المتتاليات تكميلية

اللوح: ١ التاريخ: ٧/١

المتتالية: هي دالة عددية من الاعداد.

مجـ: هي تابع منطلقه مجموعة الاعداد الطبيعية او اي مجموعة جزئية منتهية منه.

	التابع	المتتالية
الرمز:	$f, g, h, \dots$	$u, v, w, \dots$
المتغير:	x	n $n = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
ناتج الربط:	$f(x)$	U_n
الشكل العام:	$f: D \longrightarrow \mathbb{R} ; f(x)$	$(U_n)_{n \geq n_0}$

- دراسة حجة اطراد متتالية

2 4 6 8 10 12 ...

مطردة (متزايدة)

8 4 2 1 $\frac{1}{2}$ ...

مطردة (متناقصة)

5 5 5 5 5 ...

مطردة (ثابتة)

-5 5 -5 5 -5 ...

غير مطردة (متناوبة)

2 4 6 0 -3 8 ...

غير مطردة.

دراسة اطراد متتالية.

① الفرق (المقارنة مع الصفر)

$U_{n+1} - U_n > 0$ متزايدة تماماً.

$U_{n+1} - U_n < 0$ متناقصة تماماً.

$U_{n+1} - U_n = 0$ ثابتة.

الجبري.

② القسمة (المقارنة مع الواحد)

$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ متزايدة تماماً.

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ متناقصة تماماً.

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ ثابتة.

تستخدم حصراً للحدود الموجبة (أس - عاملية)

③ الاشتقاق

نحول المتتالية لتابع.

- $U_n = f(n)$
- $U_{n+1} = f(U_n)$

ثم نشتق التابع

متزايدة $f' > 0$

متناقصة $f' < 0$

كسر - جذر

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	هي حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت ليس بالضرورة ونرمز له بـ (r).	هي حد ينتج عن سابقه بالضرب بعدد ثابت ليس بالضرورة ونرمز له بـ (q)
الحد العام	$U_n = U_0 + n r$ الحد العام، الحد البدء، رتبة الحد، الاساس	$U_n = U_0 \cdot q^n$
صيغة الاعلى للتعيين	$U_m = U_p + (m-p) r$ $r = \frac{U_m - U_p}{m-p}$	$U_m = U_p \cdot q^{m-p}$ $q^{m-p} = \frac{U_m}{U_p}$
اثبات متتالية	$U_{n+1} - U_n =$ ثابت $= r$	$\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ ثابت $= q$
ثلاثة حدود متعاقبة	a ، b ، c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية $2b = a + c$ b وسط حسابي	$b^2 = a \cdot c$ b وسط هندسي
المجموع	$S = U_i + U_{i+1} + \dots + U_j$ $S = n \frac{a + l}{2}$ $l = U_j$ $a = U_i$ $n = j - i + 1$ عدد الحدود	$S = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$ $a = U_i$ $n = j - i + 1$

Scanned by CamScanner

الاستقراء الرياضي
(الإثبات بالتراجع)

لإثبات صحة علاقة مؤلفة من n حد.
ويتم ذلك من خلال مرحلتين

المرحلة الأولى: نثبت صحة العلاقة من أجل حد البدء

المرحلة الثانية: **الفرض:** نفس المسألة.

الطلب: نستبدل n بـ n+1

الإثبات:

• **مضاعفات:** ننطلق من الطرف الأول من الطلب ونصل للطرف الثاني وذلك بالاستفادة من الفرض ومن الطلب علينا أن نكتبه بشكل مجموع حدين أحدهما السؤال.

• **مساواة:** ننطلق من الطرف الأول للطلب ونصل للطرف الثاني بالاستفادة من الفرض.

• **المتراجحة:** ننطلق من الفرض ونصل للطلب وذلك بالاستفادة من خواص المتراجحات.

مثال: أثبت بالتراجع صحة القضية
$E(n):\ 4^n + 5$
من مضاعفات العدد 3
وذلك لأجل العدد الطبيعي n.

من أجل $n=0$

$4^0 + 5 = 6$ من مضاعفات العدد 3

فالقضية محققة من أجل $n=0$

الفرض: $4^n + 5$ من مضاعفات 3

الطلب: $4^{n+1} + 5$ من مضاعفات العدد 3

الإثبات:

$$4^{n+1} + 5 = 4 \cdot 4^n + 5$$
$$= (3+1)4^n + 5$$
$$= \underbrace{3 \cdot 4^n}_{\text{من مضاعفات العدد (3) لأنه مضروب بـ (3)}} + \underbrace{4^n + 5}_{\text{مضاعفة العدد (3) فرضاً}}$$

القضية محققة من أجل n+1
فهي إذاً صحيحة.

