تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن

http://ye-thirdsecondr.blogspot.com

الضـــرب فـي الصـــورة الجبريـــة

للأعـــداد المركبـــة

تعريـف:

إذا كان ع$_1$ = (س$_1$+ ت ص$_1$) × ع$_2$(س$_2$+ ت ص$_1$)

فـإن: ع$_1$. ع$_2$ = (س$_1$+ ت ص$_1$) × (س$_2$+ ت ص$_2$) ،

= س$_1$ س$_2$+ ت س$_1$ ص$_2$+ ت ص$_1$ س$_2$+ ت^{2}س$_1$ ص$_2$

= س$_1$ س$_2$ + ت س$_1$ص$_2$+ ت ص$_1$س$_2$ − س$_1$ ص$_2$

ع$_1$ × ع$_2$= (س$_1$ س$_2$− ص$_1$ ص$_2$)+ ت(س$_1$ ص$_2$ + ص$_1$ س$_2$)

مثـــال: أوجد ناتج:

(1) (4−3ت) .(2+ 5ت)

(2) (2 + $\sqrt{-9}$) × (−3 $\sqrt{25}$) × (1+ ت^7)

(3) (1 + $\sqrt{3}$ ت) × ($\sqrt{3}$ − 5ت)

(4) (1− 3ت)^2

الحـــل:

(1) = 6−8 ت + 15ت − 20ت^2

= 6−8 ت + 15ت + 20= (26+ 7ت)

(2) = (2+3ت) × (5−3ت) × (1− ت)

= (6−10ت + 9ت + 15) × (1− ت)

= (21− ت) × (1− ت)

= 21 − 21ت − ت − 1 = (20− 22ت)

(3) (1 + $\sqrt{3}$ ت) × ($\sqrt{3}$ − 5ت)

= √3 − 5ت + 3ت + 5 √3

= (6 √3 − 2ت)

(4) (1−3ت)^{2} = 1−6ت + 9ت^{2}

= 1− 6ت − 9

= (−8 − 6ت)

مثـــال: حل المعادلة

(س+ 3ت) (ص− ت) − 9 = 7 ت

الحـــل

∴ س ص − ت س + 3تص + 3 − 9 = 7ت

∴ س ص− تس + 3تص− 6 = 7ت

(س ص − 6)+ ت(− س + 3ص)=7 ت

الحقيقي = الحقيقي

∴ س ص − 6= 0 .... (1) ∴ ص = $\frac{6}{\text{س}}$

∴ التخيلي = التخيلي

∴ − س + 3ص = 7 ....(2)

بالتعويض عن ص في رقم (2)

∴ − س + 3 × $\frac{6}{\text{س}}$ = 7 بالضرب × (س)

∴ − س^{2} + 18 = 7س ⇐ س^{2} + 7س − 18 = 0

⇐ (س − 2) (س +9)= 0

إما س − 2 = 0 ⇐ س = 2

إما س + 9 = 0 ⇐ س = −9

مجموعة الحلول

س	2	−9
ص	3	$\frac{-2}{3}$

مثـــال: أوجد س ، ص إذا كان:

(س + ت ص) (1 − ت) + (2س + 3ت ص) (1 + ت) = 7 ت

الحـــل

∴ س − ت س + ت ص + ص + 2س + 2س ت + 3ت ص − 3ص = 7 ت

∴ (3س − 2ص) + (ت س + 4ت ص) = 7 ت

(3س − 2ص) + ت (س + 4ص) = 7ت

∴ 3س − 2ص = 0 .... (1)

س + 4ص = 7 .... (2)

بالضرب رقم (2) × − 3

−3س − 12ص = −21 .... (3)

3س − 2ص = 0 .... (1) بالجمـــع

−14ص = −14 ← ص = $\boxed{1}$

بالتعويض عن ص في رقم (1)

∴ 3س − 2 × 1 = 0

∴ 3س = 2 ∴ س = $\frac{2}{3}$

❖ خواص ضرب الأعداد المركبة الصورة الجبرية:

(1) عملية الضرب دامجـة:

7ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$ ∋ م فإن (ع$_1$. ع$_2$). ع$_3$ = ع$_1$(ع$_2$. ع$_3$) على الطالب الإثبات.

(2) الواحد الصحيح هو المحايد الضربي:

$\forall$ ع $\in$ م فإن ع × (1) = (1) × ع = ع

البرهــان:

نفرض أن ع = (س+ت ص) ونفرض أن المحايد الضربي (أ + ت ب)

∵ ع × 1 = ع

∴ (س + ت ص) . (أ + ت ب) = (س + ت ص)

∴ س أ + ت س ب + ت أ ص − ب ص = س + ت ص

∴ (س أ − ب ص) + ت (س ب + أ ص) = س + ت ص

∴ س أ − ب ص = س .... (1)	بالتعويض عن (أ) في رقم (1)
س ب + أ ص = ص .... (2)	س − ب ص = س
بالضرب رقم (1) في س والثانية في ص	∴ − ب ص = 0
∴ $س^2$ أ − ب س ص = $س^2$ ....(3)	∴ ب ص = 0 بالقسمة على (ص)
س ب ص + أ $ص^2$ = $ص^2$ ....(4) بالجمع	∴ ب = (0)
$س^2$ أ + أ $ص^2$ = $س^2$ + $ص^2$	∴ أ + ت ب = 1+0 = 1
أ ($س^2$ + $ص^2$) = $س^2$ + $ص^2$	∴ المحايد الضربي = (1، 0)
∴ أ = (1)	

