Inverse Functions

<div dir="rtl">

أ. خواص الصيني

الدوال العكسية .

</div>

One to one Functions (1-1)

<div dir="rtl">الدالة، التبابينة</div>

<div dir="rtl">تعريف :</div>

f is one to one if :-

<div dir="rtl">نقول عن f أنها متباينة</div>
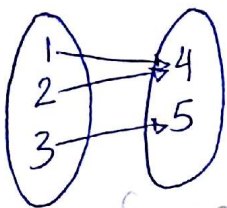<div dir="rtl">اذا كان :</div>

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$$

<div dir="rtl">التعريف بالكاني</div>

$$\boxed{f(a) = f(b) \implies a = b}$$

<div dir="rtl">هذا التعريف</div>
<div dir="rtl">نستخدم بكثرة</div>
<div dir="rtl">و أفضل لكم «</div>

<div dir="rtl">ملاحظات على دالة (1-1) :.</div>
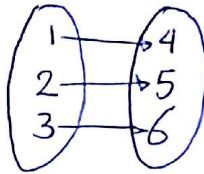
<div dir="rtl">① نقول عن الدالة f أنها (1-1) اذا ارتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط</div>
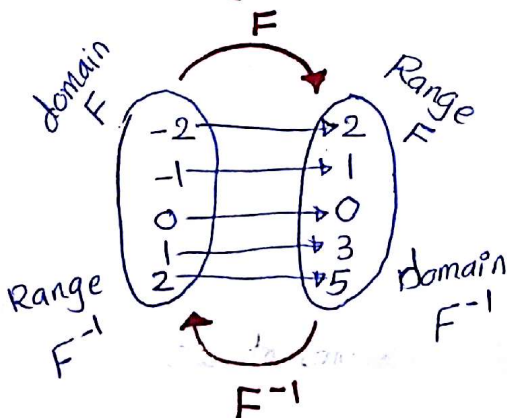
<div dir="rtl">من المدى .</div>

function
Not one to one.

one to one.
(1-1)

$$F = \{ (-2,2), (-1,1), (0,0), (1,3), (2,5) \}$$

domain F
Range F
Range F⁻¹
domain F⁻¹

$$F^{-1} = \{ (2,-2), (1,-1), (0,0), (3,1), (5,2) \}$$

<div dir="rtl">الدالة العكسية</div>
<div dir="rtl">للدالة F</div>

شرط وجود مع دالة y = x والعكس :- لابد ان تكون الدالة (one to one)

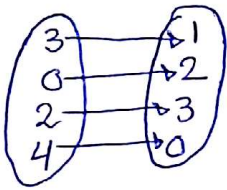HW: Find the inverse of each function:

اوجد عكس الدالة لكل ممــا ياتــي :-

ⓐ $F = \{(-2,1), (-1,0), (0,1), (1,2), (2,2)\}$
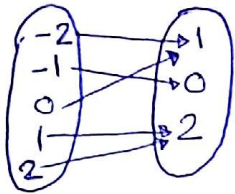
Not one-to one.

NO inverse.

لا يوجد دالة عكسية

عكـــس لا خط لا يمثل دالة 1-1

ⓑ $G = \{(3,1), (0,2), (2,3), (4,0)\}$ domain of G^{-1}

one to one.

$\Rightarrow G^{-1} = \{(1,3), (2,0), (3,2), (0,4)\}$

Example 1:- Decide whether each function is one to one.

حدد اي من الدوال هي 1-1

ⓐ $f(x) = -4x + 12$ ⟶

نستخدم للتعريف

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$f(a) = f(b)$

$-4a + 12 = -4b + 12$

$-4a = -4b + 12 - 12$

$-4a = -4b$

$a = \dfrac{-4}{-4} b$

$a = b$

∴ 1-1

ⓑ $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

$$f(a) = f(b)$$

$$\sqrt{25 - a^2} = \sqrt{25 - b^2} \quad \rightsquigarrow \quad$$ تربيع الطرفين

$$25 - a^2 = 25 - b^2$$

$$-a^2 = -b^2$$

$$a^2 = b^2$$

باستعمال خاصية الجذر التربيعي $\longrightarrow$

$$a = \pm\sqrt{b^2}$$

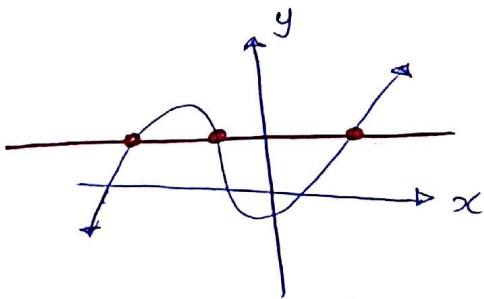$$a = \pm b$$

Not one to one.

_____

سؤال أختبار $\nearrow$

A function is one-to-one if every horizontal line intersects the graph of the function at most once.

Horizontal Line Test : اختبار الخط الأفقي

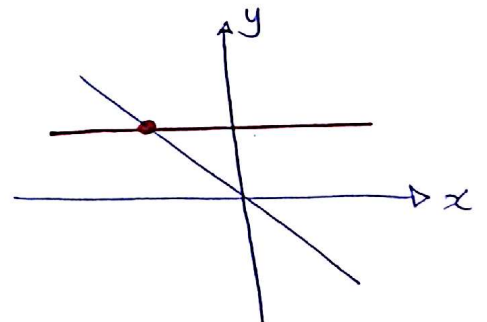نستخدم الخط الأفقي لمعرفة هل الدالة   ١-١   أم لا.

اذا قطع الخط الأفقي المنحني في نقطة واحدة $\Longleftarrow$ الدالة ١-١

أكثر من نقطة واحدة $\Longleftarrow$ الدالة ليست ١-١

Not one-to-one

one to one.