$n! = n(n-1)(n-2) \cdots \times 3 \times 2 \times 1$

$n! = n(n-1)!$

$(n+1)! = (n+1)n!$

$a > b+c$

يمكن حذف أحد الحدود دون تغيير الترتيب

$a > b$

$a > b+c+\cancel{d}$

$a > b+c$

أثبت أن $n! \geq 2^{n-1}$ أياً كان $n \geq 1$

من أجل $n=1$

$1! \geq 2^{1-1} \Rightarrow 1 \geq 1$

فالعلاقة محققة من أجل $n -1$

الفرض: $n! \geq 2^{n-1}$ **الطلب:** $(n+1)! \geq 2^n$

الإثبات: لدينا فرضاً $n! \geq 2^{n-1}$
نضرب طرفي المتراجحة بـ $(n+1)$

$(n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}$

$(n+1)! \geq (1+1)2^{n-1}$

$(n+1)! \geq 2 \cdot 2^{n-1}$

$(n+1)! \geq 2^n$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي إذاً محققة.

المتتاليات تكملة

٧/٢

١٣ احسب المجموع

$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 10$

نلاحظ انه كل حد ينتج عن سابقه بإضافة $(\frac{1}{2})$ فهي متتالية حسابية بمعامل

$r = \frac{1}{2}$

$S = n\frac{a+l}{2}$ $a = \frac{1}{2}$ $l = 10$

$U_m = U_p + (m-p)r$ $m = n$, $p = 1$

$U_n = U_1 + (n-1)(\frac{1}{2})$

$10 = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}n - \cancel{\frac{1}{2}}$

$10 = \frac{1}{2}n \Rightarrow \boxed{n = 20}$ م

$S = 20\,\frac{\frac{1}{2}+10}{2}$

$= 10(\frac{1}{2}+10)$

$= 5 + 100 = 105$

ت١ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

① احسب S_1، S_2، S_3، S_4 ثم استنتج S_{n+1} بدلالة S_n.

② اثبت بالتراجع $n \geq 1$ $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$S_1 = 1^2 = 1$

$S_2 = 1^2 + 2^2 = S_1 + 4$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = S_2 + 9$

$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = S_3 + 16$

$S_5 = S_4 + 25$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

٢) من أجل $n = 1$

$l_1 = S_1 = 1$

$l_2 = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$l_1 = l_2$

العلاقة محققة من أجل $n = 1$

الفرض: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

المطلوب: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

البرهان: $l_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$

$= l_2$

العلاقة محققة من أجل $n+1$

ومنه هي صحيحة.

ومنه متتالية هندسية أساسها $q = a$

$$c_n = c_0 \cdot q^n$$

نذكر $c_0 = v_0 - l$

$$= v_0 + \frac{b}{a-1}$$

$$\boxed{c_n = \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n}$$

لدينا $c_n = v_n - l$

$$v_n = c_n + l$$

$$v_n = \left(v_0 + \frac{b}{a-1}\right) a^n - \frac{b}{a-1}$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$$

$v_n = u_{n+1} - 2u_n$ اثبت أن المتتالية هندسية وعين أساسها.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+2} - 2u_{n+1}}{u_{n+1} - 2u_n}$$

$$= \frac{5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1}}{u_{n+1} - 2u_n}$$

$$= \frac{3u_{n+1} - 6u_n}{u_{n+1} - 2u_n}$$

$$= \frac{3(u_{n+1} - 2u_n)}{u_{n+1} - 2u_n} = 3$$

ومنه متتالية هندسية أساسها $q = 3$

$$v_n = v_0 \cdot q^n$$

$v_{n+1} = a v_n + b \quad (v_n)_{n \geq 0} \quad a \neq 1$

① عين تابع f حيث $v_{n+1} = f(v_n)$

② احسب l الحل للمعادلة $f(x) = x$

③ $c_n = v_n - l$ ، اثبت أنها متتالية هندسية ونستنتج c_n بدلالة n, a, b, v_0 ثم نستنتج v_n بدلالة n حسب السؤال.