(3) النظيـــــر الضـــــربي للعــــدد ع = (س+ ت ص) هـــــو : $\frac{1}{ع}$ =

$$\left(\frac{س}{س^2 + ص^2} ، \frac{-ص}{س^2 + ص^2} \right)$$

$$= \frac{س}{س^2 + ص^2} - \frac{ص}{س^2 + ص^2} ت$$

البرهــان:

نفــرض أن: (أ + ت ب) هو المعكوس الضربي للعدد (س + ت ص)

∴ (أ + ت ب) . (س + ت ص) =1

∴ أ س + أ ت ص + ب ت س − ب ص $=1$

∴ (أ س − ب ص) + ت (أ ص + ب س) $=1$

∴ أ س − ب ص = 1 .... (1)

∴ أ ص + ب س $=0$ .... (2)

بضرب المعادلة (1) في س والمعادلة (2) في ص

أ $س^2$ − ب س ص = س .... (3)

أ $ص^2$ + ب س ص = 0 .... (4)

بالجمع: ∴ أ $س^2$ + أ $ص^2$ = س ⇐ أ ($س^2$ + $ص^2$) = س

$$\therefore \text{أ} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{ص}^2}$$

بالتعويض عن أ في رقم (1).

$$\therefore \text{س} \left(\frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{ص}^2}\right) - \text{ب ص} = 1$$

$$\therefore \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2+\text{ص}^2} - \text{ب ص} = 1 \Leftarrow \text{ب ص} = \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2+\text{ص}^2} - 1$$

$$\Leftarrow \text{ب ص} = \frac{\text{س}^2 - \text{س}^2 - \text{ص}^2}{\text{س}^2+\text{ص}^2} = \frac{-\text{ص}^2}{\text{س}^2+\text{ص}^2}$$

$$\Leftarrow \text{ب} = \left(\frac{-\text{ص}}{\text{س}^2+\text{ص}^2}\right)$$

∴المعكوس الضربي للعدد س + ت ص هو $\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{ص}^2} - \frac{\text{ص}}{\text{س}^2+\text{ص}^2}\text{ت}\right)$

مثـــال: أوجد النظير الضربي لكل من:

(1) 2 − 5ت   (2) ($\sqrt{5}$ + $\sqrt{3}$ت)

(3) 2ت   (4) (1، −3)

(5) $\frac{6}{7}$ (6) $\frac{8}{9ت}$

الحــل

(1) النظير الضربي للعدد $(2 - 5ت)$ $= \left(\frac{2}{4+25} + \frac{5}{4+25}ت\right)$

$= \left(\frac{2}{29} + \frac{5}{29}ت\right)$

(2) $(\sqrt{5} + \sqrt{3}ت)$ $= \left(\frac{\sqrt{5}}{5+3} - \frac{\sqrt{3}}{5+3}ت\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}ت\right)$

(3) $2ت$ $= \left(\frac{0}{0+4} - \frac{2}{0+4}ت\right) = \left(0 - \frac{2}{4}ت\right) = -\frac{1}{2}ت$

والباقي نفسه.

❖ العـدد المرافق لعـدد مركــب:

إذا كان العدد المركب ع = (س + ت ص) فإن مرافقه هو $\bar{ع}$ = (س − ت ص):

$\bar{ع}$ يسمى مرافق ع

العدد	(5+ ت)	مرافقه	(5− ت)
	(7−8ت)	مرافقة	(7 + 8ت)
	3ت	مرافقة	− 3ت
	9	مرافقة	9

تعريف العددان المترافقــان:

هما عددان متساويان في الحقيقي ومختلفان في إشارة التخيلي ومجموعهما حقيقي صرف وضربهما حقيقي صرف.

❖ خــواص العددان المترافقــان:

(1) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي:

ع + $\bar{ع}$ = حقيقي صرف.

البـرهــان:

نفرض أن ع = (س + ت ص) ، $\bar{ع}$ = (س − ت ص)

∴ ع + $\bar{ع}$ = س + ت ص + س − ت ص

= 2 س حقيقي بحت.

(2) حاصل ضرب عددين مترافقين هو عدد حقيقي أي أن:

$ع \cdot \bar{ع}$ = حقيقي بحت.

البرهــان: $ط_1$ = (س + ت ص) ، (س − ت ص)

= $س^2$ − ت ص + ت ص + $ص^2$ = $س^2$ + $ص^2$

∴ $\boxed{ع \cdot \bar{ع} = (س^2 + ص^2)}$ حقيقي بحت

وعليه: (5 + 2 ت) . (5 − 2ت) = 25 + 4 = 29

اليمن سنـة2000:

(3) برهــن أن:

$ع - \bar{ع}$ = تخيلي

البرهــان:

نفرض أن ع = (س + ت ص)، $\bar{ع}$ = (س − ت ص)

$ط_1$ = $ع - \bar{ع}$

= (س + ت ص) − (س − ت ص)

= $\cancel{س}$ + ت ص − $\cancel{س}$ + ت ص

= 2 ت ص تخيلي بحت.