اذا كانت الدالة تزايدية على كل مجالا أو تناقصية على مجالا $\Longleftarrow$ ١-١

واذا كانت تزايدية و تناقصية على مجالا $\Longleftarrow$ ليست ١-١

Inverse Function :. الدالة العكسية

$$(f \circ g)(x) = x \quad \underline{\text{and}} \quad (g \circ f)(x) = x \quad \swarrow$$

اذا اعطانا دالتين و مطلوب نعرف هل هي عكـــية لبعض ام لا فاننا ستخدم (قانون)
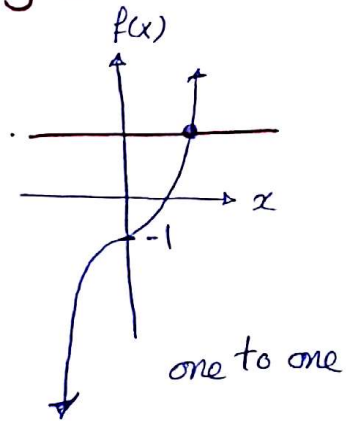و لابد ان تكون الدالة f (1-1)

Example 2 :-

$$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

Is g the inverse function of f ?

– هل g دالة عكسية لـ f ؟

① f is one to one function

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{x+1}\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1$$

$$= x + 1 - 1 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 - 1)$$

$$= \sqrt[3]{x^3 - 1 + 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

∴ g is inverse function of f .

f(x)

one to one

ي مثال السابق أعطانا دالتين ومطلوب إثبات أن كلا دوال عكسية لبعضها

ـ الآن يعطينا دالة واحدة وامرنا فقط ومطلوب ايجاد الدالة العكسية لها .

Example 3:- Find the equation of inverse:

أوجدي الدالة العكسية

(a) $f(x) = 2x + 5$

— أولاً ، لابد أن تكون • one to one
الدالة الخطية دائماً هي 1-1

∴ f is one to one.

— ثانياً : نستبدل $f(x)$ بـ y

$$y = 2x + 5$$

— ثالثاً : نبدل بين y و x

$$x = 2y + 5$$

— رابعاً : نحل بالنسبة لـ y .

$$2y = x - 5$$
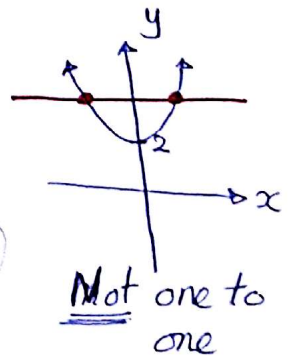
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

— خامساً : نستبدل y بـ $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

(b) $y = x^2 + 2$ ~~→   عندنا تربيع ⟸ ليست 1-1
لا يوجد معكوس

اي فن لدوال

ليس لها .

$$x = y^2 + 2$$

$$y^2 = x - 2$$

$$y = \pm \sqrt{x - 2}$$

No inverse

لا يوجد معكوس

الدالة التربيعية رسمها قطع مكافئ . لذا اذا رسمنا خطاً لا يمشي دائماً يقطع المنحنى في نقطتين

Not one to one

© $f(x) = (x-2)^3$

  f is one to one

  $y = (x-2)^3$

  $x = (y-2)^3$

  $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(y-2)^3}$

<div dir="rtl">أخذ جذر الثلاث للطرفين</div>

  $y - 2 = \sqrt[3]{x}$

  $y = \sqrt[3]{x} + 2$

  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

  HW 3 P. (146) :- $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$, $x \neq 4$

  Find the inverse.

  ① f is one to one.

  $y = \dfrac{2x+3}{x-4}$

  $x = \dfrac{2y+3}{y-4}$

  $x(y-4) = 2y+3$

  $xy - 4x = 2y + 3$

  $xy - 2y = 4x + 3$

  $y(x-2) = 4x + 3$

  $y = \dfrac{4x+3}{x-2}$

  $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+3}{x-2}$
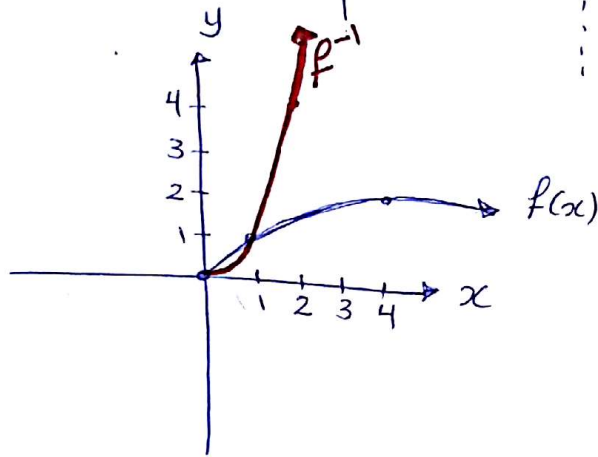
Graphing f^{-1}

$f(x) = \sqrt{x}$

$x \geq 0$

f is 1-1

x	$f(x)$
0	0
1	1
4	2
⋮	

نقط f

(0,0)
(1,1)
(4,2)
⋮

نقط f^{-1}

(0,0)
(1,1)
(2,4)
⋮

HW4 P. (146) : $f(x) = \sqrt{x+5}$, $x \geq -5$

قارن

f is one to one.

$$y = \sqrt{x+5}$$

$$x = \sqrt{y+5}$$

$$x^2 = \left(\sqrt{y+5}\right)^2$$
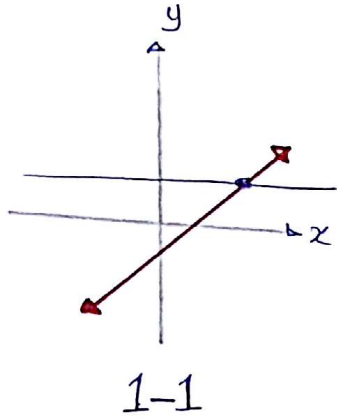
$$y+5 = x^2$$

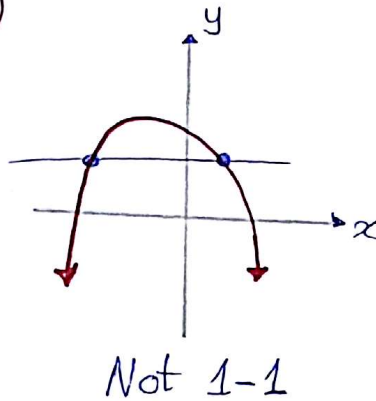$$y = x^2 - 5$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 5$$

∴ *Exercises* 5·1 P.(147)

Decide whether each function is one to one.
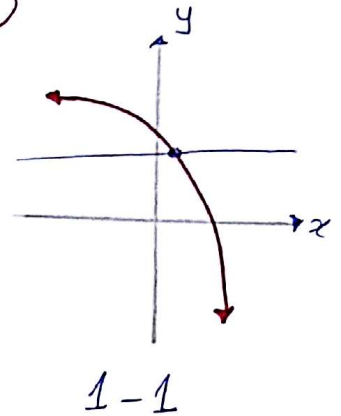
حددي أي من الدوال هي 1-1 ؟

①

1-1

②

Not 1-1

③

1-1

⑧ $y = 2(x+1)^2 - 6$ ⟿ معادلة تربيعية ليست 1-1

Vertex $(h, k) = (-1, -6)$

الأفضل نستخدم الرسم في الدالة التربيعية .

