مدونة المناهج السعودية

https://eduschool40.blog

الموقع التعليمي لجميع المراحل الدراسية

في المملكة العربية السعودية

القوى (نظرية ديموافر)

تعريف:

إذا كان ن عدداً نسبياً فإن:

$$ع^{ن} = [\,ر\,(جتاه + ت\,جاه)\,]^{ن} = [\,ر^{ن} \;،\; ن\,ه\,]$$

$$= ر^{ن}\,(جتا\,ن\,ه + ت\,جا\,ن\,ه)$$

مثال: إذا علمت أن ن ع = $2 + 2\sqrt{3}$ ت أوجد $ع^{5}$

الحل

نحول ع إلى صورته المثلثية:

$\because$ س $= 2$ ، ص $= 2\sqrt{3}$ $\qquad \therefore$ ر $= \sqrt{س^{2} + ص^{2}} = \sqrt{4+12} = 4$

تعين ه:

$\because$ جتاه $= \frac{س}{ر} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad \because$ جاه $= \frac{ص}{ر} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because$ ه تقع في الربع الأول. $\qquad \therefore$ ه $= 60^{\circ}$

$\therefore$ ع $= [\,ر \,،\, ه\,] = [\,4 \,،\, 60^{\circ}\,]$ $\qquad \therefore ع^{5} = [\,4 \,،\, 60^{\circ}\,]^{5} = [\,1024 \,،\, 300^{\circ}\,]$ #

مثال: أوجد ناتج $\left(\frac{-2ت}{1+ت}\right)^{12}$ مبيناً أن هذا العدد حقيقي بحت.

الحل

نفرض أن: ع $= \frac{-2ت}{1+ت}$

$$\therefore \frac{-2ت}{1+ت} = \frac{-2ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت} = \frac{2ت-2}{1+1} = \frac{2(-ت-1)}{2}$$

∴ع = −1 − ت

نحول ع إلى صورته المثلثية. ∵س =−1 ، ص = −1 ∴ ر = $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

تعيين هـ :

∴ جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ∴ جاهـ= $\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

∴ هـ تقع في الثالث. ∴ هـ = $\pi + 45° = 225°$

∴ع = [ر ، هـ] = [2، 225°] ∴ع^{12} =[($\sqrt{2}$)^{12} ، 12 × 225°]

$= [64، 12\times5\times\frac{\pi}{4}]$ = [64 ، 15π] = [64 ، π]

= 64 (جتا π + ت جا π) =64 [−1 + 0]

= −64 حقيقي بحت.

مثـــال: استخدم نظرية ديموافر للتعبير عن جتا2هـ ، جا2هـ

الحـــل

∵ع^{ن} = ر^{ن} [جتا ن هـ + ت جا ن هـ] = [ر^{ن}(جتا هـ + ت جا هـ)^{ن}]

نضع ن=2

∴ ر^2(جتا2 هـ + ت جا2 هـ) = ر^2 (جتا هـ + ت جا هـ)^2

∴ جتا2هـ + ت جا2هـ = (جتا هـ + ت جاهـ)^2

∴ جتا2هـ + ت جا2هـ = جتا^{2}هـ − جا^{2}هـ + 2جاهـ جتاهـ ن

∴ $\boxed{\text{جتا 2 هـ = جتا}^2\text{ هـ − جا}^2\text{ هـ}}$ ∴ $\boxed{\text{جا 2 هـ = 2 جا هـ جتاهـ}}$

مثـــال: إذا كانت ع= $\left(\frac{-1-\sqrt{3}\text{ت}}{2}\right)^{\text{ن}}$ أوجد ع على الصورة الجبرية

عندما (1) ن = 3 ك (2) ن = 3 ك + 1 : ك ∈ ص

الحـــل

نفرض $ع_1 = \frac{-1-\sqrt{3}ت}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت$

نحول $ع_1$ إلى الصورة المثلثية: $ر = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

تعيين هـ:

$\therefore$ جتاهـ $= \frac{1}{2}$ ، جاهـ $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ هـ تقع في الربع الثالث. هـ $= \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore ع_1 = [1 ، \frac{4\pi}{3}]$ $\therefore ع = [1 ، ن \times \frac{4\pi}{3}]$

(1) عندما ن = 3 ك $\therefore ع = [1 ، 3ك \times \frac{4\pi}{3}]$

ع = 1(جتا4πك + ت جا4πك) = (1 + 0) = 1

(2) عندما ن = (3ك + 1)

ع = [1 ، (3ك + 1) $\frac{4\pi}{3}$] = [1 ، $\frac{4\pi}{3}$]

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت$

مثال: أثبت أن: $\left(\frac{-1+\sqrt{3}ت}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1-\sqrt{3}ت}{2}\right)^3 = 2$

الحل

$\because \frac{-1+\sqrt{3}ت}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت$ $\therefore س = \frac{-1}{2}$ ، $ص = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore ر = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\therefore$ جتاهـ $= \frac{س}{ر} = -\frac{1}{2}$ ، جاهـ $= \frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ هـ تقع في الربع الثاني ∴ هـ = $-60^\circ + 180^\circ = 120^\circ$

