saade/awael
Bac files

For more useful BAC files tap the link !

BY

SAB

التّكامــل والتّوابـع الأصليــة

للاستاذ إياد ادريس

مشرف مادّة الرّياضيّات في ثانويّة السّعادة

الوحدة الأولى

التكامل والتوابع الأصلية

التوابع الأصلية :

تعريف :

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I

نقول أنّ التابع F تابعاً أصلياً على المجال I لـ f إذا وفقط إذا كان F اشتقاقياً على I وكان $F'(x)=f(x)$ في حالة x من I

1/222) في كل من الحالات الآتية تحقق أنّ F تابعاً لـ f على المجال I .

1) $F(x)=\tan x-x$, $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$f(x)=\tan^2 x$

F اشتقاقي على I

$F'(x)=1+\tan^2 x-1=\tan^2 x=f(x)$

إذاً F تابع أصلي لـ f على المجال I

2) $F(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$, $I=$

$f(x)=\frac{2(x^4-1)}{x^3}$

F اشتقاقي على I

$F'(x)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=2\left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

$F'(x)=\frac{2(x^4-1)}{x^3}=f(x)$

إذاً F تابع أصلي على المجال I لـ f

3) $F(x)=\ln(\ln(x))$, $I=]1,+\infty[$

$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

F اشتقاقي على I

$F'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}=f(x)$

إذاً F تابع أصلي لـ f على I

ملاحظة :

لإثبات أن F و G تابعان أصليان للتابع f على المجال I

يكفي أن نبرهن أنّ $G-F=$ ثابت أو $G'=F'$

2/222) في كل من الحالات الآتية تحقق أن F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I

1) $G(x) = \dfrac{x^2+7x-5}{x-1}$, $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$, $I =]1, +\infty[$

G و F اشتقاقيان على I

$G(x) - F(x) = \dfrac{x^2+7x-5-x^2-3x+1}{x-1} = \dfrac{4x-4}{x-1} = \dfrac{4(x-1)}{(x-1)}$

$G(x) - F(x) = 4$ ثابت

أي أن $G'(x) = F'(x)$

ومنه F و G تابعان أصليان للتابع f على المجال I

2) $G(x) = 2 - \cos^2 x$, $F(x) = \sin^2 x$, $I = \mathbb{R}$

G و F اشتقاقيان على I

$F(x) - G(x) = \sin^2 x - 2 \cos^2 x \Rightarrow F(x) - G(x) = -1$

ومنه $F'(x) = G'(x)$

إذاً F و G تابعان أصليان للتابع f على المجال I

التوابع الأصلية لبعض التوابع المألوفة

ملاحظات	F	f
a عدد حقيقي	$F(x) = ax$	$f(x) = a$
$r \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$f(x) = x^r$
$r \neq -1$ $a \neq 0$	$F(x) = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}$	$f(x) = (ax+b)^r$ الأساس: تابع درجة أولى
$u > 0$	$F(x) = 2\sqrt{u}$	$f(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$
$r \neq -1$ $r \neq 0$	$F(x) = \dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$f(x) = u' \cdot u^r$ مشتق التابع الأساسي ، قوة تابع

ملاحظة:

التابع الأصلي لمجموع يساوي مجموع التوابع الأصلية.

مثال:

$f(x) = (3x-5)^{\frac{1}{2}} + 7 + \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-x}}$ ($x-1 \to u'$ ، $\sqrt{x^2-x} \to \sqrt{u}$)

$F(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(3x+b)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 7x + 2\sqrt{x^2-x}$

$$\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$$

الأس

(الدليل ، المقام)

$$\sqrt[2]{a^{1}} = a^{\frac{1}{2}}$$

تمرين: في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$: $I =]-\infty, 0[$

$f(x) = x^{-3}$

$F(x) = \dfrac{x^{-2}}{-2} \Rightarrow \boxed{F(x) = \dfrac{1}{-2x^2}}$

تابع أصلي لـ f على I

3) $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$, $I = \mathbb{R}$

$F(x) = \dfrac{8x^4}{4} + \dfrac{6x^3}{3} - \dfrac{2x^2}{2} + 3x$

$\boxed{F(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x}$

تابع أصلي لـ f على I

5) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-2}$

$F(x) = \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - \dfrac{3x^{-1}}{-1}$

$\boxed{F(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{x}}$

تابع أصلي لـ f على I

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$, $I =]-\infty, \frac{3}{2}[$

$f(x) = (3-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \dfrac{1}{-2} \cdot \dfrac{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = -\sqrt{3-2x}}$