Not 1-1
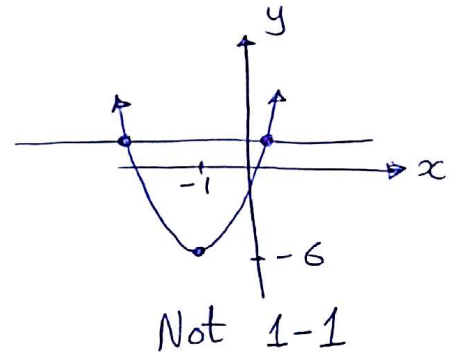
Use the definition of inverse :

⑳ $f(x) = 2x+4$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x - 2) = 2(\frac{1}{2}x - 2) + 4$

$\qquad = \frac{2}{2}x - 4 + 4 = x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+4) = \frac{1}{2}(2x+4) - 2$

$\qquad = \frac{2}{2}x + \frac{4}{2} - 2 = x$

∴ g is inverse of $f(x)$.

㉓ $f(x) = \frac{2}{x+6}$, $g(x) = \frac{6x+2}{x}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{6x+2}{x}) = \dfrac{2}{\frac{6x+2}{x} + 6}$

$\qquad = \dfrac{2}{\frac{6x+2}{x} + \frac{6x}{x}} = \dfrac{2x}{12x+2}$

g is **not** inverse of $f(x)$

Exponential Functions

أ. عواطف الصبح

الدوال الأسية

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}} \right)^3 = \left(\sqrt[4]{16} \right)^3 = 2^3 = 8$$

Properties of Exponents

خصائص الأسس .

① a^x is unique real number   عدد حقيقي وحيد .

② $a^b = a^c \Longleftrightarrow b = c$ تكون متساوية .

③ If $a > 1$, $m < n \Longrightarrow a^m < a^n$

متزايدة → $a = 2$, $m = 2$, $n = 3 \Longrightarrow 2^2 < 2^3 \Longrightarrow 4 < 8$ ✓

④ If $0 < a < 1$, $m < n \Longrightarrow a^m > a^n$

متناقصة → $a = \frac{1}{2}$, $m = 2$, $n = 3 \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Longrightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

كل ما زاد المقام فإن قيمة الكسر تقل .

Example 1 p. (151)

If $f(x) = 2^x$. Find

(a) $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(b) $f(3) = 2^3 = 8$

(c) $f(\frac{5}{2}) = 2^{\frac{5}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^5 = (\sqrt{2})^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = \sqrt{16(2)}$
$$= 4\sqrt{2}$$

(d) $f(4.92) = 2^{4.92}$.

Exponential Function   الدالة الأسية

If $a > 0$, $a \neq 1$.   الصورة العامة للدالة
الأسية

$f(x) = a^x$

* وأعلم أن الدالة الأسية دائماً موجبة

$f(x) = 2^x > 0$ +ve

$x \to -\infty$ $\xrightarrow{\text{يعني}}$ $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$
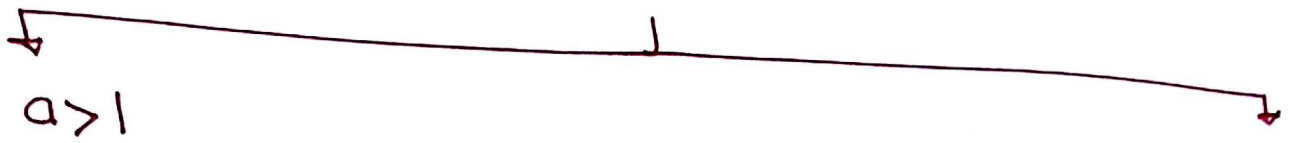
$f(x) \to 0$

معناها f $2^x \to 0$

الدالة $f(x) = 2^x$ تقترب من (صفر) عندما x تؤول إلى $-\infty$

Exponential function

$$f(x) = a^x$$

$a > 1$

$$f(x) = 2^x$$

x	$f(x)$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2

Domain $(-\infty, \infty)$ المجال

Range $(0, \infty)$ المدى
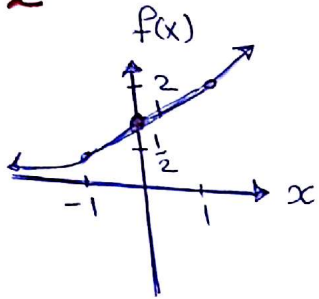
increasing تزايدية

x-axis horizontal

asymptote as $x \longrightarrow -\infty$

الدالة تَقْتَرِب من محور x عند طا مقارب

$x \longrightarrow -\infty$

$0 < a < 1$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	$f(x)$
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
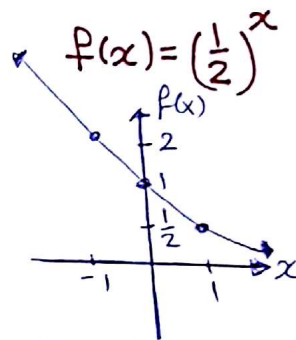
Domain $(-\infty, \infty)$

Range $(0, \infty)$

decreasing تناقصية

x-axis horizontal

asymptote as $x \longrightarrow \infty$

الدالة تَقْتَرِب من محور x

عند طا $x \longrightarrow \infty$

ملاحظات ..