$ط_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}ت}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1-\sqrt{3}ت}{2}\right)^3 = [1 ، 2\pi] + [1 ، -2\pi]$

= جتا2π + ت جا2π + جتا2π − ت جا2π

$= 1 + 1 = 2$ ∴ $ط_1 = ط_2$

مثــال: إذا كانت ع + $\frac{1}{ع}$ = 2جتاهـ فأثبت أن: $ع^ن + \frac{1}{ع^ن}$ = 2جتان هـ

الحــل

∵ ع + $\frac{1}{ع}$ =2جتاهـ بالضرب × ع ∴ $ع^2+1$ = 2 جتاهـ ع

∴ $ع^2$ − 2جتاهـ ع + 1 = 0 *"معادلة من الدرجة الثانية"*

∵ أ = 1 ، ب = −2 جتاهـ ، جـ = 1

∴ Δ = $ب^2$ − 4 أجـ ∴ Δ = 4$جتا^2$هـ − 4 ∴ Δ = 4 ($جتا^2$هـ −1)

∴ Δ = −4 $جا^2$هـ

∴ ع= $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ}$ ∴ ع = $\frac{2 \text{ جتاهـ} \pm \sqrt{-4 \text{ جا}^2\text{هـ}}}{2} = \frac{2 \text{ جتاهـ} \pm 2 \text{ جاهـ ت}}{2}$

∴ ع = (جتاهـ ± جاهـ ت)

∴ $ع^ن$ + $\frac{1}{ع^ن}$ = $(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})^ن + (\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})^{-ن}$

= جتان هـ + ت جان هـ + جتان هـ − ت جان هـ = 2جتان هـ

∴ $ط_1 = ط_2$

اليمــن سنــ2004ـة:

مثــال: حل المعادلة $ع^2$ − 2جتاهـ ع + 1 = 0

الحــل

بنفس حل المثال السابق.

مثـــال: إذا كان ع$_1$ = (جتا25^5 + ت جا 25^5) ، ع$_2$ = [1 ، 20^5]

أوجد قيمة ع$_1^4$. ع$_2^7$

الحــل

∵ ع$_1$ = [1 ، 25^5] ، ع$_2$ = [1 ، 20^5]

∴ ع$_1^4$. ع$_2^7$ = [1 ، 25^5]^4 . [1 ، 20^5]^7

= [1 ، 100^5] . [1 ، 140^5] = [1 ، 240^5]

= (جتا 240^5 + ت جا 240^5) = − جتا60^5 − ت جا 60^5

= $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

مثـــال: إذا كان ع= [1 ، هـ] فبرهن أن ع + $\frac{1}{\text{ع}}$ = 2جتاهـ

البرهان:

ط$_1$ = ع + $\frac{1}{\text{ع}}$ = [1 ، هـ] + [1 ، −هـ]

= (جتاهـ + تجاهـ) + (جتا− هـ + ت جا − هـ)

= جتاهـ + ت جاهـ + جتاهـ − ت جاهـ = 2جتاهـ

مثـــال: إذا علمت أن:

ع = [1 ، $\frac{\pi}{3}$] برهن أن (ع + $\frac{1}{\text{ع}}$)^2 =1

البرهان:

∵ ع + $\frac{1}{\text{ع}}$ = [1 ، 60^5] + [1 ، − 60^5]

= جتا60^5 + ت جا60^5 + جتا −60^5 + ت جا −60^5

= جتا60^5 + ت جا60^5 + جتا60^5 − ت جا60^5

$$= 2\,\text{جتا}\,60^{5} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore \left(\text{ع} + \frac{1}{\text{ع}}\right)^{2} = (1)^{2} = 1$$

مثال: إذا كان ع = [ر ، هـ] وكان $\text{ع} + \frac{1}{\text{ع}} = 2\,\text{جتاهـ}$ فبرهن أن $\boxed{\text{ر} = 1}$

الحل

$$\because \text{ع} + \frac{1}{\text{ع}} = 2\,\text{جتاهـ}$$

$$= [\,\text{ر} ، \text{هـ}\,] + [\,\frac{1}{\text{ر}} ، -\text{هـ}\,] = 2\,\text{جتاهـ}$$

$$= \text{رجتاهـ} + \text{رجاهـ ت} + \frac{1}{\text{ر}}\,\text{جتا} - \text{هـ} - \frac{1}{\text{ر}}\,\text{جا هـ ت}$$

$$= \left(\text{ر جتاهـ} + \frac{1}{\text{ر}}\,\text{جتاهـ}\right) + \text{ت}\left(\text{رجاهـ} - \frac{1}{\text{ر}}\,\text{جاهـ}\right) = 2\,\text{جتاهـ}$$

$\therefore \text{رجتاهـ} + \frac{1}{\text{ر}}\,\text{جتاهـ} = 2\,\text{جتاهـ}$ بالقسمة على جتاهـ

$\therefore \text{ر} + \frac{1}{\text{ر}} = 2$ $\qquad$ $\therefore \text{ر}^{2} - 2\text{ر} + 1 = 0$