تابع أصلي لـ f على I

2) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^2}$: $I =]\quad[$

$f(x) = x^3 - x^{-2}$

$F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^{-1}}{-1}$

$\boxed{F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{1}{x}}$

تابع أصلي لـ f على I

4) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x+x^2}$, $I =]1, +\infty[$

$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$

$F(x) = \dfrac{1(x-1)^{-1}}{-1}$

$\boxed{F(x) = \dfrac{-1}{x-1}}$

تابع أصلي لـ f على I

6) $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$, $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$

$f(x) = (2x-1)^{\frac{3}{2}}$

$F(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$

$\boxed{F(x) = \dfrac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5}}$

تابع أصلي لـ f على I

2

$f(x) = \dfrac{1}{-2} \cdot \dfrac{-2}{\sqrt{3-2x}}$

$F(x) = -\dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{3-2x}$

ALADIB

$f(x) = 2x\sqrt{x+9}$

288

8) $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$

$f(x) = x\underbrace{(x^2+1)}_{u}^{\frac{2}{3}}$

$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{2x}_{u'}\underbrace{(x^2+1)}_{u}^{\frac{2}{3}}$

$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}$

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}}$$

تابع أصلي لـ $f(x)$

10) $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$, $I =]1, +\infty[$

$f(x) = (x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}}$

$F(x) = \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}}$$

تابع أصلي لـ $f(x)$

4) $f(x) = x\sqrt{4-x}$

$f(x) = -(-x\sqrt{4-x})$

$f(x) = -[(4-x-4)(4-x)^{\frac{1}{2}}]$

$f(x) = -[(4-x)^{\frac{3}{2}} - 4(4-x)^{\frac{1}{2}}]$

$f(x) = -(4-x)^{\frac{3}{2}} + 4(4-x)^{\frac{1}{2}}$

لا تنسى $\frac{1}{a}$

$F(x) = +\frac{(4-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4\frac{(4-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(4-x)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(4-x)^3}$

9) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$, $I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

$f(x) = \frac{1}{-2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{3-x^2}}$ $\frac{\to u'}{\to \sqrt{u}}$

$f(x) = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3-x^2}$

$$\boxed{F(x) = -\sqrt{3-x^2}}$$

تابع أصلي لـ $f(x)$

11) $f(x) = x\sqrt{x-1}$

$f(x) = x(x-1)^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = (x-1+1)(x-1)^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = (x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}}$$

تابع أصلي لـ $f(x)$

12) $f(x) = 2x\sqrt{x+5}$

$f(x) = 2[x+5-5](x+5)^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = 2(x+5)^{\frac{3}{2}} - 10(x+5)^{\frac{1}{2}}$

$F(x) = 2\frac{(x+5)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 10\frac{(x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$F(x) = \frac{4}{5}\sqrt{(x+5)^5} - \frac{20}{3}\sqrt{(x+5)^3}$

/ /

تتمة قواعد التوابع الأصلية

f	F	ملاحظات
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	
$f(x)=\cos(\underbrace{ax+b}_{\text{صحيح درجة أولى}})$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$a\neq 0$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$a\neq 0$
$f(x)=u'\cos u$	$F(x)=\sin u$	
$f(x)=u'\sin u$	$F(x)=-\cos u$	
$f(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x$	
$f(x)=1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\cot x$	

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

1) $f(x)=\frac{1}{3}\sin 5x \qquad I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{3}\cdot -\frac{1}{5}\cos 5x \Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{1}{15}\cos 5x}$ تابع أصلي لـ f على

2) $f(x)=\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\boxed{F(x)=\frac{1}{4}\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)}$ تابع أصلي لـ f على I

لإيجاد التابع الأصلي لـ ... يجب تخفيضها

3) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $I = R^*$

$f(x) = -\frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $\boxed{F(x) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

تابع أصلي لـ f على I

4) $f(x) = \tan^2 x$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$f(x) = 1 + \tan^2 x - 1$, $\boxed{F(x) = \tan x - x}$

تابع أصلي لـ f على I

5) $f(x) = \cot^2 x$, $I = \left]0, \pi\right[$

$f(x) = 1 + \cot^2 x - 1$, $\boxed{F(x) = -\cot x - x}$

تابع أصلي لـ f على I

6) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1$, $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\boxed{F(x) = 2\tan x - x}$

تابع أصلي لـ f على I

7) $f(x) = \sin^2 x$,

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ $\qquad \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x}$ $\qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

تابع أصلي لـ f على I

8) $f(x) = \cos^2 3x$, $I = R$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$, $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x}$