①

$$f(x) = ax + b$$

②

$$f(x) = x \Rightarrow ax + b = x$$

$$ax - x = -b$$

$$x(a-1) = -b$$

$$x = \frac{-b}{a-1} \qquad l = \frac{-b}{a-1}$$

③

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{v_{n+1} - l}{v_n - l}$$

$$= \frac{a v_n + b + \frac{b}{a-1}}{v_n - l}$$

$$= \frac{a v_n + \frac{ab \cancel{-b} \cancel{+b}}{a-1}}{v_n - l}$$

$$= \frac{a v_n + a \frac{b}{a-1}}{v_n - l}$$

$$= \frac{a v_n - a l}{v_n - l}$$

$$= \frac{a(v_n - l)}{v_n - l} = a$$

آخر $v_0 = u_1 - 2u_0$

$= 4 - 2 = 2$

$$\boxed{v_n = 2(3)^n}$$

$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ $u_0 = 1$ $n \geq 0$ $\frac{16}{25}$

① ادرس $x \longrightarrow \frac{3x+2}{2x+6}$

[illegible] ، استنتج أن

$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

② اثبت أن (u_n) متناقصة. $n \geq 0$

$f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$

$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$

$= \frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2}$

$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$

متزايدة تماما.

. من أجل $n = 0$

$\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$

العلاقة محققة من أجل $n=0$

. الفرض: $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

الطلب: $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

البرهان: لدينا فرضا

$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

نأخذ f للطرفين

$u_n = f(n)$
$u_{n+1} = f(u_n)$

$f(\frac{1}{2}) < f(u_n) \leq f(1)$

$\frac{3(\frac{1}{2})+2}{2(\frac{1}{2})+6} < u_{n+1} \leq \frac{3+2}{2+6}$

$\frac{\frac{7}{2}}{7} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

إذن الفرض محقق.

②

$u_1 = \frac{3u_0+2}{2u_0+6} = \frac{5}{8}$

$u_1 - u_0 = \frac{5}{8} - 1 = \frac{-3}{8} < 0$

نفرض متناقصة.

الفرض: $u_{n+1} - u_n < 0$

الطلب: $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$

البرهان: لدينا فرضا

$u_{n+1} - u_n < 0$

$u_{n+1} < u_n$

$f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$u_{n+2} < u_{n+1}$

$u_{n+2} - u_{n+1} < 0$

ومنه متتالية متناقصة.

٣

$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ $\frac{17}{26}$

$u_0 = 2\cos\theta$

① احسب u_1, u_2

② اثبت بالتراجع أن $u_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2\cos\theta}$

$= \sqrt{2(1+\cos\alpha)}$

$= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$= \sqrt{2(1+\cos\frac{\alpha}{2})} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}}$

$= 2\cos\frac{\theta}{4}$

. من أجل $n = 0$

$l_1 = u_0 = 2\cos\theta$

$l_2 = 2\cos(\frac{\theta}{2^0}) = 2\cos\theta$

$l_2 = l_1$ إذن محققة من أجل $n=0$

الفرض: $u_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

الطلب: $u_{n+1} = 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

البرهان: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

$= \sqrt{2+2\cos(\frac{\theta}{2^n})} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}$

$= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\frac{\theta}{2^n}}{2}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^n \cdot 2}}$

$= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

؟ وهو المطلوب

متتاليات تكميلية

ادرس اطراد (u_n).

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ نلاحظ متزايدة تماما.

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + 2 \end{cases}$$

$u_1 = \frac{3}{4} u_0 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$u_2 = \frac{3}{4} u_1 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$u_1 - u_0 = 8 - 8 = 0$. ثابتة .

نفرض : $u_{n+1} - u_n = 0$

الطلب : $u_{n+2} - u_{n+1} = 0$

الإثبات :

$u_{n+2} - u_{n+1} =$

$= \frac{3}{4} u_{n+1} + \cancel{2} - \frac{3}{4} u_n - \cancel{2}$

$= \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) = \frac{3}{4}(0) = 0$

[illegible]

6/22

c ، b ، a ثلاثة أعداد حقيقية

$a \neq 0$

a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية هندسية

c ، 2b ، 3a " " " حسابية

احسب q :

$$\left.\begin{aligned} b &= a.q \\ c &= b.q = a.q^2 \end{aligned}\right\}$$

$2b = \frac{c + 3a}{2}$

$4b = c + 3a$

$4.a.q = aq^2 + 3a$

$4q = q^2 + 3$

$q^2 - 4q + 3 = 0$

$(q-3)(q-1) = 0 \begin{cases} q = 3 \\ q = 1 \end{cases}$

تمرين: (u_n) متتالية هندسية

$u_1 = -2$ أساسها 3 , $n \geq 0$

احسب u_n بدلالة n

استنتج قيمة (المجموعين)

$u_1 + u_2 + \cdots + u_7$

$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$

بدلالة n .