∴ $ط_1 = ط_2$

(4) المرافق لمجموع عددين مركبين= مجموع مرافقيهما

أي أن: $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$

البرهــان:

نفرض أن $ع_1$= ($س_1$+ ت $ص_1$) ، $ع_2$ = ($س_2$ + ت $ص_2$)

∴ $\bar{ع}_1$ ($س_1$ − ت $ص_1$) ، $\bar{ع}_2$ = ($س_2$ − ت $ص_2$)

$ط_1$= $\overline{ع_1 + ع_2}$ = [($س_1$ + $س_2$) + ت ($ص_1$ + $ص_2$)]

= ($س_1$ + $س_2$) − ت ($ص_1$ + $ص_2$)

$ط_2$= $\bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$ = ($س_1$ + $س_2$) − ت ($ص_1$ +$ص_2$)

∴ $ط_1 = ط_2$

(5) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهمـا:

أي أن: $\overline{ع_1 \cdot ع_2} = \bar{ع}_1 \cdot \bar{ع}_2$

البرهـان:

∵ $ع_1 \cdot ع_2 = [\,(س_1 + ت\,ص_1) \times (س_2 + ت\,ص_2)\,]$

$= [س_1 س_2 + س_1 ت\,ص_2 + ت\,ص_1\,س_2 - س\,ص_1\,ص_2]$

$= [(س_1\,س_2 - ص_1\,ص_2) + ت(س_1\,ص_2 + ص_1\,س_2)]$

∴ $\overline{ع_1 \cdot ع_2} = [(س_1\,س_2 - ص_1\,ص_2) - ت(س_1\,ص_2 + ص_1\,س_2)]$

$ط_2 = \bar{ع}_1 \cdot \bar{ع}_2 = (س_1 - ت\,ص_1) \cdot (س_2 - ت\,ص_2)$

$= [س_1\,س_2 - ت\,س_1\,ص_2 - ت\,ص_1\,س_2 - ص_1\,ص_2]$

$= [(س_1\,س_2 - ص_1\,ص_2) - ت\,(س_1 ص_2 + ص_1 س_2)]$

∴ $ط_1 = ط_2$ #

∴ ملخص ما سبق:

(1) $ع + \bar{ع}$ = حقيقي.	(2) $ع \cdot \bar{ع}$ = حقيقي.
(3) $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع}_1 + \bar{ع}_2$	(4) $\overline{ع_1 \cdot ع_2} = \bar{ع}_1 \cdot \bar{ع}_2$
(5) $\bar{\bar{ع}} = ع$	(6) $\overline{\left(\frac{1}{ع}\right)} = \frac{1}{\bar{ع}}$

مثـــال: حلل إلى عددين مركبين مترافقين:

(1) $س^2 + 1$ (2) $4س^2 + 9ص^2$

(3) 5 (4) 13

الحـــل

(1) $س^2 + 1 = س^2 - (-1)$

$= س^2 - ت^2 = (س - ت)\,(س + ت)$

(2) 4س^2 + 9ص^2 = 4س^2 − 9ص^2 ت^2

= (2س − 3ت ص) (2س + 3ت ص)

(3) 5 = 4+1 = 4 − ت = (2 + ت) (2 − ت)

(4) 13 = 9+4 = 9 − 4 ت^2 = (3 + 2ت) (2 − 3ت)

مثــال: إذ كـان ع$_1$= (3 − 2ت) ، ع$_2$ = (4 + 5ت)

أوجد (1) $\overline{\text{ع}_1+\text{ع}_2}$ (2) $\overline{\text{ع}_1\cdot\text{ع}_2}$

الحـــل

(1) ∵ ع$_1$ + ع$_2$ = (7+3ت)

∴ $\overline{\text{ع}_1+\text{ع}_2}$ = (7−3ت)

(2) ∵ ع$_1$. ع$_2$ = 12 + 15ت − 8ت + 10 = (22 + 7ت)

∴ $\overline{\text{ع}_1\cdot\text{ع}_2}$ = (22−7ت)

اليمن سنــة2001

مثــال: إذا كان ع$_1$ = (5 + ت) ، $\overline{\text{ع}_1+\text{ع}_2}$ = (8 + 7ت) أوجد ع$_2$

الحـــل:

∵ $\overline{\text{ع}_1+\text{ع}_2}$ = (8 + 7ت)

∴ ع$_1$ + ع$_2$ = (8 − 7ت)

∴ ع$_2$ = (8 − 7ت) − ع$_1$

= 8 − 7ت − 5 − ت

= (3 − 8ت)

❖ قسمة العددين المركبين في الصورة الجبرية:

عند قسمة عدد مركب على آخر نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام.