$\therefore (\text{ر} - 1)^{2} = 0$ $\qquad$ $\therefore \text{ر} = 1$

$\text{رجاهـ} - \frac{1}{\text{ر}}\,\text{جاهـ} = 0$

$\therefore \text{رجاهـ} = \frac{1}{\text{ر}}\,\text{جاهـ}$

$\therefore \text{ر}^{2} = 1$ $\qquad$ $\therefore \text{ر} = 1$

تمرين غير محلول

إذا كان $\text{ع} + \frac{1}{\text{ع}} = 1$ أثبت أن $\text{ع}^{14} + \frac{1}{\text{ع}^{14}} = 1$

مثال: أثبت أن: $\frac{(\text{جتاهـ} - \text{ت جا هـ})^{20}}{(\text{جتاهـ} - \text{ت جا هـ})^{22}} = \text{جتا}2\text{هـ} + \text{ت جا}2\text{هـ}$

الحل

$$\text{ط}_{1} = \frac{1}{(\text{جتاهـ} - \text{ت جا هـ})^{2}} = \frac{1}{(\text{جتا} - \text{هـ} + \text{ت جا} - \text{هـ})^{2}} = \frac{\text{جتا}0 + \text{ت جا}0}{\text{جتا} - 2\text{هـ} + \text{ت جا} - 2\text{هـ}}$$

= جتا2هـ + ت جا2هـ   ∴ $ط_1 = ط_2$

مثـــال:

أثبت أن: $\dfrac{-1}{(جتا\,30^5 - ت\,جا\,30^5)^{12}} = -1$

الحـــل

$ط_1 = \dfrac{-1}{(جتا\,-360^5 + ت\,جا\,-360^5)} = \dfrac{-1}{(1 + ت \times 0)} = \dfrac{-1}{1} = -1$

∴ $ط_1 = ط_2$

مثـــال: أثبت أن: $\dfrac{(3+4ت)^5\,(1-ت)^4}{(6+8ت)^5} = -\dfrac{1}{8}$

الحـــل

$ط_1 = \dfrac{(3+4ت)^5\,(1-ت)^4}{2^5\,(3+4ت)^5} = \dfrac{((1-ت)^2)^2}{2^5}$

$= \dfrac{(1-2ت+ت^2)^2}{2^5} = \dfrac{4ت^2}{32} = \dfrac{-4}{32} = \dfrac{-1}{8}$

∴ $ط_1 = ط_2$

الجـــذور

أولاً: الجذريـن التربيعين لعـدد مركـــب

هنـــاك طـريقتـان للحـــل

بالطريقة المثلثية القطبية:

إذا كان ع = ر(جتاهـ + ت جاهـ) ∴

$\sqrt{ع} = [\sqrt{ر}\ ،\ \dfrac{هـ + 2ك\pi}{2}]$

: ك = 0 ، 1

بالطريقة الجبرية

نفرض أن $\sqrt{ع}$ = (س + ت ص) ونحل المعادلة.

مثـــال: أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع = 1+ $\sqrt{3}$ ت

الحل:

س = 1 ، ص = $\sqrt{3}$

∴ ر = $\sqrt{1+3}$ = 2

∵ جتاه = $\frac{1}{2}$ ، جا ه = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ ه = 60°

∴ $\sqrt{ع}$ = [$\sqrt{ر}$ ، $\frac{ه + 2ك\pi}{2}$] : ك = 0 ، 1

(1) عندما ك = 0 ∴ الجذر الأول = [$\sqrt{2}$ ، 30°]

= $\sqrt{2}$ (جتا30+ت جا30)

= ($\frac{\sqrt{6}}{2}$ + $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ت)

(2) عندما ك = 1 ∴ الجذر الثاني = − ($\frac{\sqrt{6}}{2}$ + $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ت)

مثـــال: أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع = 2−2 $\sqrt{3}$ ت

الحــل

1] بالطريقــة المثلثيـــــــة:

∵س = 2 ، ص = −2 $\sqrt{3}$

∴ ر = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{4+12}$ = $\sqrt{16}$ = 4

تعيين ه:

∵ جتاه = $\frac{1}{2}$ ∵ جاه = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

∴ ه تقع في الربع الرابع. ∴ ه = − 60° + 360° = 300°

∴ع $^{\frac{1}{2}}$ = $\sqrt{4}$ (جتا $\frac{300 + 2ك\pi}{2}$ + جا $\frac{300 + 2ك\pi}{2}$ ت) : ك = 0 ، 1

1) عندما ك = 0

∴ أحد الجذرين = $2\left(\text{جتا}\frac{300^\circ}{2} + \text{جا}\frac{300^\circ}{2}\,\text{ت}\right)$ = 2 (جتا150 + جا 150ت)

= 2 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\text{ت}\right)$ = $(-\sqrt{3} + \text{ت})$

2) <u>عندما ك = 1</u>

∴ الجذر الآخر = 2 $\left(\text{جتا}\frac{300+2\text{ك}\pi}{2} + \text{جا}\frac{300+2\text{ك}\pi}{2}\,\text{ت}\right)$

= 2 $\left(\text{جتا}\frac{660}{2} + \text{ت جا}\frac{660}{2}\right)$ = 2 (جتا 330^5 + ت جا330^5)

= 2 (+ جتا 30^5 − ت جا30^5) = 2 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\text{ت}\right)$ = $(\sqrt{3} - \text{ت})$

2) بالطريقـة الجبريـــــة:

نفرض أن أحد الجذور (س + ت ص) للعدد ع

∴(س + ت ص)^2 = 2 − 2$\sqrt{3}$ ت ∴ س^2 − ص^2 + 2 ت ص = 2 − 2$\sqrt{3}$ ت

∴ س^2 − ص^2 = 2 .... (1)

2 س ص = −2$\sqrt{3}$ .... (2)

∴ بالتربيع لكل من (1) ، (2)

س^4 − 2س^{2}ص^2 + ص^4 = 4 .... (3)

4س^{2}ص^2 = 12 .... (4) بالجمع (3) ، (4)

س^4 − 2س^2 ص^2 + ص^4 = 16

∴ (س^2 + ص^2)^2 = 16 بأخذ $\sqrt{\ }$

∴ س^2 + ص^2 = 4 .... (5)

س^2 – ص^2 = 2 .... (1) بالجمع

2س^2 = 6 ∴ س^2 = 3

∴ س = ± $\sqrt{3}$

∴ بالتعويض عن س^2 في المعادلة رقم (5)

∵ س^2 + ص^2 = 4   3 + ص^2 = 4

∴ ص^2 = 4 − 3   ∴ ص^2 = 1 ⇐ ص = ±1

∴ الجذرين = ± ($\sqrt{3}$ – ت)

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد (ت)

1] باستخدام الطريقة المثلثية:

∵ ت = [1 ، 90°]

∴ $\sqrt{\text{ع}}$ = [1 ، $\frac{90° + 2\text{ك}\pi}{2}$]

(1) عندما ك = 0

∴ الجذر الأول = [1 ، 45°] = جتا 45° + ت جا 45°

= ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ت)

(2) عندما ك = 1

∴ الجذر الثاني = [1 ، 225°] = − ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ت)

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع = 5 + 12ت

الحل

نضع $\sqrt{5 + 12\text{ت}}$ = س + ت ص   بالتربيع.

∴ 5 + 12ت = س^2 – ص^2 + 2ت س ص

∴ س^2 − ص^2 = 5 ....(1)

∴ 2س ص = 12 ....(2)

بالتربيع كل من(1) ، (2)

∴ س^4 − 2س^{2}ص^2 + ص^4 = 25 .... (3)

4س^{2}ص^2 = 144 .... (4) بالجمع

س^4 + 2س^{2}ص^2 + ص^4 = 169

∴ (س^2 + ص^2)^2 = 169 بأخذ $\sqrt{\quad}$

∴ س^2 + ص^2 = 13 .... (5)

∴ س^2 − ص^2 = 5 .... (1) بالجمع

∴ 2س^2 = 18 ⇐ س^2 = 9 ⇐ س = $\boxed{\pm 3}$

بالتعويض عن س^2 في رقم (5)

∴ 9 + ص^2 = 13 ∴ ص^2 = 4 ∴ ص = ± 2

∴ الجذرين هما = ± (س + ت ص) = ± (3 + 2ت)

مثـــال: أحسب قيمة ع = $(-2 + 2\sqrt{3}\,ت)^{\frac{3}{2}}$

الحـــل

∴ ع = $\sqrt{(-2 + 2\sqrt{3}\,ت)^3}$

نحول العدد (− 2 + 2$\sqrt{3}$ ت) إلـى الصورة المثلثيـة.

∴ س = − 2 ، ص = 2$\sqrt{3}$

∴ ر = $\sqrt{4+12}$ = 4

∴ جتاهـ = $\frac{-2}{4}$ ⇐ جتاهـ = $\frac{-1}{2}$

∴ جاهـ = $\frac{2\sqrt{3}}{4}$ ⇐ جاهـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ هـ تقع في الربع الثاني ∴ هـ = $60° + 180°$

∴ هـ = $120°$

∴ ع = $\sqrt{[ر ، هـ]^3} = \sqrt{[4 ، 120°]^3}$

∴ ع = $\sqrt{[64 ، 2\pi]} = \sqrt{[64 ، 0°]}$

= $\sqrt{64}$ = ± 8

اليمـن سنـة2000:

مثـال: إذا كان (1 + ت) هو أحد الجذرين التربيعيين لعدد ع أوجد:

1) الجذر الآخر. 2) العدد (ع)

الحـل

1) الجذر الآخر = − (1 + ت)

2) العدد الأصلي = $(1 + ت)^2$ = 1 − 1 + 2 ت = 2ت

ثانيـاً: الجـذور التكعيبيـة للعـدد المركـب

إذا كـان ع = [ر ، هـ]

فإن $\sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{ر}\left(جتا \frac{هـ + 2ك\pi}{3} + ت\ جا \frac{هـ + 2ك\pi}{3}\right)$

: ك = 0 ، 1 ، 2

مثـال: أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع = 8 ت

الحـل

∵ ع = 8ت = [8 ، 90°]

∴ $\sqrt[3]{ع} = \left[\sqrt[3]{ر} ، \frac{هـ + 2ك\pi}{3}\right]$: ك = 0 ، 1 ، 2

(1) عندما ك =0

∴ الجذر الأول = $\left[\sqrt[3]{8} ، \frac{90° + 0}{3}\right] = [2 ، 30°]$

= 2 (جتا30° + ت جا30°)