$q = 3$ $u_1 = -2$

Scanned by CamScanner

$$q^{m-p} = \frac{v_m}{v_p} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-54}{-6} = 9$$

$$q^{2-1} = 9 \Rightarrow \boxed{q = 9}$$

$\cdot\, n = n - 1 + 1 = n$

$$S_2 = -6\,\frac{1-9^n}{1-9}$$

$$= \frac{-6}{-8}(1-9^n)$$

$$= \frac{3}{4}(1-9^n)$$

$E(n):$ 10^n+1 التقسيم العدد و لعدد 14/05

① $E(n)$ صحيحة اثبت $E(n+1)$

• اثبت انه 10^n+1 مضاعف 9

الفرض: $10^n + 1$ مضاعف 9

الطلب: $10^{n+1} + 1$ " " 9

البرهان: $10^{n+1} + 1 = 10.10^n + 1$

$= (9+1)\,10^n + 1$

$= \underbrace{9.10^n}_{\text{مضاعف 9 لأنه مضروب ب 9}} + \underbrace{10^n + 1}_{\text{مضاعف 9 فرضية}}$

العلاقة محققة من اجل $n+1$

$U_n = U_0 \cdot q^n$ $\quad n=1$

$U_1 = U_0 \cdot q$

$-2 = U_0(3) \Rightarrow \boxed{U_0 = \frac{-2}{3}}$

$$U_n = \frac{-2}{3}(3)^n$$

$\cdot\, S_1 = U_1 + U_2 + \cdots + U_7$

$$S_1 = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$a = U_1 = -2$ $\quad n = 7-1+1$

$$S_1 = -2\,\frac{1-3^7}{1-3}$$

$= 1 - 3^7 =$

$\cdot\, S_2 = U_2 + U_4 + \cdots + U_{2n}$

نفرض $U_2 = V_1$

$U_4 = V_2 \quad \cdots\cdots \quad U_{2n} = V_n$

$S_2 = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$

$$S_2 = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$a = V_1 = U_2 = \frac{-2}{3}(3)^2 = -6$

$V_2 = U_4 = \frac{-2}{3}(3)^4 = -54$

$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta}$

$= \sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}$

$U_2 = \sqrt{2+U_1}$

$= \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2})} = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{4}}$

$= 2\cos\frac{\theta}{4}$

من أجل $n=0$

$U_0 = 2\cos\theta$

$U_0 = 2\cos(\frac{\theta}{2^0}) = 2\cos\theta$

الفرض: $U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

الطلب: $U_{n+1} = 2\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

برهان: $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

$= \sqrt{2+2\cos(\frac{\theta}{2^n})}$

$= \sqrt{2(1+\cos(\frac{\theta}{2^n}))}$

$= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2 \cdot 2^n}}$

$= 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$ محققة

$U_1 = \frac{U_0+1}{U_0+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$U_1 - U_0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$

محققة .

الفرض: $U_{n+1} - U_n < 0$

الطلب: $U_{n+2} - U_{n+1} < 0$

برهان: لنفترض

$U_{n+1} - U_n < 0$

$U_{n+1} < U_n$

$f(U_{n+1}) < f(U_n)$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

$U_{n+2} - U_{n+1} < 0$

محققة

$\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$ $]0, \frac{\pi}{2}[$ (IV)

① احسب $U_2 - U_1$

① اثبت بالتراجع أن

$U_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+1}{U_n+3} \end{cases}$

$0 \le U_n \le 1$

$(U_n)_{n \ge 0}$ متناقصة

لنعتبر $U_{n+1} = f(U_n)$

$f(x) = \frac{x+1}{x+3}$

$f'(x) = \frac{x+3-x-1}{(x+3)^2}$

$= \frac{2}{(x+3)^2} > 0$

ومنه f متزايدة .

