جامعة الشام الخاصة　　　　　　　　　　مقرر بحوث العمليات

المحاضرة الثاني　　　　　　　　　　　　التاريخ:

البرمجة الخطية

تعريف البرمجة الخطية:

إن تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسالة ما لبلوغ هدف معين أما تعبير خطية فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صيغة رياضية سهلة

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والاقتصادية والعسكرية وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التقني الذي ساعد على تطوير الحاسبات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة وتعد أيضا الأسلوب المساعد على حسن انتقاء القرار وإقرار البرنامج الأفضل للفعاليات المستقلة بعد الأخذ بعين الاعتبار المصادر المتاحة

مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في مجالات كثيرة منها

1- حل مسائل توزيع الإنتاج عند تعدد الطرق، وذلك حسب زمن الإنتاج وحسب الزمن المتوفر لكل آلة للوصول إلى أكبر ربح

2-حل مسائل توظيف رؤوس الأموال المحددة في قضايا تخزين المواد للإقلال من الخسائر

3- حل المسائل المتعلقة بمعرفة أي القطع يستحسن انتاجها وأيها يستحسن شراؤها للحصول على أكبر ربح

4- حل مسائل الاستفادة من حجم أو مساحة ما عند تقسيمها إلى عدد من القطع بأشكال وقياسات مختلفة

5- حل مسائل تنظيم الإنتاج كي يتلاءم مع مقدار البيع

6-إيجاد الموقع الاقتصادي لمعمل يراد إنشاءه لتزويد عدد من المستودعات بإنتاجه

7- حل مسائل مزج عدد من المركبات عند إعداد السبائك الدهانات للحصول على أكبر وفر وتعين كمية كل عنصر يدخل في تركيب المادة

8- في مجالات النقل والتوزيع والتخصيص ------ الخ

شروط استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في حل المسائل الاقتصادية التي تعود إلى برامج رياضية تتصف بما يلي

1- **الهدف:** يجب أن يكون للمسالة هدف محدد أو غاية يراد الوصول إليها مثل تامين ربح أعظمي تامين كلفة اصغرية أو توفير أعظمي بالوقت أو الجهد

2- **المتغيرات:** أي هناك عدد من المجاهيل التي يجب تحديد قيمتها للوصول إلى الهدف المطلوب حيث إن هذه المجاهيل قد تكون كميات إنتاج لمنتجات معينة أو ساعات عمل في أقسام معينة أو مبالغ من المال مخصصة لغاية معينة أو غير ذلك

1- علاقات تأثير: المقصود بعلاقات التأثير نوضحه من خلال المثال التالي في مصنع معين إذا زاد إنتاج أحد المنتجات فان ذلك سيؤدي إلى إنقاص الإنتاج من المنتجات الأخرى أو إلى زيادة في ما يخصص للمنتجات الأخرى من جهود إضافية

2- القيود: هناك شروط يجب أن تحققها هذه المجاهيل بغض النظر عن مردودها من حيث الغاية التي يجب تحقيقها فمثلا إذا كان أحد المجاهيل يعبر عن كمية منتجة فيشترط أن لا يكون سالبا وقد يفترض فيه أن لا يقل عن كمية معينة بسبب ارتباطات معينة للمصنع وقد يفترض فيه أن لا يزيد عن كمية معينة بسبب حجم الطلب أو غير ذلك

3- البدائل: يجب أن يكون هناك عدة طرق لحل المسالة وذلك من اجل اختيار الطريقة المناسبة لتحقيق الهدف وفي حال عدم وجود بدائل فلا يوجد خيارات أمام الإدارة

فرضيات البرمجة الخطية:

1- **الخطيـة:** تعنـي أن العلاقات بين المتغيرات سواء كانت تـابع الهدف أو القيـود يجب أن تكون خطية وهذا يعني أن أجزاء التعابير لمسالة البرمجة الخطية لا تحوي على