مثــال: أختصر لأبسط صورة:

(1) $\dfrac{10}{3+ت}$ (2) $\dfrac{3+2ت}{2-5ت}$ (3) $\dfrac{(1-ت).(2+ت)}{(3-2ت).(1+ت)}$

الحــل

(1) $= \dfrac{10}{3+ت} \times \dfrac{3-ت}{3-ت} = \dfrac{10(3-ت)}{9+1} = \dfrac{\cancel{10}(3-ت)}{\cancel{10}} = (3-ت)$

(2) $= \dfrac{3+2ت}{2-5ت} \times \dfrac{2+5ت}{2+5ت} = \dfrac{6+15ت+4ت-10}{4+25}$

$= \dfrac{-4+19ت}{29} = \left(\dfrac{-4}{29} + \dfrac{19}{29}ت\right)$

(3) $= \dfrac{2-2ت+ت+1}{3-2ت+3ت+2} = \dfrac{3-ت}{5+ت} \times \dfrac{5-ت}{5-ت} = \dfrac{15-3ت-5ت-1}{25+1}$

$= \dfrac{14-8ت}{26} = \dfrac{14}{26} - \dfrac{8}{26}ت = \left(\dfrac{7}{13} - \dfrac{4}{13}ت\right)$

$\boxed{\text{مثـــال:}}$ إذا كـان ل $= \dfrac{2+ت}{1+ت}$ ، م $= \dfrac{1+2ت}{1+ت}$

أثبت أن: ل ، م مترافقان ثم أحسب قيمة $\dfrac{15(ل^2+م^2)}{8ل م(ل+م)}$

الحــل

ل $= \dfrac{2+ت}{1+ت} \times \dfrac{1-ت}{1-ت} = \dfrac{2-2ت+ت+1}{2} = \left(\dfrac{3-ت}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}ت\right)$

م $= \dfrac{1+2ت}{1+ت} \times \dfrac{1-ت}{1-ت} = \dfrac{1-ت+2ت+2}{2} = \dfrac{3+ت}{2} = \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}ت\right)$

∴ ل ، م مترافقان.

∴ المقدار $= \dfrac{15\left[\left(\frac{3+ت}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-ت}{2}\right)^2\right]}{8 \times \frac{3-ت}{2} \times \frac{3+ت}{2}\left[\frac{3}{2} - \cancel{\frac{1}{2}}ت + \frac{3}{2} + \cancel{\frac{1}{2}}ت\right]}$

المقدار = $\dfrac{\dfrac{15[\text{9−1−6ت+9−1+6ت}]}{4}}{8\times\dfrac{10}{4}\left(\dfrac{6}{2}\right)} = \dfrac{15\times4}{4\times5\times3} = (1)$

مثـــال: **إذا كانت** $\dfrac{\text{س + 2 + ت ص}}{\text{س − 1 − ص ت}} = \dfrac{\text{1 + 4ت}}{\text{ت − 1}}$ **أوجد قيم س ، ص**

الحــل

∵ $\dfrac{\text{س + 2 + ص ت}}{\text{س − 1 − ص ت}} = \dfrac{\text{1 − 4ت}}{\text{ت − 1}} \times \dfrac{\text{− ت − 1}}{\text{− ت − 1}}$

$= \dfrac{\text{− ت − 1 + 4 − 4ت}}{2}$

$\dfrac{\text{س + 2 + ص ت}}{\text{س − 1 − ص ت}} = \dfrac{\text{3 − 5ت}}{2}$

2س + 4 + 2ص ت = 3س − 3 − 3ص ت − 5 ت س + 5ت − 5ص

2س + 4 + 2ص ت − 3 س + 3 + 3 ص ت +5ت س −5ت + 5ص = 0

− س + 7 + 5 ت ص + 5 ص + 5ت س −5 ت =0

(− س + 7 + 5ص) + ت (5ص + 5س − 5) =0

− س + 7 + 5 ص =0 ....(1)

+ 5س − 5 + 5ص = ...(2) بالطرح:

∴ −6س + 12 =0 ∴ س = 2

بالتعويض عن س في رقم (1)

−2 + 7 + 5 ص = 0 ⇐ 5 ص = −5 ⇐ ص = −1

اليمن سنة 1994

مثـــال: **إذا كان س + ت ص =** $\dfrac{\text{1 + ت}^5}{\text{2 − ت}^9} + \dfrac{\text{1 + ت}^7}{\text{1 + ت}}$

أثبت أن: $\text{س} = \frac{1}{5}$ ، $\text{ص} = \frac{-2}{5}$

الحـــل

$$\because \text{س} + \text{ت ص} = \frac{1+\text{ت}}{2-\text{ت}} + \frac{1-\text{ت}}{1+\text{ت}}$$

$$= \frac{1+\text{ت}}{2-\text{ت}} \times \frac{2+\text{ت}}{2+\text{ت}} + \frac{1-\text{ت}}{1+\text{ت}} \times \frac{1-\text{ت}}{1-\text{ت}}$$

$$= \frac{2+\text{ت}+2\text{ت}-1}{5} + \frac{1-\text{ت}-\text{ت}-1}{2}$$

$$= \frac{1+3\text{ت}}{5} + \frac{-2\text{ت}}{2}$$

$$\text{س} + \text{ت ص} = \frac{2+6\text{ت}-10\text{ت}}{10} = \frac{2-4\text{ت}}{10}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{2}{10} \Leftarrow \text{س} = \boxed{\frac{1}{5}} \qquad \therefore \text{ص} = -\frac{4}{10} \Leftarrow \text{ص} = \boxed{-\frac{2}{5}}$$