أ) من أجل $n=0$

$0 \le U_0 = 1 \le 1$

العلاقة محققة من أجل $n=0$

الفرض: $0 \le U_n \le 1$

الطلب: $0 \le U_{n+1} \le 1$

برهان: لنفترض

$0 \le U_n \le 1 \Rightarrow$

$f(0) \le f(U_n) \le f(1)$

$\frac{1}{3} \le U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

$0 \le U_{n+1} \le 1$

محققة .

نهاية متتالية تكميلية

$\frac{1}{119}$

$U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $n > n_0$

$U_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$

$]a, b[\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{b+a}{2} \text{ مركز المجال} \\ r = \frac{b-a}{2} \text{ نصف قطر المجال} \end{array} \right.$

$|f(x) - c| \leqslant r$

$U_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$

$-10^{-3} < U_n < 10^{-3}$

$\cancel{-10^{-3}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$

$n\sqrt{n} > 10^3$

$n \cdot n^{\frac{1}{2}} > 10^3 \Rightarrow n^{\frac{3}{2}} > 10^3$

$(n^{\frac{3}{2}})^2 > (10^3)^2$

$n^3 > 10^6 \Rightarrow n > 10^{\frac{6}{3}}$

$n > 10^2$

$\boxed{n_0 = 100}$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{ليس لها نهاية} & q \leq -1 \end{cases}$$

$\boxed{4}$

$y_n = \frac{10^n}{(10,1)^n}$ $\quad x_n = \frac{3^n}{2^n}$

احسب نهاية كل من y_n و x_n

$y_n = \left(\frac{10}{10,1}\right)^n \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$

$x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

$-1 < q < 1$

$\boxed{5}$ ص ١٥٠

$U_n = \underset{q^0}{1} + q + q^2 + \dots + q^n$

أكتب U_n بصيغة أخرى ومنه استنتج نهاية

$S = \lim_{n\to+\infty} U_n$

نلاحظ انه مجموع لمتتالية هندسية اساسها q

$U_n = a\frac{1 - q^{n}}{1-q}$ عدد الحدود $\quad a = 1$

عدد الحدود $= j - i + 1 = n - 0 + 1 = n + 1$

$U_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - q^n \cdot q}{1-q}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

⑥ ص ٤

$x_0 = 3$

$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$

$y_n = x_n + 3$

① هل ان المتتالية y_n هندسية

② احسب y_n ثم x_n بدلالة n

$$s = 6\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 6\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\frac{2}{3}}$$

$$= 6 \times \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

$$= 9\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 9(1-0) = 9$$

$$S' = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

لدينا $x_n = y_n - 3$

$$S' = y_0 - 3 + y_1 - 3 + \cdots + y_n - 3$$

$$= \underbrace{y_0 + y_1 + \cdots + y_n}\, -3 -3 \cdots -3$$

$$S' = S_n - 3(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S' = 9 - 3(+\infty)$$

$$= -\infty$$

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = a u_n + b \end{cases}$$

$\frac{\text{V}}{119}$

① نفرض $a = 1$

تقبل $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية :

احسب u_n بدلالة $n - b - S$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}+3}{x_n+3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x_n - 2 + 3}{x_n + 3} \qquad \frac{1}{\frac{1}{3}} : 3$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n + 3} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{(x_n+3)}}{\cancel{x_n+3}} = \frac{1}{3}$$

متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$y_n = y_0 \cdot q^n$$

لدينا $y_0 = x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$

إذن $\boxed{y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

لدينا $y_n = x_n + 3 \Rightarrow$

$$x_n = y_n - 3$$

$$x_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

$\boxed{٢}$

$$S = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$$

$$S' = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

a) احسب S_n, S'_n بدلالة n

b) احسب نهاية كل من S_n, S'_n

$$S = y_0 + y_1 + \cdots + y_n$$

وهو مجموع لمتتالية هندسية حيث

$$S = a\,\frac{1-q^n}{1-q} \qquad a = y_0 = 6$$

$$n = j - i + 1 \qquad q = \frac{1}{3}$$

$$= n - 0 + 1 = n + 1$$

$U_{n+1} = U_n + b$ ⇐ $a = 1$

$U_{n+1} - U_n = b$

ومنه متتالية حسابية أساسها

$\boxed{r = b}$

$U_n = U_0 + nr$

$\boxed{U_n = S + nb}$

ⓑ $a \neq 1$ ، ℓ حيث

$x = ax + b$ معادلة

• $t_n = U_n - \ell$ نضع:

1- بين أن $(t_n)_{n \geq 0}$ هندسية:

• أكتب t_n بدلالة s, a, b, n

$x = ax + b$ $-1 < a < 1$

$x - ax = b$

$x(1 - a) = b$

$x = \frac{b}{1-a}$

$\boxed{\ell = \frac{b}{1-a}}$

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{U_{n+1} - \ell}{U_n - \ell}$

$= \frac{aU_n + b - \frac{b}{1-a}}{U_n - \ell}$

$= \frac{aU_n + \frac{b - ab - b}{1-a}}{U_n - \ell}$

$= \frac{aU_n + \frac{-ab}{1-a}}{U_n - \ell}$

$= \frac{a(U_n - \frac{b}{1-a})}{U_n - \ell}$

$= \frac{a\cancel{(U_n - \ell)}}{\cancel{U_n - \ell}} = a$

ومنه متتالية هندسية

أساسها $q = a$

$t_n = t_0 \cdot q^n$

حيث $t_0 = U_0 - \ell$

$\boxed{t_0 = S - \frac{b}{1-a}}$

$t_n = (S - \frac{b}{1-a})(a)^n$

$\lim_{n \to +\infty} t_n = (S - \frac{b}{1-a})(0)$

$= 0$

تحضير ١٢٢ + ١٢٨ + ١٢١

ط.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

a, b موجبات تماماً

$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

يكون قلب طرفي متراجحة عندما يكونا بإشارة واحدة

ح المجال مغلق

$x \in [a, b]$

$a \leq x \leq b$

تمرين

$C_n = \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$

إثبات

$\frac{-1}{\sqrt{n}} < C_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

ثم استنتج نهاية $(C_n)_{n\geq 1}$

$-1 \leqslant \cos 2n \leqslant 1$

$\frac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 0$$

حسب الحصر

$\frac{5}{128}$ بين إذا كانت المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ محدودة

$U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = 1 + 1 = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 1 + 0 = 1 \end{array}\right\} \overset{m}{1} < U_n \leqslant \overset{M}{2}$$

غير محدودة

لكي نبين أنها متناقصة.

$C_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$

$= \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

$= \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2(n+1)^2}$

$= \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} < 0$

فهي متناقصة.

$C_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 1 \end{array}\right\} \overset{m}{0} \leqslant C_n < \overset{M}{1}$$

محدودة ومنه متراجحة.

$C_n = n + \cos n$

$U_1 = 1 + \cos(1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty + \cos\infty = +\infty$

$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$

$n - 1 \leqslant n + \cos n \leqslant n + 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} (n + \cos n) = +\infty$$

غير محدودة من الأعلى، محدودة

من الأدنى ومنه غير محدودة.

$U_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$

① اثبت بالتراجع ان $n \in \mathbb{N} : n \leqslant 2^n$

من أجل $n = 0$

وهي محققة.

$0 \leqslant 2^0 \Rightarrow 0 \leqslant 1$

الفرض: $n \leqslant 2^n$

الطلب: $n+1 \leqslant 2^{n+1}$

برهان: لدينا ترجعة

$n \leqslant 2^n$

$n+1 \leqslant 1 + 2^n$

$n+1 \leqslant 2 \cdot 2^n$

$n+1 \leqslant 2^{n+1}$

ومنه العلاقة محققة.

② استنتج مما سبق حصراً

أعلاه للمتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$

راجح $U_n \leqslant M$

قاصر $U_n \geqslant m$

$(U_n)_{n \geqslant n_0}$

متزايدة:

قاصر $U_{n_0} = m$

راجح $\lim_{n \to +\infty} U_n = M$

متناقصة:

بالمثل

لدينا $U_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$

$U_n \leqslant \frac{2^1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$

$U_n \leqslant \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

مجموع لمتتالية هندسية حيث أساسها $q = \frac{2}{3}$

وحدها الأول $a = \frac{2}{3}$

عدد الحدود $= n - 1 + 1 = n$

$U_n \leqslant a \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$U_n \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}\right)$

$U_n \leqslant \frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}$

$U_n \leqslant \frac{2}{3}(3)\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$U_n \leqslant 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$U_n \leqslant 2(1+0)$

$U_n \leqslant 2$ ومنه المتتالية راجحة بـ 2

المتتاليتان المتجاورتان.