$= 2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right.$ ت$\left.\right)$

$= (\sqrt{3} +$ ت$)$

(2) عندما ك = 1

الجذر الثاني = [2 ، 150°] $= 2\,($جتا $150° +$ ت جا $150°)$

$= 2\,(-$ جتا $30° +$ ت جا $30°)$

$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right.$ ت$\left.\right)$

$= (-\sqrt{3} +$ ت$)$

(3) عندما ك = 2

الجذر الثالث = [2 ، 270°] $= 2\,($جتا $270° +$ ت جا $270°) = -2$ ت

∴ مجموع الحلول = {($\sqrt{3}$ + ت) ، ($-\sqrt{3}$ + ت) ، −2ت}

مثـــال: حل المعادلة ع^3 + 64ت = 0

الحـــل

ع^3 = − 64ت = [64 ، 270°] بأخذ $\sqrt[3]{\ }$

∴ ع = $\sqrt[3]{[\,64 ،\ 270°\,]}$ ∵ ك = 0 ، 1 ، 2

(1) عندما ك = 0

الجذر الأول = [4 ، 90°] = 4ت

(2) عندما ك = 1

∴ الجذر الثاني = [4 ، 210°] $= 4\,($جتا $210 +$ ت جا $210)$

$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right.$ ت$\left.\right)$ $= (-2\sqrt{3} - 2$ت$)$

(3) عندما ك = 2

∴ الجذر الثالث = [4 ، 330^{5}] = ($2\sqrt{3}$ − 2ت)

حل تمارين ومسائل (5-1) صـ40

61 أوجد ناتج ما يلي في أبسط صورة مستخدماً مبرهنة دي موافر:

أ) $(2\text{جتا}15^\circ + \text{ت جا}15^\circ)^3$

ب) $(\sqrt{2}\,(\text{جتا}30^\circ + \text{ت جا}30^\circ))^4$

جـ) $(-1 + \sqrt{3}\,\text{ت})^5$

د) $\left(\dfrac{2}{-1-\sqrt{3}\,\text{ت}}\right)^4$

الحــل

أ) ع $= 2^3(\text{جتا}15^\circ\times3 + \text{ت جا}15^\circ\times3) = 8\,(\text{جتا}(45^\circ) + \text{ت جا}(45^\circ))$

$= [\,8 ،\ 45^{5}\,]$

ب) ع $= (\sqrt{2})^4\,(\text{جتا}30^\circ\times4 + \text{ت جا}30^\circ\times4) = 4(\text{جتا}120^\circ + \text{ت جا}120^\circ)$

جـ) محـــلـــول كمثـــال.

د) نحول $-1-\sqrt{3}$ ت للصورة القطبية أولاً.

$-1-\sqrt{3}\,\text{ت} = 2\,(\text{جتا}240^\circ + \text{ت جا}240^\circ)$

$\left(\dfrac{2}{-1-\sqrt{3}\,\text{ت}}\right)^4 = \left(\dfrac{2\ \text{جتا}(0^\circ + \text{ت جا}0^\circ)}{2(\ \text{جتا}240^\circ + \text{ت جا}240^\circ)}\right)^4 = (\text{جتا}-240^\circ + \text{ت جا}-240^\circ)^4$

$= [\,1 ،\ -240^\circ\,]^4$

$= [\,1 ،\ 120^\circ\,]^4$

$= [\,1 ،\ 480^\circ\,]$

---

62 بسط ما يلي:

أ) $\dfrac{(\text{جتاه} - \text{ت جا ه})^2}{(\text{جتاه} - \text{ت جا ه})^3}$

ب) $\dfrac{\text{جتا}2\text{ه} + \text{ت جا}2\text{ه}}{\text{جتاه} + \text{ت جا ه}}$

جـ) $\dfrac{(\text{جتا}\ 35^\circ + \text{ت جا}35^\circ)^8}{(\text{جتا}\ 19^\circ + \text{ت جا}19^\circ)^7}$

الحــل

أ) $\dfrac{(\text{جتاهـ} - \text{ت جا هـ})^{2}}{(\text{جتاهـ} - \text{ت جا هـ})^{3}} = \dfrac{1}{\text{جتاهـ} - \text{ت جا هـ}} = \dfrac{1}{\text{جتا} -\text{هـ} + \text{ت جا} -\text{هـ}} = \text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ}$

ب) $\dfrac{\text{جتا }2\text{هـ} + \text{ت جا }2\text{هـ}}{\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ}} = \text{جتا }(2\text{هـ} - \text{هـ}) + \text{ت جا }(2\text{هـ} - \text{هـ}) = \text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ}$

جـ) $\dfrac{(\text{جتا }35^{5} + \text{ت جا}35^{5})^{8}}{(\text{جتا }19^{5} + \text{ت جا }19^{5})^{7}}$

$= \dfrac{\text{جتا }8 \times 35^{5} + \text{ت جا}35^{5}}{\text{جتا }7 \times 19^{5} + \text{ت جا }7 \times 19^{5}} = \dfrac{\text{جتا }280^{5} + \text{ت جا}280^{5}}{\text{جتا }133^{5} + \text{ت جا}133^{5}}$

