بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين

حل تمارين المقرر 101 ريض differential calculus

Chapter 1

إعداد د. عبد الله بن عثمان المغيره (أستاذ مشارك بجامعة الملك سعودسابقاً والآن متقاعد)

أعزائي طلاب وطالبات السنة الأولى المشتركة ؛ إن رأيتم أن هذا العمل مفيد فالرجاء إخبار زملائكم فالدال على الخير كفاعله

أرحب بآرائكم ومقترحاتكم وللتواصل بريد الكتروني
elmo1502@hotmail.com

لا تنسوني من دعائكم بارك الله فيكم

المحتويات	رقم الصفحة

Section 1.1

حل تمارين (1.1) EXERCISES صفحة 81 و 82 و 83 في الكتاب

In Exercises 1 – 4 complete the table and use the results to estimate the limit (if exist)

في التمارين 1 – 4 أكمل الجدول واستخدم النتيجة لتقدر النهاية (إذا كانت موجودة)

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

X	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
f(x)	0.3448	0.3344	0.3334	0.3332	0.3322	0.3226

$$\approx 0.333 = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه إذا اقتربت x من اليمين(x اكبر من 2) الى العدد 2 فإن *f(x)* تقترب من العدد 0.3332

وبالمثل إذا اقتربت x من اليسار (x أقل من 2) الى العدد 2 فإن *f(x)* تقترب من العدد 0.3332

ومنه يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} \approx 0.3332$

الرمز $\approx$ يعني تقريباً

وبالتحليل نجد أن

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أن $\frac{1}{3} \approx 0.3332$

لاحظ أيضاً أنه لو عوضنا عن x بالعدد 2 لنتج أن

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \frac{2-2}{4-2-2} = \frac{0}{0} = ?$$

حيث $\frac{0}{0}$ ليست عدد حقيقي أي كمية مبهمة

$$2.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$$

X	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.2911	0.2890	0.2900	0.2900	0.288	0.2863

≈ 0.2900

لاحظ أنه إذا اقتربت x من اليمين(x اكبر من 0) الى العدد 0 فإن *f(x)* تقترب من العدد 0.29

وبالمثل إذا اقتربت x من اليسار (x أقل من 0) الى العدد 0 فإن *f(x)* تقترب من العدد 0.29

ومنه يكون

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \approx 0.29$$

لاحظ أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}$$

ضربنا البسط والمقام بمرافق المقام للتخلص من الجذور

$$= \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{x}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\approx 0.2886$$

3. $\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}}{x-3}$

X	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
f(x)	-0.0641	-0.06266	-0.06252	-0.06248	-0.06234	-0.06098

≈ -0.0625

لاحظ أن

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}}{x-3} = \frac{\frac{4-1-x}{4(1+x)}}{x-3} = \frac{\frac{3-x}{4(1+x)}}{x-3} = \frac{\frac{-(x-3)}{4(1+x)}}{x-3}$$

$$= -\frac{-1}{4(1+x)} = -\frac{1}{4(1+3)} = -\frac{1}{16} \approx -0.0625$$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}$

X	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
f(x)	0.5263	0.5025	0.5002	0.4997	0.4975	0.4762

≈ 0.5

لاحظ أن

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

In Exercises 5-11 , use the table technique to estimate the following limits (if exist)

في التمارين 5 – 11 استعمل طريقة الجدول لتقدير النهايات الآتية (إن كانت موجودة)

5. $\lim_{X\to 2} 9$

X	1.9	1.99	1.999	2.1	2.01	2.001
F(x)	9	9	9	9	9	9

constant function = 9 = دالة ثابتة

6. $\lim_{x\to 3}(x^2+2)$

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
f(x)	10.41	10.9401	10.9940	11.0060	11,0602	11.61

= 11

$$\lim_{x\to 3}\ (x^2+2) = 3^2+2 = 9+2 = 11$$

7. $$\lim_{x\to -1}\ \frac{x+1}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{x+1}{x+1} & ,x+1 \geq 0\ \ or\ \ x\ \geq -1 \\ -\frac{x+1}{x+1}\ , & x+1 < 0\ \ 0r\ \ \ x < -1 \end{cases}$$

X	-1.1	-1.01	-1.001	-0.999	-0.99	-0.9
f(x)	-1	-1	-1	1	1	1

لاحظ أنه إذا اقتربت x من اليمين(x اكبر من 1-) الى العدد 1- فإن *f(x)* تقترب من العدد 1

وبالمثل إذا اقتربت x من اليسار (x أقل من 1-) الى العدد 1- فإن *f(x)* تقترب من العدد 1-

أي أن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار أي أن

$limit\ does\ not\ \ exist\ = d.n.$e النهاية غير موجودة

8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{1-x}\ -2}{x+3}$

x	- 2.9	-2.99	-2.999	-3.001	-3.01	- 3.1
f(x)	-0.252	-0.2500	-0.2500	- 0.2500	-0.249	- 0.2485

$$\approx -0.25 = -\frac{1}{4}$$

لاحظ أن

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{1-x}\ -2}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{\left(\sqrt{1-x}-2\right)(\sqrt{1-x}+2)}{(x+3)\ (\sqrt{1-x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{1-x-4}{(x+3)\ (\sqrt{1-x}+2)}\ \frac{-(x+3)}{(x+3)\ (\sqrt{1-x}+2)}$$

$$= \frac{-1}{(\sqrt{1-x}+2)} = -\frac{1}{\sqrt{1-(-3)}+2} = -\frac{1}{\sqrt{1+3}\ +2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{4}+2} = -\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4} = -0.25$$

9. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

X	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
f(x)	7.9	7.99	7.999	8.001	8.01	8.1

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$$

لاحظ أنه إذا اقتربت x من اليمين(x اكبر من 4) الى العدد 4 فإن *f(x)* تقترب من العدد 8

وبالمثل إذا اقتربت x من اليسار (x أقل من 4) الى العدد 4 فإن *f(x)* تقترب من العدد 8

لا حظ أن

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} (x+4) = (4+4) = 8$$

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

X	-0.5	- 0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5
f(x)	0.9589	0.9851	0.9983	0.9983	0.9851	0.9589

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0.9983 \approx 1$$

نتيجة مهمة

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

X	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	-0.000015	-0.000002	-0.000002	0.000002	0.000002	0.000002

≈ 0.000

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)}\right)$$

$$= (1)\left(\frac{\sin 0}{1+\cos 0}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

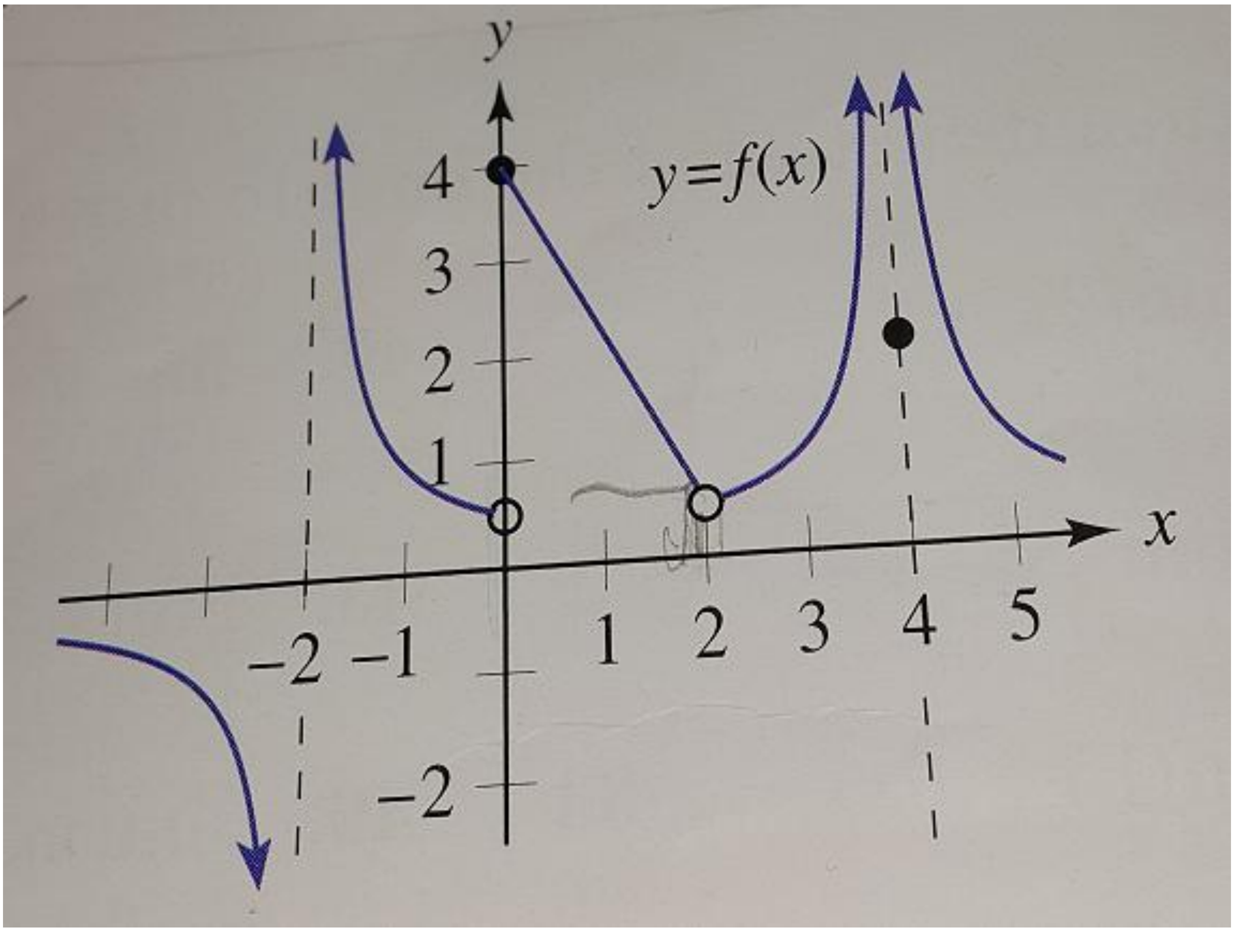
نتائج مهمة قد نستخدمها مستقبلاً

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

In Exercises 12 – 17 , use the graph of the function f to find the following limits (if exist)

في التمارين 12 – 17 استخدم رسم الدالة f لتجد النهايات الآتية (إن وجدت)



لإيجاد النهايات من الرسم نقوم بما يلي

في الرسم دوائر بيضاء وسوداء

1) إذا كانت الدائرة البيضاء أو السوداء يتصل بها فقط من اليمين مستقيم أو منحني فإن النهاية اليمنى فقط هي الموجودة وقيمة النهاية اليمنى هي القيمة على محور y المقابلة لهذه الدائرة

نرمز للنهاية اليمنى right hand limit بوضع إشارة + على العدد الذي تؤول إليه x أي الرمز $\lim_{x \to a^+}$

2) إذا كانت الدائرة البيضاء أو السوداء يتصل بها فقط من اليسار مستقيم أو منحني فإن النهاية اليسرى فقط هي الموجودة وقيمة النهاية اليسرى هي القيمة على محور y المقابلة لهذه الدائرة

نرمز للنهاية اليسرى left hand limit بوضع إشارة - على العدد الذي تؤول إليه x أي الرمز $\lim_{x \to a^-}$

3) تكون النهاية limit موجودة فقط وفقط إذا كانت النهايتين اليمنى واليسرى موجودتين ومتساويتين ونرمز لذلك بالرمز $\lim_{x \to a}$

وهذا يعني أن الدائرة البيضاء أو السوداء تكون متصلة بمستقيمين أو منحنيين من اليمين ومن اليسار في نفس الوقت

لكي نحدد الاتصال بالدوائر بمنحنيات أو مستقيمات في حالة الغموض , نرسم على الدائرة المعينة عمود موازٍ لمحور y وما كان عن يمينه من منحني أو مستقيم فهو اتصال من اليمين . وما كان عن يساره من منحني أو مستقيم فهو اتصال من اليسار

إنتبه : الاتصال بمستقيم عمودي يعني أن الرسم ليس رسم دالة

12. $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

المطلوب هنا هو إيجاد النهاية اليسرى (إشارة الناقص فوق الصفر)عندما تؤول x الى العدد 0 . ننظر إلى العدد 0 على محور X فنجد فوقه تماماً دائرة بيضاء تقع على محور Y ويدخل إليها منحني من اليسار وفي منتصف المسافة بين العدد 0 والعدد 1 على محور Y أي أن النهاية اليسرى تساوي $\frac{1}{2}$

أي أن

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{2} = 0.5$$

13. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

المطلوب هنا هو إيجاد النهاية اليمنى (إشارة الزائد فوق الصفر)عندما تؤول x الى العدد 0 . ننظر إلى العدد 0 على محور X فنجد فوقه تماماً دائرة سوداء تقع على محور Y ويدخل إليها منحني من اليمين وعند العدد 4 على محور Y أي أن النهاية اليمنى تساوي 4

أي أن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$$

14. $\lim_{x\to 0} f(x) = d.n.e$

النهاية غير موجودة لأن النهاية اليسرى (تمرين 12) لا تساوي النهاية اليمنى (تمرين 13)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{2} \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 4 \ so \ \lim_{x\to 0} f(x) = d.n.e$$

15. $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

المطلوب هنا هو إيجاد النهاية اليسرى (إشارة الناقص فوقالعدد 2)عندما تؤول x الى العدد 2 ننظر إلى العدد 2 على محور X فنجد فوقه تماماً دائرة بيضاء تقع على محور Y ويدخل إليها مستقيم من اليسار وفي منتصف المسافة بين العدد 0 والعدد 1 على محور Y أي أن النهاية اليسرى تساوي $\frac{1}{2}$

أي أن

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{2} = 0.5$$

16. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

المطلوب هنا هو إيجاد النهاية اليمنى (إشارة الزائد فوق العدد 2)عندما تؤول x الى العدد 2 . ننظر إلى العدد 2 على محور X فنجد فوقه تماماً دائرة بيضاء تقع على محور Y ويدخل إليها منحني من اليمين وعند العدد 0.5 على محور Y أي أن النهاية اليمنى تساوي 0.5 أي أن

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0.5 = \frac{1}{2}$$

17. $\lim_{x\to 2} f(x)$

من التمرينين السابقين وجدنا أن

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 2^+} f(x) \;\; so \;\; \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$$

In Exercises 18 – 27 , use the graph of the function f to find the following limits (if exist)

في التمارين 18 - 27 استخدم رسم الدالة f لتجد النهايات الآتية (إن وجدت)

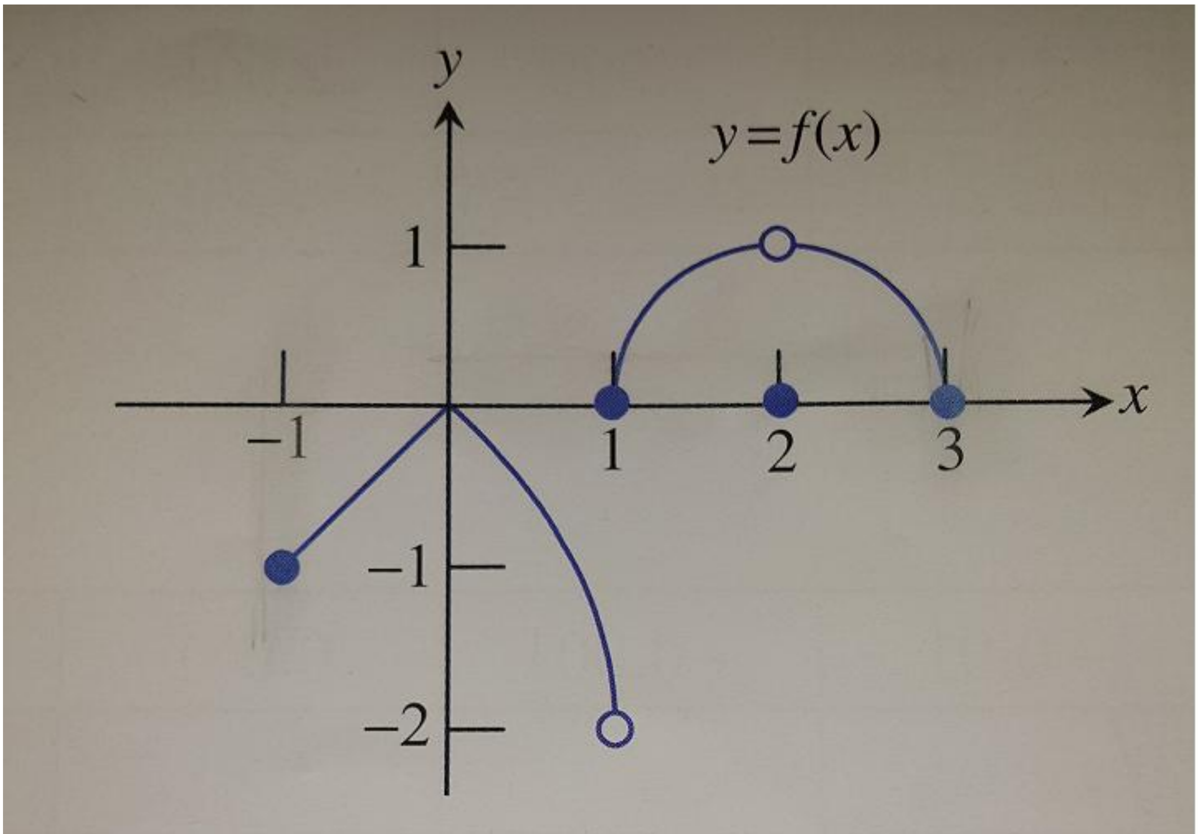


Figure 1.1.10

18. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

لا حظ هنا لا يوجد دائرة لذلك ضع دائرة صغيرة مركزها نقطة الأصل وكما عملنا سابقاً سيكون

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

19. $\lim_{x\to 0^+} \; f(x)$

كما في التمرين السابق يكون

$$\lim_{x\to 0^+} \; f(x) = 0$$

20. $\lim_{x\to 0} f(x)$

من التمرينين السابقين 18 و 19 وجدنا أن

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} \; f(x) \;\; so \;\; \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