- عمليات ضرب أو قسمة بين المتغيرات
- واحد أو أكثر من المتغيرات مرفوع لقوة
- الإضافية وتشمل كافة قيود الدالة على الموارد وهي تعتبر من الناحية الإنتاجية عامة عند إهمال الزمن اللازم لتجهيز الآلة من إنتاج سلعة إلى أخرى إلا أنها تكون صالحة دائما

2- **أرقام حقيقية:** يجب القبول بان تكون النتائج أرقام حقيقية على الرغم من انه في الواقع هذا غير منطقي في كثير من الحالات فمثلا ليس من المنطق أو الصحيح أن نقول أننا نحتاج 2.4 عامل لإنتاج وحدة واحدة أو إن سعة الإنتاج المطلوبة من المنتج X هي 11.3 وحدة ولذلك سنقبل في البداية بهذه الفرضية وعند وجود قيود جديدة يشترط أن تكون قيمة المتغيرات أرقام صحيحة فسيتم معالجتها بأسلوب أخر وهو ما نسميه بالبرمجة الصحيحة

3- **عدم السلبية:** تشير هذه الفرضية إلى أن قيم المتغيرات في مسالة البرمجة الخطية يجب أن تكون غير سالبة أي موجبة وهذه فرضية ضرورية لكي تكون المسالة عملية واقعية فلا يمكن مثلا أن يكون الإنتاج كميات سالبة ومن اجل ذلك فان كافة مسائل البرمجة الخطية تحوي على قيود تدل على عدم سلبية المتغيرات وسوف نسميها محددات عدم السلبية لنميزها عن القيود الأخرى

مكونات نموذج البرمجة الخطية:

نموذج البرمجة الخطية مكون من

1- **متغيرات القرار:** هي عدد من المتغيرات التي يجب أن تحدد قيمها للوصول إلى الهدف ونرمز لها بـ ($x_1, x_2, ---- x_n$)

تعريف المتغير: هو x مجهول يأخذ قيمة متغيرة لا تستطيع مسبقا أن نحدد هذه القيمة مع ملاحظة أن المتغير يكون أثناء بناء النموذج وليس بعد حل النموذج لان المتغير بعد حل النموذج يصبح قيمة معلومة

2- **دالة الهدف:** المقصود بدالة الهدف هي الوصول إلى هدف معين زيادة الأرباح أو إنقاص التكاليف ونعبر عنها بالصيغة التالية

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

حيث c_j أعداد حقيقة تسمى بمعاملات المتغيرات وهي قيم معطاة

وتصنف دالة الهدف في بحوث العمليات إلى مجموعتين

- **تعظيم دالة الهدف:** وهو السعي إلى تحقيق أقصى ربح ممكن ويأخذ الشكل التالي

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- **تصغير دالة الهدف:** وهو السعي إلى تخفيض التكاليف لأدنى حد ممكن ويأخذ الشكل التالي

$$MinZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

3- **القيود:** المقصود بالقيود وجود علاقة بين المتغيرات ويعبر عنها رياضيا

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad ; \qquad i = 1,2,---m$$

بمتباينات وتأخذ أحدا لأشكال التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad ; \qquad i = 1,2,---m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \qquad i = 1,2,---m$$

ملاحظة:

a_{ij} تأخذ شكل مصفوفة تكون مربعة إذا كانت $i=j$ أي إذا كان عدد المتغيرات يساوي عدد القيود

i تعبر عن القيود (الصفوف)

j تعبر عن المتغيرات (الأعمدة)

ونشترط على المتغيرات أن تكون غير سالبة (قيود عدم السلبية) إن حل مسالة البرمجة الخطية يتطلب إيجاد الشعاع $X \in R^n$ الذي يحقق جميع القيود ويبلغ عنده تابع الهدف قيمته المثلى

الشكل العام لمسالة البرمجة الخطية:

تتلخص مسالة البرمجة الخطية في إيجاد القيم المثلى (الاعظمية أو الاصغرية) للتابع الخطي

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ضمن القيود

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad ; \quad i=1,2,---m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad ; \quad i=1,2,---m$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i=1,2,---m$$