تابع أصلي لـ f على I

9) $f(x) = \sin^3 x$

$f(x) = \sin x \sin^2 x \Rightarrow f(x) = \sin x\,(1 - \cos^2 x)$

$f(x) = \sin x \underbrace{-\sin x}_{u'} \underbrace{\boxed{\cos^2 x}}_{u} \rightarrow u^n$

$\boxed{F(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}}$ تابع أصلي لـ f على I

نحل بهذه الخوارزمية في حالة التكعيب

10) $f(x) = \cos^4 x$, $I = \mathbb{R}$

$$f(x) = [(\cos x)^2]^2 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right]^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x}$$

تابع أصلي لـ f على I

11) $f(x) = \sin^4 x$, $I = \mathbb{R}$

$$f(x) = [(\sin x)^2]^2 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right]^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}[\cos 2x]^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x}$$

تابع أصلي لـ f

دساتير التحويل من جداء إلى مجموع:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$

مثال: جد تابع أصلي للتابع: $f(x) = \cos 3x \cos x$ على R

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \cos 2x\right] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x}$$

تابع أصلي لـ f على I

مثال: جد تابع أصلي للتابع: $f(x) = \sin 5x \cos 2x$ على R

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\sin 7x + \sin 3x\right] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin 3x$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x}$$

تابع أصلي لـ f

كل كسر بسطه ثابت ومقامه تابع صحيح من الدرجة الأولى تابع الأصلي لوغريتمي

ملاحظات	I	F	f
	$\mathbb{R}$	$F(x)=e^x$	$f(x)=e^x$
$a\neq 0$	$\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$f(x)=e^{ax+b}$
	$I\subseteq\mathbb{R}$	$F(x)=e^u$	$f(x)=u'e^u$
	$]0,+\infty[$	$F(x)=\ln x$	$f(x)=\frac{1}{x}$
	$]-\infty,0[$	$F(x)=\ln(-x)$	$f(x)=\frac{1}{x}$
$bx+d>0$		$F(x)=\frac{a}{b}\ln(bx+d)$	$f(x)=\frac{a}{bx+d}$ $(b\neq 0)$
$bx+d<0$		$F(x)=\frac{a}{b}\ln(-bx-d)$	$f(x)=\frac{a}{bx+d}$ $(b\neq 0)$
$u>0$		$F(x)=\ln(u)$	$f(x)=\frac{u'}{u}$
$u<0$		$F(x)=\ln(-u)$	$f(x)=\frac{u'}{u}$

تمرين: في كل من الحالات الآتية تحقق أن F تابع أصلي لـ f على المجال I

1) $f(x)=\frac{1}{2}e^{5x-1}$; $I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{10}e^{5x-1}$

تابع أصلي لـ f على I

2) $f(x)=xe^{x^2}$; $I=\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot e^{x^2} \Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}}$

تابع أصلي لـ f على I

3) $f(x) = \frac{3}{x} - 5$ $I =]0, +\infty[$

$f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} - 5$

$\boxed{F(x) = 3\ln x - 5x}$

تابع أصلي لـ f على I

4) $f(x) = \frac{5}{4x-3}$ $I =]-\infty, \frac{3}{4}[$

$\boxed{F(x) = \frac{5}{4}\ln(-4x+3)}$

تابع أصلي لـ f على I

5) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$ $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$

$$\begin{array}{r|l} 3x+2 & 2x-1 \\ \hline -3x+\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline \frac{7}{2} & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x-1}$

$\boxed{F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ln(2x-1)}$

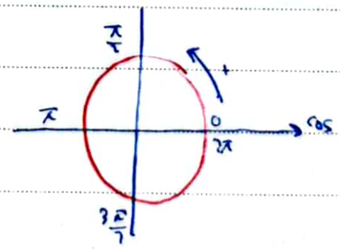
تابع أصلي لـ f على I

6) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $I =]1, +\infty[$

$f(x) = \frac{\frac{1}{x} \to u'}{\ln x \to u}$ $u > 0$ $\Rightarrow F(x) = \ln(u) \Rightarrow \boxed{F(x) = \ln(\ln x)}$

تابع أصلي لـ f على I

7) $f(x) = \tan x$ $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$



$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f(x) = -\frac{-\sin x \to u'}{\cos x \to u < 0}$

$\boxed{F(x) = -\ln(-\cos x)}$

تابع أصلي لـ f على I

8) $f(x) = \cot x$ $I =]0, \pi[$

$f(x) = \frac{\cos x \to u'}{\sin x \to u}$, $\boxed{F(x) = \ln(\sin x)}$ تابع أصلي لـ f على I