21. $\lim_{x\to -1^{-1}} \; f(x)$

لاحظ أن العدد -1 على محور x أسفله تماماً دائرة سوداء وهذه الدائرة لا يدخل فيها منحني أو مستقيم من اليسار أي أن النهاية اليسرى عندما تؤول x إلى العدد -1 غير موجودة أي أن

$$\lim_{x\to -1^{-1}} \; f(x) = \; d.n.e.$$

22. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

لاحظ أن العدد -1 على محور x أسفله تماماً دائرة سوداء وهذه الدائرة يدخل فيها مستقيم من اليمين أي أن النهاية اليمنى عندما تؤول x إلى العدد -1 موجودة وتساوي موقع الدائرة على محور y أي العدد -1 على محور y أي أن

$$\lim_{x \to -1^{+}} f(x) = -1$$

23. $\lim_{x \to -1} f(x)$

من اتمرين 21 النهاية اليسرى غير موجودة إذاً

$$\lim_{x \to -1} f(x) = d.n.e.$$

24. $\lim_{x \to 3^{-}} f(x) = 0$

25. $\lim_{x \to 3^{+}} f(x) = d.n.e$

26. $\lim_{x \to 3} f(x) = d.n.e$

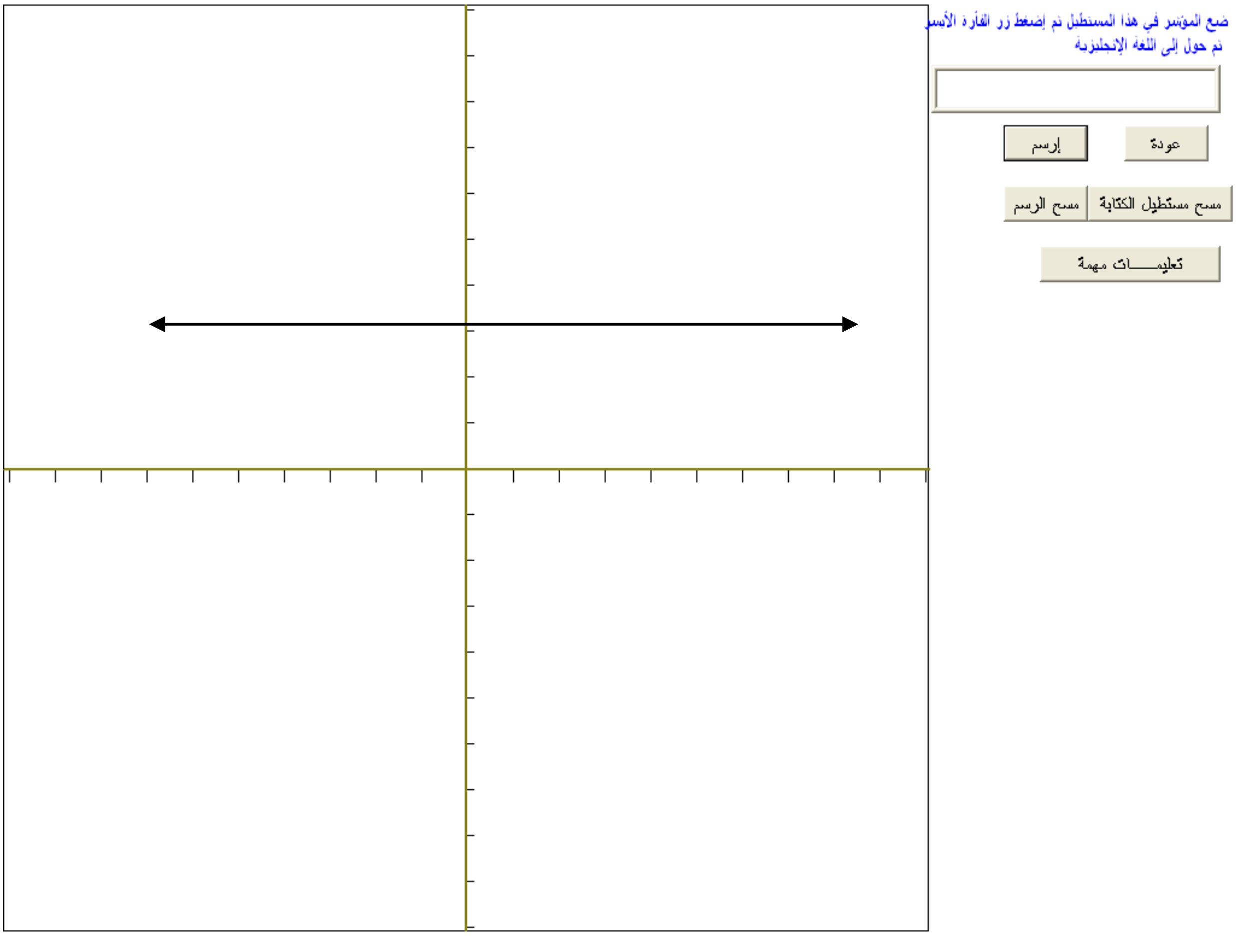
27. $\lim_{x \to 2} f(f(x)) = \lim_{x \to 2} f(2) = 2$

In Exercises 28 – 37 sketch the graph of the following functions and estimate each limit (if exist).

في التمارين 28 – 37 ارسم منحني الدوال الآتية وقدر كل نهاية (إن وجدت)

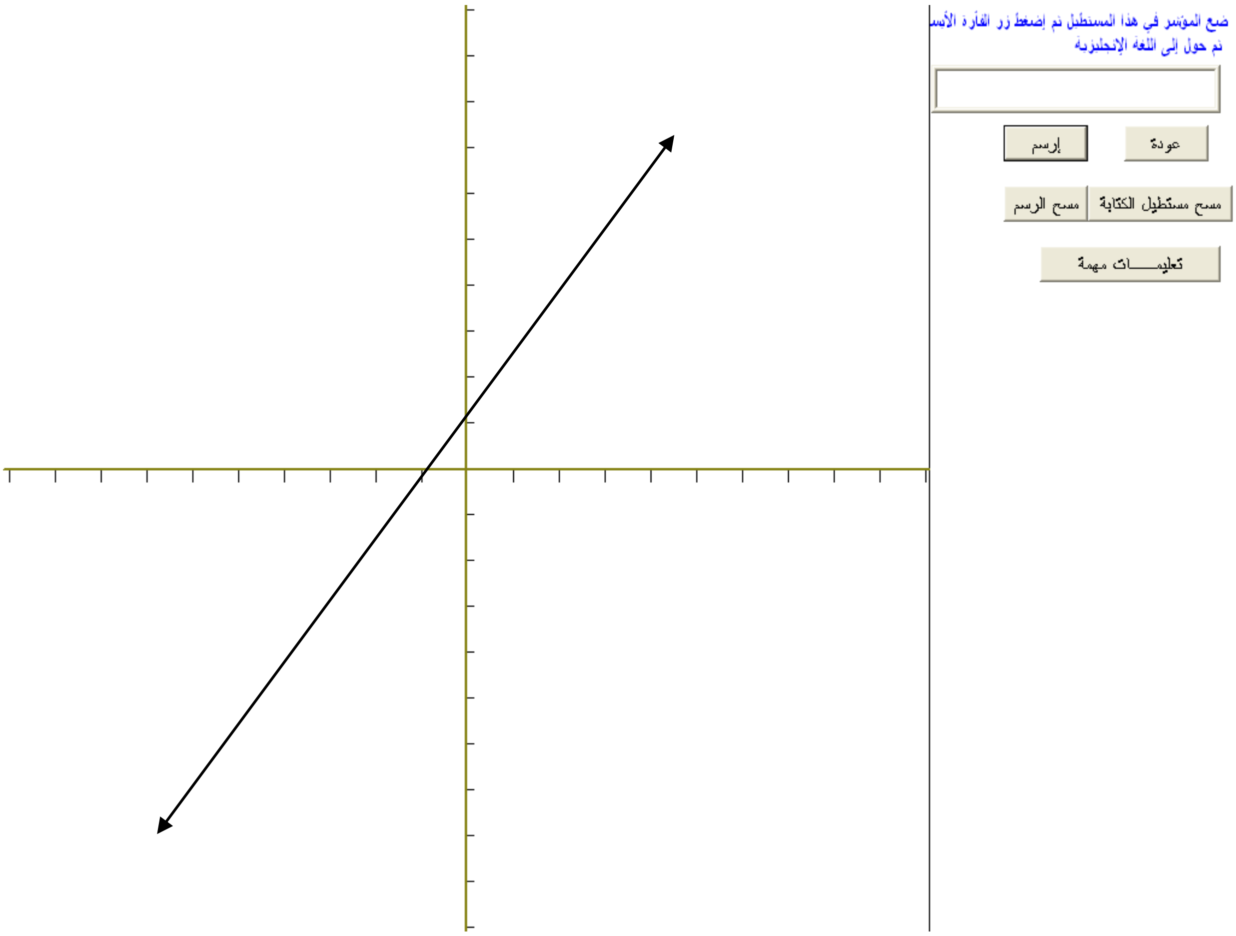
28. $\lim_{x\to 2} f(x) \quad , \qquad f(x) = 3$

دالة ثابتة $f(x) = 3$



$$\lim_{x\to 2} 3 = 3$$

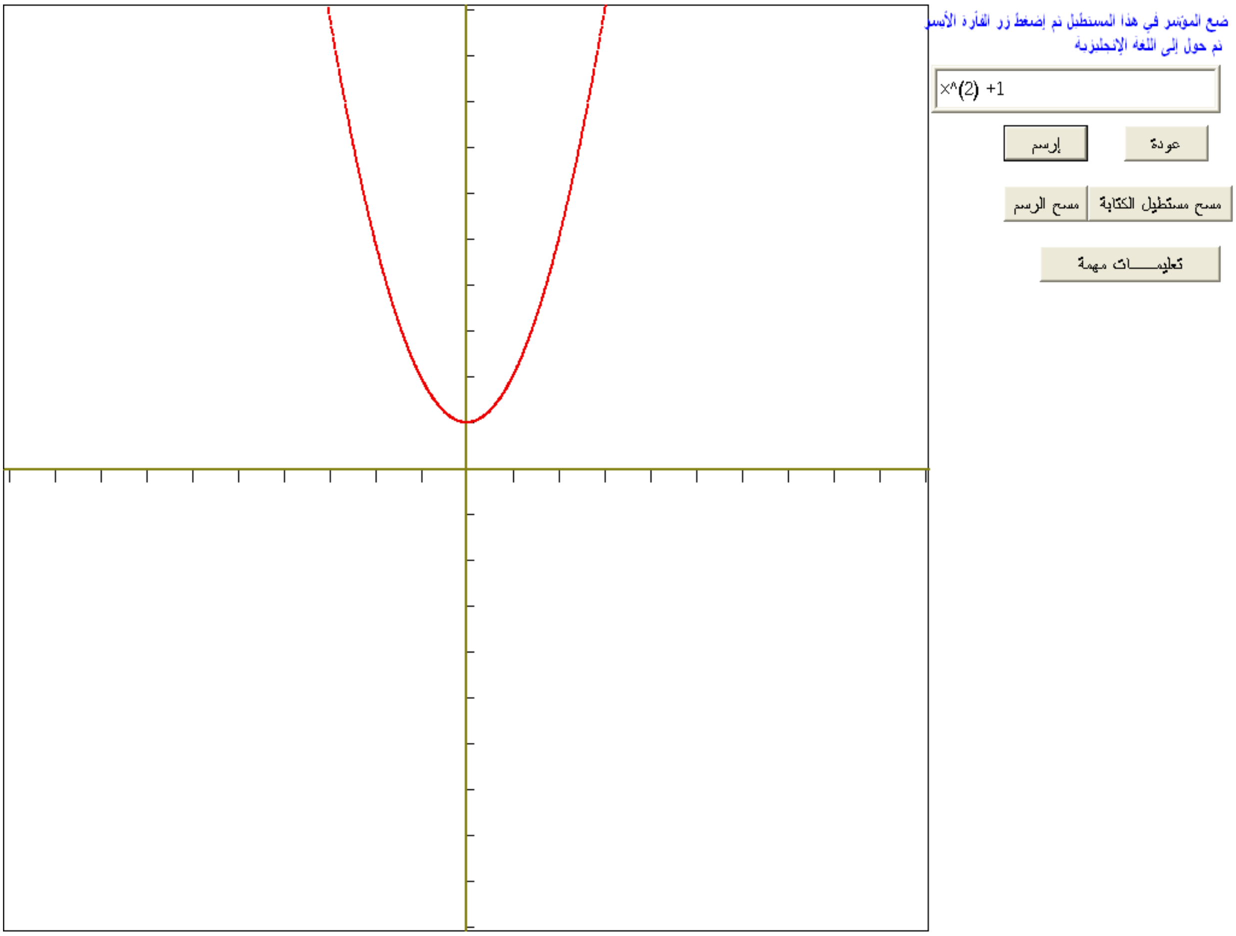
29. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \quad , \qquad f(x) = x + 1$



$$\lim_{x \to 0} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

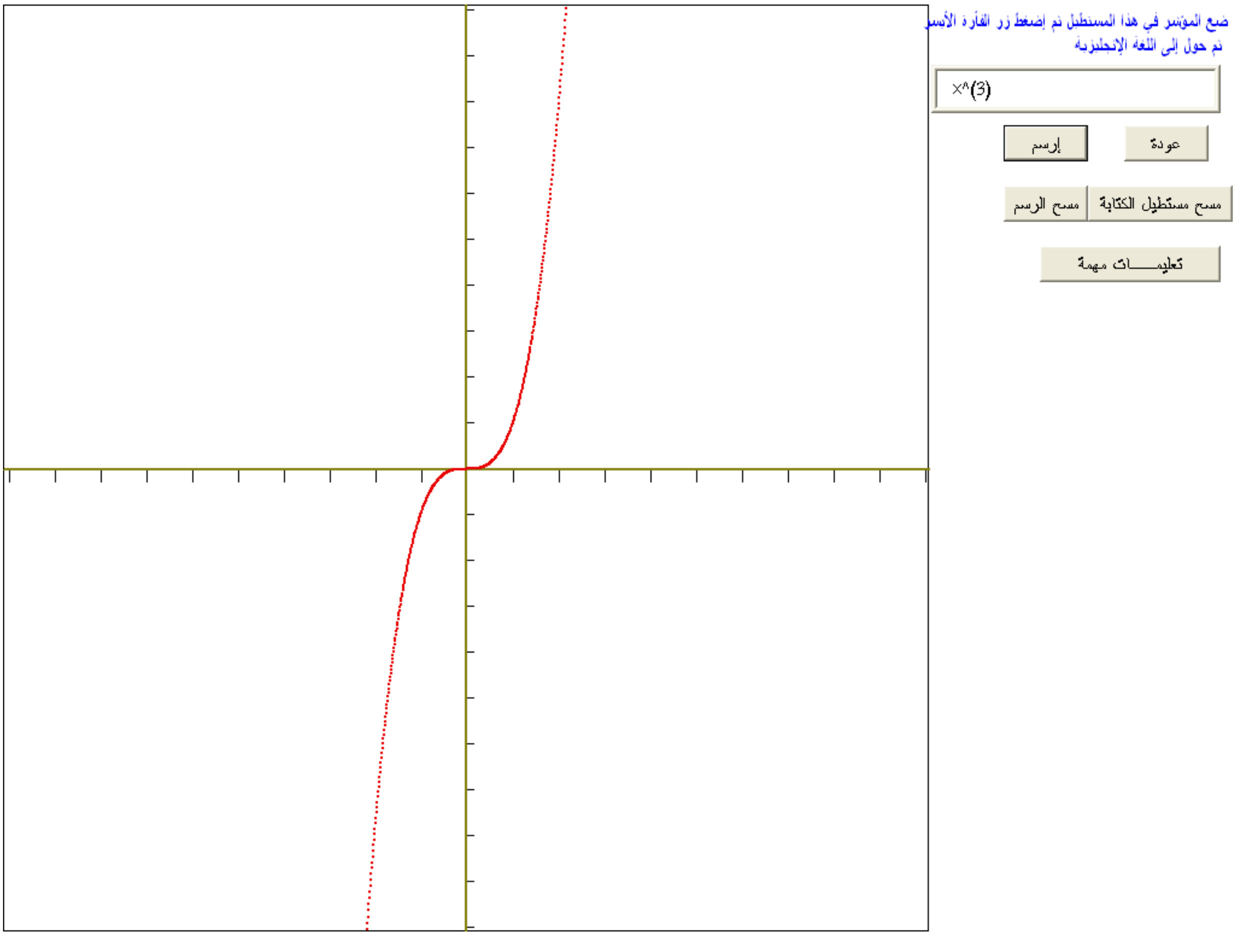
دائما عوض مباشرة بالعدد الذي تؤول إليه x فإذا كان الناتج عدد حقيقي فهو النهاية المطلوبة .

$$30.\ \lim_{x \to -3} f(x) \quad , \qquad f(x) = x^2 + 1$$



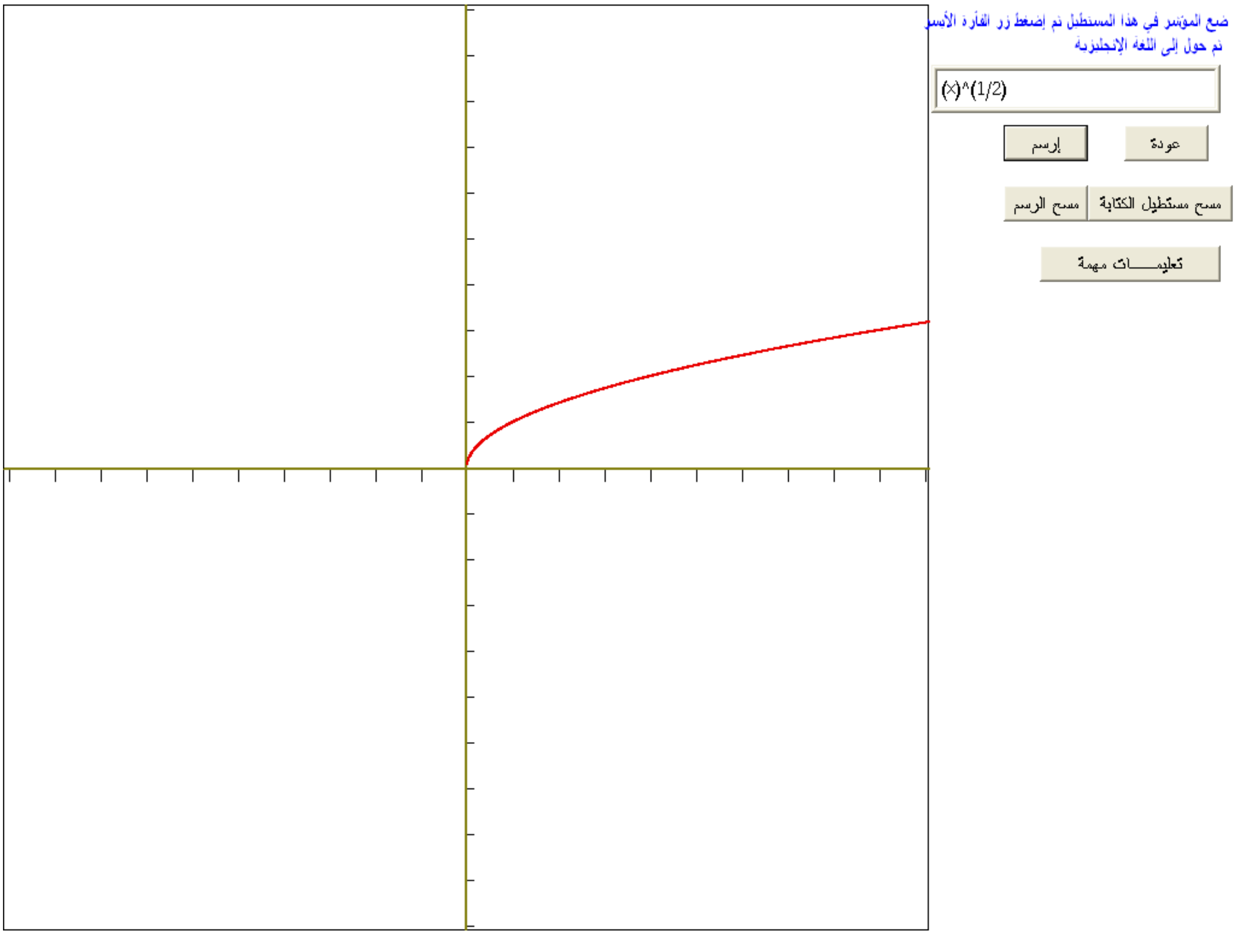
$$\lim_{x \to -3} x^2 + 1 = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