① لرسم منحنى أي دالة يكفي أن نوجد ٣ نقاط . $(-1, \frac{1}{a}), (0, 1), (1, a)$

② الدالة الأسية على إلصورة $f(x) = a^x$ مجالها Domain $(-\infty, \infty)$

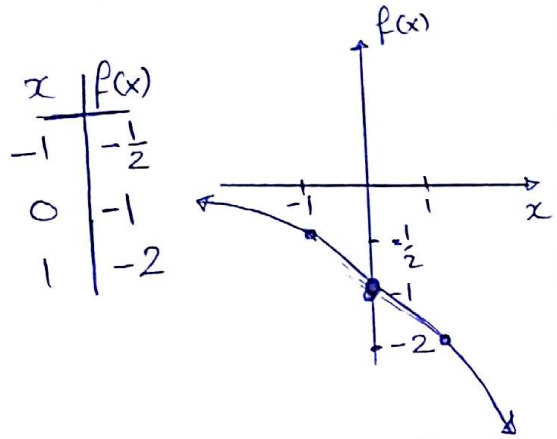مداها Range $(0, \infty)$ ، أما في حالة $f(x) = -a^x$ وَ؟ $f(x) = a^x + 1$

فإن المدى يَتغيِّر كما في إلمثال إلتالي .

③ إذا كان $a > 1$ فإن الدالة تزايدية ، $0 < a < 1$ فإن إلدالة تناقصية .

"increasing" "decreasing"

∴ **Example 2 P.(153)**

Graph each function. Give the domain and range.

ⓐ $f(x) = -2^x$

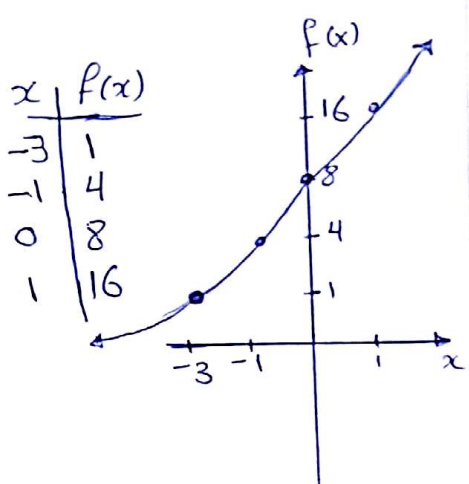| x	$f(x)$
-1	$-\frac{1}{2}$
0	-1
1	-2

Domain $(-\infty, \infty)$

Range $(-\infty, 0)$

decreasing

هذه دالة انعكاس للدالة $f(x)=2^x$

على محور x الصادات $f(x)=-a^x$

مجال
$(-\infty, \infty)$

مدى
$(-\infty, 0)$

ⓑ $f(x) = 2^{x+3}$

x	$f(x)$
-3	1
-1	4
0	8
1	16

Domain $(-\infty, \infty)$

Range $(0, \infty)$

increasing

هذه الدالة $f(x)=2^{x+3}$ هي نفس الدالة $f(x)=2^x$ لكن انتقلت 3 وحدات بإتجاه اليسار

ⓒ $f(x) = 2^{x-2} - 1$

x	$f(x)$
-1	$-7/8$
0	$-3/4$
1	$-1/2$
2	0
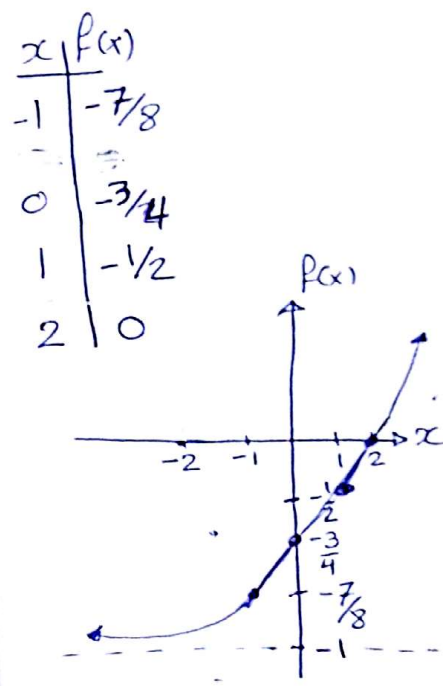
Domain $(-\infty, \infty)$

Range $(-1, \infty)$

increasing

نفس دالة 2^x لكن انتقلت وحدتين إلى اليمين ونزل وحدة واحدة تحت.

جال الدالة الأسية _____ ينية دائماً $(-\infty, \infty)$

مداها يعتمد على ب _____ بحسب شكلها

$f(x) = a^x$	$f(x) = -a^x$	$f(x) = a^x + b$
Range $(0, \infty)$	Range $(-\infty, 0)$	Range (b, ∞)
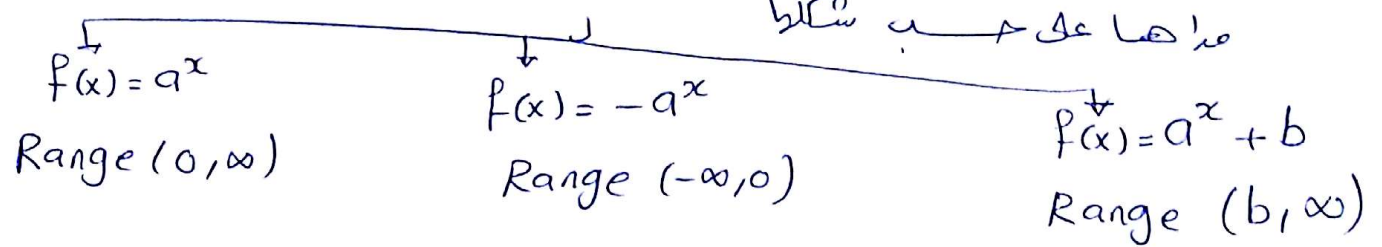
$\therefore$ **HW2** :- Solve

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$$

$$\left(3^{-1}\right)^x = 81 \implies 3^{-x} = 81$$

نفس الأساس
كلأسس متساوية
$3^{-x} = 3^4 \implies -x = 4 \implies \boxed{x = -4}$

Example 3 p.(154) : Solve:

$$2^{x+4} = 8^{x-6}$$

$$2^{x+4} = \left(2^3\right)^{x-6} \implies 2^{x+4} = 2^{3(x-6)}$$

نفس الأساس
كلأسس متساوية
$2^{x+4} = 2^{3x-18}$

$$x + 4 = 3x - 18$$
$$x - 3x = -18 - 4$$
$$-2x = -22 \implies x = \frac{-22}{-2} = 11$$