مثـــال: أوجد قيم س ، ص إذا علمت أن:

$$(\text{س} + \text{ت ص}) \, . \, (3 + \text{ت}) + (1 + \text{ت}) = 0$$

الحـــل

$$\therefore (\text{س} + \text{ت ص})(3 + \text{ت}) = -1 - \text{ت} \quad \therefore (\text{س} + \text{ت ص}) = \frac{-1-\text{ت}}{3+\text{ت}} \times \frac{3-\text{ت}}{3-\text{ت}}$$

$$= \frac{-3+\text{ت}-3\text{ت}-1}{10} = \frac{-4-2\text{ت}}{10} = \left(\frac{-2}{5} - \frac{1}{5}\text{ت}\right)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-2}{5} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{-1}{5}$$

مثـــال: إذا كان $(\text{أ} + \text{ت ب}) \, . \, (\text{ت} - 1) = 2 + \text{ت}$

أثبت أن $2\,(\text{أ}^3 + \text{ب}^3) = 7$

الحـــل:

$\therefore$ (أ+ ت ب) $= \dfrac{2+ت}{1-ت} \times \dfrac{1+ت}{1+ت} = \dfrac{2+2ت+ت-1}{2}$

$= \dfrac{1+3ت}{2}$ $\therefore$ (أ+ ت ب) $= (\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}$ ت$)$

$\therefore$ أ $= \boxed{\dfrac{1}{2}}$ ، ب $= \boxed{\dfrac{3}{2}}$

$\therefore$ $ط_1 = 2$ (أ^3+ ب^3) $= 2\ (\dfrac{1}{8} + \dfrac{27}{8}) = \cancel{2} \times \dfrac{28}{\cancel{8}} = 7$

$\therefore$ $ط_1 = ط_2$

مثـــــال: إذا كـان (2+ ت) $ع_1$ – $3ع_2$=3–5ت أوجد قيمـة $ع_1$، $ع_2$ حيث $ع_1$، $ع_2$ مترافقان.

الحـــل:

نفرض أن $ع_1$ = (س+ ت ص)، $ع_2$ = (س– ت ص)

(2+ ت) (س+ ت ص) –3 (س– ت ص) = 3–5ت

$\therefore$ 2س+ 2ت ص + ت س– ص – 3س+ 3 ت ص = 3–5ت

$\therefore$ (– س – ص)+ ت (س + 5ص)= 3– 5ت

$\therefore$ – س – ص= 3 .... (1)

$\therefore$ س+ 5ص = –5 .... (2) بالجمع.

4ص= –2 $\therefore$ ص = $-\dfrac{1}{2}$

بالتعويض عن ص في رقم (1) $\therefore$ – س+ $\dfrac{1}{2}$ = 3 $\Leftarrow$ س= $-\dfrac{5}{2}$

$\therefore$ $ع_1 = (-\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}$ ت$)$ ، $ع_2 = (-\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}$ ت$)$

مثـــال:

أوجد قيمة س ، ص الحقيقتين إذا كان $\dfrac{س + 2ت ص}{2-ت} + \dfrac{3س + ت ص}{2+ت} = \dfrac{23}{5}$

الحـــل

$$\frac{\text{س} + 2\text{ت ص}}{2 - \text{ت}} \times \frac{2 + \text{ت}}{2 + \text{ت}} + \frac{3\text{س} + \text{ت ص}}{2 + \text{ت}} \times \frac{2 - \text{ت}}{2 - \text{ت}} = \frac{23}{5}$$

$$\therefore \frac{2\text{س} + \text{ت س} + 4\text{ت ص} - 2\text{ص}}{5} + \frac{6\text{س} - 3\text{ت س} + 2\text{ت ص} + \text{ص}}{5} = \frac{23}{5}$$

(8س − ص) + ت (−2س + 6ص) = 23

∴ 8س − ص = 23 .... (1)

−2س + 6ص =0 .... (2)

بضرب رقم (1) × (+2) والثانية × (8)

∴ 16س − 2ص = 46 .... (3)

−16س + 48ص = 0 .... (4) بالجمع

46ص = 46 ⇐ ص = (1)

بالتعويض عن ص في رقم (2)

−2 س + 6 = 0 ⇐ −2س = −6

⇐ س = (3)

مجموع الحلول = {3 ، 1}

مثال:

أثبت أن $\bar{\bar{\text{ع}}}$ = ع

البرهان:

نفرض أن ع = (أ + ت ب) ⇐ $\bar{\text{ع}}$ = أ − ت ب

⇐ $\bar{\bar{\text{ع}}}$ = أ+ ت ب

⇐ $\bar{\bar{\text{ع}}}$ = ع

مثال: حل المعادلة: ع + 3 ت $\bar{\text{ع}}$ = 7 + 5ت

الحل

نفرض أن ع = (س + ت ص) ، $\bar{\text{ع}}$ = (س − ت ص)

