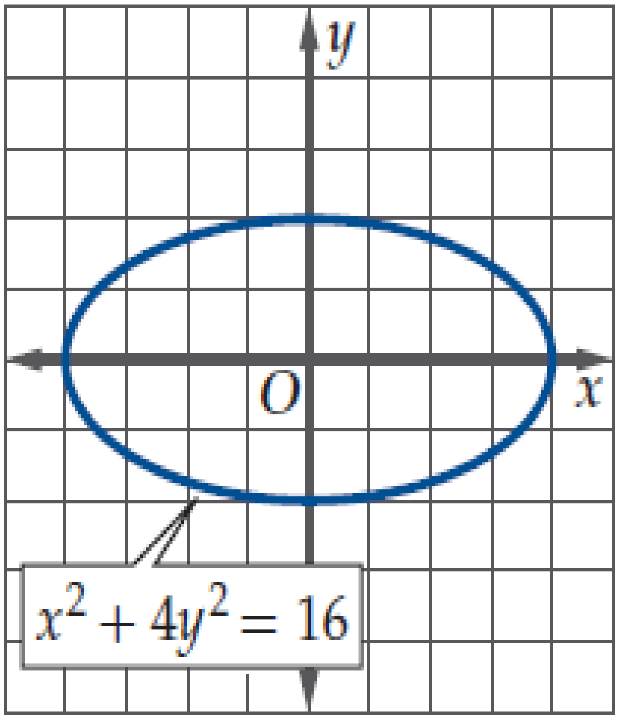
$$0 = (x + 2)(x + 3)$$

$x + 2 = 0$ أو $x + 3 = 0$

$x = -2$ أو $x = -3$

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا: (مثال 5)

17)



x	y	(x, y)
1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
1	$-\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
2	$-\sqrt{3}$	$(2, -\sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
3	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ، والمحور y، ونقطة الأصل. وبما أن $x^2 + 4(-y)^2 = 16$ ، تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن منحنى الدالة متماثل حول المحور x .

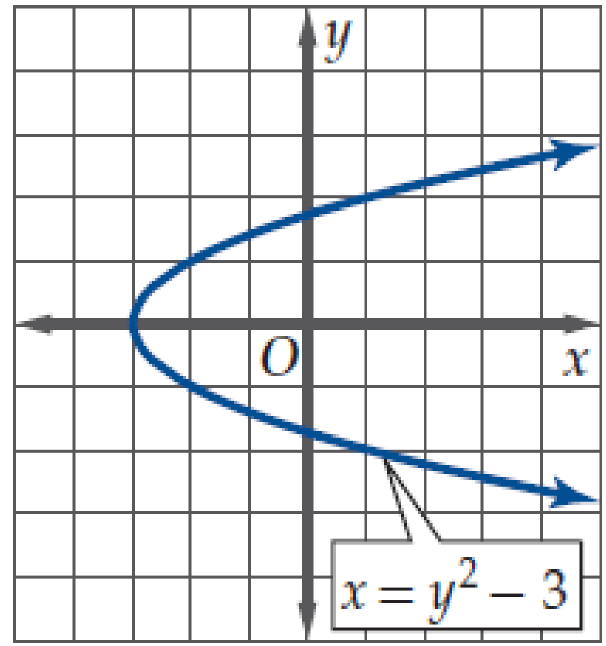
بما أن $(-x)^2 + 4y^2 = 16$
تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$ ، فإن
المنحنى متماثل حول المحور y .

x	y	(x, y)
-3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(-3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
-2	$\sqrt{3}$	$(-2, \sqrt{3})$
-1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(-1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

بما أن $(-x)^2+4(-y)^2=16$
تكافئ $x^2+4y^2=16$ ، فإن
المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

x	y	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
-3	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(-3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
-2	$-\sqrt{3}$	$(-2, -\sqrt{3})$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
0	2	$(0, 2)$

(18

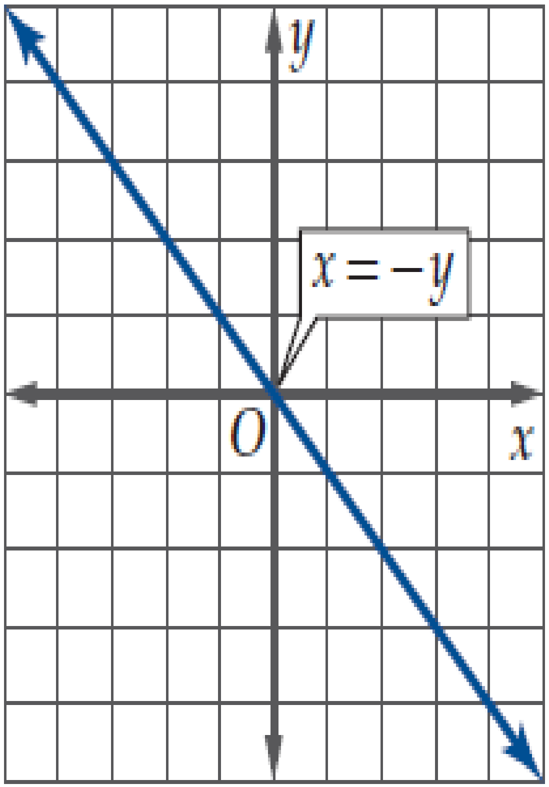


يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x

x	y	(x, y)
1	2	$(1, 2)$
1	-2	$(1, -2)$
2	$\sqrt{5}$	$(2, \sqrt{5})$
2	$-\sqrt{5}$	$(2, -\sqrt{5})$
3	$\sqrt{6}$	$(3, \sqrt{6})$
3	$-\sqrt{6}$	$(3, -\sqrt{6})$

بما أن $x = (-y)^2 - 3$ تكافئ $x = y^2 - 3$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

(19

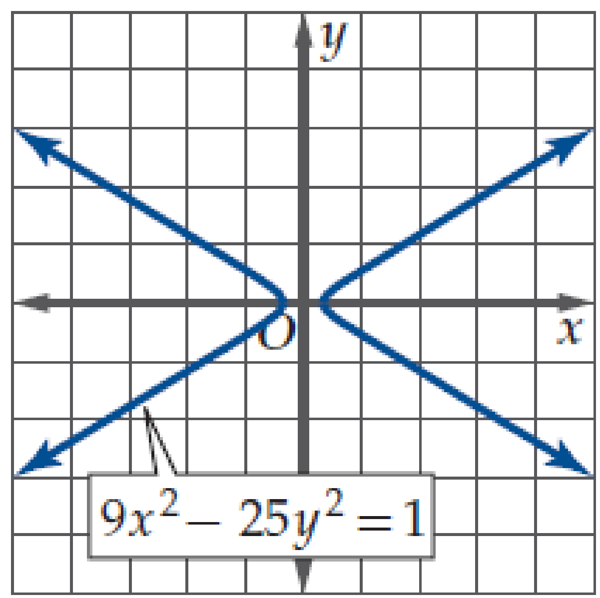


يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

x	y	(x, y)
-4	4	$(-4, 4)$
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
2	-2	$(2, -2)$
3	-3	$(3, -3)$
4	-4	$(4, -4)$

بما أن $-x = -(-y)$ تكافئ $x = -y$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

(20



يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ، ومحور y ، ونقطة الأصل.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
2	$-\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, -\frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
3	$-\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9x^2 - 25(-y)^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

بما أن $9(-x)^2 - 25y^2 = 1$

تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$.

فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

x	y	(x, y)
-3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
-2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(-2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
-1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

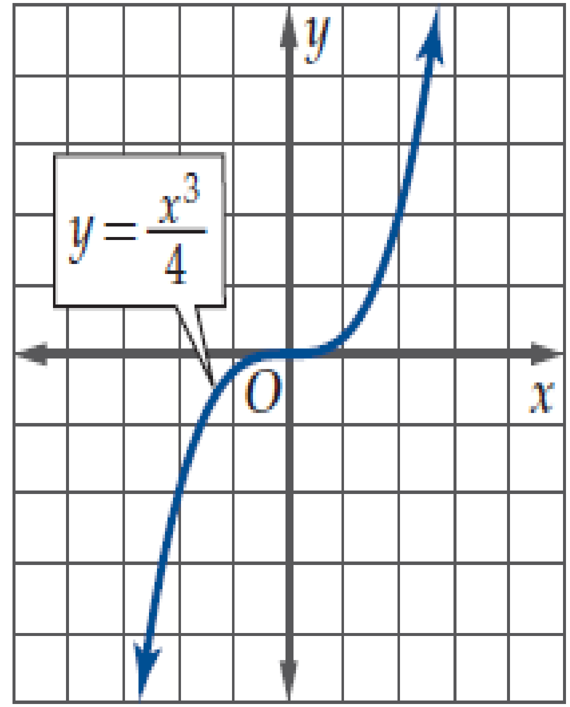
بما أن $9(-x)^2 - 25(-y)^2 = 1$

تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة

الأصل.

x	y	(x, y)
-3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
-2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(-2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
-1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{-2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$-\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{-\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$-\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$

(21

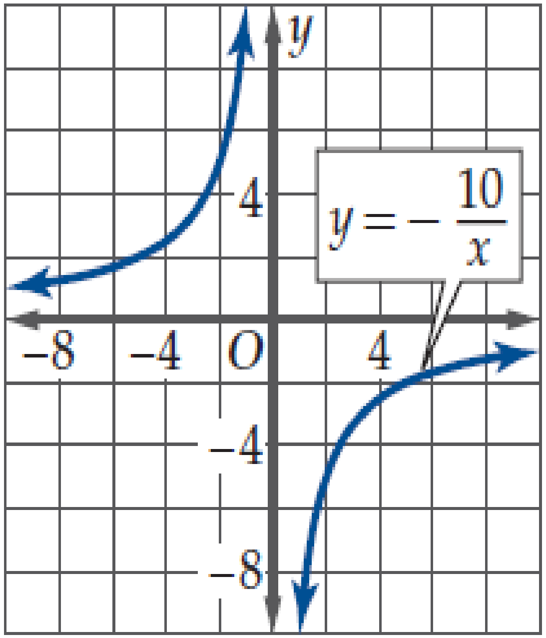


x	y	(x, y)
-4	-16	$(-4, -16)$
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	$-\frac{1}{4}$	$\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$
1	$\frac{1}{4}$	$\left(1, \frac{1}{4}\right)$
2	2	$(2, 2)$
4	16	$(4, 16)$

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

بما أن $-y = \frac{(-x)^3}{4}$ تكافئ $y = \frac{x^3}{4}$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

(22

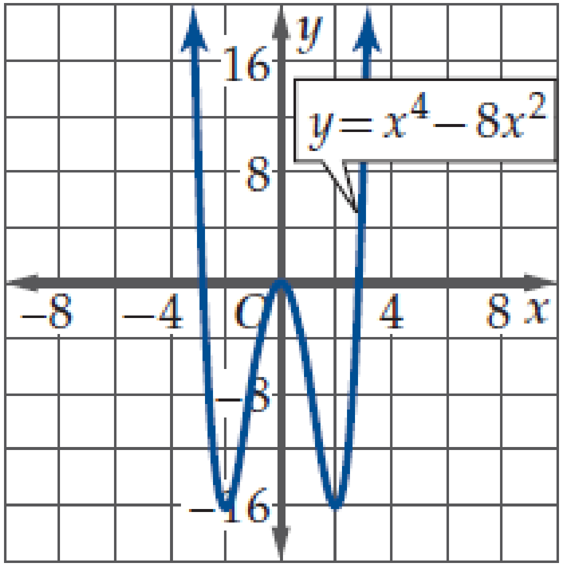


يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

x	y	(x, y)
−10	1	(−10, 1)
−5	2	(−5, 2)
−1	10	(−1, 10)
1	−10	(1, −10)
5	−2	(5, −2)
10	−1	(10, −1)

بما أن $-y = -\frac{10}{(-x)}$ تكافئ $y = -\frac{10}{x}$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل .

(23

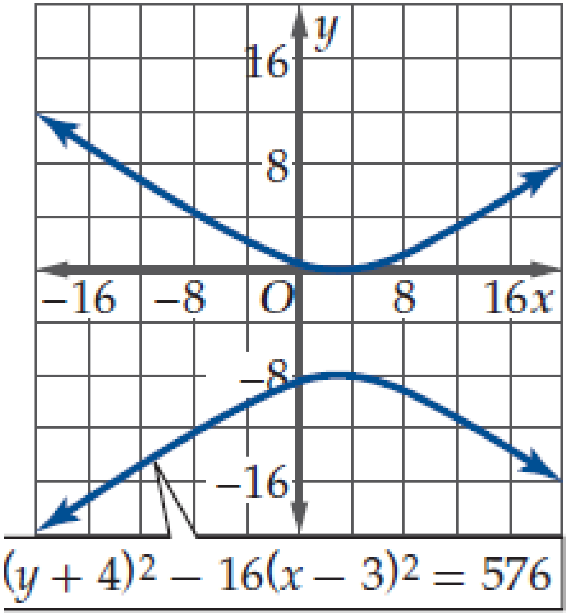


يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y

x	y	(x, y)
−3	9	(−3, 9)
−2	−16	(−2, −16)
−1	−7	(−1, −7)
1	−7	(1, −7)
2	−16	(2, −16)
3	9	(3, 9)

بما أن $y = (-x)^4 - 8(-x)^2$ تكافئ $y = x^4 - 8x^2$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

(24

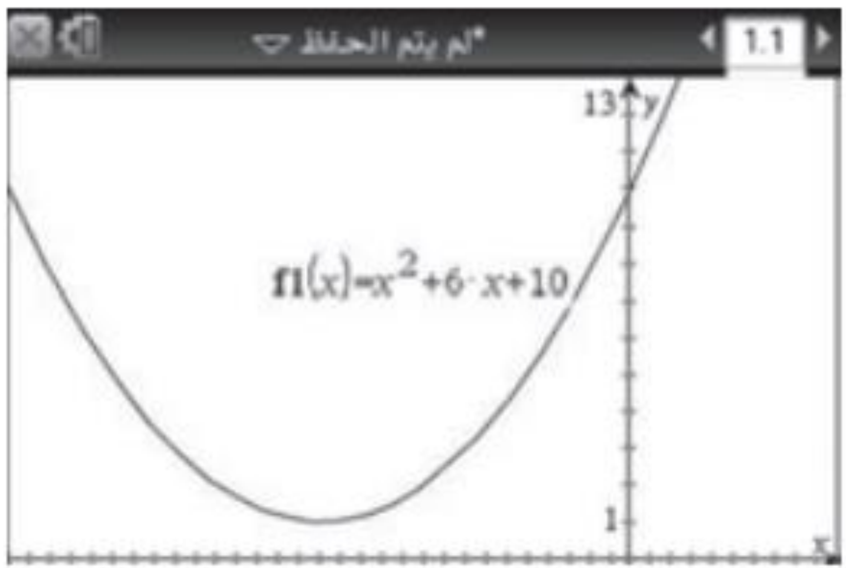


لا يوجد تماثل.