HW3 : Solve $\quad x^{4/3} = 81$

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 = 81 \longrightarrow$$ نأخذ جذر الرابع
للطرفين

$$\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x}\right)^4} = \sqrt[4]{81}$$

$$\sqrt[3]{x} = 3 \longrightarrow$$ تكعيب لطرفين

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 3^3$$

$$x = 27$$

Exercises 5.2

$g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Find :

⑥ $g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3$

$= \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Solve :-

㉛ $4^x = 2$

$\left(2^2\right)^x = 2$

$2^{2x} = 2 \implies 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}$

㉟ $27^{4x} = 9^{x+1}$

$\left(3^3\right)^{4x} = \left(3^2\right)^{x+1}$

$3^{12x} = 3^{2(x+1)} \implies 3^{12x} = 3^{2x+2}$

$12x = 2x + 2 \implies 12x - 2x = 2$

$10x = 2 \implies x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

㊷ $x^{-6} = \frac{1}{64} \implies \frac{1}{x^6} \times \frac{1}{64}$

$x^6 = 64 \implies \sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{64}$

$x = 2$

5.3 Logarithmic Functions

<div dir="rtl">الدوال اللوغاريتمية</div>

$$y = \log_a x \quad \underline{\text{equivalent}} \quad \overset{\text{شكل في}}{} \quad x = a^y$$

$$\log_{\underset{\text{الأساس}}{}} \text{« الجواب »} = \text{الأُس}$$

Example 1 :~

<div dir="rtl">الصيغة اللوغاريتمية</div> Logarithmic Form	⟷	Exponential Form <div dir="rtl">الصيغة الأسية</div>
$\log_2 8 = 3$		$2^3 = 8$
$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$		$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$
$\log_3 \frac{1}{81} = -4$		$3^{-4} = \frac{1}{81}$
$\log_5 5 = 1$		$5^1 = 5$
$\log_{\frac{3}{4}} 1 = 0$		$\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

Logarithmic Equations:~ اللوغاريتمية المعادلات

* HW1 :~ Solve each equation :~

المطلوب)) (إيجاد قيمة x

(a) $\log_x \frac{8}{27} = 3$ حولها إلى صيغة أسية ► $x^3 = \frac{8}{27}$ نأخذ الجذر الثالث للطرفين ►

$$x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \implies \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

(b) $\log_4 x = \frac{5}{2}$ حولها إلى صيغة أسية → $x = 4^{\frac{5}{2}} \implies x = \sqrt{4^5}$

$$\boxed{x = 32}$$

(c) $\log_{49} \sqrt[3]{7} = x$ ~~~> $49^x = \sqrt[3]{7} \implies 7^{2x} = 7^{\frac{1}{3}}$ فض الأساس

$$\therefore \quad 2x = \frac{1}{3} \implies \boxed{x = \frac{1}{6}}$$ الأسس متساوية

Logarithmic Function :~

if $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ then:

$$\boxed{f(x) = \log_a x}$$ هي الصيغة العامة للدالة اللوغاريتمية

$$f(x) = \log_a x$$

$a > 1$

$0 < a < 1$

$f(x) = \log_2 x$

x	$f(x)$
½	-1
1	0
2	1
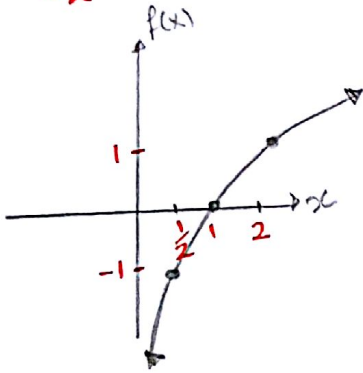
جميع حالات
الأسئلة

Domain: $(0, \infty)$

Range: $(-\infty, \infty)$

Increasing

Vertical asymptote

$x = 0$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$f(x)$
2	-1
1	0
½	1
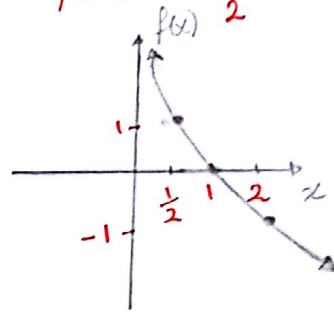
Domain: $(0, \infty)$

Range: $(-\infty, \infty)$

Decreasing

Vertical asymptote

$x = 0$

ملاحظة NB :~

The points $(\frac{1}{a}, -1)$, $(1, 0)$ and $(a, 1)$ are on the graph.

Example 2 :~ Graph each function :-

(b) $f(x) = \log_3 x$

x	$f(x)$
⅓	-1
1	0
3	1

$a > 1$
الأساس أكبر

$a > 1$

Domain $(0, \infty)$

Range $(-\infty, \infty)$

Increasing

HW2: Graph each function.
Give the domain and range.

ⓐ $f(x) = \log_2 (x-1)$

مجال, لدالة اللوغاريتمية في - مابداخل اللوغاريتم أكبر من الصفر.

مدى الدالة اللوغاريتمة : - $(-\infty, \infty)$

vertical asymptote $x=1$
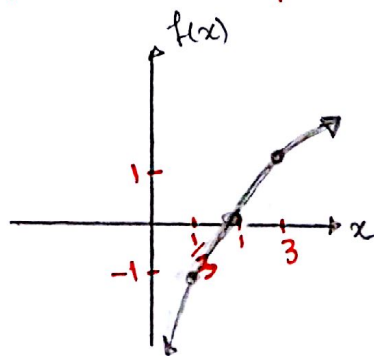
Domain: $x-1 > 0 \implies x > 1 \implies (1, \infty)$

Range: $(-\infty, \infty)$

vertical asymptote $x = 1$
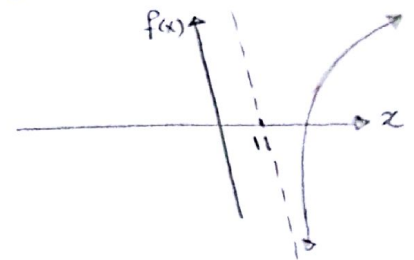
ⓑ $f(x) = \log_3 x - 1$