∴ (س+ ت ص) + 3ت (س− ت ص) = (7 + 5ت)

∴ س + ت ص+ 3 ت س + 3ص = 7 + 5ت

∴ (س+ 3ص) + ت (ص + 3س) = 7 + 5ت

∴ س + 3 ص= 7 .... (1)

∴ 3س + ص= 5 .... (2)

بالضرب × رقم (1) في (−3)

∴ − 3س − 9ص = −21 ....(3)

∴ 3س+ ص= 5 ....(4) بالجمع

− 8 ص = −16 ص= 2

بالتعويض عن ص في رقم (1)

س+ 6 = 7 ∴ س= $\boxed{1}$ ∴ ع = (2+1ت)

مثال: حل المعادلة

ع^2 − 4 عَ + 13 =0

الحل

نفرض أن ع = (س+ ت ص)، عَ = (س − ت ص)

∴ (س+ ت ص)^2 − 4 (س+ ت ص)+ 13= 0

س^2 + 2 ت س ص− ص^2− 4س+ 4 ت ص+ 13= 0

(س^2− ص^2− 4س+ 13) + ت (2 س ص + 4 ص) = 0

∴ س^2− ص^2 −4س + 13= 0 .... (1)

∴ 2س ص + 4 ص = 0 .... (2)

ومنها 2ص (س + 2) = 0

إما 2ص = 0 ⇐ ص = 0   إما س + 2 = 0 ⇐ س = −2

(1) عندما ص = 0 ∴ س^2 − 4س + 13 = 0

∵ أ = 1 ، ب = −4 ، جـ = 13

Δ = ب^2 − 4 أ جـ = 16 − 4 × 1 × 13 = −36

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{2أ}$ = $\frac{4 \pm 6ت}{2}$ = 2 ± 3ت

(2) عندما س = −2

∴ 4 − ص^2 + 8 + 13 =0 ∴ ص^2 = 25 ∴ ص = ±5

س	−2	2 ± 3ت
ص	±5	0

مثـــال: حل المعادلة: ع^2= ($\bar{ع}$)^2 مبيناً أن ع حقيقي بحت أو ع تخيلي بحت.

الحـــل

∵ ع^2 − ($\bar{ع}$)^2 = 0

∴ (س + ت ص)^2 − (س − ت ص)^2= 0

∴ س^2+ 2ت س ص− ص^2 − (س^2− 2ت س ص− ص^2) =0

∴ س^2 + 2ت س ص− ص^2− س^2+ 2ت س ص+ ص^2 =0

∴ 4 ت س ص = 0 بالقسمة على (4ت)

∴ س ص =0

أمـــا س= 0	أو ص =0
(1) عندما س = 0	(2) عندما ص = 0
ع = س + ت ص	∴ ع = س حقيقي بحت
ع = 0 + ت ص	
ع = ت ص تخيلي بحت	

مثـــال: إذا كان:

$\sqrt{س+ ت ص}$= أ + ب ت أوجد قيمة المقدار $\sqrt{س− ت ص}$

الحـــل

$\because$ س + ت ص = أ + ب ت

$\therefore \sqrt{-\text{س} - \text{ت ص}} = \sqrt{-(\text{س} + \text{ت ص})}$

$= \sqrt{(\text{س} + \text{ت ص})}\ \text{ت} \qquad = (\text{أ} + \text{ب ت})\ \text{ت}$

$= (\text{أ ت} - \text{ب}) \qquad = -\text{ب} + \text{أ ت}$

مثــال: إذا كان ن $\in$ ص $\oplus$

أثبت أن: $\dfrac{(1+\text{ت})^{\text{ن}}}{(1-\text{ت})^{\text{ن}-2}} = 2\text{ت}^{\text{ن}+3}$ ومنها أثبت أن $\dfrac{2(1-\text{ت})^{83}}{(1+\text{ت})^{85}} = 1$

الحــل

$$\text{ط}_1 = \frac{(1+\text{ت})^{\text{ن}}}{(1-\text{ت})^{\text{ن}} \times (1-\text{ت})^{-2}} = \frac{(1+\text{ت})^{\text{ن}}(1+\text{ت})^{2}}{(1-\text{ت})^{\text{ن}}}$$

$$\text{ط}_1 = \frac{(1+\text{ت})^{\text{ن}}(1-\text{ت})^{2}}{(1-\text{ت})^{\text{ن}}} = \left(\frac{1+\text{ت}}{1-\text{ت}}\right)^{\text{ن}} (1-\text{ت})^{2}$$

$$\text{ط}_1 = \left(\frac{1+\text{ت}}{1-\text{ت}} \times \frac{1+\text{ت}}{1+\text{ت}}\right)^{\text{ن}} (1-2\text{ت}-1)$$

$$\text{ط}_1 = \left(\frac{1+\text{ت}+\text{ت}-1}{2}\right)^{\text{ن}} \times -2\text{ت} = (\text{ت})^{\text{ن}} \times -1 \times 2 \times \text{ت}$$

$$\text{ط}_1 = \text{ت}^{\text{ن}} \times \text{ت}^{2} \times 2 \times \text{ت} = 2\text{ت}^{\text{ن}+3} \quad \therefore \text{ط}_1 = \text{ط}_2$$

$$\therefore \frac{2(1-\text{ت})^{83}}{(1+\text{ت})^{85}} = \frac{2}{2\text{ت}^{88}} = \frac{2}{2\times 1} = 1$$