31. $\lim_{x \to -1} f(x) \quad , \quad f(x) = x^3$



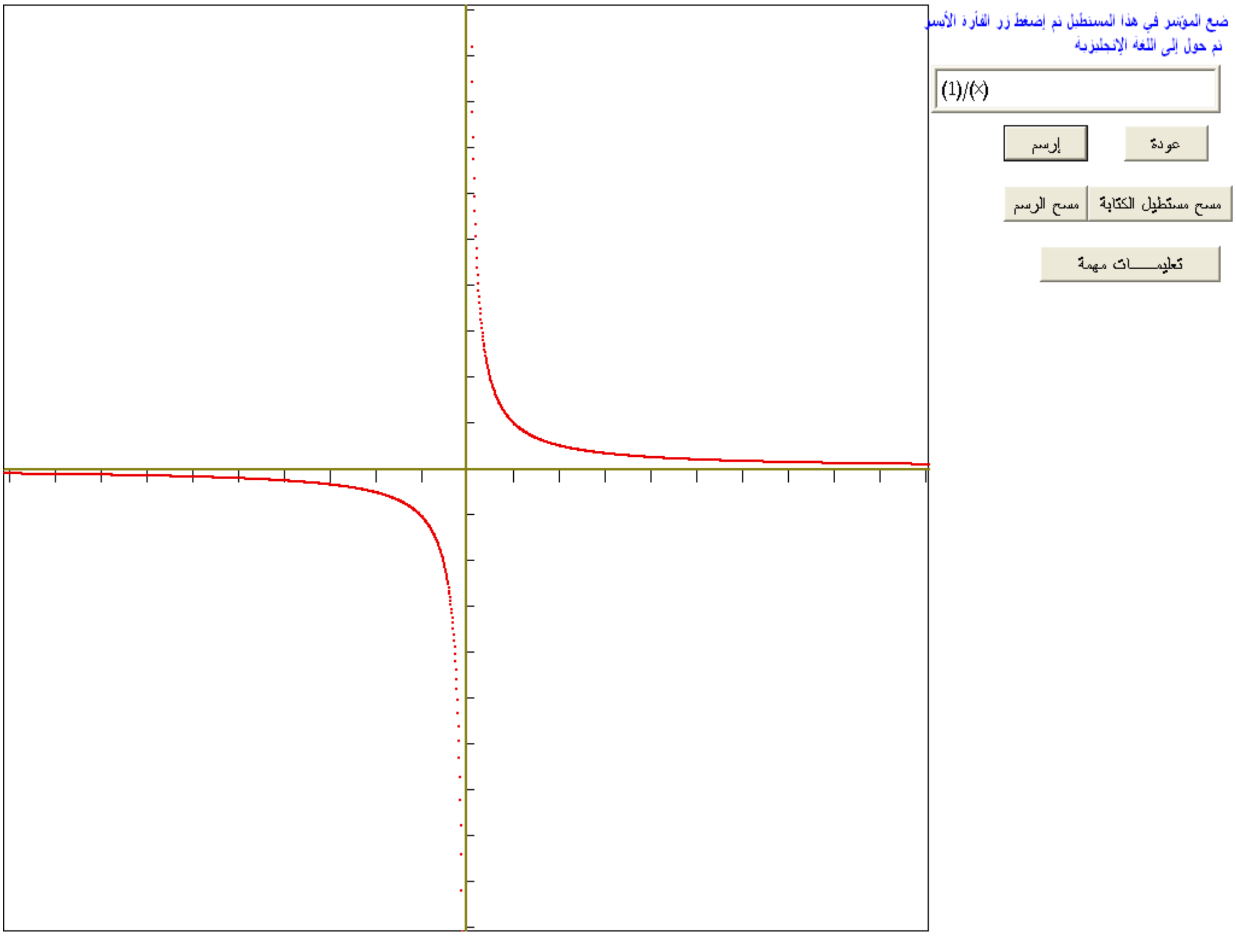
$$\lim_{x \to -1} x^3 = (-1)^3 = -1$$

32. $\lim_{x \to 0} f(x) \qquad , \qquad f(x) = \sqrt{x}$



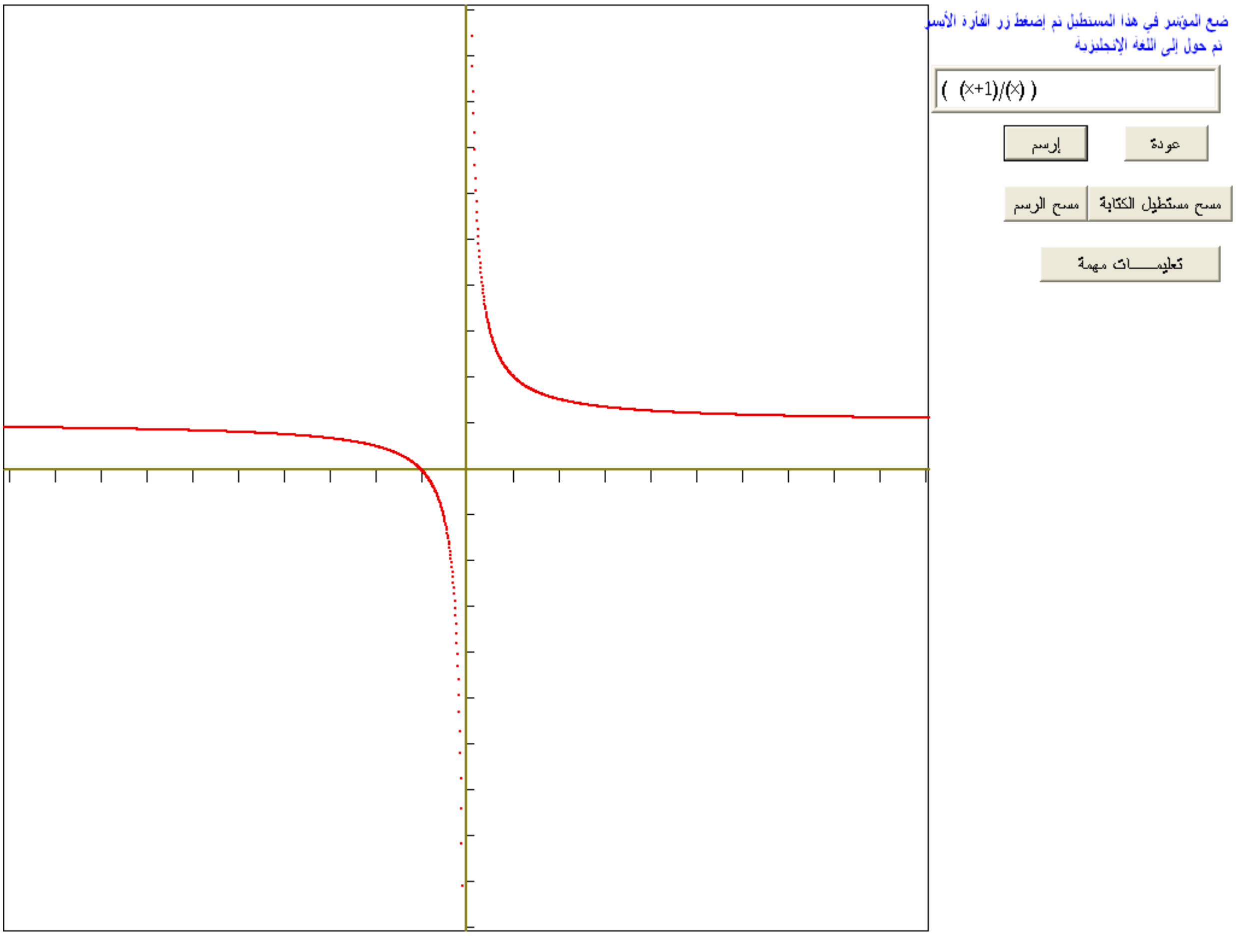
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$$

33. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x}$



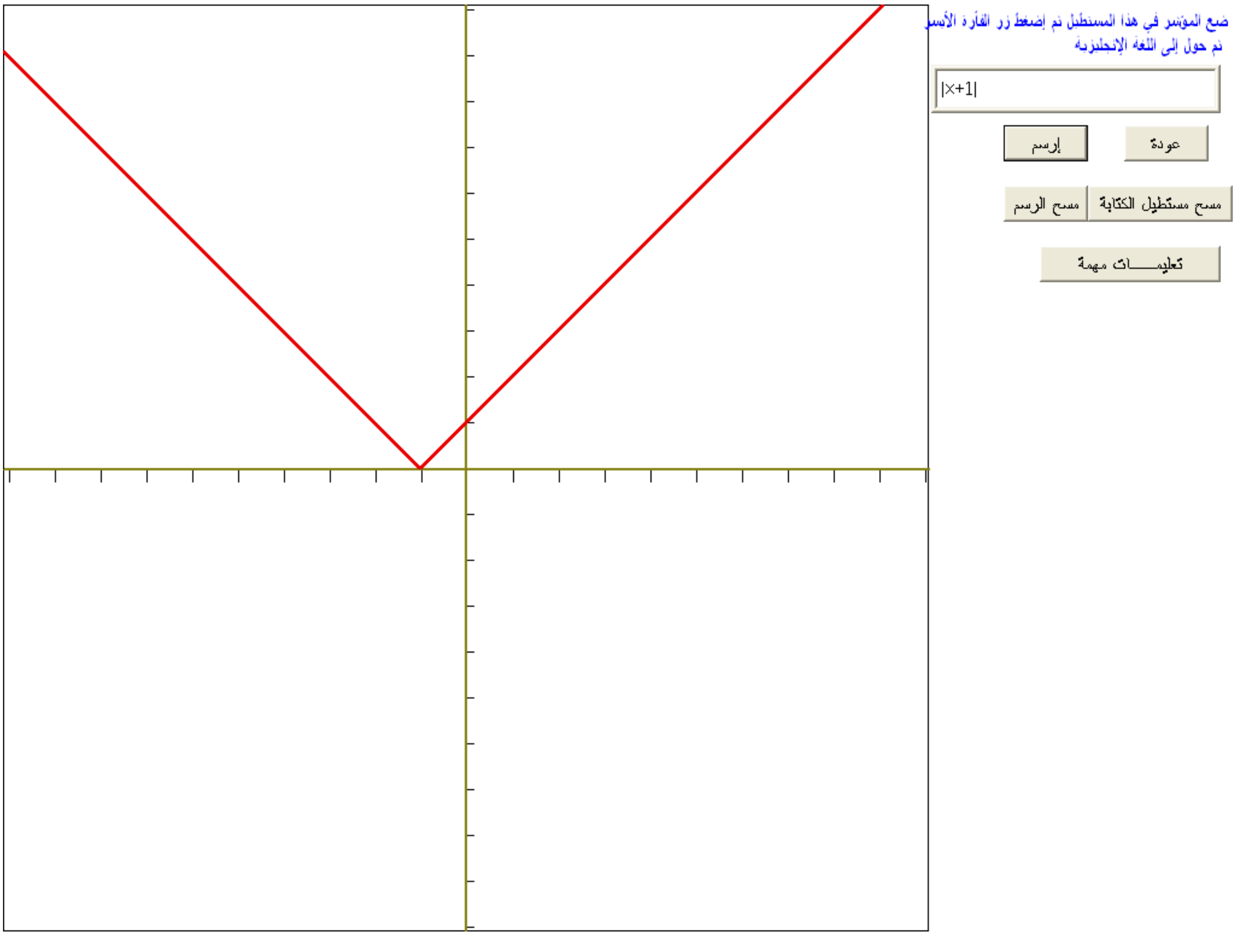
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \div \frac{1}{2} = (1)\left(\frac{2}{1}\right) = 2$$

34. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$



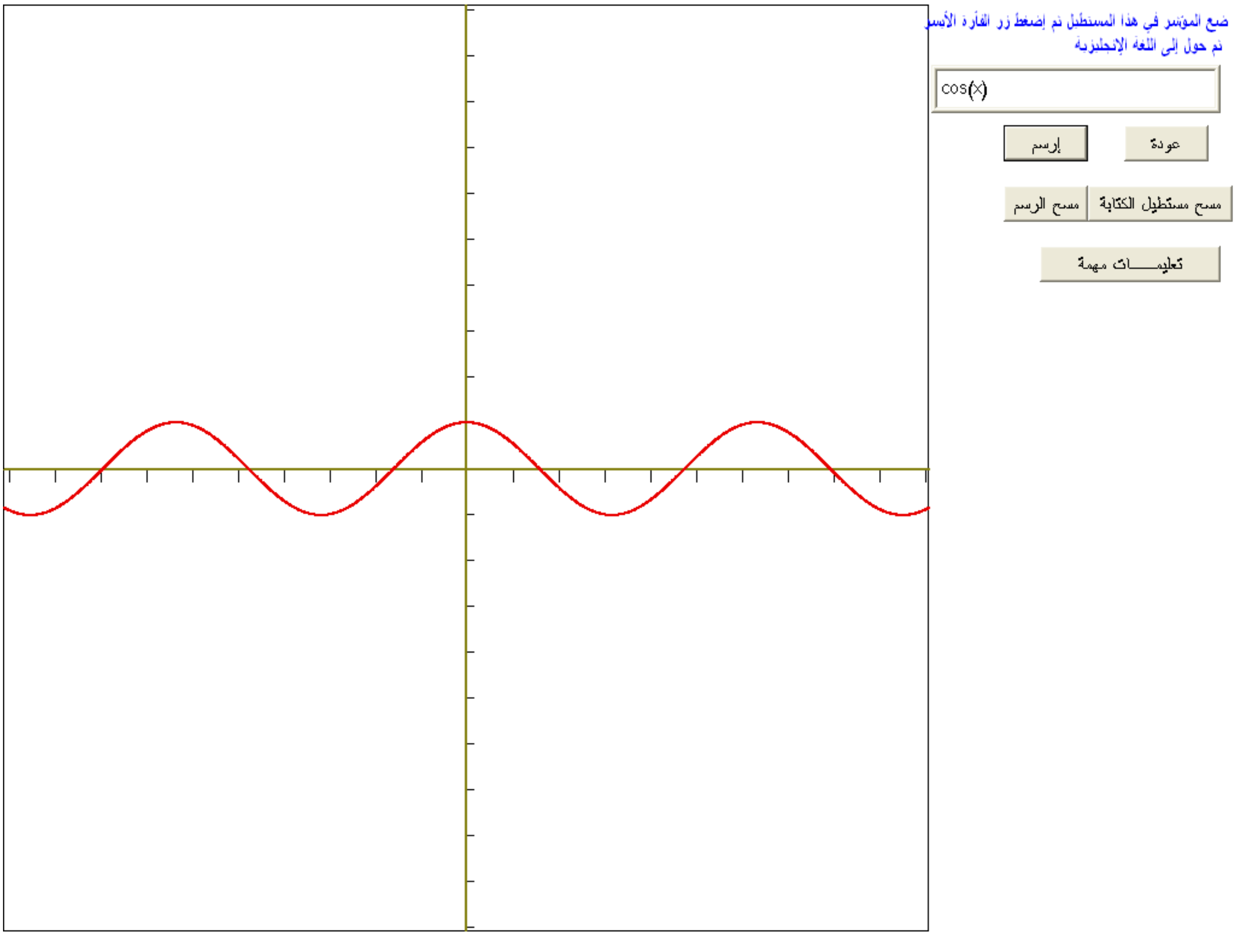
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