Domain: $x > 0 \implies (0, \infty)$

Range: $(-\infty, \infty)$

vertical asymptote $x = 0$
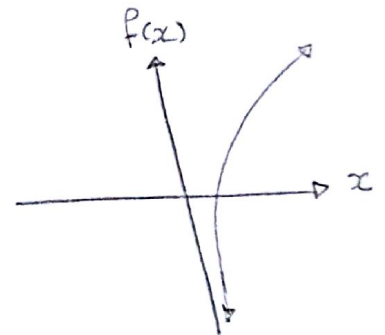
ⓒ $f(x) = \log_4 (x+2) + 1$

Domain: $x+2 > 0 \implies x > -2 \implies (-2, \infty)$

Range: $(-\infty, \infty)$

vertical asymptote $x = -2$
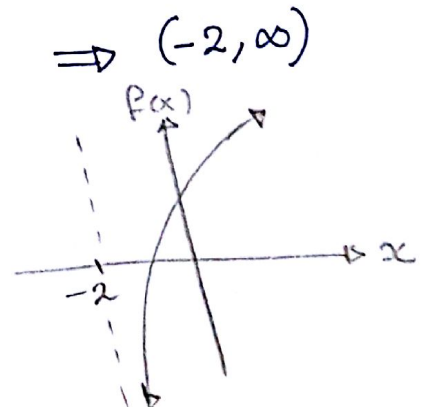
Properties of Logarithms :- خصائص اللوغاريتمات

① $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ الضرب «product»

② $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ القسمة «Quotient»

③ $\log_a x^r = r \log_a x$ القوى «power»

④ $\log_a 1 = 0$ لوغاريتم 1 دائماً = صفر .

⑤ $\log_a a = 1$

Theorem on Inverses :-

$a > 0 \; , \quad a \neq 1$

$$a^{\log_a x} = x \qquad \text{and} \qquad \log_a a^x = x$$

Example :~

$$7^{\log_7 10} = 10$$

$$\log_5 5^3 = 3$$

$$\log_r r^{k+1} = k+1$$

Example 3 :~ Using the properties of
Logarithms. ⑥

(a) $\log_6 (7 \cdot 9) = \log_6 7 + \log_6 9$ ضرب داخل قوس وحد

(b) $\log_q \frac{15}{7} = \log_q 15 - \log_q 7$ قسمة

(c) $\log_5 \sqrt{8} = \log_5 8^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5 8$ الأس

(d) $\log_a \frac{mnq}{p^2 t^4} = \log_a (mnq) - \log_a (p^2 t^4)$

$= \log_a m + \log_a n + \log_a q - (\log_a p^2 + \log_a t^4)$

$= \log_a m + \log_a n + \log_a q - 2\log_a p - 4\log_a t$

(e) $\log_a \sqrt[3]{m^2} = \log_a m^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_a m$

(f) $\log_b \sqrt[n]{\frac{x^3 y^5}{z^m}} = \log_b \left(\frac{x^3 y^5}{z^m}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_b \frac{x^3 y^5}{z^m}$

$= \frac{1}{n} \left(\log_b (x^3 y^5) - \log_b z^m\right)$

$= \frac{1}{n} \left(3\log_b x + 5\log_b y - m \log_b z\right)$

هذا على الباقي طبعا ⟵ →

HW 3 :~

(a) حاول دمج للطرفين $\log_3 (x+2) + \log_3 x - \log_3 2 = \log_3 (x+2)x - \log_3 2$ قسمة

$= \log_3 \frac{x(x+2)}{2}$

(b) $2\log_a m - 3\log_a n = \log_a \frac{m^2}{n^3}$ قسمة

Scanned by CamScanner

$$\boxed{\log_a(b+c) \neq \log_a b + \log_a c}$$

Exercises :- Write each logarithms to exponential form :-

④ $\log_6 36 = 2 \underset{\text{صيغة اسية}}{\overset{نحولها}{\Longrightarrow}} 6^2 = 36$

Solve each logarithmic equation :- حل المعادلة اللوغاريتمية

⑬ $\log_4 x = 3 \implies x = 4^3 \implies \boxed{x = 64}$

⑰ $\log_{(x+3)} 6 = 1 \implies (x+3)^1 = 6$

$$x + 3 = 6$$
$$x = 6 - 3 \implies \boxed{x = 3}$$

Use the properties of logarithms :-

㊲ $\log_3 \dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}}{w^2 \sqrt{z}} = \log_3 (\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}) - \log_3 (w^2 \sqrt{z})$

$$= \log_3 (x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}}) - \log_3 (w^2 z^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 y - 2\log_3 w - \frac{1}{2}\log_3 z$$

نعيد كتابتها بحيث تكون الموجب قبل السالب

㊷ $-\dfrac{2}{3} \log_5 5m^2 + \dfrac{1}{2}\log_5 25m^2 \longrightarrow$

$$= \frac{1}{2}\log_5 25m^2 - \frac{2}{3}\log_5 5m^2$$

$$= \log_5 (25m^2)^{\frac{1}{2}} - \log_5 (5m^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \log_5 \sqrt{25m^2} - \log_5 \sqrt[3]{(5m^2)^2}$$

$$= \log_5 \frac{5m}{\sqrt[3]{(5m)^2}}$$

5.4 Exponential and Logarithmic Equations

باب، ٥، أُسّيّة واللوغاريتيّة

Property of logarithms:~

if $x > 0, y > 0, a > 0$ then :~

اللوغاريتمّات متساوية
⟸ مايداخل ,للوغاريتمّات
متساوي

$$\boxed{\log_a x = \log_a y \iff x = y}$$

$$\log 2x = \log 1 \iff 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}$$

Solving Exponential or Logarithmic functions :-

طرق حل المعادلات
الأسّية
أو, لوغاريتميّة

① ───────── ② ───────── ③

اذا كانت على صورة
$$a^{f(x)} = b$$
⟱
نأخذ, للوغاريتم للطرفين

اذا كانت على صورة
$$\log_a f(x) = b$$
⟱
خولها إلى صيغة أُسّية
$$a^b = f(x)$$

اذا كانت على صورة
$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$
⟱
$$f(x) = g(x)$$