$= \text{جتا }(280 - 133^{5}) + \text{ت جا }(280 - 133^{5}) = \text{جتا}(147^{5}) + \text{ت جا}(147^{5})$

---

63 أثبت صواب ما يلي:

أ) $\dfrac{\text{ت}}{(\text{جتا }70^{5} - \text{ت جا}70^{5})^{3}} = \dfrac{1}{2}(1 - 3\text{ت})$

ب) $\dfrac{(1 + 3\text{ ت})^{4}(1 + \text{ت})^{8}}{(\text{جتا }100^{5} - \text{ت جا}100^{5})^{3}} = -256$

جـ) $\dfrac{(\text{جتا }30^{5} + \text{ت جا }30^{5})^{5} \times (\text{جتا }45^{5} - \text{ت جا }45^{5})^{6}}{(\text{جتا }75^{5} + \text{ت جا }75^{5} + \text{ت جا }75^{5})^{3}} = \text{ت}$

الحـــل

أ) الأيمن $= \dfrac{\text{ت}}{(\text{جتا }-70^{5} + \text{ت جا }-70)^{3}} = \dfrac{\text{جتا}90^{5} + \text{ت جا}90^{5}}{\text{جتا}(-210^{5}) + \text{ت جا }(-210^{5})}$

$= \text{جتا }(300^{5}) + \text{ت جا }(300^{5}) = (\text{جتا }60^{5}) + \text{ت جا}-60^{5}$

$= \text{جتا}60^{5} - \text{ت جا}60^{5} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ت} = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\text{ت})$

ب) الأيمن $= \dfrac{[(1 + \sqrt{3}\text{ت})^{2}]^{2}[(1 + \text{ت})^{2}]^{4}}{(\text{جتا }-100^{5} + \text{ت جا }-100^{5})^{3}}$

$= \dfrac{(1 + 2\sqrt{3}\text{ت} - 3)^{2}(1 + 2\text{ت} + \text{ت}^{2})^{4}}{\text{جتا }-300^{5} + \text{ت جا }-300^{5}} = \dfrac{(2\sqrt{3}\text{ت} - 2)^{2} \times 2^{4}\text{ت}^{4}}{\text{جتا }60^{5} + \text{ت جا }60^{5}}$

$= \dfrac{(4 \times 3\text{ ت}^{2} - 8\sqrt{3}\text{ت} + 4) \times 16}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}} = \dfrac{(-8 - 8\sqrt{3}\text{ت}) \times 16}{\dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\text{ت})}$

$$= \frac{-8(1+\sqrt{3}\,ت)\times 16}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,ت)} = -8 \times 16 \times 2 = -256$$

د) الأيمن $= \frac{(جتا 30^5 + ت جا 30^5)^5 (جتا -45^5 + ت جا -45^5)^6}{(جتا 2\times75^5 + ت جا 2\times75^5)}$

$$= \frac{(جتا 30^\circ + جتا 30^\circ)^5 (جتا -45\times6 + ت جا -45\times6)}{جتا 150^5 + ت جا 150^5}$$

$$= \frac{(جتا 150^5 + ت جا 150^5)(جتا -270^5 + ت جا -270)^5}{(جتا 150^5 + ت جا 150^5)}$$

$$= جتا 270^5 + ت جا 270^5 = (0 + ت \times 1) = ت$$

---

64 أوجد الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الآتية باستخدام الصورة الجبرية:

أ) 8ت   ب) $\frac{1+ت}{\sqrt{2}}$ جـ) 9−40ت

د) $\frac{8(1+ت)}{(1+ت)}+15$ هـ) 15+8ت   و) $1-2ت-2ت^2+2ت^3$

الحــل

بفرض أن $\sqrt{8ت}$ = س + ت ص بالتربيع.

$س^2 - ص^2 + 2س ص ت = 8 ت$

$\therefore س^2 - ص^2 = 0$ ....(1)

2 س ص $= 8$ ....(2) بتربيع (1)، (2) ثم الجمع تحصل على

$س^2 + ص^2 = 8$ ....(3)

$س^2 - ص^2 = 0$ ....(1) بالجمع

$\therefore 2س^2 = 8$ $\therefore س^2 = 4$ $\therefore س = \pm 2$

بالتعويض عن $س^2$ في رقم (3)

$\therefore 4 + ص^2 = 8$ $\therefore ص^2 = 4$ $\therefore ص = \pm 2$

الجذرين هما = $\pm$ (2 + 2ت)

ب) حل بنفس الأسلوب.

جـ) حل بنفس الأسلوب.

د) $\frac{8(1-ت)}{(1+ت)} + 15 = \frac{8(1-ت)^2}{1+1} + 15$ بالضرب × مرافق المقام

$= 4\,(1-2ت + ت^2) + 15 = 15- 8ت$

$\therefore$ بفرض 15−8ت = س + ت ص بالتربيع.