حيث c_j , b_i , a_{ij} $(j=1,2,---n \quad , \quad i=1,2,---m)$ ثوابت تعين قيمها بحسب الخواص الفيزيائية للمسالة المعطاة x_{ij} متحولات القرار

بعد صياغة النموذج الخطي لمسالة ما فأننا نتوجه للبحث عن حل هذا النموذج وحتى نتمكن من تطبيق الخوارزمية نستعرض صيغتين للنماذج الخطية

1- الصيغة المعيارية:

يأخذ النموذج الخطي وفق الصيغة المعيارية الشكل التالي:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max$$

ضمن القيود

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad ; \quad i=1,2,---m$$

$$x_j \ge 0 \quad ; \quad j=1,2,---n$$

ملاحظة:

يمكن وضع أي مسالة برمجة خطية بهذا الشكل بإتباع التحويلات الأولية التالية:

- إذا كان المطلوب إيجاد القيمة الصغرى لتابع الهدف $f(x)$ فهذا يكافئ إيجاد القيمة العظمى للتابع $f(x)$

مثال(4):

أوجد القيمة الصغرى للتابع $Z=c_1x_1+c_2x_2+-----+c_nx_n$ يكافئ أوجد القيمة العظمى للتابع $Z=-c_1x_1-c_2x_2-------c_nx_n$ أي نستفيد من القاعدة $Min(-cx)=-Max(cx)$

- إذا كانت المتراجحات من الشكل (≥أكبر أو يساوي) فانه يمكن تغير اتجاهها بضرب طرفيها بـ (-1)

مثال(5):

القيد الخطي $a_1x_1+a_2x \ge b$ يكافئ $-a_1x_1-a_2x \le -b$

إن قيد المساواة يمكن تحويله إلى متراجحتين مختلفتين في الاتجاه

مثال(6):

القيد الخطي $a_1x_1+a_2x_2=b$ يكافئ $a_1x_1+a_2x_2 \ge b$ و $a_1x_1+a_2x \le b$

- إذا كان الطرف الأيسر من قيد (متراجحة) معطى بالقيمة المطلقة فانه يمكن تحويله إلى متراجحتين نظاميتين

مثال(7):

القيد الخطي $|a_1x_1 + a_2x_2| \le b$ يكافئ تماما

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b \quad \text{و} \quad -a_1x_1 - a_2x_2 \le b$$

- إذا كان أحد متحولات القرار غير مقيد بشرط عدم السلبية (أي يمكن أن يكون سالبا أو موجبا أو صفر) فإننا يمكن أن نعبر عنه بالفرق بين متحولين غير سالبين x' , x'' كما يلي $x = x' - x''$ $x' \ge 0$, $x'' \ge 0$

مثال(8):

اكتب النموذج الخطي التالي بالشكل المعياري

$$MinZ = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

ضمن القيود

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 40$$
$$x_1 + 9x_2 - 7x_3 \ge 50$$
$$5x_1 + 3x_2 = 20$$
$$|5x_2 + 8x_3| \le 100$$
$$x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2 \ge 0$$

الحل: يمكن وضع هذا النموذج بالشكل المعياري بعد إجراء التحويلات التالية:

1- القيد $|5x_1 + 8x_2| \le 100$ يكافئ القيدين
$$-5x_1 - 8x_2 \le 100$$
$$5x_1 + 8x_2 \le 100$$

2- المتحول x_3 غير مقيد بقيد عدم السلبية نستعيض عنه بالمتحولين x_3' , x_3'' حيث $x_3 = x_3' - x_3''$ حيث $x_3' \ge 0$, $x_3'' \ge 0$

3- تابع الهدف هو تابع تقليل نحوله إلى تابع تعظيم كما يلي $MaxZ = Min(-Z)$

4- القيد الثاني معطى (≥ اكبر أو يساوي) نحوله إلى (≤اصغر أو يساوي) بضرب الطرفين بـ (-1) نحصل على $-x_1 - x_2 + 7x_3 \le -50$