$$\log_{10} = \log \quad \longleftarrow \text{ اساسها } 10$$

$$\log_e = \ln$$
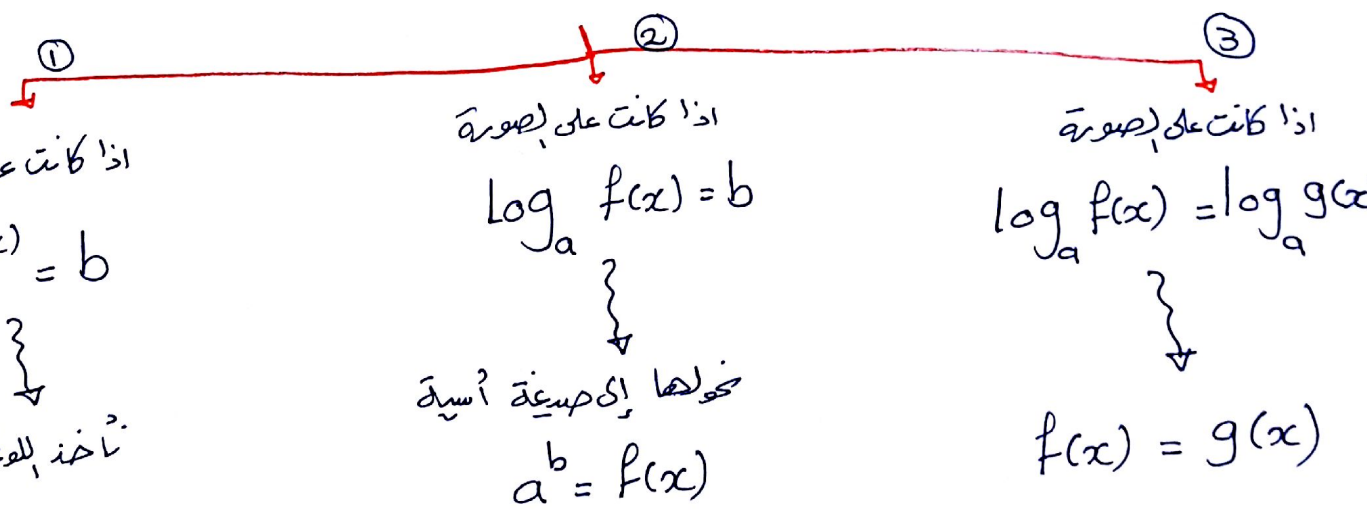
$$\ln e^x = x \quad , \quad e^{\ln x} = x$$

$\ln$ تلغي تأثير e والعكس صحيح.

Example 1 :~ Solve $7^x = 12$

على إجراء، لازم نأخذ $\ln$ للطرفين

معرفة الوغاريتمات ← خواص اللوغاريتمات

$$\ln 7^x = \ln 12$$

$$x \ln 7 = \ln 12 \implies x = \frac{\ln 12}{\ln 7} \simeq 1.277$$

HW1 :~ Solve $3^{2x-1} = 0.4^{x+2}$

نأخذ $\ln$ للطرفين

$$\ln 3^{2x-1} = \ln 0.4^{x+2}$$

$$(2x-1)\ln 3 = (x+2)\ln 0.4$$

$$2x \ln 3 - \ln 3 = x \ln 0.4 + 2\ln 0.4 \qquad \longrightarrow \text{ متغيرات في طرف}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{وثوابت في طرف}$$

$$2x \ln 3 - x \ln 0.4 = 2\ln 0.4 + \ln 3$$

عامل مشترك $\longrightarrow x(2\ln 3 - \ln 0.4) = 2\ln 0.4 + \ln 3$

$$x = \frac{2\ln 0.4 + \ln 3}{2\ln 3 - \ln 0.4}$$

∴ Example 2 :- Solve each equation

ⓐ $e^{x^2} = 200$ نأخذ Ln للطرفين

يلغي Ln يعطي e

$Ln\ e^{x^2} = Ln\ 200$

$x^2 = Ln\ 200$ $\xRightarrow{الجذر\ التربيعي}$ $x = \pm\sqrt{Ln\ 200} \simeq \pm\ 2.302$

ⓑ $e^{2x+1} \cdot e^{-4x} = 3e$

← نفس الأساس
← نجمع القوس

$e^{2x+1+(-4x)} = 3e$

$e^{2x+1-4x} = 3e$

$e^{-2x+1} = 3e$ نأخذ Ln للطرفين

$\underline{Ln\ e^{-2x+1} = Ln\ 3e}$ خصائص للوغاريتمات   "الضرب"

$-2x+1 = Ln\ 3 + Ln\ e$ $\boxed{Ln\ e^1 = 1}$

$-2x+1 = Ln\ 3 + 1$

$-2x = Ln\ 3 + 1 - 1$

$x = -\dfrac{Ln\ 3}{2}$

Example 3 :-

ⓐ $7\ Ln\ x = 28$ $\Longrightarrow$ $Ln\ x = \dfrac{28}{7}$ $\Longrightarrow$ $Ln\ x = 4$

نأخذ e للطرفين

$e^{Ln\ x} = e^4$ $\Longrightarrow$ $x = e^4$

Solution set $\{e^4\}$

(b) $\log_2 (x^3 - 19) = 3$

عند رمزها — (2) نؤخذ الأساس أسي

$$x^3 - 19 = 2^3 \implies x^3 - 19 = 8$$

$$x^3 = 8 + 19 \implies x^3 = 27$$ ناخذ جذر التكعيب

$$x = \sqrt[3]{27} \implies x = 3$$

Solution set $\{3\}$

HW2 or Solve $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

نعيد كتابتها على شكل التالي ..