35. $\lim_{x \to -1} f(x) \quad , \qquad f(x) = |x+1|$



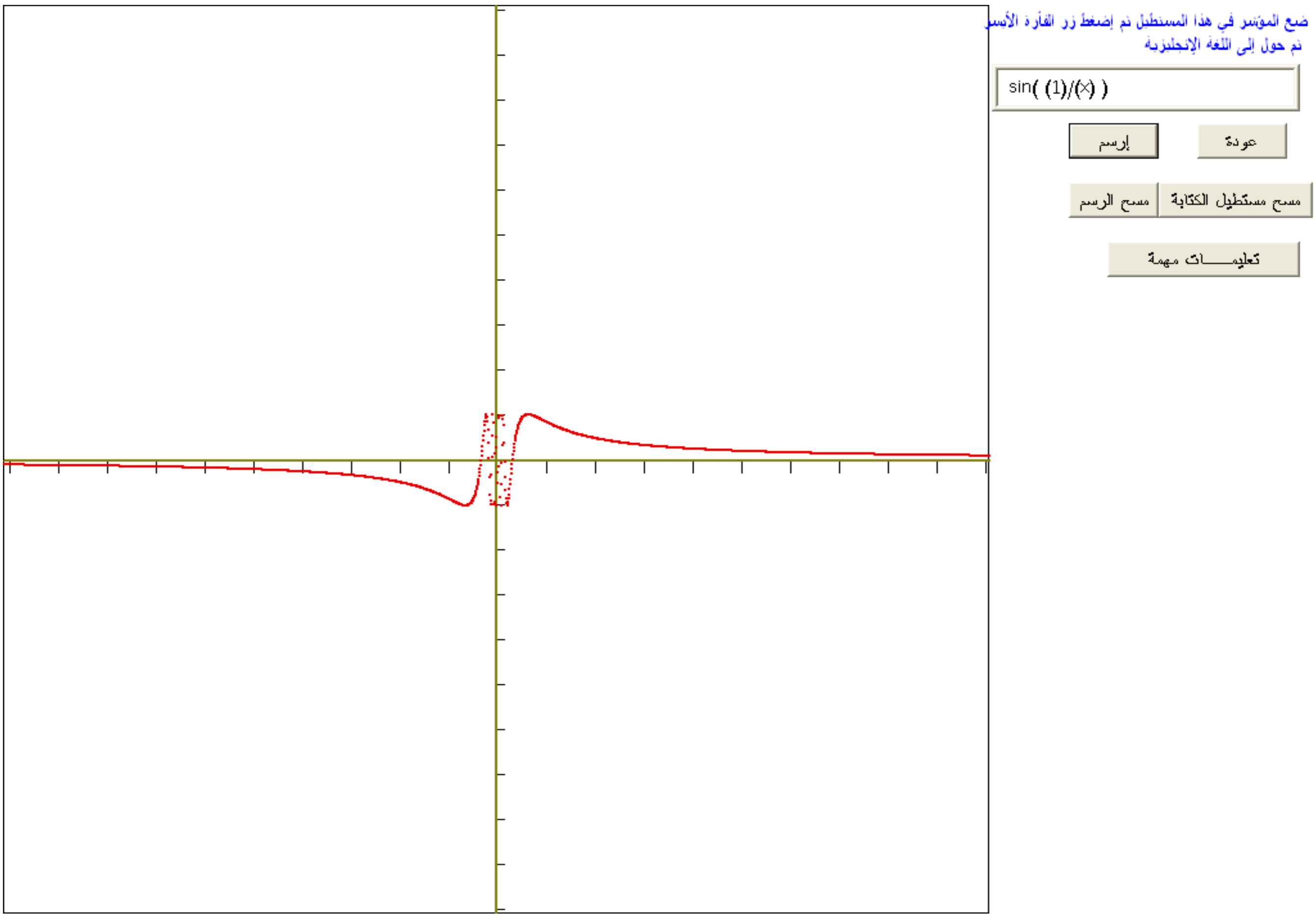
$$\lim_{x \to -1} |x+1| = |-1+1| = |0| = 0$$

$$36. \lim_{x \to 0} f(x) \quad , \qquad f(x) \cos x$$



$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos(0) = 1$$

37. $\lim_{x\to 0} f(x) \quad , \qquad f(x)\, sin(\frac{1}{x})$



$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{0}\right) = \sin(\infty) = d.n.e,$$

لا تنسى أن $-1 \le \sin(x) \le 1$

In Exercises 38 – 46 ,use the formal definition 0f the limit to prove the following limits.

في التمارين 38 – 46 استخدم التعريف الأساسي للنهاية لتبرهن النهايات الآتية

38. $\lim_{x\to\frac{1}{4}} 8x = 2$

$we\ want\ to\ show\ that\ given\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ni if$

$\left|x - \frac{1}{4}\right| < \delta\ \ then\ \ |8x - 2| < \varepsilon$

$\varepsilon =$ إبسلون , $\exists = there\ exist =$ يوجد , $\ni = such\ that =$ بحيث أن

نريد أن نثبت أنه إذا أعطينا $\varepsilon > 0$ فإننا قادرون على أن نوجد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت $\left|x - \frac{1}{4}\right| < \delta$ فإن $|8x - 2| < \varepsilon$

$|8x - 2| < \varepsilon$, $\quad \frac{8}{8}|8x - 2| < \varepsilon$, $\quad 8\left|x - \frac{2}{8}\right| < \varepsilon$

$\left|x - \frac{1}{4}\right| < \frac{\varepsilon}{8} = \delta$

إذا نأخذ $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ وبعكس الخطوات السابقة ينتج المطلوب أي

$\left|x - \frac{1}{4}\right| < \delta = \frac{\varepsilon}{8}$, $\quad \left|x - \frac{1}{4}\right| < \frac{\varepsilon}{8}$, $\quad 8\left|x - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon$

, $\left|8x - \frac{8}{4}\right| < \varepsilon$, $\quad |8x - 2| < \varepsilon$

39. $\lim_{x\to 3}(2x+1)=7$

أنظر خطوات الحل في التمرين 38

$|2x+1-7|<\epsilon$, $\quad |2x-6|<\varepsilon$, $\quad 2|x-3|<\varepsilon$

, $\quad |x-3|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$

خذ $\frac{\varepsilon}{2}=\delta$ وبعكس الخطوات السابقة ينتج المطلوب

40. $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

أنظر خطوات الحل في التمرين 38

$|\sqrt{x}-0|<\varepsilon$, $|\sqrt{x}|<\varepsilon$, $|x|<\varepsilon^2$, $|x-0|<\varepsilon^2=\delta$

خذ $\varepsilon^2=\delta$ وبعكس الخطوات السابقة ينتج المطلوب

41. $\lim_{x\to 2}\ \frac{1}{x}=0.5$

أنظر خطوات الحل في التمرين 38

$\left|\frac{1}{x}-0.5\right|<\varepsilon$, $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, $\left|\frac{2-x}{2x}\right|<\varepsilon$, $\quad \frac{|2-x|}{|2x|}<\varepsilon$

, $\frac{|2-x|}{4}<\varepsilon$, $|2-x|<4\varepsilon$, $|x-2|<4\varepsilon=\delta$

لاحظ أنه عندما تؤول x إلى العدد 2 فإن 2x تؤول إلى العدد 4

خذ $4\varepsilon=\delta$ وبعكس الخطوات السابقة ينتج المطلوب

42. $\lim_{x\to -3^-}\sqrt{-3-x}=0$

أنظر خطوات الحل في التمرين 38

$\left|\sqrt{-3-x}-0\right|<\varepsilon\,,\left|\sqrt{-3-x}\right|<\varepsilon\,,|-3-x\,|<\varepsilon^2$

$,\qquad |(-1)(3+x|<\varepsilon^2\;,\qquad |-1||x+3|<\varepsilon^2$

$,|x+3|<\varepsilon^2=\delta$

خذ $\varepsilon^2=\delta$ وبعكس الخطوات السابقة ينتج المطلوب

لا تنسى $|ab|=|a||b|\;,\;|-a|=|a|$

43. $\lim_{x\to a}(x-1)=a-1\;,\qquad a\epsilon R$

أنظر خطوات الحل في التمرين 38

$|x-1-(a-1)|\;<\varepsilon\,,\qquad |x-1-a+1|<\varepsilon$

$,|x-a|<\varepsilon=\delta$

خذ $\varepsilon=\delta$ وبعكس الخطوات السابقة ينتج المطلوب

44. $\lim_{x\to 0}9=9$

خذ $\delta=\varepsilon>0$

$|9-9|=|0|=0<\varepsilon$

45. $\lim_{x\to 8}(15-6x)=-33$

أنظر خطوات الحل في التمرين 38

$|15-6x-(-33)|<\varepsilon\,, \qquad |15-6x+33|<\varepsilon$

$, |-6x+48|<\varepsilon, \qquad |(-6)(x-8)|<\varepsilon$

$, |-6||x-8|<\varepsilon, 6|x-8|<\varepsilon, |x-8|<\frac{\varepsilon}{6}=\delta$

خذ $\quad \frac{\varepsilon}{6}=\delta \quad$ وبعكس الخطوات السابقة ينتج المطلوب

46. $\lim\limits_{x\to a}(mx+b)=ma+b \quad , \quad a,b,m\,\epsilon R$

أنظر خطوات الحل في التمرين 38

$|mx+b-ma-b|<\varepsilon, \qquad |mx-ma|<\varepsilon$

$, \qquad |m||x-a|<\varepsilon, |x-a|<\frac{\varepsilon}{|m|}=\delta$

خذ $\quad \frac{\varepsilon}{|m|}=\delta \quad$ وبعكس الخطوات السابقة ينتج المطلوب

In exercises $47-48$ *, find the limit* L*. Then*

find $\delta>0$ *such that* $|f(x)-L|<0.03$

whenever $0<|x-c|<\delta.$

في التمارين 47-48 أوجد النهاية ثم أوجد $\delta>0$ وبحيث أن

$|f(x)-L|<0.03$ عندما $0<|x-c|<\delta.$

47. $\lim\limits_{x\to -1}(3x+1)$

$\lim\limits_{x\to -1}(3x+1)=3(-1)+1=-3+1=-2$

$|3x + 1 - (-2)| < 0.03$, $|3x + 1 + 2| < 0.03$

, $|3x + 3| < 0.03, 3|x - (-1)| < 0.03$

, $|x - (-1)| < \frac{0.03}{3} = 0.01 = \delta$

أنظر خطوات الحل في التمرين 38

48. $\lim_{x \to 2} \left(3 - \frac{x}{2}\right)$

$$\lim_{x \to 2} \left(3 - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{6 - x}{2}\right) = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

$|\left(3 - \frac{x}{2}\right) - 2| < 0.03$, $\left|\frac{6 - x - 4}{2}\right| < 0.03$

, $\frac{1}{2}|-x + 2| < 0.03$, $|-x + 2| < 0.06$

, $|x - 2| < 0.06 = \delta$

Section 1.2

قبل حل التمارين سنورد قوانين ونظريات النهايات التي ستساعدنا على الحل

a,c∈R

1. $a.\ \lim_{x\to a} c = c \quad , \qquad b.\ \lim_{x\to a} x = a \quad , \quad a, c \in R$

2. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \,.\lim_{x\to a} g(x)$

4. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad , \quad g(x) \neq 0$

5. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c[\lim_{x\to a} f(x)]$

6. $a.\ \lim_{x\to a} x^n = a^n \quad , \qquad n \textit{ is positive integer}$

n عدد صحيح موجب

   $b.\ \lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

7. $if\ f(x)\ is\ a\ polynomial\ \ then\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

مهم : إذا كانت f(x) كثيرة حدود فعوض مباشرة عن كل x بالعدد الذي تؤول إليه x ويكون الناتج هو النهاية المطلوبة

إنتبه كثيرة الحدود هي دالة معاملاتها أعداداً حقيقية وأسسها أعداد صحيحة موجبة

أي لا يوجد متغير (x مثلاً) تحت الجذر ولا يوجد متغير في المقام

8. $\lim_{\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

9. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

10. $if \quad g(x) \le f(x) \le h(x)\,, \qquad \lim_{x \to c} g(x) = L = \lim_{x \to c} h(x)$

$then \quad \lim_{x \to c} f(x) = L$

11. $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0 \quad , \quad \lim_{\theta \to 0} cos\,\theta = 1$

12. $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \,, \quad \lim_{x \to a} \cos x = cos\,a$

13. $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a \,, \quad \lim_{x \to a} cot\,x = cot\,a \,,$

14. $\lim_{x \to a} \sec x = sec\,a \,, \quad \lim_{x \to a} csc\,x = csc\,a \,,$

حيث tan x و cot x وsec x و csc x تكون معرفة

عندما $n \in Z \quad , \quad a = n\pi + \frac{\pi}{2}$ فإن

15. $\lim_{x \to a} \tan x = \lim_{x \to a} sec\,x = \infty \; or - \infty$

وبالمثل عندما $n \in Z \;,\; a = n\pi$ فإن

16. $\lim_{x \to a} cot\,x = \lim_{x \to a} csc\,x = \infty \; or - \infty$

لا تنسى: Z مجموعة الأعداد الصحيحة و $\in$ تعني ينتمي إلى أو عنصر في

$a. \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \qquad b. \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$$c. \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

17 $a. \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$ $\qquad b. \lim_{x \to 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

$c. \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ $\qquad d. \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Section 1.2

حل تمارين (1.2) EXERCISES صفحة 106 و 107 في الكتاب

In Exercises 1 – 9 given that

$$\lim_{x \to a} f(x) = 2 \ , \lim_{x \to a} g(x) = -4 \ , \ \lim_{x \to a} h(x) = 0$$

Find the limits

في التمارين 1 – 9 إذا أعطيت أن

$$\lim_{x \to a} f(x) = 2 \ , \lim_{x \to a} g(x) = -4 \ , \ \lim_{x \to a} h(x) = 0$$

فأوجد النهايات

1. $\lim_{x \to a} [3f(x) + 4g(x)]$

$$\lim_{x \to a} [3f(x) + 4g(x)] = 3 \lim_{x \to a} f(x) + 4 \lim_{x \to a} g(x)$$

$$= \quad 3(2) + 4(-4) = 6 - 16 = -10$$

2, $\lim_{x \to a}[h(x) - 4g(x) + 2]$

$$\lim_{x \to a}[h(x) - 4g(x) + 2] = \lim_{x \to a} h(x) - 4 \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} 2$$

$$= 0 - 4(-4) + 2 = 16 + 2 = 18$$

3. $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)]$

$$\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)][\lim_{x \to a} g(x)] = (2)(-4) = -8$$

4. $\lim_{x \to a}[g(x)]^2$

$$\lim_{x \to a}[g(x)]^2 = [\lim_{x \to a} g(x)]^2 = [-4]^2 = 16$$

5. $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{2 + 3f(x)}$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[3]{2 + 3f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \to a} 2 + 3 \lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[3]{2 + 3(2)}$$

$$= \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

6. $\lim_{x \to a} \dfrac{2}{-3 + g(x)} = \dfrac{2}{-3 + (-4)} = \dfrac{2}{-7} = -\dfrac{2}{7}$

$$7. \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)+g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} h(x) + \lim_{x\to a} g(x)} = \frac{2}{0+(-4)}$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$8. \lim_{x\to a} [2f(x)]^{\frac{3}{2}} = [\lim_{x\to a} 2f(x)]^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} [2]^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$$

$$9. \lim_{x\to a}[4f(x)]^{\frac{2}{3}} = [\lim_{x\to a} 4f(x)]^{\frac{2}{3}}$$

$$= 4^{\frac{2}{3}} [2]^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}\,\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(16)(4)} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

In Exercises 10 – 14 use the Limit Laws and the graphs of f and g in the figure to evaluate the following limits (if exist).

في التمارين 10 – 14 استخدم قوانين النهاية ورسم f و g في الشكل لتقيم (لتجد) النهايات الآتية (إن وجدت)

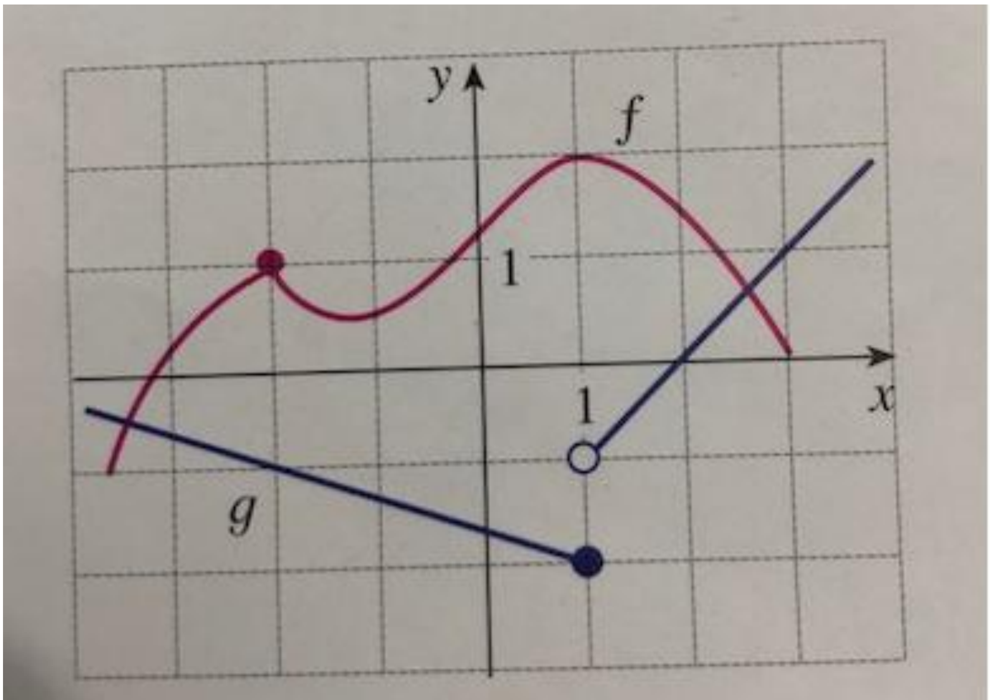


Figure 1.2.9

10. $\lim_{x\to-2}[f(x)+3g(x)] = \lim_{x\to-2} f(x) + 3 \lim_{x\to-2} g(x)$

$$= (1) + 3(-1) = 1 - 3 = -2$$

11. $\lim_{x\to1}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to1} f(x) \lim_{x\to1} g(x)$

$$= (2)(d.n.e) = d.n.e$$

$because \quad \lim_{x\to1^-} g(x) = -2 \quad , \quad \lim_{x\to1^+} g(x) = -1$

$\lim_{x\to1^-} g(x) \neq \lim_{x\to1^+} g(x) \ \ so \ \lim_{x\to1}[f(x)g(x)] \ d.n.e$

12. $\lim_{x\to2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to2} f(x)}{\lim_{x\to2} g(x)} = \dfrac{1.5}{0} = \infty \ \ d.n.e$

إنتبه: ∞ ليست عدد حقيقي

13. $f(1) + \lim_{x\to 2} g(x) = 2 + 0 = 2$

14. $\lim_{x\to -2}[x^2\ f(x)] = \lim_{x\to -2} x^2 \ \lim_{x\to -2}\ f(x)$

$$= (-2^2)(1) = 4(1) = 4$$

In Exercises 15 – 30 find the limit(if exist)

في التمارين 15 – 30 أوجد النهاية(إن كانت موجودة)