يصبح النموذج كما يلي

$$MaxZ = -3x_1 + 3x_2 - 7x'_3 + 7x''_3$$

ضمن القيود

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 \leq 40 \\
&-x_1 - 9x_2 + 7x'_3 - 7x''_3 \leq -50 \\
&5x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
&-5x_1 - 3x_2 \leq -20 \\
&5x_2 + 8x'_3 - 8x''_3 \leq 100 \\
&-5x_2 - 8x'_3 + 8x''_3 \leq 100 \\
&x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x'_3 \geq 0 \quad , \quad x''_3 \geq 0
\end{aligned}$$

2-الصيغة النموذجية لمسالة البرمجة الخطية:

يمكن كتابة أي مسالة برمجة خطية بالشكل النموذجي التالي: أوجد القيمة الصغرى أو العظمى للتابع

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للشروط (ضمن الشروط)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1,2,---m \quad , \quad j = 1,2,----n$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1,2,----n$$

وهنا نلاحظ إن جميع القيود من نوع مساواة ماعدا قيود عدم السلبية فإنها تبقى متراجحات وأيضا الطرف الأيمن من كل قيد مساواة يجب أن يكون غير سالب وجميع متحولات القرار غير سالبة وتابع الهدف في الشكل النموذجي يمكن ان يكون تعظيم أو تقليل

وهنا يمكن تحويل أي مسالة برمجة خطية من شكلها العام (أو المعياري) إلى الشكل النموذجي بإتباع الخطوات الآتية بالإضافة إلى التحويلات الأولية المذكورة سابقا

1-إذا كان القيد عبارة عن متراجحة ($\leq$ اصغر أو يساوي) فلتحويله إلى قيد مساواة يكفي أن نضيف إليه متحولا جديدا غير سالب

مثال(9):

القيد

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad ; \quad i = 1,2,---m \quad , \quad j = 1,2,----n$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1,2,----n$$

تكتب بالشكل

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i \quad ; \quad i = 1,2,---m \quad , \quad j = 1,2,----n$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

2- إذا كان القيد عبارة عن متراجحة (أكبر أو يساوي) فيمكن تحويله الى مساواة بطرح مجهول جديد غير سالب

يكتب على شكل مساواة

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad ; \quad i = 1,2,---m \quad , \quad j = 1,2,----n$$

يكتب بالشكل

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i \quad ; \quad i = 1,2,---m \quad , \quad j = 1,2,----n$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

نسمي المجاهيل الجديدة غير السالبة بمجاهيل الفروق

3- إذا كان الطرف الأيمن من المساواة سالبا نضرب طرفي المساواة بـ (-1)

مثال(10): اكتب النموذج التالي بالشكل النموذجي

$$MinZ = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

ضمن القيود

$$2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2$$
$$x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3$$
$$2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6$$
$$x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$$

الشكل النموذجي

$$MinZ = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

ضمن القيود

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2\\
&x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3\\
&2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6\\
&x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8\\
&(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) \geq 0
\end{aligned}$$

ملاحظة (1):

يلعب الشكل النموذجي دورا مهما في إيجاد حل مسائل البرمجة الخطية كما سنرى لاحقا عند دراسة خوارزمية السيمبلكس وهي خوارزمية تكرارية تتقارب إلى الحل الأمثل (إذا وجد) بعد عدد من التكرارات

ملاحظة (2): نستطيع استخدام المصفوفات في كتابة النماذج الخطية

$$f(x) = c.x \rightarrow (Max)\ or\ (Min)$$

ضمن الشروط الخطية

$$A.x = B$$

وشروط عدم السلبية

$$x \geq 0$$

حيث

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} ----a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ----a_{2n} \\ ------------- & \\ a_{m1} & a_{m2} ----a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{(n)} = [c_1, c_2, ----c_n]$$

$$x_{(n,1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ - \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B_{(m,1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ - \\ - \\ b_m \end{bmatrix}$$