$\therefore$ $س^2 - ص^2 = 15$ .... (1)

2س ص = −8 .... (2)

بتربيع (1) ، (2) ثم الجمع $\therefore س^2 + ص^2 = 225 + 64 = 289$

$\therefore$ $س^2 + ص^2 = 17$ (3)

بجمع (1)، (3) $\therefore$ $2س^2 = 32$ بطرح (1) من (3) $\therefore$ $2ص^2 = 2$

$س^2 = 16$ $ص^2 = 1$

س = ± 4 ص = ± 1

$\therefore$ الجذريين التربيعيين = $\pm$ (4 − ت)

هـ) بنفس الطريقة الناتج = $\pm$ (4 + ت)

و) 1 − 2ت − $2ت^2$ + $2ت^3$ = 1 − 2 ت + 2 − 2ت

= 3−4ت وبنفس الطرق السابقة.

---

5 محـلـول كمثـال.

---

66 أوجـد قيمــة مـــا يأتـــي:

أ) $\sqrt[3]{8}$ (جتا60^5 + ت جا60^5) ب) $\sqrt[3]{-2+2ت}$ جـ) $\sqrt[4]{-4}$

د) $\sqrt[9]{-ت}$ هـ) $(1+ 3ت)^{\frac{5}{2}}$ و) $\frac{-7+ت}{1+ت}$

الحــل

أ) ∴ $\sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{8}$ (جتا $\frac{60^{5}+360^{5}ك}{3}$ + ت جا $\frac{60^{5}+360^{5}ك}{3}$) : ك ∈ ص

= 2 (جتا (20^{5}+ 120^{5}ك) + جا (20^{5}+ 120^{5}ك))

(1) عندما ك = 0

الجذر الأول = 2 (جتا 20^{5}+ ت جا20^{5})

(2) عندما ك = 1

الجذر الثاني = 2 (جتا 140^{5}+ت جا 140^{5})

(3) عندما ك = 2

الجذر الثالث = 2 (جتا 260^{5}+ ت جا 260^{5})

ب) نحول −2+ 2ت للصورة القطبية أولاًس = −2 ، ص = 2

ر = $\sqrt{4+4}$ = $\sqrt{8}$ = $2\sqrt{2}$

جتاهـ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، جاهـ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴هـ في الربع الثاني

∴ هـ = 180^{5} − 45^{5} = 135^{5}

∴ $\sqrt[3]{-2+2ت}$ = [$\sqrt[3]{8}$ ، $\frac{135^{5}+360^{5}ك}{3}$] = [$\sqrt[3]{8}$، 45^{5}+120^{5}ك]

(1) عندما ك = 0

الجذر الأول = $\sqrt[3]{8}$ (جتا45^{5} + ت جا 45^{5})

(2) عندما ك = 1

الجذر الثاني = $\sqrt[3]{8}$ (جتا 165°+ ت جا 165°)

(3) عندما ك = 2

الجذر الثالث = $\sqrt[3]{8}$ (جتا 285°+ ت جا 285°)

جـ) $\sqrt[4]{-4}$ = [$\sqrt[4]{4}$ ، $\frac{180^{\circ}+360ك}{3}$] = [$\sqrt[4]{4}$ ، 45°+ 90°ك]

(1) عندما ك = 0

الجذر الأول = $\sqrt[4]{4}$ (جتا 45° + ت جا 45°)

(2) عندما ك = 1

الجذر الثاني = $\sqrt[4]{4}$ (جتا 135° + ت جا 135°)

(3) عندما ك = 2

الجذر الثالث = $\sqrt[4]{4}$ (جتا 225° + ت جا 225°)

(4) عندما ك = 3

الجذر الرابع = $\sqrt[4]{4}$ (جتا 315° + ت جا 315°)

د) $\sqrt[9]{-ت}$ = [$\sqrt[9]{1}$ ، $\frac{270^\circ + 360^\circ ك}{9}$] = [1 ، $30^\circ + 40^\circ$ك]

(1) عندما ك = 0 ∴ الجذر الأول = [1 ، 30°]

(2) عندما ك = 1 ∴ الجذر الثاني = [1 ، 70°]

(3) عندما ك = 2 ∴ الجذر الثالث = [1 ، 110°]

(4) عندما ك = 3 ∴ الجذر الرابع = [1 ، 150°]

(5) عندما ك = 4 ∴ الجذر الخامس = [1 ، 190°]

(6) عندما ك = 5 ∴ الجذر السادس = [1 ، 230°]

(7) عندما ك = 6 ∴ الجذر السابع = [1 ، 270°]

(8) عندما ك = 7 ∴ الجذر الثامن = [1 ، 310°]

(9) عندما ك = 8 ∴ الجذر التاسع = [1 ، 350°]

هـ) محلول كمثال.

و) $\sqrt{\frac{-7+ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت}} = \sqrt{\frac{-7+7ت+ت+ت^{2}}{1+1}} = \sqrt{\frac{-6+8ت}{2}} = \sqrt{-3+4ت}$

نضع $\sqrt{-3+4ت}$ = س + ت ص بالتربيع للطرفين

$\therefore$ $-3 + 4$ت = س^2 – ص^2 + 2 س ص ت

$\therefore$ س^2 – ص^2 = -3 .... (1)

2س ص = 4 .... (2) بالتربيع. (1) ، (2)

$\therefore$ س^4 – 2س^{2}ص^2 + ص^4 = 9 .... (3)

4س^{2}ص^2 =16 .... (4) بالجمع

$\therefore$ س^4 +2س^{2}ص^2+ ص^4 = 25

$\therefore$ (س^2 + ص^2)^2 = 25 بأخذ الجذر التربيعي.