الحاسبة البيانية : استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حلّل منحناها لتحدِّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. واذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها: (مثال 6)

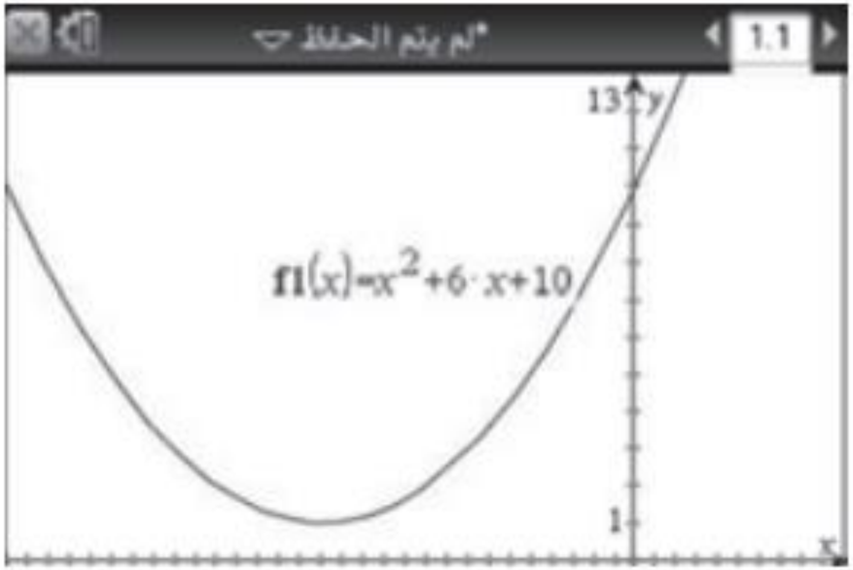
25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$