نقول عن متتاليتين انهما متجاورتان ـــــ

اذا كان ١) احداهما متزايدة والاخرى متناقصة

٢) نهاية الفرق = ٠

$$t_n = \frac{n-1}{n}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

اثبت انهما متجاورتان.

بفرض $C_n = f(n)$

$$f_1 = \frac{n-1}{n}$$

$$f_1' = \frac{n-n+1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} > 0$$

منه متزايدة

$$f_2 = 1 + \frac{1}{n^2}$$

$$f_2' = \frac{-2n}{n^4} = \frac{-2}{n^3} < 0$$

منه متناقصة.

١) الشرط الاول محقق.

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

$$\left.\right\} \lim_{n\to\infty}(t_n - S_n) = 0$$

٢- الشرط الثاني محقق اذا متجاورتان

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

اثبت انهما متجاورتان.

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n+2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+3}} + \cdots \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} - \cdots - \cancel{\frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}_{2}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{-1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{2n}+2-\cancel{2n}-1}{(2n+1)2(n+1)} = \frac{1}{(2n+1)2(n+1)} > 0$$

منه متزايدة.

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{n+1} - x_n - \frac{1}{n}$$

$$= x_{n+1} - x_n + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

متناقصة.

اذا $y_n = x_n + \frac{1}{n}$

$$y_n - x_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$$

ـــــــ منه متجاورتان

النهايات تكميلي

إزالة حالات عدم التعيين

$\frac{\infty}{\infty}$

① البسط والمقام توابع صحيحة.

- درجة البسط = درجة المقام. نأخذ المعاملات
- درجة البسط > درجة المقام. نأخذ أكبر درجة ثم نختصر ثم نعوض
- درجة البسط < درجة المقام. الناتج = 0

② البسط أو المقام فيه جذر تربيعي. إخراج أعلى درجة مشترك مع مراعاة الجذر

$\infty - \infty$

① محققة شروط.

$\sqrt{4x^2-3} - 2x$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

نضرب بالمرافق

② غير محققة شروط.

$\sqrt{4x^2-3} - 5x$

إخراج أعلى درجة مشترك

$\sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{3}\sqrt{x^2+5}$

$\frac{0}{0}$

① البسط والمقام توابع صحيحة. نحلل البسط والمقام ثم نختصر ثم نعوض

② البسط أو المقام فيه جذر تربيعي. الضرب بالمرافق

$|x|$

$-x$ $\quad x \to -\infty$

x $\quad x \to +\infty$

إذا وجد في البسط x بعد الضرب بالمرافق نخرج x^2 من المقام كعامل مشترك

النهايات المثلثية

إحاطة:

$\cos\infty * \sin\infty$

$-1 \le \cos\theta, \sin\theta \le 1$

$0 \le \cos^2\theta, \sin^2\theta \le 1$

$|f(x) - l| \le g(x)$

وكانت $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ فإن

$\lim_{x\to a} f(x) = l$

قواعد $\frac{0}{0}$, $0(\infty)$

$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

$\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

قوانين

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2) $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$ $\quad 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ $\quad 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

3) $\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$ $\quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

4) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

5) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

المقاربات

مقارب شاقولي.

$\lim_{x \to a} f(x) = \mp\infty$

x=a مقارب شاقولي يوازي y'y.

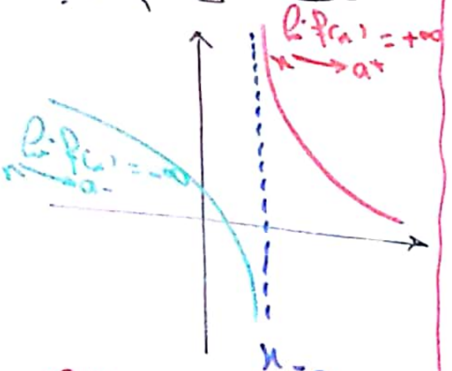
لدراسة الوضع النسبي.