$$(e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0$$ — نفرض

هذه معادلة تربيعية نحلها بالتحليل :- $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$$ بس بدل x نضع e^x

$$e^x - 1 = 0 \qquad \text{or} \qquad e^x - 3 = 0$$

$$e^x = 1 \qquad , \qquad e^x = 3$$

$$\ln e^x = \ln 1 \qquad , \qquad \ln e^x = \ln 3$$

$$x = \ln 1 \qquad , \qquad x = \ln 3$$

$$x = 0 \qquad ,$$

∴ Solution set $\{0, \ln 3\}$

$$\log(x+6) - \log(x+2) = \log x$$

$$\log\frac{x+6}{x+2} = \log x$$

من جالة (3) ــ للوغاريتمات متساوية يعني ما بداخل للوغاريتم متساوي.

$$\frac{x+6}{x+2} = x \implies x+6 = x(x+2)$$

خطأ هذا صح يفرق
$$x+6 = x^2+2x$$

$$x^2+2x-x-6 = 0$$

$$x^2+x-6 = 0$$

نحلل
$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3 = 0 \qquad or \qquad x-2 = 0$$

$$x = -3 \qquad , \qquad x = 2$$

$$\text{Solution set} \qquad \{-3, 2\}$$

Example 4 :~ Solve:-

$$\log_2\left[(3x-7)(x-4)\right] = 3$$

على ارقم (2) ــ نحولها إلى صيغة أسية

$$(3x-7)(x-4) = 2^3$$

$$3x^2 - 12x - 7x + 28 = 8$$

$$3x^2 - 19x + 20 = 0$$

$$(3x-4)(x-5) = 0$$

$$3x-4 = 0 \qquad or \qquad x-5 = 0$$

$$x = \frac{4}{3} \qquad , \qquad x = 5$$

$$\text{Solution set} \qquad \left\{\frac{4}{3}, 5\right\}$$

$$Log\ (3x+2) + Log\ (x-1) = 1$$

خواص اللوغاريتمات

$$Log\left[(3x+2)(x-1)\right] = 1$$

نحولها إلى صيغة أسية

$$(3x+2)(x-1) = 10^{1}$$

$$3x^{2} - 3x + 2x - 2 - 10 = 0$$

$$3x^{2} - x - 12 = 0$$

أكمل ؟

Example 5 :~ Solve:

$$Ln\ e^{Ln x} - Ln\ (x-3) = Ln\ 2$$

$$Ln x - Ln\ (x-3) = Ln\ 2$$

$$Ln\ \frac{x}{x-3} = Ln\ 2$$

من الحالة 3 ـ اللوغاريتمات ﴿ﻟﻚ﴾ متساوية واللوغاريتم للوغاريتم مساوي.

$$\frac{x}{x-3} = 2$$

$$x = 2(x-3)$$

$$2x - 6 = x$$

$$2x - x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

Solution set $\{6\}$

① $7^x = 19$ $\xrightarrow[\text{نأخذ اللوغاريتم}]{\text{نأخذ ln}}$ $\ln 7^x = \ln 19$

$x \ln 7 = \ln 19 \implies \boxed{x = \dfrac{\ln 19}{\ln 7}}$

② $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 12 \longrightarrow \ln \left(\frac{1}{2}\right)^x = \ln 12$

$x \ln \frac{1}{2} = \ln 12 \implies \boxed{x = \dfrac{\ln 12}{\ln \frac{1}{2}}}$

⑤ $0.8^x = 4 \longrightarrow \ln 0.8^x = \ln 4$

$x \ln 0.8 = \ln 4 \implies \boxed{x = \dfrac{\ln 4}{\ln 0.8}}$

⑫ $3(2)^{x-2} + 1 = 100$

$3(2)^{x-2} = 100 - 1 \implies 3(2)^{x-2} = 99$

$2^{x-2} = \dfrac{99}{3} \implies 2^{x-2} = 33$ نأخذ ln للطرفين

$\ln 2^{x-2} = \ln 33 \implies (x-2)\ln 2 = \ln 33$

$x \ln 2 - 2 \ln 2 = \ln 33 \implies x \ln 2 = \ln 33 + 2 \ln 2$

$\boxed{x = \dfrac{\ln 33 + 2 \ln 2}{\ln 2}}$

⑬ $2(1.05)^x + 3 = 10$

$2(1.05)^x = 7 \implies (1.05)^x = \dfrac{7}{2} \implies \ln (1.05)^x = \ln \dfrac{7}{2}$

$x \ln 1.05 = \ln \dfrac{7}{2}$

$\boxed{x = \dfrac{\ln 7/2}{\ln 1.05}}$

(18.) $5 \ln x = 10$

$\ln x = \dfrac{10}{5} \implies \ln x = 2 \implies e^{\ln x} = e^2$

$$\boxed{x = e^2}$$

(19) $\ln(4x) = 1.5 \implies e^{\ln(4x)} = e^{1.5}$

$4x = e^{1.5} \implies \boxed{x = \dfrac{1}{4} e^{1.5}}$

(34) $\ln(4x-2) - \ln 4 = -\ln(x-2)$

$\ln \dfrac{4x-2}{4} = \ln(x-2)^{-1}$

$\ln \dfrac{4x-2}{4} = \ln \dfrac{1}{x-2}$

$\dfrac{4x-2}{4} = \dfrac{1}{x-2} \implies (4x-2)(x-2) = 4$

$4x^2 - 8x - 2x + 4 - 4 = 0 \implies 4x^2 - 10x = 0$

$2x(2x-5) = 0$

$2x = 0 \qquad$ or $\qquad 2x - 5 = 0$

$x = 0 \qquad\qquad$ or $\qquad x = \dfrac{5}{2}$

$$\text{Solution set} \quad \left\{ 0, \dfrac{5}{2} \right\}$$

(35) $\log_5 (x+2) + \log_5 (x-2) = 1$

$\log_5 \left[(x+2)(x-2) \right] = 1$

قانون إلى ضرب
اسس

$(x+2)(x-2) = 5^1$

$x^2 - 4 - 5 = 0 \implies x^2 - 9 = 0 \implies x^2 = 9$

$\boxed{x = \pm 3}$

(39) $\log x^2 = (\log x)^2$

$\log x^2 - (\log x)^2 = 0$

$2 \log x - \log x \log x = 0$

$\log x (2 - \log x) = 0$

$\log x = 0$ or $2 - \log x = 0$

$\log x = 2$

$x = 10^0$

$x = 1$

$x = 10^2$

$x = 100$

Solution Set $\{1, 100\}$