15. $\lim_{x\to 2} x^4 = 2^4 = 16$

كثيرة حدود لذلك نعوض عن كل متغير بالعدد الذي يؤول إليه المتغير

16. $\lim_{x\to -3} x^5 = (-3)^5 = (-3)^2\,(-3)^2\,(-3)$

$$= (9)(9)(-3) = -(81)(3) = 243$$

كثيرة حدود لذلك نعوض عن كل متغير بالعدد الذي يؤول إليه المتغير

17. $\lim_{x\to 0}(2x - 1) = 2(0) - 1 = -1$

كثيرة حدود لذلك نعوض عن كل متغير بالعدد الذي يؤول إليه المتغير

18. $\lim_{x\to -3}(\,2x^2 - 3x + 1) = 2(-3)^2 - 3(-3) + 1$

$$= \quad 18 + 9 + 1 = 28$$

كثيرة حدود لذلك نعوض عن كل متغير بالعدد الذي يؤول إليه المتغير

$$19.\quad \lim_{x\to -1} \sqrt{x+3} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(x+3)} = \sqrt{-1+3} = \sqrt{2}$$

$$20.\ \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{12x^2\ + 2x - 1} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 1}(12x^2 + 2x - 1}$$

$$= \sqrt[3]{12(1)^2 + 2(1) - 1} = \ \sqrt[3]{13}$$

$$21.\quad \lim_{x\to -3} \sqrt{x+3} = \sqrt{\lim_{x\to -3}(x+3)} = d.n.e$$

لا حظ أنه عندما تكون x قريبة جدا من العدد -3 من اليسار فإن ما تحت
الجذرسيكون عدد سالب أي ليس عدد حقيقي أي أن النهاية اليسرى غير موجودة

$$22.\quad \lim_{x\to -1}(2x+3)^4 = (2(-1)+3)^4 = (-2+3)^4 = 1^4 = 1$$

$$23.\quad \lim_{x\to -1} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(-1)+3}{-1-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$24.\quad \lim_{x\to 5} \frac{2x^2-16}{\sqrt{x-2}} = \frac{2(5)^2-16}{\sqrt{5-2}} = \frac{50-16}{\sqrt{3}} = \frac{34}{\sqrt{3}} = \frac{34\sqrt{3}}{3}$$

$$25.\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} sin^2 x = \ sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$26.\ \lim_{x\to 0}\frac{1+x+3\sin x}{\cos x}=\frac{1+0+3\sin 0}{\cos 0}=\frac{1+0+3(0)}{1}=1$$

$$27.\ \lim_{x\to 0}\sqrt{8+sec^2 x}=\sqrt{8+sec^2 0}=\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3$$

$$sec^2x=\frac{1}{cos^2 0}=\frac{1}{(\cos 0)^2}=\frac{1}{(1)^2}=1$$

$$28.\ \lim_{x\to\frac{5\pi}{6}}\cos x=cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi\ cos\frac{\pi}{6}-\sin\pi\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=(-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(0)\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$29.\ \lim_{x\to 1}cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=cos\frac{\pi}{1}=\cos\pi=-1$$

$$30.\ \lim_{x\to 0}\frac{sin(\pi x)}{x+1}=\frac{sin\ 0}{1}=\frac{0}{1}=0$$

In Exercises 31 – 48 find the following limits(if exist)

في التمارين 31- 48 أوجد النهايات الآتية (إن كانت موجودة)

حل تمارين النهايات يتم بأحد أو بعض الطرق الآتية:-

1) إذا كانت الدالة كثيرة حدود (polynomial) فنعوض مباشرة عن المتغير بالعدد الذي يؤول إليه المتغير ويكون الناتج هو النهاية

لا تنسى : كثيرة الحدود هي دالة تكون الأسس فيها أعداد صحيحة موجبة ولا يوجد مقام يحوي المتغير , (لاحظ أنه لا يوجد متغير تحت إشارة الجذر)

2) إذا كانت الدالة عبارة عن بسط ومقام فنحلل البسط أو المقام أوكليهما ونختصر ما يمكن اختصاره ثم نعوض عن المتغير بالعدد الذي يؤول إليه المتغير(إذا لم تكن النهاية عدد حقيقي فيجب أن نطبق أحد الطرق مرة أخرى)

3) إذا كانت الدالة عبارة عن بسط ومقام فنضرب البسط بمرافقه ونضرب المقام بمرافق البسط أو نضرب المقام بمرافقه ونضرب البسط بمرافق المقام (عادة إذا كان البسط يتكون من حدين أحدهما أوكلاهما تحت الجذر فنضرب البسط والمقام بمرافق البسط أو إذا كان المقام يتكون من حدين أحدهما أوكلاهما تحت الجذر فنضرب البسط والمقام بمرافق المقام)

4) إذا كانت الدالة عبارة عن بسط ومقام فنقسم جميع الحدود على

x^n حيث n هي أكبر أس موجود(غالباً نستخدم هذه الطريقة إذا كانت x تؤول إلى ∞)

31. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = ???$ خطأ خطأ

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} x-1 = -1-1 = -2$$

حللنا البسط ثم اختصرنا

32. $\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x+2}$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4(3)(-2)}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}, x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad or\ x = \frac{-12}{6} = -2$$

$$x = \frac{1}{3}, \quad 3x = 1, \qquad (3x-1) = 0$$

$$x = -2, \qquad (x+2) = 0$$

$$3x^2+5x-2 = (3x-1)(x+2)$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(3x-1)(x+2)}{(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} 3x-1 = 3(-2)-1 = -6-1 = -7$$

حللنا البسط ثم اختصرنا

33. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \frac{(3)^3-27}{3-3} = \frac{27-27}{0} = \frac{0}{0}$??????

لا تنسى

$x^3 - 27 = x^3 - (3)^3 = (x-3)(x^2+3x+(3)^2)$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+(3)^2)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3} (x^2+3x+(3)^2 = (3)(3)+(3)(3)+9 = 27$$

حللنا البسط ثم اختصرنا

34. $\lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\sec(x+3)}{x^2-9} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\sec(x+3)}{(x-3)(x+3)}$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{\sec(x+3)}{x-3} = \frac{\sec(-x+3)}{-3-3} = -\frac{\sec(0)}{6} = \frac{1}{6}$$

حللنا المقام ثم اختصرنا

$\sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$

35. $\lim_{x\to 0} \frac{cos^2 x - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(\cos x - 1)}$

$$= \lim_{x\to 0} (\cos x + 1) = \cos(0) + 1 = 1 + 1 = 2$$

حللنا البسط ثم اختصرنا

$cos^2 x - 1 = (\cos x)^2 - 1^2 = (\cos x - 1)(\cos x + 1)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ لا تنسى

$$36.\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

حللنا المقام ثم اختصرنا

$$37.\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{1^{\frac{1}{3}}}=1$$

حللنا المقام ثم اختصرنا

$$x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}-xx^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}(1-x)$$

$$38.\ \lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

حللنا كل من البسط والمقام ثم اختصرنا

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x-2}{x-3}=\frac{-3-2}{-3-3}=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}$$

$$39.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

حللنا كل من البسط والمقام ثم اختصرنا

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+1} = \frac{2+4}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

عوضنا مباشرة عن x بالعدد 2 (العدد الذي تؤول إليه x) وكان الناتج عدد حقيقي

$$40.\ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}$$

ضربنا البسط والمقام بمرافق البسط(جذور) ثم اختصرنا

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x+5-9}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{1}{\sqrt{4+5}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3}$$

$$= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

خطأ شائع : عند ضرب البسط بمرافق البسط عدم ضرب المقام بمرافق البسط

أو: عند ضرب المقام بمرافق المقام عدم ضرب البسط بمرافق المقام

$$41.\ \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{7}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{7}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{7}\right)}$$

ضربنا البسط والمقام بمرافق البسط(جذور) ثم اختصرنا

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+5-7}{(x-2)(\sqrt{x+5}+\sqrt{7}\ )}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+5}+\sqrt{7}\ )} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{7}\ )}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+5}+\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

42. $$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3\ )}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3\ )}$$

ضربنا البسط والمقام بمرافق المقام(جذور) ثم اختصرنا

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3\ )}{x^2+5-9} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3\ )}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3\ )}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{(\sqrt{x^2+5}+3\ )}{(x-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(-2)^2+5}\ +3}{-2-2} = \frac{\sqrt{9}+3}{-4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

43. $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3-3-x}{3(3+x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x}{3(3+x)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3(3+x)} = -\frac{1}{3(3+0)} = -\frac{1}{9}$$

$$44. \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-(x-2)}{2x}}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{2x}$$

$$= -\frac{1}{2(2)} = -\frac{1}{4}$$

$$45. \lim_{x\to 1} \left\{\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right\} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-x^2+1}{(x^2-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{(x^2-1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-x(-1+x)}{(x^2-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x(x-1)}{(x^2-1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} -\frac{x}{x^2-1} = -\frac{1}{1-1}$$

$$= -\frac{1}{0} = -\infty = d.n.e$$

$$46. \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}} - 1\right)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h\sqrt{1+h}} - \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})}{(h\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})}$$

ضربنا البسط والمقام بمرافق البسط (جذور) ثم اختصرنا

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-1-h}{(h\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(h\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})}$$

$$= -\frac{1}{\left(\sqrt{1+0}\right)(1+\sqrt{1+0})} = -\frac{1}{(1)(1+1)} = -\frac{1}{2}$$

في الكتاب $x \to 0$ والصحيح هو $h \to 0$

47. $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2 = 2$$

48. $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2x+\Delta x = 2x+0 = 2x$$

In Exercises 49 – 70 find the following limits(if exist)

في التمارين 49- 70   أوجد النهايات الآتية (إن كانت موجودة)

49. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(5\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(5\theta)}{(1)\theta} = \frac{5}{1} = 5$

لا تنسى أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

50. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(2h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2h)}{(1)h} = \frac{2}{1} = 2$

51. $\lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\frac{sinx}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{x}$

$= \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\right)(1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$

52. $\lim_{x\to 0} \frac{sin^2x}{x} = \lim_{x\to 0} (\sin x)\frac{\sin x}{x} = (\lim_{x\to 0} \sin x)(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x})$

$= (\lim_{x\to 0} \sin x)(1) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$

53. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{\tan(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(6x)}{6x}}{\frac{\tan(3x)}{6x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{6x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{6x}}$$

$$= \frac{\frac{6}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{6}\frac{6}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

54. $$\lim\frac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{3x}} = \frac{\frac{3}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{3}\frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

55. $$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(5x)}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}[\frac{\sin(5x)}{x}]^2 = \frac{1}{3}[\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}]^2$$

$$= \frac{1}{3}[5]^2 = \frac{25}{3}$$

56. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0}x\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}x(1) = \lim_{x\to 0}x = 0$$

57. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{0}\right)(1) = 0$$

58. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1+\cos x)}{1-cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1+\cos x)}{sin^2 x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1+\cos 0}{\sin 0} = \frac{1+1}{0} = \infty$

59. $\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{1-cos^2\, t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{sin^2 t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}\,\frac{t}{\sin t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \lim_{t\to 0} \frac{t}{sin} = (1)(1) = 1$

60. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(0)\cos x + (1)\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 90^o = 0\,,\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ لا تنسى

61. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta^2}{1-\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{1-cos^2\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{sin^2\theta}$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{sin\theta} \frac{\theta}{sin\theta} (1 + \cos\theta) = (1)(1)(1+1) = 2$$

62. $$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(3h)}{cos^2(5h) - 1} = \lim_{h \to 0} - \frac{(1 - \cos(3h))(1 + \cos(3h))}{(1 - cos^2(5h))(1 + \cos(3h))}$$

$$= \lim_{h \to 0} - \frac{1 - cos^2(3h)}{sin^2(5h)(1 + \cos(3h))}$$

$$= \lim_{h \to 0} - \frac{sin^2(3h)}{sin^2(5h)(1 + \cos(3h))}$$

$$= \lim_{h \to 0} - \frac{\frac{sin^2(3h)}{(2)h(3)h}}{\frac{sin^2(5h)(1 + \cos(3h))}{(2)h(3)h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} - \frac{\frac{\sin(3h)}{2h}\frac{\sin(3h)}{3h}}{\frac{\sin(5h)}{2h}\frac{(\sin(5h)}{3h}(1 + \cos(3h)}$$

$$= - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)(1 + \cos(0)} = - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{6}(2)} = - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{2}\frac{3}{25} = \frac{9}{50}$$

$$= - \frac{3}{2}\frac{3}{25} = - \frac{9}{50}$$

$$63.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-3\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}-\frac{3\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}=(0)-(3)(1)=-3$$

$$64.\ \lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin x}{4\sin(5x)-3\tan(2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin x}{4\sin(5x)-3\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin x}{\frac{4\sin(5x)\cos(2x)-3\sin(2x)}{\cos(2x)}}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\frac{a}{b}\,\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$$ لا تنسى

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin x}{4\sin(5x)\cos^2(2x)-3\sin(2x)\cos(2x)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على x ينتج أن

$$\lim_{x\to 0}\frac{5-\frac{\sin x}{x}}{\frac{4\sin(5x)\cos^2(2x)-3\sin(2x)\cos(2x)}{x}}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{f(x)}{x}\,\frac{x}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$ لا تنسى

$$\lim_{x\to 0} \frac{5 - \frac{\sin x}{x}}{\frac{4\sin(5x)\cos^2(2x)}{x} - 3\frac{\sin(2x)\cos(2x)}{x}}$$

بأخذ النهايات ينتج أن

$$\frac{5-1}{(4)(5)(1) - 3(2)(1)} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

65. $$\lim_{x\to 0} \frac{x - 2\sin(3x)}{4x + \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - 2\sin(3x)}{4x + \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - 2\sin(3x)}{\frac{4x\cos x + \sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x - 2\sin(3x)}{4x\cos^2 x + \sin x\cos x}$$

أنظر حل التمرين السابق

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x - 2\sin(3x)}{x}}{\frac{4x\cos^2 x + \sin x\cos x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{2\sin(3x)}{x}}{\frac{4x cos^2 x}{x}+\frac{\sin x cos\, x}{x}}$$

بأخذ النهايات ينتج أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(2)(3)}{4+(1)(1)} = \frac{1-6}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$66. \lim_{x\to 5} \frac{\sin(x-5)}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{\sin(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\sin(x-s)}{x-5} \ \frac{1}{x+5} = (1)\left(\frac{1}{5+5}\right) = \frac{1}{10}$$

$$67. \ \lim_{x\to 2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-2} \quad let\ \ t = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{x}\ , \qquad \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2}-t$$

$$, \qquad \frac{\pi}{x} = \frac{\pi-2t}{2}, \frac{x}{\pi} = \frac{2}{\pi-2t}, x = \frac{2\pi}{\pi-2t}$$

لا حظ أنه عندما

$x \to 0 \quad then\ t \to 2$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\frac{2\pi}{\pi-2t}-2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\cos t + sin\frac{\pi}{2}\, sint}{\frac{2\pi-2\pi+4t}{\pi-2t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\cos t + sin\frac{\pi}{2}sint}{\frac{4t}{\pi - 2t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\pi - 2t)(\cos\frac{\pi}{2}\cos t + sin\frac{\pi}{2}sint)}{4t}$$

$$\frac{1}{4}\lim_{t\to 0} \frac{(\pi - 2t)(\cos\frac{\pi}{2}\cos t + sin\frac{\pi}{2}sint)}{t}$$

بأخذ النهايات ينتج أن

$$\frac{1}{4}(\pi - 0)[((0)(0) + (1)(1)] = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

68. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$ $let\ t = x - 1,$ $x = 1 + t$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi + \pi t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\pi[sin\ \pi cos\pi t + cos\pi sin\pi t]}{\pi t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\pi(sin\ \pi cos\pi t)}{\pi t} + \lim_{t\to 0}\pi(\frac{cos\pi sin\pi t}{\pi t}$$

$$+\lim_{t\to 0}\pi\left(\frac{cos\pi sin\pi t}{\pi t}\right) = \pi(0)(0) + \pi(-1)(1) = -\pi$$

69. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan x}{x - \frac{\pi}{4}}$

الحل باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\frac{d(1 - \tan x)}{dx} = -(sec^2\, x) = -sec^2\,\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{d(x - \frac{\pi}{4})}{dx} = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-sec^2\,\frac{\pi}{4}}{1} = -sec^2\,\frac{\pi}{4} = -(\sqrt{2})^2 = -2$$

70. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{cox\ x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}}$

الحل باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\frac{d(cox\ x - \sin x)}{dx} = -\sin x - \cos x = -sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

In Exercises 71 – 72 use the squeeze Theorem to find

$\lim_{x \to c} f(x)$

في التمارين 71 – 72 استخدم نظرية العصر (الحشر) لتجد

$\lim_{x \to c} f(x)$

71. $c = 4\,, 4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$

$\lim_{x \to 4} 4x - 9 = 16 - 9 = 7$

$\lim_{x \to 4} x^2 - 4x + 7 = 16 - 16 + 7 = 7$

$7 \leq \lim_{c \to 4} f(x) \leq 7, \;\; so \;\; \lim_{c \to 4} f(x) = 7$

72. $c = 1\,, 2x \leq f(x) \leq x^4 - x^2 + 2$

$\lim_{x \to 1} 2x = 2(1) = 2$

$\lim_{x \to 1} x^4 - x^2 + 2 = \;(1)^4 - (1)^2 + 2 = 1 - 1 + 2 = 2$

$2 \leq \lim_{c \to 1} f(x) \leq 2, \;\; so \;\; \lim_{c \to 1} f(x) = 2$

73. $suppose\ the\ inequality\ \frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}\leq\frac{1-\cos x}{x^2}\leq\frac{1}{2}$

Holds for values of x close to 0, Find $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}$.

إفرض أن المتراجحة $\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}\leq\frac{1-\cos x}{x^2}\leq\frac{1}{2}$ صحيحة لقيم x القريبة من العدد 0 . أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}=\ \frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$so\ \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\ \frac{1}{2}$$

74. $Show\ that\ \lim_{x\to 0}\left[x^4\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right]=0$

$\lim_{x\to 0}\left[x^4\cos\left(\frac{3}{x}\right)\right]=0$ وضح أن

$$-1\leq\cos\left(\frac{3}{x}\right)\leq 1\ ,\qquad -x^4\leq x^4\cos\left(\frac{3}{x}\right)\leq x^4$$

$$\lim_{x\to 0} -x^4 = -0^4 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^4 = 0^4 = 0$$

$$so \lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

75. *Show that* $\lim_{x\to 0^+}[\sqrt{x}\ \sin(\frac{\pi}{x})] = 0$

$$-1 \le \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \le 1\ , \qquad -\sqrt{x} \le \sqrt{x}\ \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \le \sqrt{x}$$

$$since \ \lim_{x\to 0^+} \quad so \ \sqrt{x} \ge 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} -\sqrt{x} = -\sqrt{0} = 0\ ,\ \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$$

$$so \ \lim_{x\to 0^+}[\sqrt{x}\ \sin(\frac{\pi}{x})] = 0$$

Section 1.3

تمارين (1.3)EXERCISES صفحة 124 و 125و126 في الكتاب

In Exercises 1- 9 , for the function f whose graph is given , determine the following limits.