أمثلة محلولة

1- يقوم مصنع للألبسة بإنتاج أربعة أصناف من الملبوسات (S_1, S_2, S_3, S_4) ويستخدم من اجل ذلك المواد الأولية الآتية(M_1, M_2, M_3). ترغب إدارة المصنع في دراسة التنظيم الأمثل للإنتاج خلال فترة زمنية (شهر مثلا) وتحديد الإنتاج الشهري لكل منتج من اجل تحقيق ربح أعظمي، علما بان الربح يتناسب طردا مع عدد الوحدات المباعة من المنتجات. الكميات المتوفرة من المواد الأولية والكميات اللازمة لكل منتج من المواد الأولية والربح العائد معطاة بالجدول التالي:

المواد الأولية	نوع المنتج				الكميات المتوفرة
	S_1	S_2	S_3	S_4	
M_1	1,5	1	2,4	1	2000
M_2	1	5	1	3,5	8000
M_3	1,5	3	3,5	1	5000
ربح واحدة المنتج	5,24	7,3	8,34	4,18	

جدول 1

الحل: نفرض x_1 عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول x_2 عدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني x_3 عدد الوحدات المنتجة من النوع الثالث x_4 عدد الوحدات المنتجة من النوع الرابع

خلال الفترة الإنتاجية (شهر مثلا) وعليه تكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_1 في إنتاج الأصناف الأربعة

$$1,5x_1 + x_2 + 2,4x_3 + x_4$$

ويجب أن لا تتجاوز 2000 الكمية المتوفرة أي

$$1,5x_1 + x_2 + 2,4x_3 + x_4 \leq 2000 \qquad (1)$$

بالمثل تكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_2 في إنتاج الأصناف الأربعة

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3,5x_4 \leq 8000 \qquad (2)$$

و تكون الكمية المستهلكة من المادة الأولية M_3 في إنتاج الأصناف الأربعة

$$1,5x_1 + 3x_2 + 3,5x_3 + x_4 \leq 5000 \qquad (3)$$

بالإضافة إلى ذلك يجب أن تكون الكميات المنتجة غير سالبة أي

$$x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \,,\, x_3 \geq 0 \,,\, x_4 \geq 0 \qquad (4)$$

وهي ما تسمى بقيود عدم السلبية

بذلك نكون قد حددنا جميع القيود المفروضة على متحولات المسالة

الآن نحدد تابع الهدف إذا تم إنتاج وحدات قدرها x_1 , x_2 , x_3 , x_4 من الأنواع S_1 , S_2 , S_3 , S_4 على الترتيب فان الربح خلال الفترة الإنتاجية سوف يكون

$$f(x) = 5,2x_1 + 7,3x_2 + 8,34x_3 + 4,18x_4$$

وهو يمثل تابع الهدف

وعليه يكون النموذج الرياضي للمسالة

$$Max\; f(x) = 5,2x_1 + 7,3x_2 + 8,34x_3 + 4,18x_4$$

وفقا للقيود

$$1,5x_1 + x_2 + 2,4x_3 + x_4 \leq 2000$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3,5x_4 \leq 8000$$

$$1,5x_1 + 3x_2 + 3,5x_3 + x_4 \leq 5000$$

$$x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \,,\, x_3 \geq 0 \,,\, x_4 \geq 0$$

الواجب

1-ترغب شركة لإنتاج العلف الحيواني بإنتاج ثلاثة أنواع من العلف. كل نوع يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للاستعمال.

معطيات المسالة موضحة بالجدول التالي

المواد الغذائية الداخلة في تركيب العلف	نوع العلف			الكميات المتوفرة
	A	B	C	
M_1	1	4	2	1500
M_2	2	2	1	300
M_3	4	1	1	800
M_4	3	2	1	280
M_5	1	0,75	0,5	187
تكلفة الوحدة	15	25	30	

المطلوب ايجاد النموذج الرياضي بحيث تكون التكلفة اقل ما يمكن

انتهـــــــــــــت المحاضرة

مدرس المقرر

د. ميسم احمد جديد