ليست فردية وليست زوجية



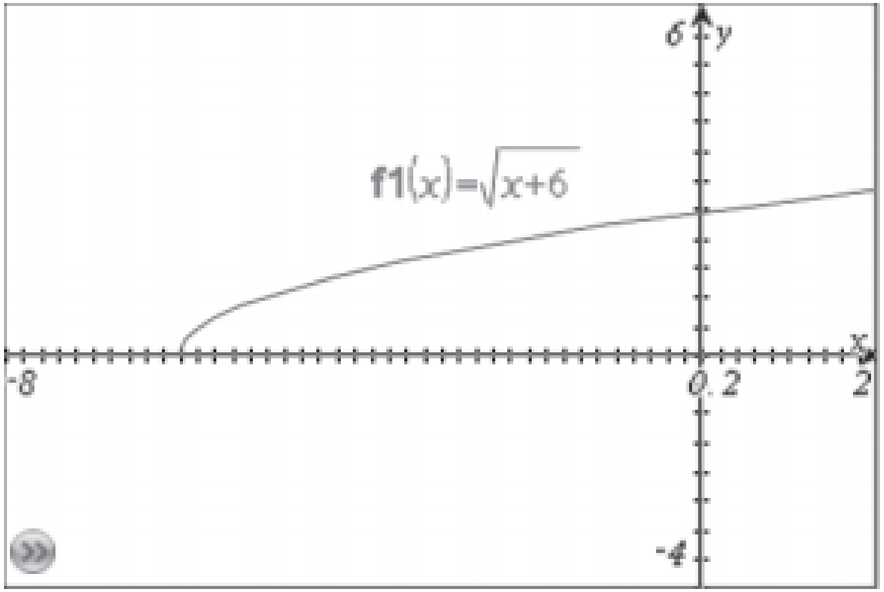
$f(x) = -2x^3 + 5x - 4$ **(26**

ليست فردية وليست زوجية



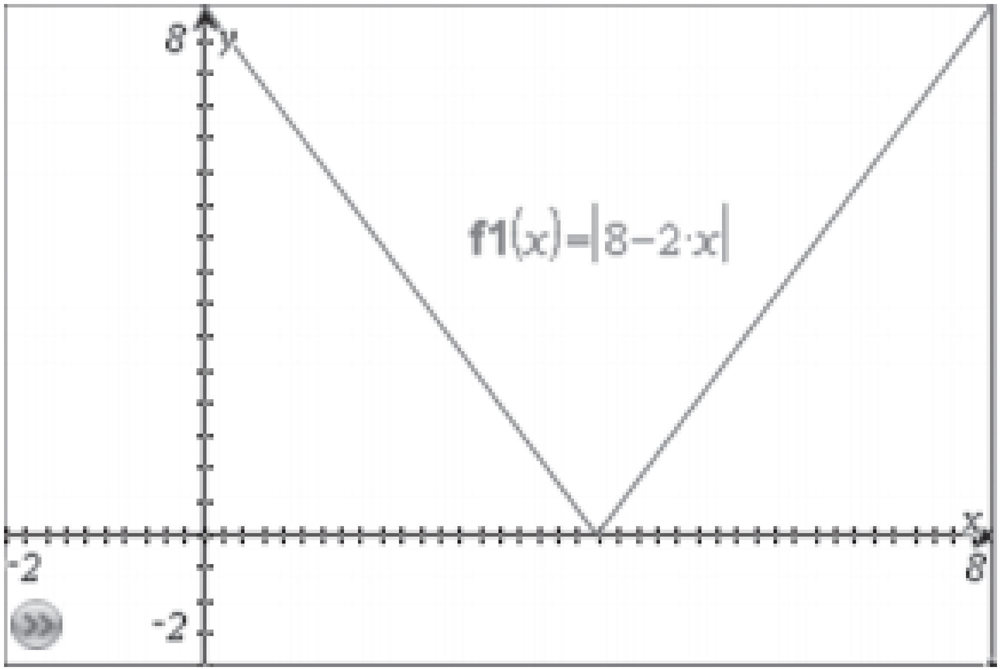
$g(x) = \sqrt{x+6}$ (27

ليست فردية وليست زوجية



$h(x) = |8 - 2x|$ **(28**

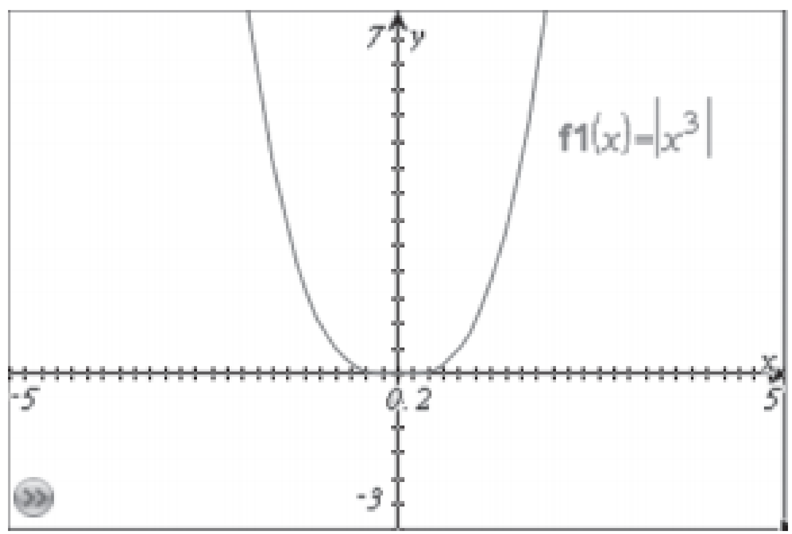
ليست فردية وليست زوجية



$$f(x) = |x^3| \quad \textbf{(29}$$

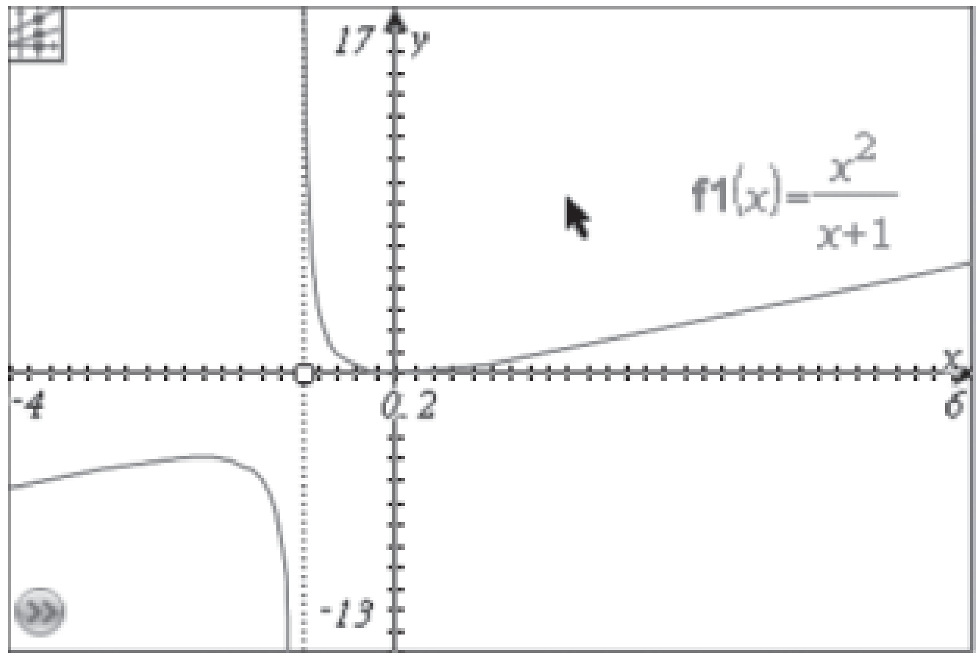
الدالة زوجية، ومتماثلة حول محور y

$$f(-x) = \left|(-x)^3\right|$$
$$= \left|-x^3\right|$$
$$= f(x)$$

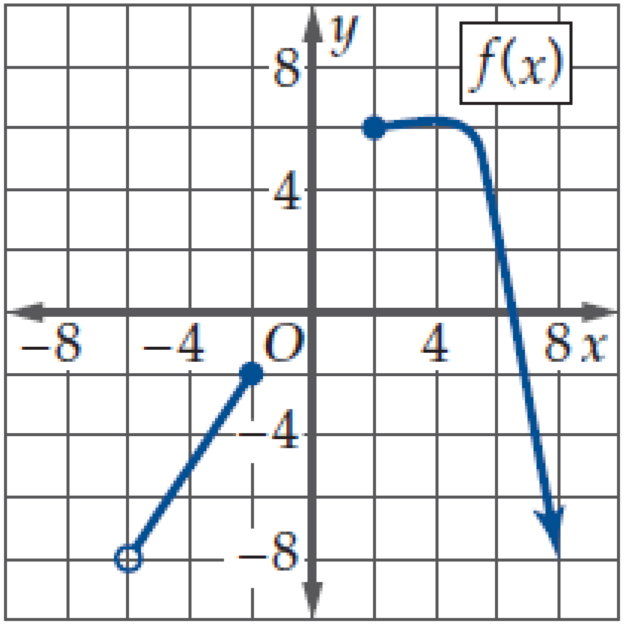


(30 $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

ليست فردية وليست زوجية



31) استعمل التمثيل البياني للدالة f لتقدير قيمها المطلوبة:



a) $f(-2)$

-2

b) $f(-4)$

-5

c) $f(2)$

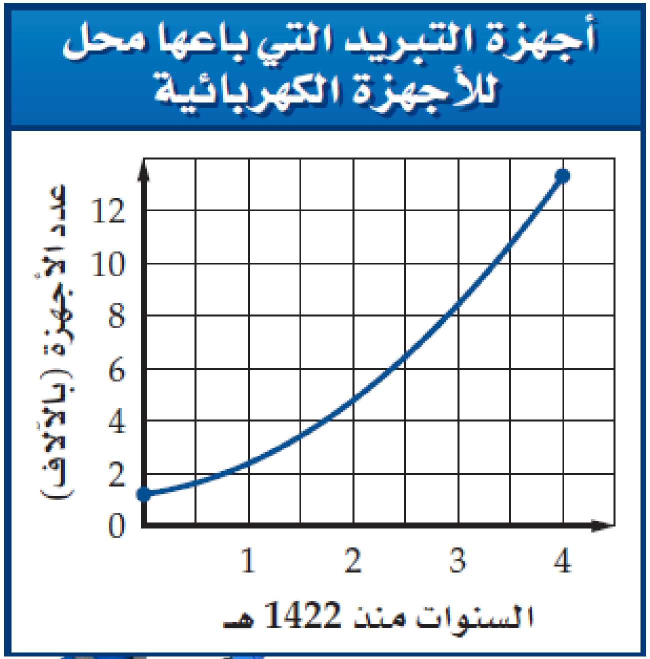
6

(٣٢) إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرا بالآلاف خلال الفترة من ١٤٢٢هـ إلى ١٤٢٦هـ يعطى بالدالة ، $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$ حيث x رقم السنة منذ ١٤٢٢هـ .

a) اكتب مجال الدالة، ثم قرب مداها.

المجال: $\{x \mid 0 \le x \le 4, x \in W\}$

المدى: $\{y \mid 1200 \le y \le 11200, y \in R\}$



b) استعمل المنحنى لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة ١٤٢٤هـ . ثم أوجد ذلك جبريا .

إجابة ممكنة : 4500 جهاز.

وجبريًّا: 4200 جهاز.

c) استعمل المنحنى لتقدير قيمة المقطع y للدالة ثم أوجده جبريا. ماذا يمثل المقطع y؟

إجابة ممكنة : 1100

وجبريًّا: 1200

ويمثل المقطع y عدد الأجهزة المبيعة سنة 1422 هـ .

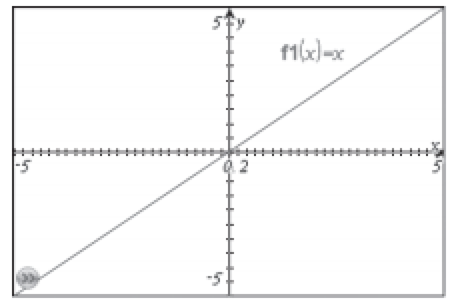
d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار، وفسر معناها.
وإذا كانت الإجابة لا، فوضح السبب ؟

لا يوجد لهذه الدالة أصفار؛ لأنه لكل سنة من سنوات المجال يوجد عدد من الأجهزة المبيعة.

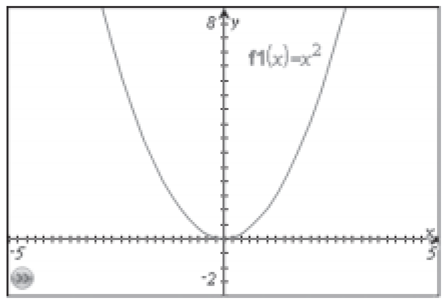
33) دوال : إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث $n \in \mathrm{N}$ فأجب عن الأسئلة الآتية:

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل $f(x)$ بيانيًّا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \leq n \leq 6$.