في التمارين 1 – 9 , للدالة f والتي *منحنيها* (رسمها) معطى , حدد النهايات الآتية

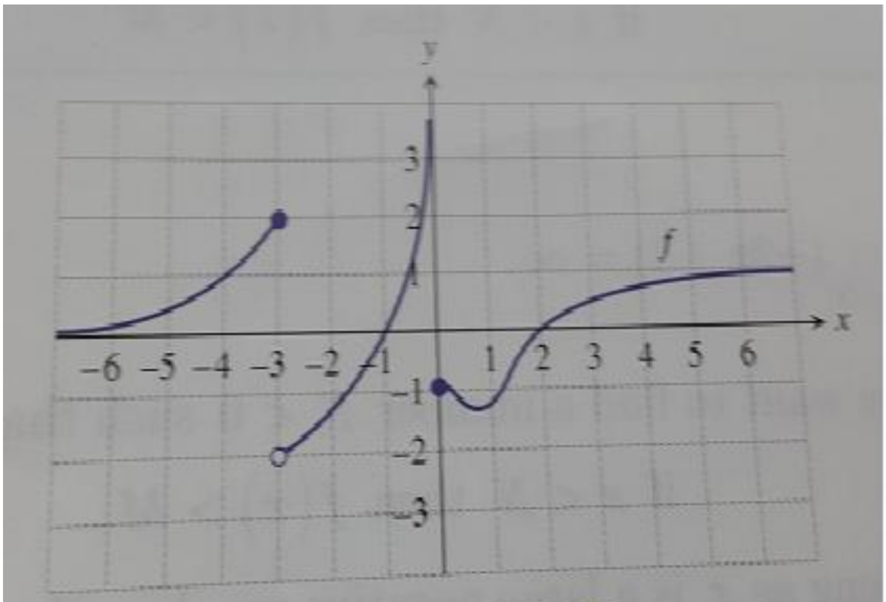


Figure 1.3.15

1. $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$, 2. $\lim_{x\to -3^{+}} f(x) = -2$

3. $\lim_{x\to -3^{-}} f(x) = 2$, 4. $\lim_{x\to -3} f(x) = d.n.e$

5. $\lim_{x\to 0^{+}} f(x) = -1$, 6. $\lim_{x\to 0^{-}} f(x) = 3.5$

7. $\lim_{x\to 0} f(x) = d.n.e$, 8. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

9. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

In Exercises 10 - 18 , for the function f whose graph is given , determine the following limits.

في التمارين 18-10 للدالة f والتي منحنيها (رسمها) معطى , حدد النهايات الآتية

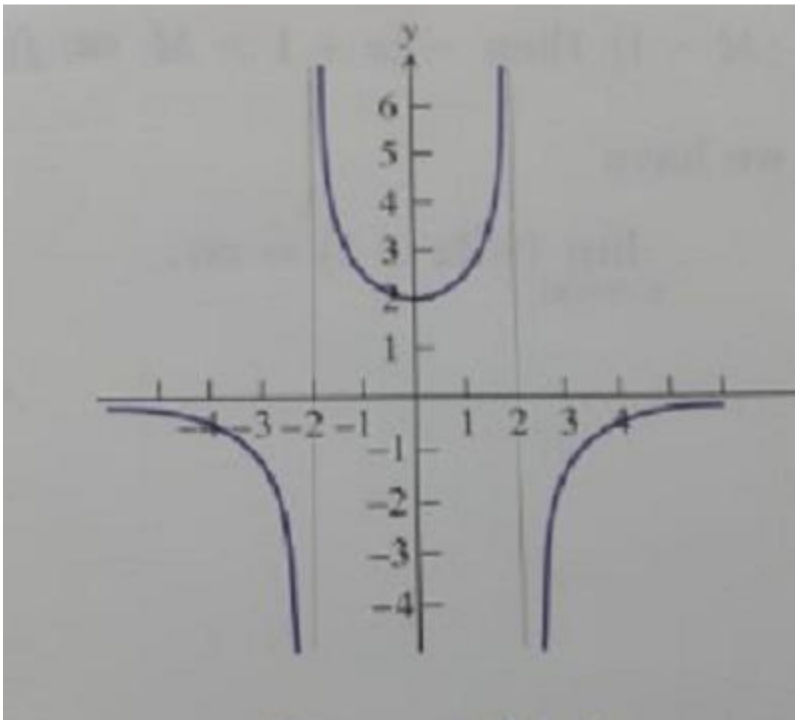


Figure 1.3.16

10. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, 11. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

12. $\lim_{x\to 2} f(x) = d.n.e$, 13. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

14. $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty$, 15. $\lim_{x\to -2} f(x) = d.n.e$

16. $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$, 17. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

18. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

سنورد فيما يلي بعض القوانين والنظريات التي تساعدنا على الحل

1) المستقيم x=a يسمى خط تقارب رأسي (vertical asymptote)

لرسم الدالة f إذا كانت

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

2) المستقيم y=L يسمى خط تقارب أفقي (horizontal asymptote)

لرسم الدالة f إذا كانت

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

3) إذا كانت p(x) كثيرة حدود (polynomial) من الدرجة n $(n \geq 1)$

وإذا كان a_n هو معامل x^n في p(x) فإن

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n)$$

أمثلة

$$\lim_{x\to\infty} (-5x^2 + 2x^3 + 6x - 4) = \lim_{x\to\infty} (2x^3) = \infty$$

نأخذ فقط الحد ذو الأس الأكبر

$$\lim_{x\to -\infty} (7x^3 - 5x^7 + 6x^5 - 4x - 9)$$

$$= \lim_{x\to -\infty} (-5x^7 = (-5)(-\infty)^7 = (-5)(-\infty) = \infty$$

$\lim_{x\to -\infty} (7x^3 - 5x^6 + 6x^5 - 4x - 9\ )$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-5x^6) = (-5)(-\infty)^6 = (-5)(\infty) = -\infty$$

4) إذا كانت r عدد نسبي موجب و $c \neq 0$ عدد حقيقي فإن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^r} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^r} = 0$$

In Exercises 19 – 31 , determine each limit

في التمارين 19 – 31 حدد كل نهاية

19 $\lim_{x\to0^+}\frac{-2}{5x} = \frac{-2}{5(+0)} = \frac{-2}{+0} = \frac{-}{+}\left(\frac{2}{0}\right) = -\left(\frac{2}{0}\right) = -\infty$

20. $\lim_{x\to4^-}\frac{3}{x-4} = \frac{3}{-0} = \left(\frac{+}{-}\right)\left(\frac{3}{0}\right) = (-)(\infty) = -\infty$

21. $\lim_{x\to3^+}\frac{2x-1}{x-3} = \frac{2(3)-1}{3-3} = \frac{5}{+0} = \left(\frac{+}{+}\right)\left(\frac{5}{0}\right) = \infty$

22. $\lim_{x\to-5^-}\frac{3x}{2x+10} = \frac{3(-5)}{2(-5)+10} = \frac{-15}{-0} = \infty$

23. $\lim_{x\to7}\frac{5}{(x-7)^2} = \frac{5}{(7-7)^2} = \frac{5}{0} = \infty$

24. $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{(0)(0+1)} = \frac{-1}{0} = -\infty$

25. $\lim_{x\to 6^-} \frac{\sqrt{x+1}\ \ +x}{6-x} = \frac{\sqrt{6+1}+6}{6-6} = \frac{\sqrt{6+1}+6}{0} = \infty$

26. $\lim_{x\to 0^-} (1+\frac{1}{x}) = 1+\frac{1}{-0} = 1-\infty = -\infty$

27. $\lim_{x\to -3^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{-3}{\sqrt{9-9}} = \frac{-3}{0} = -\infty$

28. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$

29. $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{0} = \infty$

30. $\lim_{x\to (-\frac{\pi}{2})^+} \sec x = \lim_{x\to (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0} = \infty$

31. $\lim_{x\to 0^-} (1+\csc x) = \lim_{x\to 0^-} \left(1+\frac{1}{\sin x}\right) = 1+\frac{1}{-0} = -\infty$

In Exercises 32 – 51 evaluate each limit(if exist)

في التمارين 32 – 51 قيم (أوجد) كل نهاية (إن وجدت)

32. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{1-5x}$

في مثل هذا النوع من التمارين أي $x \to -\infty$ أو $x \to \infty$ اقسم جميع الحدود على x ذات الأس الأكبر (هنا x ذات الأس الأكبر هي x)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{1-5x} = \frac{\frac{3x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{5x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-5}$$

$$= \frac{3+0}{0-5} = -\frac{3}{5}$$

33. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+7}{x^{3-x^2+x+7}} =$

نقسم جميع الحدود على x^3

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+7}{x^{3-x^2+x+7}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{7}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}}$$

$$= \frac{2+\frac{7}{(-\infty)^3}}{1-\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{(-\infty)^2}+\frac{7}{(-\infty)^3}} = \frac{2-0}{1+0+0-0} = 2$$

$$34.\quad \lim_{x\to\infty} \frac{10x^5+x^4+24}{x^6-x^4+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{24}{x^6}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}$$

$$= \frac{0+0+0}{1-0+0} = 0$$

قسمنا جميع الحدود على x^6 أي الحد ذو الأس الأكبر

$$35.\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{-3x^2+2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{-3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{-0+0}{-3-0-0}$$

=0

$$36.\quad \lim_{x\to-\infty} [\frac{x^2+x-1}{8x^2-3}]^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to-\infty} = [\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{8-\frac{3}{x^2}}]^{\frac{1}{3}}$$

$$= [\frac{1-0-0}{8-0}]^{\frac{1}{3}} = [\frac{1}{8}]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$37.\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-5x}{x^3+x-2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}}$$

$$=\sqrt{\frac{0-0}{1+0-0}}=\sqrt{0}=0$$

$$38.\ \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{7}{x}}=\frac{0+0}{3+0}=0$$

قسمنا جميع الحدود على أكبر أس وهو x

$$\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad,\quad x^{-1}=\frac{1}{x}$$ لا تنسى

$$39.\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{5}}}$$

بقسمة جميع الحدود على الحد ذو الأس الأكبر وهو $x^{\frac{1}{3}}$ نحصل على

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}}}{1-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{\frac{2}{15}}}}{1-\frac{1}{x^{\frac{2}{15}}}}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$$

$$40.\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{\frac{2}{3}}-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}-5+\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{4}{x}}$$

قسمنا جميع الحدود على x (أكبر أس)

$$=\frac{0-5-0}{2-0+0}=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$41.\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{1+0}}{1-0}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1$$

قسمنا جميع الحدود على x (الأس الأكبر)

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}$$ لا تنسى

$$42.\ \lim_{x\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+7}}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{1+0}}{1+0}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1$$

قسمنا جميع الحدود على x (الأس الأكبر)

$$43.\ \lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{\sqrt{4x^2+25}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}{\sqrt{4\frac{x^2}{x^2}+\frac{25}{x^2}}}$$

قسمنا جميع الحدود على x (الأس الأكبر) أنظر التمرين 41

$$= \frac{1-0}{\sqrt{4+0}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$44.\ \lim_{x\to-\infty} \frac{4-3x^3}{\sqrt{x^6+9}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x^3}-3}{\sqrt{\frac{x^6}{x^6}+\frac{9}{x^6}}}$$

قسمنا جميع الحدود على x^3 (الأس الأكبر)

$$= \frac{-0-3}{\sqrt{1+0}} = \frac{-3}{\sqrt{1}} = -\frac{3}{1} = -3$$

$$\frac{\sqrt{x^6+9}}{x^3} = \sqrt{\frac{x^6+9}{x^6}} = \sqrt{\frac{x^6}{x^6}+\frac{9}{x^6}}$$ لا تنسى

45. $\lim_{x\to\infty} \quad (\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1})$

بالضرب بالمرافق والقسمة عليه

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+25-x^2+1}{(\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2-1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{26}{(\sqrt{x^2+25} + \sqrt{x^2-1})}$$

نقسم جميع الحدود على x (الأس الأكبر)

من الواضح أن البسط أي $\frac{26}{x}$ يساوي 0 عند أخذ النهاية بينما المقام لايساوي الصفر لذلك الناتج يساوي 0 أي

$$\lim_{x\to\infty} \quad (\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1}) = 0$$

46. $\lim_{x\to-\infty} \quad (2x + \sqrt{4x^2+3x-2})$

بالضرب بالمرافق والقسمة عليه

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x + \sqrt{4x^2+3x-2})(2x - \sqrt{4x^2+3x-2})}{(2x - \sqrt{4x^2-3x-2})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4x^2-3x+2}{(2x - \sqrt{4x^2-3x-2})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^2-x+2}{(2x - \sqrt{4x^2-3x-2})}$$

نقسم جميع الحدود على x^2 (الأس الأكبر)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}}} = \frac{-4+0+0}{0-\sqrt{0+0-0}} = \frac{-4}{0}$$

$$= -\infty$$

47. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right)$

بالضرب بالمرافق والقسمة عليه

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2-x}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2-x}+3x\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-x-9x^2}{\left(\sqrt{9x^2-x}+3x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\left(\sqrt{9x^2-x}+3x\right)}$$

نقسم جميع الحدود على x (الأس الأكبر)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{9-\frac{1}{x}}+3} = \frac{-1}{\sqrt{9-0}+3} = -\frac{1}{6}$$

48. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

بالضرب بالمرافق والقسمة عليه

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\,\right)\left(\sqrt{x^2+x)} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x)} + \sqrt{x^2-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{x^2+x-x^2+x}}{\left(\sqrt{x^2+x)} + \sqrt{x^2-x}\right)} = \frac{\boldsymbol{2x}}{\left(\sqrt{x^2+x)} + \sqrt{x^2-x}\right)}$$

نقسم جميع الحدود على x (الأس الأكبر)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}}} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{1+0}} + \sqrt{\mathbf{1-0}}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$$

49. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{3x+\sin x}{4x-\cos(2x)}$

نقسم جميع الحدود على x (الأس الأكبر)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{\sin x}{x}}{4-\frac{\cos(2x)}{x}} = \frac{3+0}{4-0} = \frac{3}{4}$$

$$-1 \le \sin x \le 1\,, \quad \frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$-1 \le cos(2x) \le 1\,, \quad \frac{-1}{x} \le \frac{\cos(2x)}{x} \le \frac{1}{x}$$

50. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{3x+cos^2 x}$

نقسم جميع الحدود على x (الأس الأكبر)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{3 + \frac{cos^2 x}{x}} = \frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

أنظر التمرين السابق 49

$$51. \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x - x}{\tan(2x) + 3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - x}{\frac{\sin (2x)}{\cos (2x)} + 3} = \frac{\frac{1}{0} - \frac{\pi}{2}}{\frac{\sin \pi}{\cos \pi} + 3}$$

$$= \frac{\infty - \frac{\pi}{2}}{\frac{0}{-1} + 3} = \frac{\infty}{-0 + 3} = -\frac{\infty}{3} = -\infty$$

In Exercises 52- 61 , determine the horizontal and vertical asymptotes (if any)for the following functions.

في التمارين 52 – 61 حدد خطي التقارب الأفقي والرأسي (إن كان يوجد) للدوال الآتية.

1) المستقيم x=a يسمى خط تقارب رأسي (vertical asymptote)

لرسم الدالة f إذا كانت

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

2) المستقيم y=L يسمى خط تقارب أفقي (horizontal asymptote)

لرسم الدالة f إذا كانت

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

52. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

so the line $x = 1$ *is* vertical asymptote

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

so the line $x = -1$ *is* vertical asymptote

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{\infty - 1} = 0$$

so the line $y = 0$ *is* horizontal asymptote

53. $f(x) = \dfrac{x}{9 - x^2}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{3}{9 - 9} = \frac{3}{0} = \infty$$

so the line $x = 3$ *is* vertical asymptote

$$\lim_{x \to -3} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{-3}{9 - 9} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

so the line $x = -3$ *is* vertical asymptote

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{9 - x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

so the line $y = 0$ *is* horizontal asymptote

54. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+7}$, $x^2 + 7 \geq 7$ *so no* vertical asymptote

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+\frac{7}{x^2}} = \frac{3}{1+0} = 3$$

so the line $y = 3$ *is* horizontal asymptote

55. $f(x) = \dfrac{2+x^3}{x^2(1-x)}$

$x^2(1-x) = 0\,, x = 0 \text{ or } 1 - x = 0\,, x = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2+x^3}{x^2(1-x)} = \frac{2+0}{0(1-0)} = \frac{2}{0} = \infty$$

so the line $x = 0$ *is* vertical asymptote

$$\lim_{x\to 1} \frac{2+x^3}{x^2(1-x)} = \frac{2+1}{1(1-1)} = \frac{3}{1(0)} = \frac{3}{0} = \infty$$

so the line $x = 1$ *is* vertical asymptote

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x^3}{x^2(1-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^3}+1}{\frac{1}{x}(1-x)} = \frac{0+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

so the line $y = -1$ *is* horizontal asymptote

56. $f(x) = \dfrac{2+x^3}{x-4}$

$$\lim_{x\to 4} \frac{2+x^3}{x-4} = \frac{2+64}{4-4} = \frac{66}{0} = \infty$$

so the line $x = 4$ *is* vertical asymptote

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2+x^3}{x-4} = \frac{\frac{2}{x^3}+1}{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}} = \frac{0+1}{0-0} = \frac{1}{0} = \infty$$

so there is no horizontal asymptote

57. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ $, 4 + x^2 \geq 4$ *so no* vertical asymptote

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

so the line $y = 1$ *is* horizontal asymptote

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \frac{-1}{\sqrt{0+1}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1$$

so the line $y = -1$ *is* horizontal asymptote

58. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$4-x^2=0, x^2=4\,, x=2\ or\ x=-2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\ \frac{2}{0}=\infty$$

$so\ the\ line\ \ x=2\ \ is$ vertical asymptote

$$\lim_{x\to -2}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\ \frac{-2}{0}=-\infty$$

$so\ the\ line\ \ x=-2\ \ is$ vertical asymptote

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\ \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}=\ \frac{1}{\sqrt{0-1}}=\ \frac{1}{i}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\ \frac{-1}{\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}=\ \frac{-1}{\sqrt{0-1}}=-\ \frac{1}{i}$$

$so\ there\ \ is$ no horizontal asymptote

59. $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2+x-2}=\ \dfrac{-(x-1)}{(x+2)(x-1)}=-\dfrac{1}{(x+2)}$

$x+2=0\,, x=-2$

$$\lim_{x\to -2}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{-2+2}=-\frac{1}{0}=-\infty$$

$so\ the\ line\ \ x = -2\ \ is$ vertical asymptote

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{\infty+2} = -\frac{1}{\infty} = -0 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{-\infty+2} = -\frac{1}{-\infty} = 0$$

$so\ the\ line\ \ y = 0\ \ is$ horizontal asymptote

60. $f(x) = \dfrac{x(x+2)}{x^3+5x^2+6x} = \dfrac{x(x+2)}{x(x^2+5x+6)}$

$$= \frac{x(x+2)}{x(x+3)(x+2)} = \frac{1}{x+3}$$

$x + 3 = 0\,, x = -3$

$$\lim_{x\to-3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{-3+3} = \frac{1}{0} = \infty$$

$so\ the\ line\ \ x = -3\ \ is$ vertical asymptote

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{\infty+3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$so\ the\ line\ \ y = 0\ \ is$ horizontal asymptote

61. $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to0} \frac{4\sin x}{x} = 4\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 4(1) = 4$$

$so\ there\ \ is$ no vertical asymptote

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4\sin x}{x} = \frac{4\sin\infty}{\infty} = 0$$

$so\ the\ line\ \ y = 0\ \ is$ horizontal asymptote

In Exercises 62 – 64 use the formal definition to prove the following limits.