حل تمارين ومسائــل (1-3) صـ (23)

61 أوجــد ناتــج مــا يلـــي:

(أ) $(7 - 5\text{ت})(3 + \text{ت})$ (ب) $(2، -4)(-5، 6)$

(جـ) $(4 + \text{ت})^{2}(\text{ت} - 1)$ (د) $(2 + 3\text{ت})(7 + 4\text{ت})$

(هـ) $\dfrac{1}{4 - 3\text{ت}}$ (و) $\dfrac{3 + 4\text{ت}}{4 - 5\text{ت}}$ (ز) $\dfrac{4 - 5\text{ت}}{7\text{ت}}$

الحـــل

أ) الناتج $= 21 + 7\text{ت} - 15\text{ت} - 5\text{ت}^2 = 21 - 8\text{ت} + 5 = 26 - 8\text{ت}$

ب) الناتج $= (4-2\text{ت})\ (-6+5\text{ت}) = -12+10\text{ت}+20\text{ت} - 24\text{ت}^2$

$= -10 + 32\text{ت} + 24 = 14 + 32\text{ت}$

ج) $= (4+\text{ت})^2(\text{ت}-1) = (8+16\text{ت} + \text{ت}^2)\ (\text{ت}-1) = (8+15\text{ت})\ (\text{ت}-1)$

$= 15\text{ت}-15+ 8\text{ت}^2-8\text{ت} = 7\text{ت}-15-8 = -23+ 7\text{ت}$

د) $(2+3\text{ت})\ (3-2\text{ت})\ (4+7\text{ت}) = (9-4\text{ت}^2)\ (4+7\text{ت})$

$= (4+9)\ (7+4\text{ت}) = 13(4+7\text{ت}) = 52+91\text{ت}$

هـ) $\dfrac{1}{4-3\text{ت}} \times \dfrac{4+3\text{ت}}{4+3\text{ت}} = \dfrac{4+3\text{ت}}{16+9} = \dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}\text{ت}$

$\dfrac{3+4\text{ت}}{4-5\text{ت}} \times \dfrac{4+5\text{ت}}{4+5\text{ت}} = \dfrac{12+15\text{ت}+16\text{ت}+20\text{ت}^2}{25+16} = \dfrac{-8+31\text{ت}}{41}$

ز) $\dfrac{4-5\text{ت}}{7\text{ت}} \times \dfrac{-\text{ت}}{-\text{ت}} = \dfrac{-4\text{ت}+5\text{ت}^2}{-7\text{ت}^2} = \dfrac{-5-4\text{ت}}{7}$

---

2 مـحـلـول كمثـال.

---

63 أوجـد مرافـق كـل مـن الأعـداد المركبـة التاليـة:

أ) ت^3 ب) $\sqrt{-1} - 3$ جـ) $2 + \sqrt{-9}$

د) -3 هـ) 11ت و) $\sqrt{-2} + 3$

ز) $\dfrac{1}{\text{ت}}$

الحـــل

[أ] $\text{ت}^3 = -\text{ت}$ المرافق ت [ب] $\sqrt{-1} - 3 = -3 + \text{ت}$ المرافق $-3 - \text{ت}$

[ج] $2 + \sqrt{-9} = 2 + 3\text{ت}$ المرافق $2 - 3\text{ت}$ [د] -3 المرافق -3

---

4 مـحـلـول كمثـال.

---

65 ليكــن: $\text{ع}_1 = 2 + \text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = 2 - 5\text{ت}$

أوجــد:

(أ) $ع_1ع_2$ (ب) $\overline{ع_1ع_2}$ (جـ) $\overline{ع}_1 + \overline{ع}_2^2$ (د) $ع_1$ ÷ $ع_2$

(هـ) $\overline{ع}_1ع_2 ÷ ع_1$ (و) $\overline{ع_1ع_2}$

الحـــل

[أ] $ع_1 ع_2 = (2 + ت)\,(5-2ت) = 4 - 10ت + 2ت - 5ت^2 = 9-8ت$

[ب] $\overline{ع_1ع_2} = 9+8ت$ وباقي المسائل بنفس الطريقة.