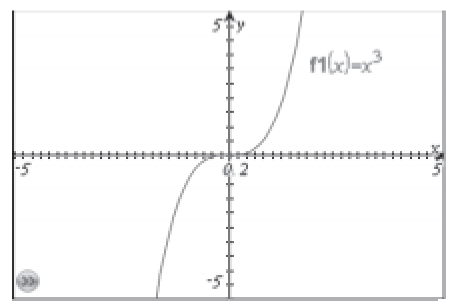
$f(x) = x$



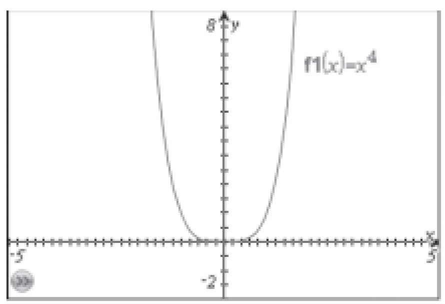
$f(x) = x^2$



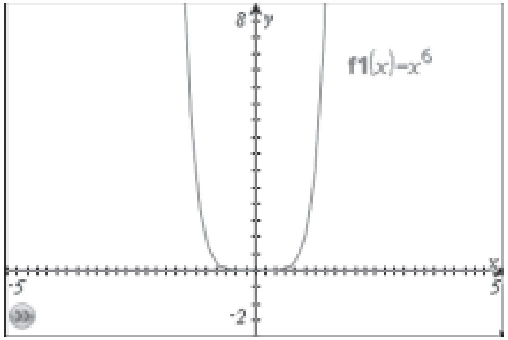
$f(x) = x^3$

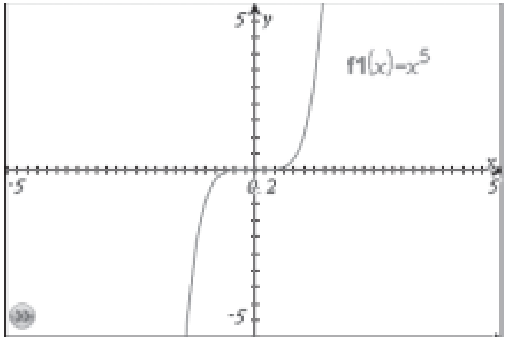


$f(x) = x^4$



$f(x) = x^6$ $\qquad$ $f(x) = x^5$





b) اكتب المجال والمدى لكل دالة.

$f(x) = x$: المجال = $\{x \mid x \in R\}$، المدى = $\{y \mid y \in R\}$

$f(x) = x^2$: المجال = $\{x \mid x \in R\}$، المدى = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

$f(x) = x^3$: المجال = $\{x \mid x \in R\}$، المدى = $\{y \mid y \in R\}$

$f(x) = x^4$: المجال = $\{x \mid x \in R\}$، المدى = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

$f(x) = x^5$: المجال = $\{x \mid x \in R\}$، المدى = $\{y \mid y \in R\}$

$f(x) = x^6$: المجال = $\{x \mid x \in R\}$، المدى = $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

c) صف التماثل لكل دالة.

دوال $f(x)=x, f(x)=x^3, f(x)=x^5$ متماثلة حول نقطة الأصل.

دوال $f(x)=x^2, f(x)=x^4, f(x)=x^6$ متماثلة حول المحور y .

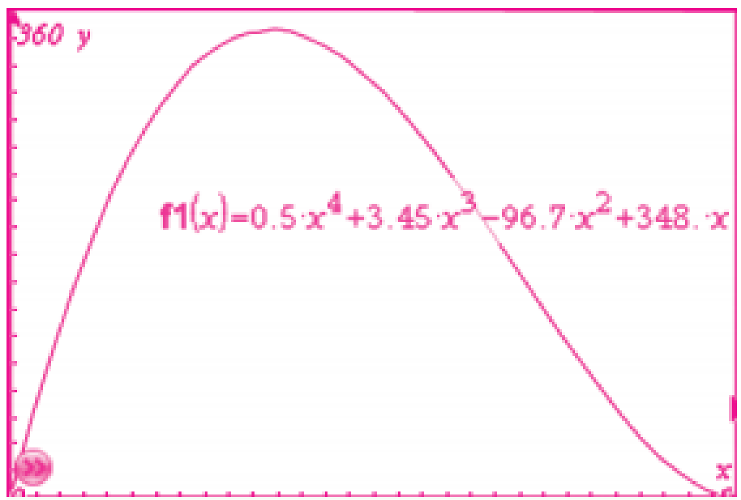
d) تنبّأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$، ومداها، وتماثلها،
ثم برّر إجابتك.

المجال $=\{x \mid x \in R\}$, المدى $=\{y \mid y \in R\}$ ؛ $f(x)=x^{35}$
دالة فردية ، لذا فهي متماثلة حول نقطة الأصل.

34) **صيدلة :** إذا كان عدد ملجرامات الدواء في دم مريض بعد x ساعة من تناوله الدواء يعطى بالدالة :

$$f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$$

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة بيانيًّا .



b) اكتب المجال المناسب للدالة، وفسِّر إجابتك.

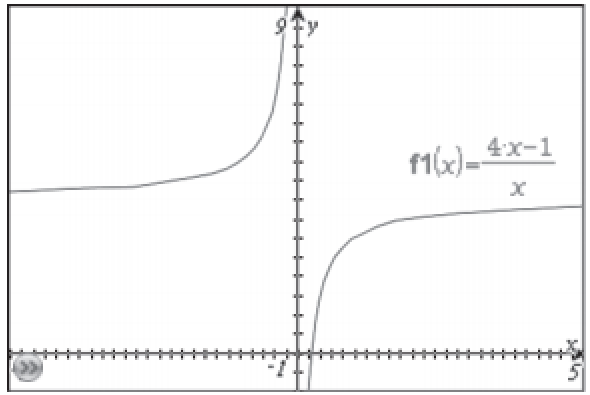
المجال: $\{x \mid 0 \leq x \leq 6, x \in W\}$ ، يبقى مسكّن الألم في الدم من صفر إلى 6 ساعات.

c) ما أكبر عدد من ملجرامات الدواء يكون موجودًا في دم المريض وفق هذه الدالة؟

346 ملجرام تقريبًا

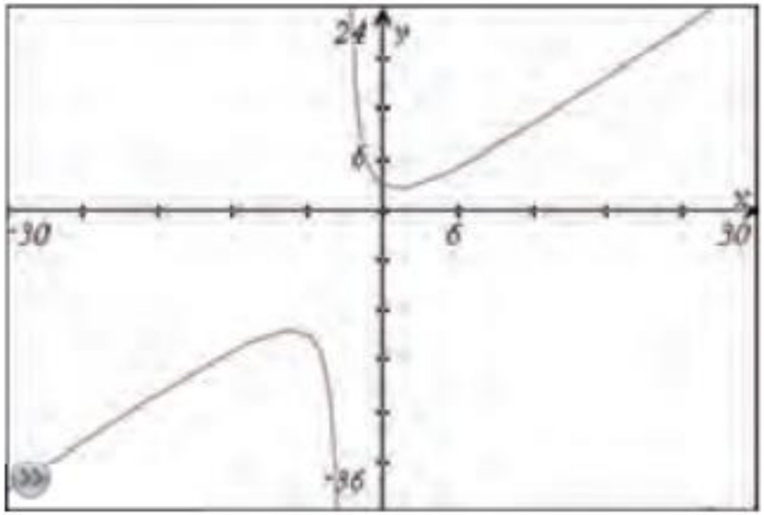
الحاسبة البيانيّة : مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، وحدّد أصفارها، ثم تحقّق من أصفار الدالة جبريًّا:

(35 $f(x) = \dfrac{4x-1}{x}$



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-1}{x} \\ 0 &= \frac{4x-1}{x} \\ 4x-1 &= 0 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x + 3} \quad (36$$



لا توجد أصفار.