في التمارين 62 – 64 استخدم التعريف الأساسي لتبرهن النهايات الآتية

62. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

إذا أعطينا M>0 فإنه يجب إيجاد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت

$0 < |\,|x| - 0| < \delta$ أو $0 < |x| < \delta$ فإن $\frac{1}{|x|} > M$

$\frac{1}{|x|} > M$ إذا وفقط إذا $|x| < \frac{1}{M}$ لذلك نختار $\delta = \frac{1}{M}$ فيكون

إذا كانت $|x| < \delta$ فإن $|x| < \frac{1}{M}$ ومنه $\frac{1}{|x|} > M$

أي أن $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

63. $\lim_{x\to 1} \frac{-3}{(x-1)^2} = -\infty$

إذا أعطينا N<0 فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه

إذا كانت $0 < |x-1| < \delta$ فإن $\frac{-3}{(x-1)^2} < N$

$$\frac{-3}{(x-1)^2} < N, \frac{3}{(x-1)^2} > N, (x-1)^2 < \frac{3}{N}$$

$$|x-1| < \sqrt{\frac{3}{N}} = \delta$$

64. $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{1}{(x+5)^2} = \infty$

إذا أعطينا M>0 فإنه يجب إيجاد $\delta > 0$ بحيث أنه إذا كانت

$|x+5| < \delta$ فإن $\frac{1}{(x+5)^2} > M$

$\frac{1}{(x+5)^2} > M$ إذا وفقط إذا $(x+5)^2 < \frac{1}{M}$ إذا وفقط إذا

$$(x+5) < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta$$

Section 1.4

تمارين (1.4) صفحة 140 و 141 و 142 في الكتاب

تكون الدالة f متصلة (continuous) عند النقطة x=c إذا تحققت كل الشروط الآتية

1) f(c) معرفة أي c في مجال (domain) f

2) $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

إذا كانت الدالة متصلة (continuous) عند كل نقطة في الفترة المفتوحة (a,b) فإنها تكون متصلة (continuous) على الفترة (a,b).

إذا كانت الدالة f معرفة (defined) على الفترة المغلقة [a,b] ومتصلة (continuous)على الفترة المفتوحة (a,b) فإنها تكون متصلة (continuous) على الفترة المغلقة [a,b] إذا تحقق الشرطان :-

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

إذا كانت كل من الدالتين f و g متصلتين (continuous) عند العدد الحقيقي c فإن الدوال الآتية تكون متصلة (continuous) عند c

a) f+g b) f-g c) f.g d) $\frac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$

دالة كثيرة الحدود (polynomial) p(x) متصلة لجميع الأعداد الحقيقية **R**

الدالة النسبية (rational function) $r(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ متصلة عند جميع الأعداد الحقيقية **R** ماعدى الأعداد c حيث g(c)=0

إذا كانت الدالة g متصلة عند العدد c والدالة f متصلة عند g(c) فإن الدالة المركبة f **o** g تكون متصلة عند c

إذا كانت الدالة f متصلة عند b و

$$\lim_{x \to c} g(x) = b$$

فإن

$$\lim_{x \to c} f(\, g(x)\,) = f(b) = f(\lim_{x \to c} g(x)\,)$$

نظرية القيمة المتوسطة intermediate value theorem

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة [a,b] وإذا كانت k أي عدد بين f(a) و f(b) فإنه يوجد على الأقل عدد c في [a,b] بحيث أن f(c)=k .

لا حظ أنه إذا كانت f(a) و f(b) لهما إشارتين مختلفتين فإنه يوجد على الأقل عدد c في [a,b] بحيث أن f(c)=0

أي أن منحني (رسم) الدالة يقطع محورX مرة على الأقل بين f(a) و f(b)

In Exercises 1 – 5 use the graph to determine where the function is discontinuous.

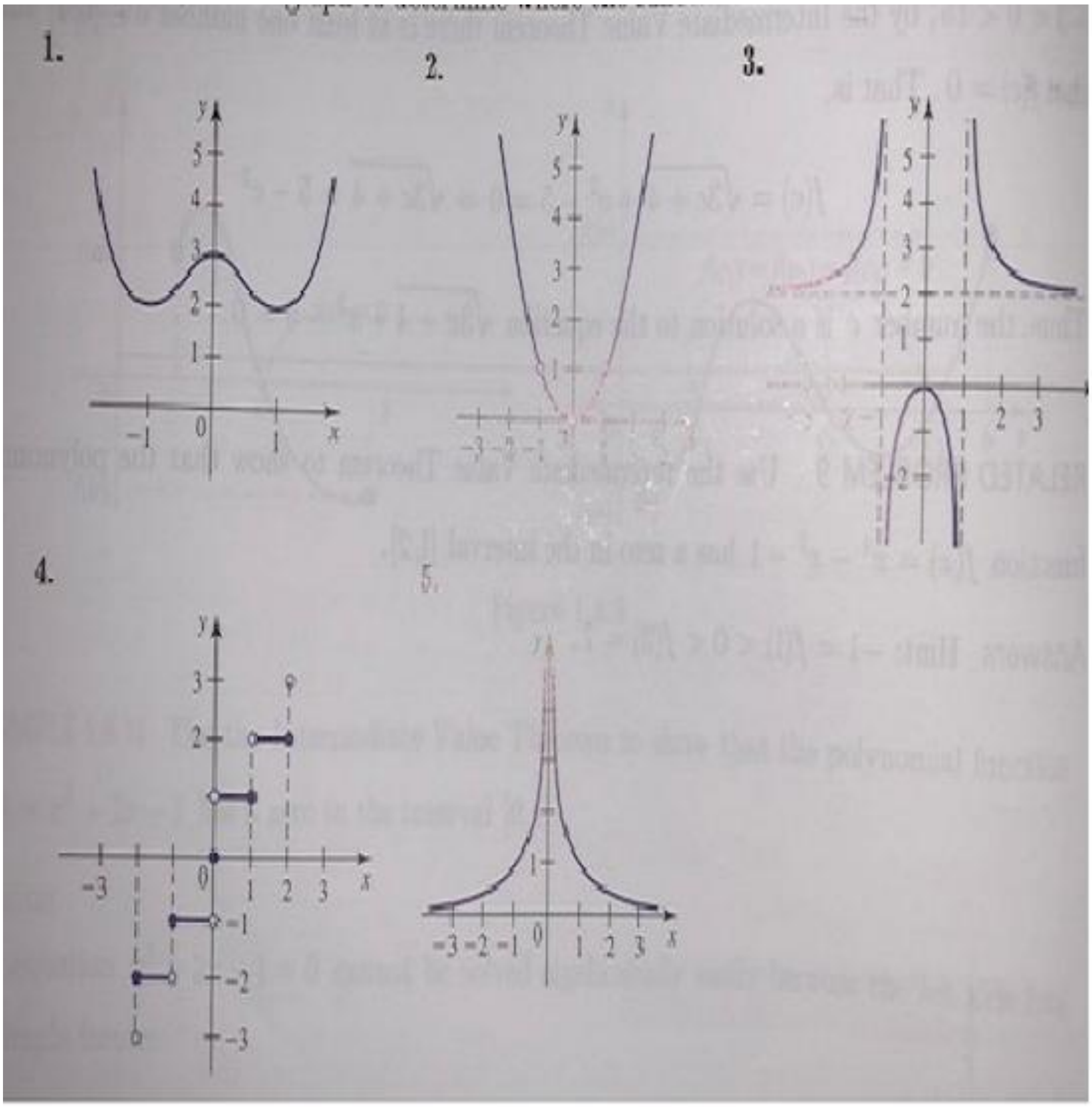
في التمارين 1 – 5 استخدم الرسم لتحدد أين تكون الدالة غير متصلة (discontinuous) .

لتحديد أن الدالة متصلة عند x=c من الرسم نلاحظ مايلي:-

1) كل نقطة على الرسم ليست دائرة بيضاء أو سوداء نعتبرها دائرة سوداء

2) تكون الدالة متصلة (continuous) عند c فقط وفقط إذا كانت الدائرة التي فوق c أو تحتها هي دائرة سوداء يدخل بها رسم الدالة من اليمين ومن اليسار.

ما عدى ذلك من النقاط تكون الدالة عندها غير متصلة (discontinuous) .



1. no points of discontinuity

لا يوجد نقاط عدم اتصال أي أن الدالة متصلة على كل مجالها

2. x=-1

لأن الدائرة التي فوق العدد 1- هي دائرة بيضاء أي العدد 1- ليس في مجال الدالة

إذا كان الرسم غير واضح فانظر الرسم في الكتاب

3. x=-1 , x=1

لأنه لا يوجد دائرة سوداء تحت أو فوق كل من العددين 1- و 1

أي أن f(1) و f(-1) غير معرفين

4. discontinuous at all integers { …-3,-2,-1,0,1,2,3,…}

ليست متصلة عند جميع الأعداد الصحيحة

5. x=0

لأنه لا يوجد دائرة سوداء فوق العدد 0 إي أن f(0) غير موجودة

In Exercises 6 – 11 discuss the continuity of each at the indicated point.

في التمارين 6 – 11 ناقش اتصال كل دالة عند النقطة المحددة.

6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} \quad at \;\; x = 5$

$$f(5) = \frac{25 - 25}{5 - 5} = \frac{0}{0}$$

Discontinuous at x=5 because f(5) not defined

7. $f(x) = \begin{cases} 2\mathrm{x} - 1 & ,\mathrm{x} > 2 = (2, \infty) \\ & at\ x = 2 \\ x^2 - 1 & ,x < 2 = (-\infty, 2) \end{cases}$

Discontinuous at x=2 because f(2) not defined

العدد 2 ليس في مجال أي من الدالتين,

$$\begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & ,x > 2 \\ & \end{cases}$$

8. $f(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad atx = 2$

$3 \qquad\qquad ,x \leq 2$

$f(2)=3$ أي أن $f(2)$ معرفة

النهاية اليمنى , أي x>2 وتؤول إلى 2 هي:-

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x + 1$$
$$= 2 + 1 = 3$$

النهاية اليسرى , أي x<2 وتؤول إلى 2 هي:-

$$\lim_{x\to 2^-} 3 = 3$$

إذاً النهاية اليمنى تساوي النهاية اليسرى إذاً النهاية موجودة أي

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3 = f(2)$$

إذاً الدالة متصلة عند *x=2* لأن شروط الاتصال عند *x=2* محققة

$$f(x) is\ continuios\ at\ x = 2$$

إنتبه عند حساب النهاية اليمنى استخدمنا الدالة $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$, $x > 2$

لأن x>2 وتؤول إلى 2 أي أن 2 في مجال (domain) هذه الدالة

عند حساب النهاية اليسرى استخدمنا الدالة $f(x) = 3$, $x \leq 2$

لأن x<2 وتؤول إلى 2 أي أن 2 في مجال (domain) هذه الدالة

$$9.\ f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x > 3 \\ & \qquad\qquad at x = 3 \\ x^2 - 4 & , x \leq 3 \end{cases}$$

X=3 في مجال الدالة $f(x) = x^2 - 4$ لذلك نحسب f(3) باستخدام هذه الدالة أي

$$f(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

نحسب النهاية اليمنى باستخدام الدالة *f(x)=2x-1* لأن x>3 وتؤول الى 3

$$\lim_{x \to 3^+} 2x - 1 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$$

نحسب النهاية اليسرى باستخدام الدالة $f(x) = x^2 - 4$ لأن x<3 وتؤول الى 3

$$\lim_{x \to 3^-} x^2 - 4 = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

إذاً

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 5$$

إذاً الدالة متصلة عند *x=3* لأن شروط الاتصال عند *x=3* محققة

$$f(x) is\ continuios\ at\ x = 3$$

في حل الواجب أو الاختبار لتثبت أن الدالة *f(x)* متصلة (continuous) عند *x=c* فقط أثبت أن

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

وبدون شرح لأن الشرح هو لك فقط لتفهم مايجري

في حل الواجب أو الاختبار لتثبت أن الدالة *f(x)* غيرمتصلة (discontinuous)عند *x=c* فقط يكفي أن تثبت أن أحد الشروط الآتية غير محقق أي

f(c) غير معرفة أي *f(c)* غير موجودة أو لا تساوي عدد حقيقي أو

$\lim\limits_{x\to+c^+} f(x)$ غير موجودة

أو

$\lim\limits_{x\to+c^-} f(x)$ غير موجودة

أو

$$\lim_{x\to+c^+} f(x) \neq \lim_{x\to+c^-} f(x)$$

أو

$$\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$$

10. $f(x) = |x^2 - 4x + 3| \quad at = 1$

$$\lim_{x\to 1} |x^2 - 4x + 3| = \left|\lim_{x\to 1} x^2 - 4x + 3\right|$$

بما أن الدالة $x^2 - 4x + 3$ كثيرة حدود (polynomial) فهي متصلة عند جميع الأعداد الحقيقية **R** و لا جاد نهاية الدالة عندما **x** تؤول إلى العدد **1** نعوض مباشرة بالعدد 1 في الدالة أي

$$\left|\lim_{x\to 1} x^2 - 4x + 3\right| = |\mathbf{1^2} - \mathbf{4(1)} + 3 = |1 - 4 + 3| = |0| = 0$$

$f(x) is\ continuios\ at\ x = 1\ , f(x) is\ continuios\ \ at\ all\ \mathbf{R}$

11. $f(x) = \frac{x}{x} \quad \text{at } x = 0$

$f(0) = \frac{0}{0} = ?$

f(0) غير معرفة أي غير موجودة أي لا تساوي عدد حقيقي إذاً الدالة غير متصلة عند ***x=0***

Discontinuous at x=0 because f(0) not defined

دائماً إبدأ باختبار *f(c)* (at x=c) هل هي موجودة لأنها هي الأسهل حيث نعوض مباشرة بالعدد c في الدالة .

In Exercises 12- 25 , find the numbers ,if any, where the function is discontinuous.

في التمارين 12 – 25 أوجد الأعداد , إن وجدت, التي عندها تكون الدالة غير متصلة (منفصلة) (discontinuous).

12. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

الدالة كثيرة حدود (polynomial) لذلك فهي متصلة لجميع الأعداد الحقيقية أي لايوجد نقاط انفصال

Continuous at all real numbers

13. $f(x) = \frac{2x + 4}{x^2 - 4x + 3}$

دالة نسبية لذلك فهي متصلة عند جميع الأعداد ما عدى الأعداد التي تجعل المقام يساوي 0 أي

$x^2 - 4x + 3 = 0$, $\boldsymbol{(x-3)(x-1) = 0}$, $\boldsymbol{x = 3 \ or \ x = 1}$

X=1 ,x=3 الحل هو

14. $f(x) = \frac{x-4}{x^2+6}$, $x^2 \geq 0 \ so \ x^2 + 6 \geq 6$

المقام لايمكن أن يساوي 0 لذلك

No points of discontinuity

15. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 - 4}$

$x^2 - 4 = 0$, $\quad x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2) = 0$

$(x-2) = 0$, $x = 2 \quad or \ (x+2) = 0$, $x = -2$

Points of discontinuity are x=2 and x=-2

أنظر الشرح والتعليق في التمارين السابقة

16. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7}{|x| + 2}$

$|x| \geq 0, \qquad |x| + 2 \geq 2$

المقام دائماً لا يساوي الصفر لذلك

No points of discontinuity

17. $f(x) = |2x^2 - 3x + 1|$

الدالة $2x^2 - 3x + 1$ كثيرة حدود (polynomial) لذلك فهي متصلة عند جميع الأعداد الحقيقية R والقيمة المطلقة لكثيرة الحدود هي دائماً $0 \geq$ لذلك لايوجد نقاط إنفصال ويكون الجواب هو

No points of discontinuity

18. $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2+2x}\right|$

$x^2 + 2x = 0$, $\quad x(x+2) = 0$, $\quad x = 0 \ or \ x = -2$

points of discontinuity are x=0 , x=-2

19. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$

$f(1) = 3$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \neq f(3) = 3$$

point of discontinuity is x=1

$$20.\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & ,x \neq 0 \\ 1 & ,x = 0 \end{cases}$$

$f(0) = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-0+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

No points of discontinuity

$$21.\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} & ,x \neq 2 \\ 5 & ,x = 2 \end{cases}$$

F(2)=5

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} x+3 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x+3 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 5$$

$f(x) is\ continuous\ at\ x = 2\ \ so\ it\ is\ continuous\ for\ R$

So no points of discontinuity

$$22.\ f(x) = \begin{cases} -|x| + 1 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

F(0)=0

$$\lim_{x \to 0^-} -|x| + 1 = -|0| + 1 = 1 \neq f(0) = 0$$

point of discontinuity is x=0

$$23.\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & , x > 2 \\ x - 3 & , x < 2 \end{cases}$$

F(2) is not defined

point of discontinuity is x=2

24. $f(x) = \sec(2x)$

$$f(x) = \frac{1}{\cos(2x)}$$

$\cos(2x) = 0$, $2x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$,$2x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

$2x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$, $x = \frac{\pm n\pi}{4}$, n *is odd integer*