$\therefore$ س^2 + ص^2 = 5 .... (5)

$\therefore$ س^2 – ص^2 = -3 .... (1) بالجمع.

$\therefore$ 2س^2 = 2 $\Leftarrow$ س^2 = 1 $\Leftarrow$ س = ± 1

بالتعويض عن س^2 في رقم (5) $\therefore$ ص^2 = 4 $\therefore$ ص = $\pm$ 2

$\therefore$ الجذرين هما = $\pm$ (1 + 2ت)

---

67 حـل كـلاً مـن المعـادلات الآتيـة حيث ع $\in$ م:

أ) ع^3 = ت ب) ع^4= -1+ 3ت جـ) ع^3+8ت=0

د) ع^3–27=0 و) ع^5 = 1

الحــل

أ) ع^3= ت= [1،$90°$] $\Leftarrow$ ع = $\sqrt[3]{[1 ، 90°]}$ =[$\sqrt[3]{1}$، $\frac{90°+360°ك}{3}$]

$\therefore$ ع = [1 ، $30° + 120°$ك]

(1) عندما ك = 0

$\therefore$ الجذر الأول = [1 ، $30°$] = جتا $30°$+ ت جا $30°$= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + $\frac{1}{2}$ ت

(2) عندما ك = 1

$\therefore$ الجذر الثاني = [1 ، $150°$] = جتا $150°$+ ت جا $150°$ =– $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + $\frac{1}{2}$ ت

(3) عندما ك = 2

∴الجذر الثالث = [1 ، 270°] = جتا 270° + ت جا 270° = − ت

[ب] ع^4 = −1 + $\sqrt{3}$ت = [2 ، 120°] ⇐ ع = [$\sqrt[4]{2}$ ، $\frac{120^\circ + 360^\circ ك}{4}$]

∴ ع = [$\sqrt[4]{2}$ ، 30° + 90°ك]

(1) عندما ك = 0 ∴ الجذر الأول = [$\sqrt[4]{2}$ ، 30°]

(2) عندما ك = 1 ∴ الجذر الثاني = [$\sqrt[4]{2}$ ، 120°]

(3) عندما ك =2 ∴ الجذر الثالث = [$\sqrt[4]{2}$ ، 210°]

(4) عندما ك =3 ∴ الجذر الرابع = [$\sqrt[4]{2}$ ، 300°]

[ج] ع^3 = −8 ت = [8 ، 270°]

∴ ع = [2، 90° + 120°ك]

(1) عندما ك = 0 ∴ الجذر الأول = [2، 90°] = 2ت

(2) عندما ك =1 ∴الجذر الثاني = [2، 210°]

= 2 (جتا 210° + ت جا 210°)

= −($\sqrt{3}$ + ت)

(3) عندما ك = 2 ∴ الجذر الثالث = [2 ، 300°] = 1− $\sqrt{3}$ت

[د] يحل بنفس الطريقة السابقة.

[و] يحل بنفس الطريقة السابقة.

---

8 محـلـول كـمثـال.

---

69 أوجـد قيمـة س ، ص التـي تحقـق الـمعـادلات.

(أ) (س + ت ص)^2 = 45 − 28ت

(ب) (س + ت ص)^2 (ت − 3) = 5 (3ت − 1)

الحـل

[أ] س^2 − ص^2 + 2ت س ص = 45 − 28ت

$\therefore \text{س}^2 - \text{ص}^2 = 45$ .... (1)

$\therefore 2\text{س ص} = -28$ .... (2)

بالتربيع لكل من (1) ، (2)

$\therefore \text{س}^4 - 2\text{س}^2\text{ص}^2 + \text{ص}^4 = 2025$ .... (3)

$4\text{س}^2\text{ص}^2 = 784$ .... (4) **بالجمع.**

$\text{س}^4 + 2\text{س}^2\text{س}^2 + \text{ص}^4 = 2809$

$\therefore (\text{س}^2 + \text{ص}^2)^2 = 2809$ **بأخذ** $\sqrt{\quad}$

$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 53$ .... (5)

$\text{س}^2 - \text{ص}^2 = 45$ .... (1) **بالجمع**

$2\text{س}^2 = 98 \Leftarrow \text{س}^2 = 49$

$\Leftarrow \text{س} = \pm 7$

بالتعويض عن س^2 **في رقم (5)**

$49 + \text{ص}^2 = 53 \Leftarrow \text{ص}^2 = 4$

$\Leftarrow \text{ص} = \pm (2)$

[ب] $(\text{س} + \text{ت ص})^2 = \dfrac{5(3\text{ت} - 1)}{(\text{ت} - 3)}$

$= \dfrac{5(3\text{ت} - 1)}{(\text{ت} - 3)} \times \dfrac{-3 - \text{ت}}{-3 - \text{ت}}$

$= \dfrac{5(-9\text{ت} + 3 - 3 + \text{ت})}{10}$

$= \dfrac{-8\text{ت}}{2}$

$\text{س}^2 - \text{ص}^2 + 2\,\text{ت س ص} = -4\,\text{ت}$

أكمل الباقي أنت.

---

10 مـحـلـول كـمـثـال.

11 مــحــلــول كـمـثــال.