$h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$ **(37**

$$h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$$

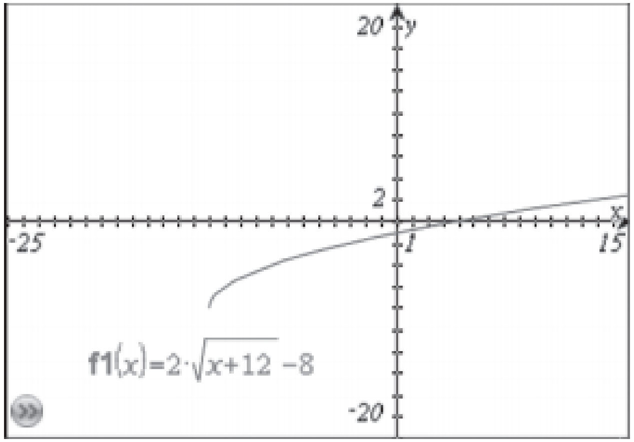
$$0 = 2\sqrt{x + 12} - 8$$

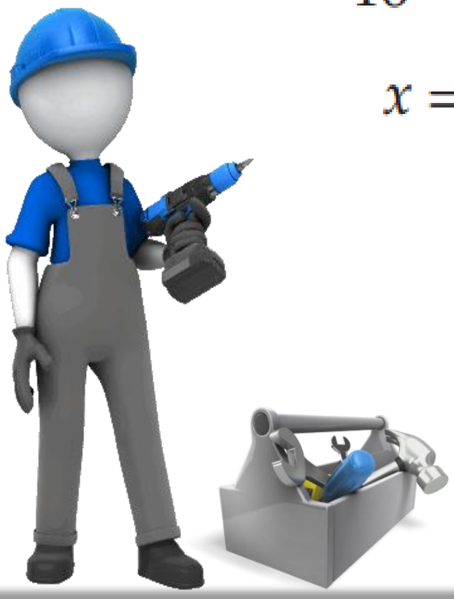
$$8 = 2\sqrt{x + 12}$$

$$4 = \sqrt{x + 12}$$

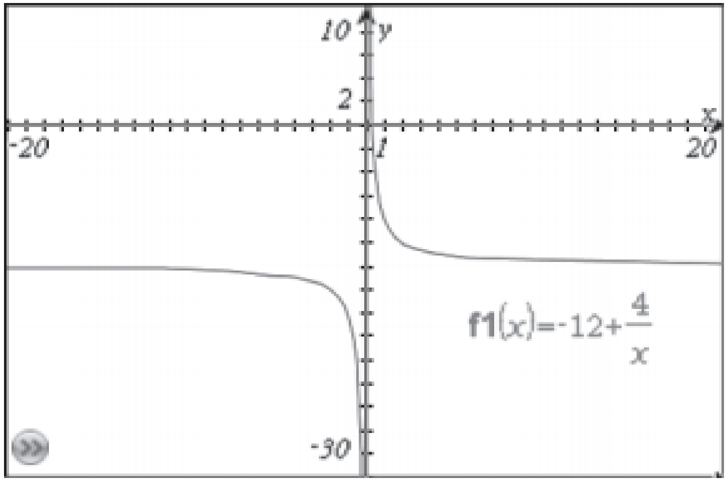
$$16 = x + 12$$

$$x = 4$$





$$g(x) = -12 + \frac{4}{x} \quad (38$$



$$g(x) = -12 + \frac{4}{x}$$

$$\frac{4}{x} + -12 = 0$$

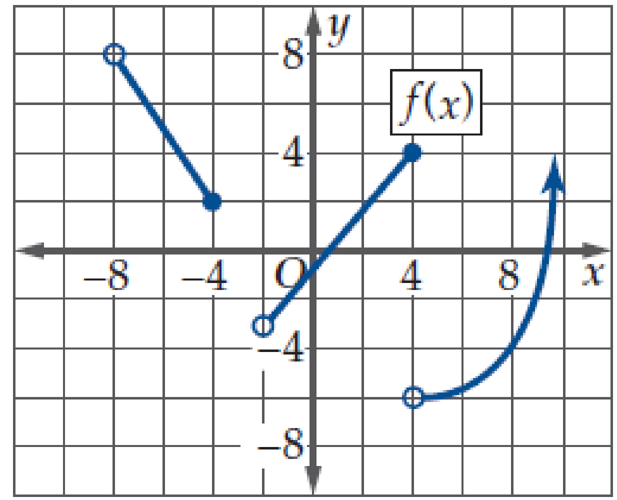
$$\frac{4}{x} = 12$$

$$12x = 4$$

$$x = \frac{1}{3}$$

استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحدد مجالها ومداها في كل مما يأتي:

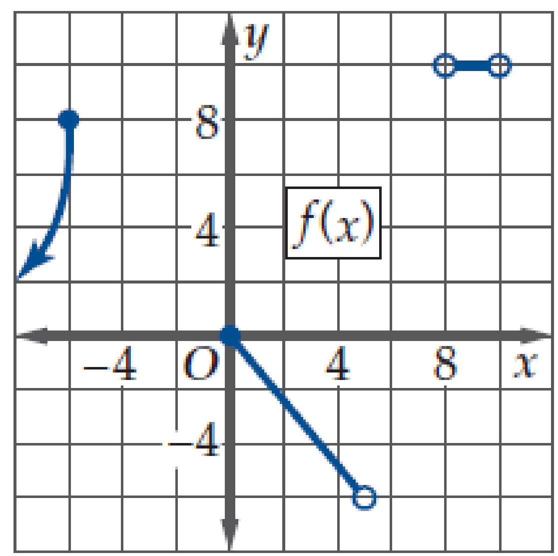
(39

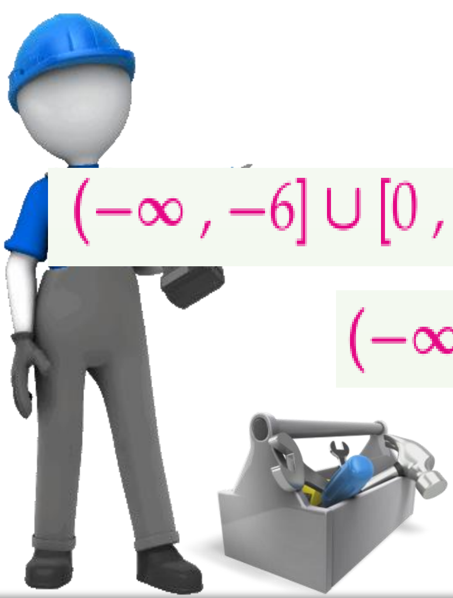


المجال : $(-8\,,-4] \cup (-2\,,\infty)$

المدى : $(-6\,,\infty)$

(40





المجال : $(-\infty\,,-6] \cup [0\,,5) \cup (8\,,10)$

المدى : $(-\infty\,,8) \cup \{\,10\,\}$

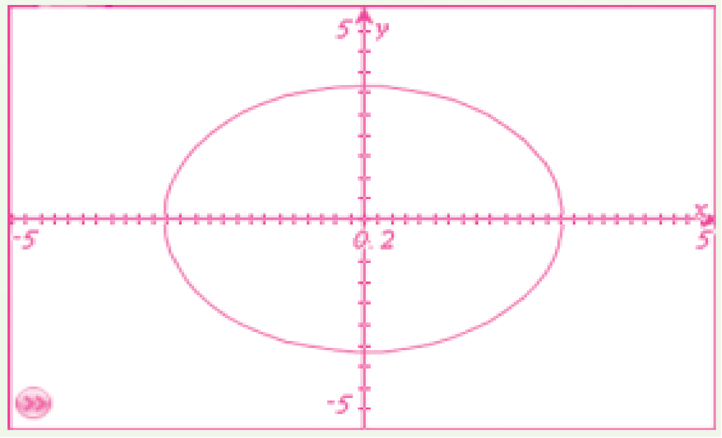
41) **فيزياء:** إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{10}=1$$

a) صف تماثل منحنى مسار المذنب.