لا تنسى $\cos(-x) = \cos(x)$

point of discontinuity *are* $x = \frac{\pm n\pi}{4}$, n *is odd integer*

25. $f(x) = \cot(\pi x)$

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

$\sin(\pi x) = 0$, $x = n$, n *is integer*

$$\begin{cases} x + 2 \ , x > 2 \\ \\ \end{cases}$$

26. $f(x) =$

$$kx^2 \quad , x < 2$$

Find the value of k that makes f continuous on $(-\infty, \infty)$

أوجد قيمة k والتي تجعل f متصلة على $(-\infty, \infty)$

لا حظ أن f(2) غير معرفة لذلك أعتقد أن هذا التمرين كما يلي

$$26.\ f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x > 2 \\ kx^2 & , x \le 2 \end{cases}$$

$$f(2) = k2^2 = 4k$$

$$\lim_{x \to 2^-} kx^2 = k2^2 = 4k \ , \qquad \lim_{x \to 2^+} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

4k=4 , k=1

$$27.\ f(x) = \begin{cases} ax + b & , x < 1 \\ 4 & , x = 1 \\ 2ax - b & , x > 1 \end{cases}$$

Find the value of a , b that makes f continuous on $(-\infty, \infty)$

أوجد قيمة a,b والتي تجعل f متصلة على $(-\infty, \infty)$

f(1)=4

$$\lim_{x\to 1^-} \quad ax+b = a(1)+b = a+b$$

$$\lim_{x\to 1^+} \quad 2ax-b = 2a(1)-b = 2a-b$$

$$a+b=4$$

$$2a-b=4$$

$$3a=8\,,a=\frac{8}{3}\,, \qquad b=4-a=4-\frac{8}{3}=\frac{12-8}{3}=\frac{4}{3}$$

$$28.\ \ f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & ,x\neq 3 \\ k & ,x=3 \end{cases}$$

Find the value of k that makes f continuous on $(-\infty,\infty)$

أوجد قيمة k والتي تجعل f متصلة على $(-\infty,\infty)$

F(3)=k

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} x+3 = 6$$

K=6

29. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(cx)+5x}{2x+\tan(x)} & , x \neq 0 \\ 8 & , x = 0 \end{cases}$

Find the value of c that makes f continuous at x=0

أوجد قيمة c والتي تجعل f متصلة عند x=0

f(0)=8

بقسمة جميع الحدود على x (على x ذات الأس الأكبر)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(cx) + 5x}{2x + \tan(x)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{\sin(cx)}{x} + \frac{5x}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{\tan(x)}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{\sin(cx)}{x} + 5}{2 + \frac{\tan(x)}{x}} = \frac{\frac{c}{1} + 5}{2 + 1} = \frac{c + 5}{3}$$

$$\frac{c + 5}{3} = 8\,, c + 5 = 24\,, c = 24 - 5 = 19$$

30. $f(x) = \begin{cases} kx + \sin(x - 2) & , x \leq 2 \\ 4kcos(x - 2) - 3 & , x > 2 \end{cases}$

Find the value of k that makes f continuous on $(-\infty, \infty)$

أوجد قيمة k والتي تجعل f متصلة على $(-\infty, \infty)$

$f(2) = k(2) + \sin(2-2) = 2k + \sin(0) = 2k + 0 = 2k$

$\lim_{x\to 2^-} kx + \sin(x-2) = k(2) + \sin(2-2) = 2k$

$\lim_{x\to 2^+} 4k\cos(x-2) - 3 = 4k\cos(2-2) - 3$

$= 4k\cos(0) - 3 = 4k(1) - 3 = 4k - 3$

$2k = 4k - 3\,, 4k - 2k = 3, 2k = 3, k = \dfrac{3}{2}$

31. $f(x) = \begin{cases} x\cot(kx) & , x < 0 \\ x^2 + c & , x \geq 0 \end{cases}$

Find the value of c that makes f continuous at x=0

أوجد قيمة c والتي تجعل f متصلة عند x=0

$f(0) = 0^2 + c = 0 + c = c$

$\lim_{x\to 0^-} x\cot(kx) = \lim_{x\to 0^-} x\dfrac{\cos(kx)}{\sin(kx)} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sin(kx)}\cos(kx)$

$= \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sin(kx)} \lim_{x\to 0^-} \cos(kx) = \dfrac{1}{k}\lim_{x\to 0^-} \dfrac{kx}{\sin(kx)}\cos(kx)$

$\dfrac{1}{k}(1)\cos(0) = \dfrac{1}{k}(1)(1) = \dfrac{1}{k}$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} \quad so \;\; c = \dfrac{1}{k}$

In Exercises 32 – 42 find the interval(s) where f is continuous

في التمارين 32 – 42 جد الفترة أو الفترات حيث تكون f متصلة

32. $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)^3$

f كثيرة حدود لذلك هي متصلة (continuous)عند جميع الأعداد الحقيقية أي يكون الجواب هو

$(-\infty, \infty)$

33. $f(x) = \sqrt{x}\,(x+3)^2$

ما تحت الجذر يجب أن يكون أكبر من أو يساوي الصفر أي يكون الجواب هو

$x \geq 0 = [0.\infty)$

إنتبه للأقواس لاحظ اشارة المساواة , لو كانت المسألة

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}$$

لكان الجواب هو

$x > 0 = (0, \infty)$

حذفنا العدد 0 من الفترة لأن القسمة على 0 لاتجوز

34. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$

$x^2 + 5x - 6 = 0 \,, (x+6)(x-1) = 0$

$x + 6 = 0 \,, x = -6 \;\; or \; x - 1 = 0 \,, x = 1$

لاحظ أن أصفار الدالة تقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات هي

$$(-\infty,-6) \quad , \quad (-6,1) \quad , \quad (1,\infty)$$

والآن لنختبر كل فترة لنختار الفترات التي تجعل ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي 0

لنختبر الفترة $(-\infty,-6)$ حيث نأخذ منها مثلاً العدد 8-

$$(-8)^2+5(-8)-6=64-40-6=18>0$$

إذاً الدالة متصلة (continuous)على هذه الفترة وبما أن العدد 6- يجعل ما تحت الجذر يساوي 0 لذلك يكون العدد 6- ضمن هذه الفترة أي تكون الدالة متصلة (continuous) على الفترة

$$(-\infty,-6]$$

لنختبر الفترة $(-6,1)$ حيث نأخذ منها مثلاً العدد 0

$$(0)^2+5(0)-6=-6<0$$

إذاً الدالة غير متصلة (discontinuous) على هذه الفترة

لنختبر الفترة $(1,\infty)$ حيث نأخذ منها مثلاً العدد 2

$$(2)^2+5(2)-6=4+10-6=8>0$$

إذاً الدالة متصلة (continuous)على هذه الفترة وبما أن العدد 1 يجعل ما تحت الجذر يساوي 0 لذلك يكون العدد 1 ضمن هذه الفترة أي تكون الدالة متصلة (continuous) على الفترة

$$[1,\infty)$$

إذا تكون الدالة متصلة (continuous) على اتحاد الفترتين أي

$$(-\infty,-6]\cup[1,\infty)$$

$$35. f(x) = \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \ , \qquad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

إذاً ما تحت الجذر هو عدد موجب لجميع الأعداد الحقيقية

أي أن الدالة متصلة (continuous) عند جميع الأعداد الحقيقية أي

$(-\infty, \infty)$

$$36. \ f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$x-2 > 0 \ , x > 2 = 2 < x = (2, \infty)$$

أي أن الدالة متصلة (continuous) على الفترة $(2, \infty)$

$$37. \ f(x) = \sqrt{2x-6}$$

$$2x-6 \geq 0 \ \ , 2x \geq 6 \ , x \geq \frac{6}{2} \ \ , x \geq 3 = 3 \leq x = [3, \infty)$$

أي أن الدالة متصلة (continuous) على الفترة $[3, \infty)$

38. $f(x) = |x^2 - 4|$

F هي القيمة المطلقة لكثيرة حدود لذلك هي متصلة (continuous)عند جميع الأعداد الحقيقية أي يكون الجواب هو

$(-\infty, \infty)$

39. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{9 - x^2}}$

$x \neq 0 \, , 9 - x^2 > 0, 9 > x^2 \, , -3 < x < 3 = (-3,3)$

بما أن $x \neq 0$ لذلك نحذف العدد 0 من هذة الفترة أي أن الدالة متصلة (continuous) على اتحاد الفترتين

$(-3,0) \cup (0.3)$

لا تنسى

$if\ x^2 < a\ \ then - \sqrt{a} < x < \sqrt{a}$

$if\ x^2 > a\ then\ x > \sqrt{a}\ \ or\ x < -\sqrt{a}$

40. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - \pi}}{\sin x}$

$x - \pi \geq 0, x \geq \pi, \sin x = 0\ \ so\ x = n\pi\ \ , n\ is\ integer$

$\sin x \neq 0\ if\ x \neq n\pi\ so\ x < n\pi\ or\ x > n\pi$

$x < n\pi = (-\infty, n\pi) or\ x > n\pi = (n\pi, \infty)$

أي أن الدالة متصلة (continuous) على اتحاد الفترتين

$(-\infty, n\pi) \cup (n\pi, \infty)$

41. $f(x) = \dfrac{2x + \cos x}{1 - \sin x}$

$1 - \sin x = 0\,, \sin x = 1 \quad so\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\,, n\ is\ integer$

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\,, so\ x < \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \ \ or\ \ x > \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$

أي أن الدالة متصلة (continuous) على اتحاد الفترتين

$\left(-\infty\,, \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\ \right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\ \,, \infty\right)$

42. $f(x) = \dfrac{x - \cos x}{5 + 2\sin x}$

$-1 \leq \sin x \leq 1\ , \qquad 5 + 2(-1) = 5 - 2 = 3$

$5 + 2\sin x \geq 3$

المقام موجب دائناً أي أن الدالة متصلة (continuous) عند جميع الأعداد الحقيقية أي

$(-\infty, \infty)$

In Exercises 43 – 46 redefine the functions to make it continuous at c.

في التمارين 43 – 46 أعد تعريف الدوال لتجعلها متصلة (continuous) عند c

43. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{5x}, c = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2x-3)}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x-3)}{5}$$

$$= \frac{2(0) - 3}{5} = -\frac{3}{5}$$

لكي تكون الدالة متصلة (continuous) عند 0 يجب أن يكون

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \;\; so \; f(0) = -\frac{3}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3x}{5x} & ,x \neq 0 \\ \\ -\frac{3}{5} & ,x = 0 \end{cases}$$

44. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \quad , \quad c = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x - 2 = -1$$

f(1)=1

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x-1} & ,x\neq 1\\ 1 & ,x=1\end{cases}$$

أنظر حل التمرين 43

45. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\quad c=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

ضربنا في مرافق البسط وقسمنا عليه للتخلص من الجذور

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2}$$

$f(0)=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ,x\neq 0\\ \frac{1}{2} & ,x=0\end{cases}$$

أنظر حل التمرين 43

46. $f(x) = \dfrac{\tan(3x)}{7x} \quad , c = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{7x} = \frac{3}{7}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$ لا تنسى

$f(0)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan(3x)}{7x} & , x \neq 0 \\ \dfrac{3}{7} & , x = 0 \end{cases}$$

أنظر حل التمرين 43

In Exercises 47 – 54 use the continuity to evaluate the limit.

في التمارين 47 – 54 استخدم خاصية الاتصال لحساب النهاية

47. $\lim_{x\to 4} x\sqrt{20 - x^2}$

$$\lim_{x\to 4} x\sqrt{20 - x^2} = \left(\lim_{x\to 4} x\right)\left(\lim_{x\to 4} \sqrt{20 - x^2}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 4} x\right)\left(\sqrt{\lim_{x\to 4}(20 - x^2)}\right) = (4)(\sqrt{20 - 16}) = 4\sqrt{4} = 8$$

48. $\lim_{x\to\pi} \sin(\pi + \sin x) = \sin(\pi + \sin\pi) = \sin(\pi + 0)$

$$= \sin(\pi) = 0$$

49. $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{4-x^2}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 0}(4-x^2)}}{\sqrt{\lim_{x\to 0}(1+x)}}$

$$= \frac{\sqrt{4-0}}{\sqrt{1+0}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

50. $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{x^3-4x+2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x^3-4x+2)}$

$$= \sqrt[3]{(2)^3-4(2)+2} = \sqrt[3]{8-8+2} = \sqrt[3]{2}$$

51. $\lim_{x\to\infty} \sin\left[\frac{5-\pi x}{2x+1}\right] = \lim_{x\to\infty} sin\left[\frac{\frac{5}{x}-\pi}{2+\frac{1}{x}}\right] = \sin\left[\frac{0-\pi}{2+0}\right]$

$$= \sin\left[\frac{-\pi}{2}\right] = -\sin\left[\frac{\pi}{2}\right] = -1$$

$$52.\quad \lim_{x\to\infty} \tan\left(\frac{\pi x^2 - x + 1}{3x^2 + 1}\right) = \lim_{x\to\infty} tan\left(\frac{\pi - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi - 0 + 0}{3 + 0}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan(60^o) = \sqrt{3}$$

$$53.\quad \lim_{x\to 2} \left|\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}\right| = \lim_{x\to 2} |\frac{(x-2)(x+3)}{x - 2}|$$

$$= \lim_{x\to 2} |x + 3| = \left|\lim_{x\to 2}(x + 3)\right| = 2 + 3 = 5$$

$$54.\quad \lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{x^2 + x - 2}{6(x - 1)}\right) = \lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{(x-1)(x+2)}{6(x - 1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{x + 2}{6}\right) = \sin\left(\frac{1 + 2}{6}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

In Exercises 55 – 57 use the Intermediate Value Theorem to find the value of c such that f(c)=k

في التمارين 55 – 57 استخدم نظرية القيمة المتوسطة لتجد قيمة c بحيث أن f(c)=k

نظرية القيمة المتوسطة:-

إذا كانت الدالة f متصلة (continuous) على الفترة المغلقة [a,b] وإذا كانت k هي أي عدد بين f(a) و f(b) فإنه يوجد على الأقل عدد c في [a,b] بحيث أن f(c)=k

55. $f(x) = x^2 - x + 1 \quad on\ [-1.4]\ , k = 7$

نريد أن نجد عدداً بين العددين 1- و 4 وبحيث إذا عوضنا به عن x في الدالة فإن الناتج يساوي k أي يساوي 7

لنجرب العدد 1

$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 \neq 7$

لنجرب العدد 3

$f(3) = 3^2 - 3 + 1 = 9 - 3 + 1 = 7 = k$

C=3

56. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 \quad on\ [0,4]\ , k = 10$

نريد أن نجد عدداً بين العددين 0 و 4 وبحيث إذا عوضنا به عن x في الدالة فإن الناتج يساوي k أي يساوي 10

لنجرب العدد 2

$f(2) = 2^3 - 2\ 2^2 + 2 - 2 \ = 8 - 8 + 2 - 2 = 0 \neq 10$

لنجرب العدد 3

$f(3) = 3^3 - 2\ 3^2 + 3 - 2 = 27 - 18 + 3 - 2 = 10 = k$

C=3

57. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \quad on\ [-4,-2]\ , k = 2$

نريد أن نجد عدداً بين العددين -4 و -2 وبحيث إذا عوضنا به عن x في الدالة فإن الناتج يساوي k أي يساوي 2

لنجرب العدد -3

$$f(-3) = \frac{-3-1}{-3+1} = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} = 2 = k$$

C=-3

In Exercises 58 – 61 use the Intermediate Value Theorem to show that there is at least one root for the equation in the given interval

في التمارين 58 – 61 استخدم نظرية القيمة المتوسطة لتوضح أنه يوجد على الأقل جذر واحد للمعادلة في الفترة المعطاة

58. $x^3 - 2x - 1 = 0$; [0,2]

$f(0) = -1\ , f(2) = 2^3 - 2(2) - 1 = 8 - 4 - 1 = 3$

بما أن f(0) عدد سالب فإنه يقع تحت محور X وبما أن f(2) عدد موجب فإنه يقع فوق محور X وبما أن الدالة متصلة فإن رسمها سوف يقطع محور X عند مثلاً النقطة c على محور X أي أن $f(c) = c^3 - 2c - 1 = 0$

59. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7 = 0$; $[1,2]$

$$f(1) = 1^4 - 2\,1^3 - 3\,1^2 + 7 = 1 - 2 - 3 + 7 = 3$$

$$f(2) = 2^4 - 2\,2^3 - 3\,2^2 + 7 = 16 - 16 - 12 + 7 = -5$$

بما أن f(2) عدد سالب فإنه يقع تحت محور X وبما أن f(1) عدد موجب فإنه يقع فوق محور X وبما أن الدالة متصلة فإن رسمها سوف يقطع محور X عند مثلاً النقطة c على محور X أي أن $f(c) = 0$

60. $x - \cos x = 0$; $[0,1]$

$$f(0) = 0 - \cos(0) = 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 1 - \cos(1) > 0$$

بما أن f(0) عدد سالب فإنه يقع تحت محور X وبما أن f(1) عدد موجب فإنه يقع فوق محور X وبما أن الدالة متصلة فإن رسمها سوف يقطع محور X عند مثلاً النقطة c على محور X أي أن $f(c) = 0$

61. $x^4 - 2x^3 = \sqrt{x-1}$; $[2,3]$

$$x^4 - 2x^3 - \sqrt{x-1} = 0 \; ; [2,3]$$

$x-1 \geq 0 \ \ , x \geq 1 = 1 \leq x = [1, \infty)$

الدالة متصلة (continuous) على الفترة $[1, \infty)$ لذلك فهي متصلة على الفترة [2,3] لأن الفترة [2,3] مجموعة جزئية من الفترة $[1, \infty)$

$f(2) = 2^4 \ - 2\ 2^3 - \sqrt{2-1} = 16 - 16 - 1 = -1$

$f(3) = 3^4 \ - 2\ 3^3 - \sqrt{3-1} = 81 - 54 - \sqrt{2} = 27 - \sqrt{2} > 0$

بما أن f(2) عدد سالب فإنه يقع تحت محور X وبما أن f(3) عدد موجب فإنه يقع فوق محور X وبما أن الدالة متصلة فإن رسمها سوف يقطع محور X عند مثلاً النقطة c على محور X أي أن $f(c) = 0$

62. $Let\ f(x) = x^2$, use the Intermediate Value Theorem to prove that there is a number c in the interval [0,2] such that f(c)=3

لتكن $f(x) = x^2$, استخدم نظرية القيمة المتوسطة لتبرهن أنه يوجد عدد c في الفترة [0,2] بحيث أن f(c)=3

$f(0) = 0 \ \ , f(2) = 4$

العدد 3 بين f(0)=0 و f(2) =4 إذا حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد c في الفترة [0,2] بحيث أن f(c)=3 . العدد $\sqrt{3}$ في الفترة [0,2] و

$$f\left(\sqrt{3}\right) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$c = \sqrt{3}$$