$\boxed{66}$ إذا كـــان $\bar{ع}$ مرافـق ع أثبـت أن:

(أ) $(\bar{\bar{ع}}) = ع$ (ب) $ع^2 + (\bar{ع})^2 =$ عدد حقيقي

(جـ) $\frac{ع}{\bar{ع}}$ ، $\frac{\bar{ع}}{ع}$ مترافقان (د) $(\frac{1}{ع})^/ = \frac{1}{\bar{ع}}$

الحـــل

بفرض ع= س + ت ص ، $\bar{ع}$ = س − ت ص

[أ] $\bar{\bar{ع}} = (\bar{ع})^/ = (س - ت ص)^/ = س + ت ص = ع$

[ب] $ع^2 + \bar{ع}^2 = (س + ت ص)^2 + (س - ت ص)^2$

$= س^2 + 2س ص ت + ت^2ص^2 + س^2 - 2ت ص س + ت^2 ص^2$

$= 2س^2 - ص^2 - ص^2 = 2س^2 - 2ص^2 \in ح$ (حقيقي صرف)

[جـ] $\frac{ع}{\bar{ع}} = \frac{ع \times ع}{\bar{ع} \times ع} = \frac{(س + ت ص)^2}{س^2 + ص^2} =$

$= \frac{س^2 + 2 س ص ت + ت^2ص^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - ص^2}{س^2 + ص^2} + \frac{2س ص ت}{س^2 + ص^2}$ (1)

$\frac{\bar{ع}}{ع} = \frac{\bar{ع}^2}{ع \bar{ع}} = \frac{(س - ت ص)^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - 2 س ص ت + ت^2ص^2}{س^2 + ص^2} = \frac{س^2 - ص^2}{س^2 + ص^2} - \frac{2 س ص ت}{س^2 + ص^2}$ (2)

من (1) ، (2) $\therefore$ ع ÷ $\bar{ع}$ ، $\bar{ع}$ ÷ ع مترافقان.

[د] $(\frac{1}{ع})^/ = (\frac{\bar{ع}}{ع \bar{ع}})^/ = (\frac{س - ت ص}{س^2 + ص^2})^/ = \frac{س + ت ص}{س^2 + ص^2}$ (1)

$\frac{1}{\bar{ع}} = \frac{ع}{ع \bar{ع}} = \frac{س + ت ص}{س^2 + ص^2}$ (2)

من (1) ، (2) $\therefore \left(\frac{1}{ع}\right)' = \frac{1}{ع}$

---

67 لتكن أ = $\frac{1-2ت}{1-3ت}$ ، ب = $\frac{2-ت}{3-ت}$ أثبت أن أ ، ب عددان مترافقان ثم أوجد قيمة: $25\left(أ^2 + ب^2 - 48\,أ\,ب\right)$

الحـــل

أ = $\frac{1-2ت}{1-3ت} \times \frac{1+3ت}{1+3ت} = \frac{1+3ت-2ت-6ت^2}{1+9} = \frac{7+ت}{10}$ (1)

ب = $\frac{2-ت}{3-ت} \times \frac{3+ت}{3+ت} = \frac{6+2ت-3ت-ت^2}{1+9} = \frac{7-ت}{10}$ (2)

من (1) ، (2) $\therefore$ أ ، ب مترافقـــان.

ثانياً: $25\left(أ^2+ب^2-48أب\right) = 25\left(\frac{(7+ت)^2}{100} + \frac{(7-ت)^2}{100} - \frac{48(7+ت)(7-ت)}{100}\right)$

$= \frac{25}{100}\left(49 + 14ت + ت^2 + 49 - 14ت + ت^2 - 48(49 + 1)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(49 - 1 + 49 - 1 - 48 \times 50\right)$

$= \frac{1}{4}\left(48 + 48 - 48 \times 50\right) = \frac{48}{4}\left(1 + 1 - 50\right)$

$= 120 \times -48 = -576$

---

68 مـحـلـول كـمـثــال.

---

69 إذا كـــان ع = $\frac{1-ت}{2+ت}$ أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد $\frac{ع+1}{ع}$

الحـــل

ع = $\frac{1-ت}{2+ت} \times \frac{2-ت}{2-ت} = \frac{2-ت-2ت+ت^2}{4+1} = \frac{1-3ت}{5}$

$\therefore \frac{ع+1}{ع} = \frac{\left[\frac{1-3ت}{5}\right]+1}{\frac{1-3ت}{5}} \times \frac{5}{5} = \frac{1-3ت+5}{1-3ت} = \frac{6-3ت}{1-3ت} \times \frac{1+3ت}{1+3ت}$

$= \frac{6+18ت-3ت-9ت^2}{1+9} = \frac{15+15ت}{10} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}ت$

الحقيقي = $\frac{3}{2}$ ، التخيلي = $\frac{3}{2}$

---

610 أثبت أن: $\left[\frac{3-ت}{3+ت}\right] + \frac{3+ت}{3-ت} = 1$

الحــل

الأيمن $= \frac{\sqrt{3} - \text{ت}}{\sqrt{3} + \text{ت}} \times \frac{\sqrt{3} - \text{ت}}{\sqrt{3} - \text{ت}} + \frac{\sqrt{3} + \text{ت}}{\sqrt{3} - \text{ت}} \times \frac{\sqrt{3} + \text{ت}}{\sqrt{3} + \text{ت}}$

$= \frac{3 - 2\sqrt{3}\,\text{ت} - 1}{4} + \frac{3 + 2\sqrt{3}\,\text{ت} - 1}{4}$

$= \frac{4}{4} = 1$ $\therefore$ الأيمن = الأيسر

---

11 مــحــلــول كـمـثــال.