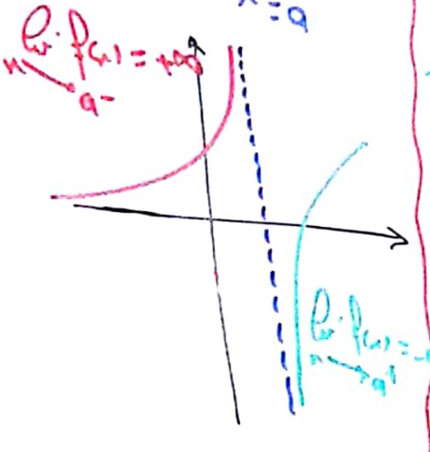
$\lim_{\substack{x \to a^+ \\ >}} f(x) = \mp\infty$

x يقع على يمين المقارب

$\lim_{\substack{x \to a^- \\ <}} f(x) = \mp\infty$

x يقع على يسار المقارب.





مقارب أفقي.

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = b$

y=b مقارب أفقي يوازي x'x.

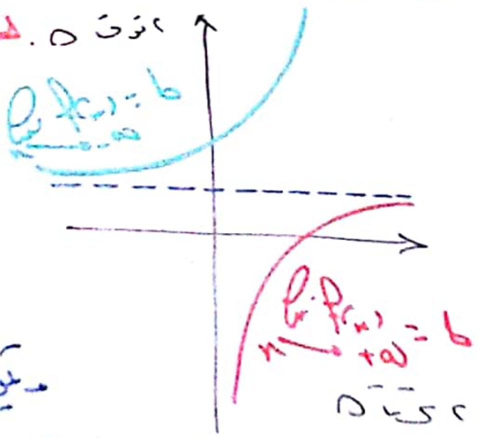
لدراسة الوضع النسبي.

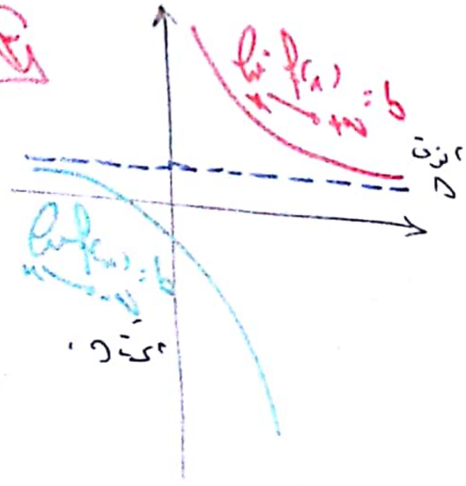
$f(x) - y > 0$

C فوق Δ.

$f(x) - y < 0$

C تحت Δ.





المقارب المائل

$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$

يوجد احتمالية وجود مقارب مائل. معادلة $y = ax + b$

❗ يعطينا المعادلة ويطلب منا: إثبات أنها معادلة مقارب مائل.

يجب أن يكون

$\lim_{x \to \mp\infty} (f(x) - y) = 0$

② التابع كسري وتحقق بسط أكبر من درجة مقام بدرجة واحدة فقط

نستخدم القسمة الإقليدية.

$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

فيكون الناتج هو معادلة المقارب المائل.

③ تابع جذري تربيعي:

نكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية. فتصبح الشكل

$f(x) = \sqrt{a(x-b)^2 + c}$

وتكون معادلة المقارب المائل هي

$y = \sqrt{a}\,|x - b|$

y=b

أفقي

الاستمرار

نقول عن التابع f أنه مستمر عند النقطة x_0 اذا وفقط اذا تحقق

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$f(x) = \begin{cases} & x = x_0 \\ & x \neq x_0 \end{cases}$$

النهاية في المساواة.

الصورة في المساواة.

ولكي يكون التابع مستمر على D_f يجب أن يكون مستمر عند نقطة الانقطاع (x_0)

اذا كان. $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$

اذن f لا تقبل نهاية عند (a).

وهي غير مستمرة عند (a).

حالة المقارب

نوجد a , b من خلال القانونين

$$a = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\mp\infty} (f(x) - ax)$$

دراسة الوضع النسبي للمقارب

مثلاً.

ندرس اشارة الفرق

$f(x) - y > 0$ c فوق Δ

$f(x) - y < 0$ c تحت Δ.

$f(x) - y = 0$ c و Δ يشتركان بنقطة.

عندما نلاحظ البيان ان يتقاطع المقارب ممكن خارج مجال التقارب.

x	$-\infty$		a		d		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ c	↘	e	↗	b

لا يوجد مقارب مائل

$x=a$ مقارب شاقولي

(a,c) نقطة مقاربة

قيمة حدية.