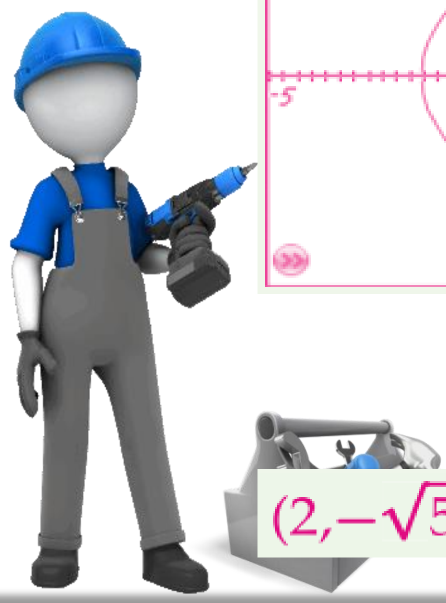
المنحنى متماثل حول نقطة الأصل، وحول المحور x، وحول المحور y.

b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة.



c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2, \sqrt{5})$، فعيّن ثلاث نقاط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

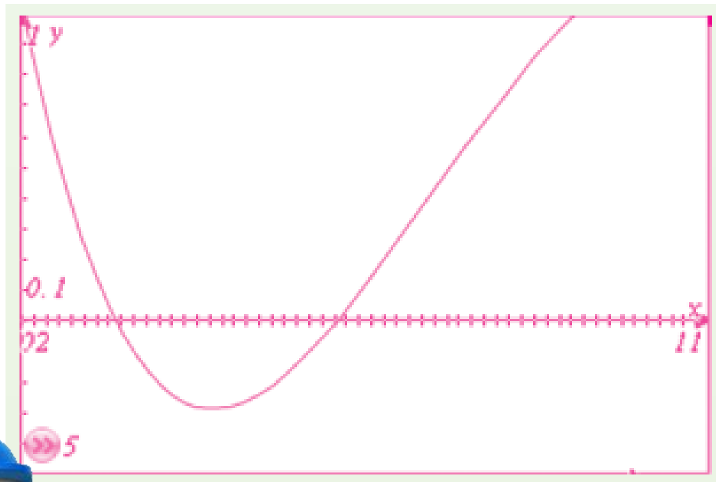
$(2,-\sqrt{5}),(-2,\sqrt{5}),(-2,-\sqrt{5})$



42) **أسهم:** افترض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة : $p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$

حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًّا.



b) أوجد مجال الدالة، ثم قدّر مداها.

المجال:	$\{x \mid 0 \le x \le 11, x \in W\}$
المدى:	$\{y \mid -0.5 \le y \le 1, y \in R\}$

c) استعمل المنحنى لتقريب قيمة المقطع y، وماذا يمثّل؟

1.04، إجابة ممكنة: يمثل المقطع y نسبة التغير المئوية الابتدائية في الأسعار.

d) أوجد أصفار الدالة، ووضّح معناها.

1.5, 5.2، تمثل الأصفار خط الأساس أو الوقت الذي تكون فيه نسبة التغير صفرًا. فمثلًا النقطة التي تكون عندها نسبة الزيادة 60% هي أكبر بمقدار 60% من خط الأساس.

43) **تمثيلات متعددة :** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ عندما تقترب x من العدد 2.

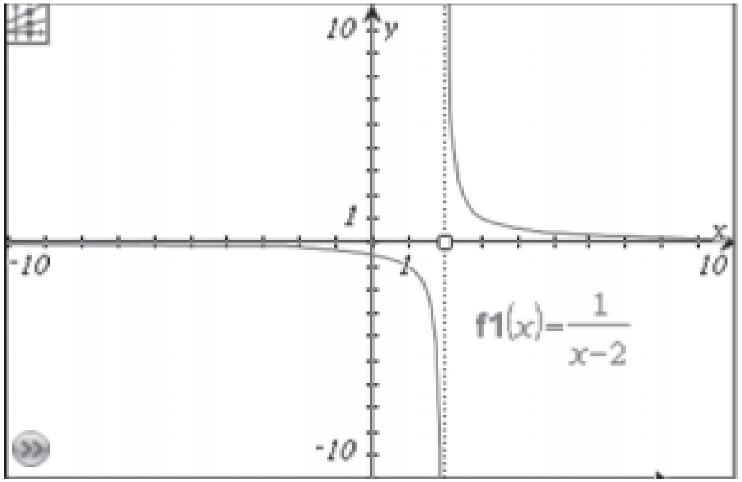
a) **جدوليًّا :** انقل الجدول الآتي إلى دفترك. وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	-100	-1000	غير معرف	1000	100

b) تحليليًا: معتمدًا على جدولك، ما القيمة أو القيم التي تقترب منها الدالة عندما تقترب x من العدد 2؟

إجابة ممكنة: عندما تقترب x من 2 من اليسار تقترب الدالة من $-\infty$. وعندما تقترب x من 2 من اليمين تقترب الدالة من ∞.

c) بيانيًّا: مثّل الدالة بيانيًّا. وهل يؤكد التمثيل البياني تخمينك في الفرع **b** ؟ وضح إجابتك.



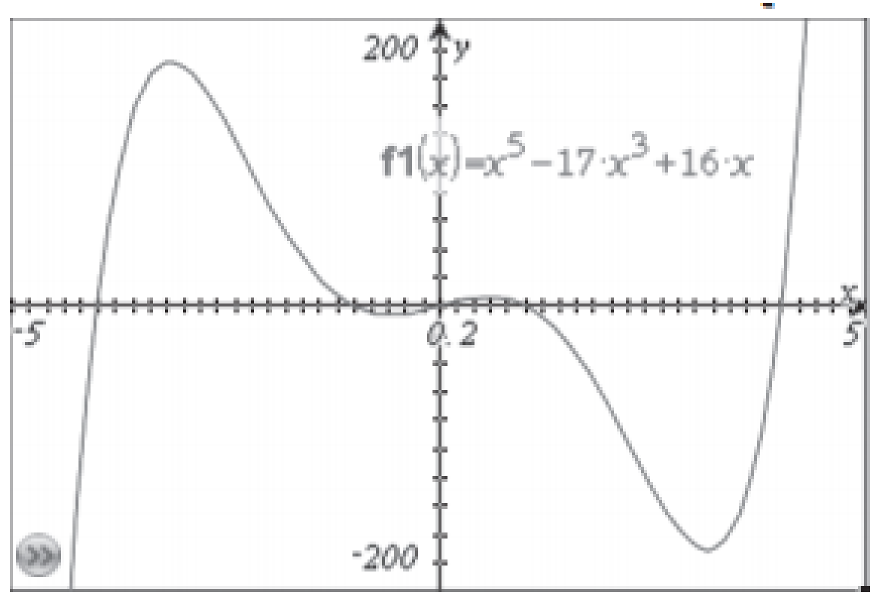
إجابة ممكنة: عندما تقترب x من 2 من اليسار تتناقص قيم الدالة بلا حدود. وعندما تقترب x من 2 من اليمين تتزايد قيم الدالة بلا حدود.

d) **لفظيًّا:** خمّن القيمة التي تقترب منها الدالة من خلال التمثيل البياني في الفرع **c** ووضح إجابتك .

إجابة ممكنة: عندما تتزايد x بشكل كبير، وتكون $x > 3$ ، يتزايد مقام الكسر بشكل كبير. وهذا يؤدي إلى تناقص قيمة الكسر، لكنه لا يصل إلى الصفر، وعليه لا يقطع المنحنى المحور x . وهذا ينطبق على قيم x التي تتناقص بمعدلات كبيرة عندما تكون $x < -1$. وعندما تكون x سالبة تكون القيمة سالبة ، ولكنها لا تصل إلى الصفر. عندما تقترب x من 2 يبدأ الفرق d بين x وَ 2 بالتناقص ، وأما عندما تكون $-1 < d < 1$ ، فيصبح المقام أصغر من البسط، مما يجعل قيمة الكسر كبيرة، وإذا كان الفرق موجبًا فستؤول قيمة الكسر إلى ما لانهاية ، أما إذا كان الفرق سالبًا فستؤول قيمة الكسر إلى سالب ما لانهاية. الدالة غير معرفة عند 2؛ لأن الفرق في المقام لا يكون صفرًا.

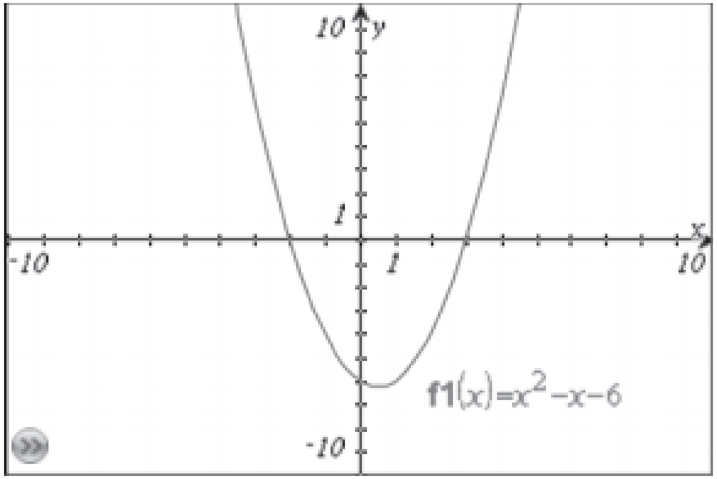
الحاسبة البيانيّة : مثّل كلاًّ من الدوال الآتية بيانيًّا. و حدّد إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

44) $h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$



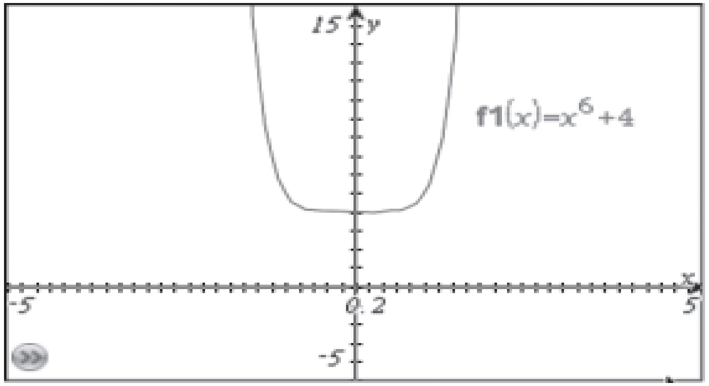
تماثل حول نقطة الأصل، الدالة فردية

$f(x) = x^2 - x - 6$ (45



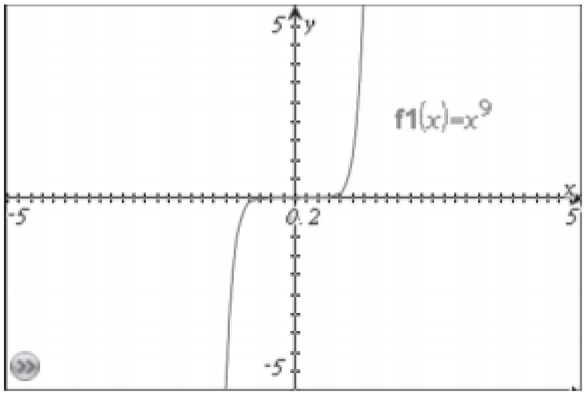
لا يوجد تماثل؛ ليست فردية ولا زوجية

$h(x) = x^6 + 4$ (46



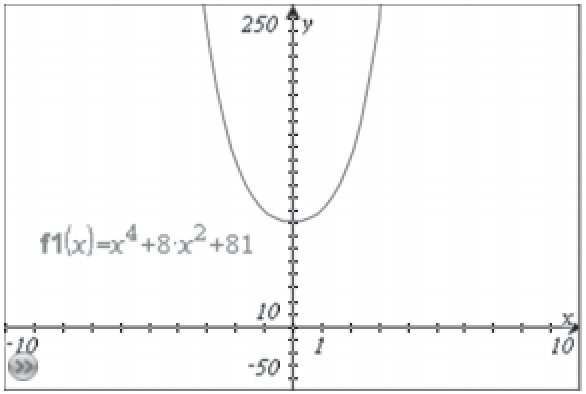
تماثل حول محور الصادات، الدالة زوجية.

$f(g) = g^9$ **(47**



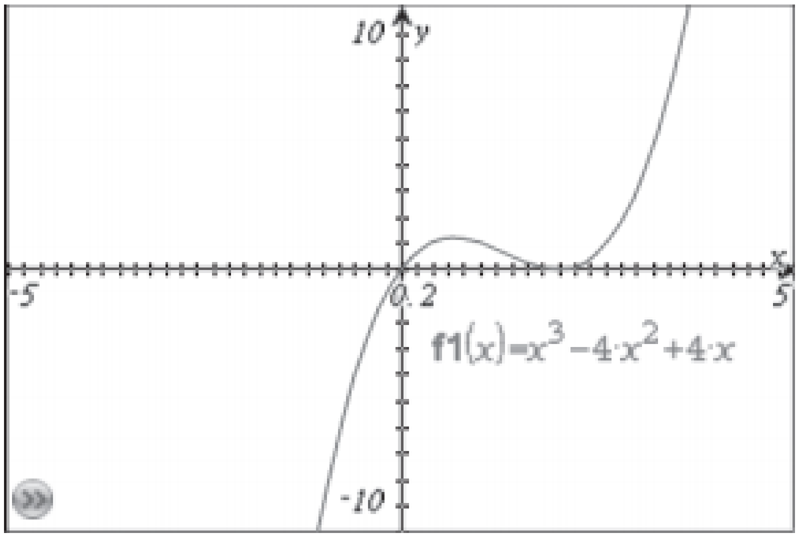
تماثل حول نقطة الأصل؛
الدالة فردية

$g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$ **(48**



تماثل حول محور الصادات،
الدالة زوجية.

$f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$ **(49**



لا يوجد تماثل، ليست فردية
وليست زوجية