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sin 2x}$ $\quad I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$f(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{2\cos x.\sin x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{2\cos x.\sin x}+\dfrac{\sin^2 x}{2\cos x.\sin x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{-\sin x}{\cos x} \Rightarrow$

$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(\sin x)-\dfrac{1}{2}\ln(\cos x) \Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)\right]$

تابع أصلي لـ f $\Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(\tan x) \Rightarrow F(x)=\ln\sqrt{\tan x}$

التكامل المحدد وخواصه

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b$$

$$=F(b)-F(a)$$

مثال: احسب قيمة $I=\int_1^3 x^2\,dx$

$$I=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\left(\frac{27}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{26}{3}$$

خواص التكامل المحدد

* $\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$
* $\int_a^b (\lambda f)=\lambda\int_a^b f$
* $\int_a^b f=-\int_b^a f$

تمرين: في كل من الحالات الآتية احسب التكامل المحدد I

1) $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{(x+1)^3}\,dx$

$$I=\int_{-1}^{1}(x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$I=\left[\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$I=\left[\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}\right]_{-1}^{1} \Rightarrow I=\left(\frac{8\sqrt{2}}{5}\right)-(0) \Rightarrow I=\frac{8\sqrt{2}}{5}$$

2) $I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \, dx$

$I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \Rightarrow I = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$

$I = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{24} + \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}-1}{8}$

3) $I = \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x}) \, dx$

$I = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 \Rightarrow I = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\right) - (1) \Rightarrow I = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}$

4) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ $\nearrow u'$ $\searrow u > 0$

$I = \left[\ln(\cos x + \sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow I = (\ln\sqrt{2}) - (\ln 1) = \ln\sqrt{2}$

5) $I = \int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} \, dx$

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & x-1 \\ \hline \mp 2x \pm 2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$I = \int_{-2}^{-1} \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) dx$ $\nearrow u'$ $\searrow u < 0$

$I = \left[2x + \ln(-x+1)\right]_{-2}^{-1} = (-2 + \ln 2) - (-4 + \ln 3)$

$I = -2 + \ln 2 + 4 - \ln 3 \Rightarrow I = 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

- تكامل تابع القيمة المطلقة:

لإيجاد تكامل تابع القيمة المطلقة ندرس إشارة مضمون القيمة المطلقة على مجال التكامل

مثال:

$I = \int_0^2 |x^2 - 1| \, dx$

ندرس إشارة (x^2-1) على المجال $[0,2]$

/ /

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$ → $x=-1$ مرفوض ; $x=1$ مقبول

x	0		1		2
x^2-1		$-$	0	$+$	
$\lvert x^2-1\rvert$		$-x^2+1$	0	x^2-1	

$\Rightarrow I=\int_0^1(-x^2+1)\,dx+\int_1^2(x^2-1)\,dx$

$$I=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$$

$$I=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-(0)+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1=2$$

مثال : احسب

$$I=\int_{-1}^{2}x\lvert x-1\rvert\,dx$$

ندرس إشارة $(x-1)$ على المجال $[-1,2]$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	-1		1		2
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-1\rvert$		$-x+1$	0	$x-1$	

$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}x(-x+1)\,dx+\int_1^2 x(x-1)\,dx$

$$I=\int_{-1}^{1}(-x^2+x)+\int_1^2(x^2-x)\,dx$$

$$I=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$I=\frac{1}{6}$$

مثال : احسب

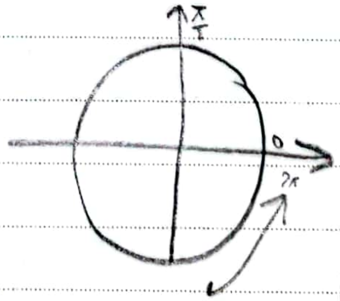
$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2-2\cos 2x}\;dx$$

الحل

$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{2\underbrace{(1-\cos 2x)}_{2\sin^2 x}}\;dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 x}\;dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin^2 x&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\\ 2\sin^2 x&=1-\cos 2x\end{aligned}}$$

$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\lvert 2\sin x\rvert\,dx$$



$$I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-2\sin x\,dx=\left[2\cos x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=(2)-(0)=2$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-2\sin x+\int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx$$

298 / /

مثال،

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 -\frac{-e^{-x} \to u'}{\underbrace{1+e^{-x}}_{u>0}}\,dx \Rightarrow I = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$I = \left[-\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)\right] - \left[-\ln 2\right] = -\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + \ln 2$$

$$I = \ln\left(\frac{2}{1+\frac{1}{e}}\right)$$

② $I = \int_0^3 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx$,

$$I = \int_0^3 \sqrt{(x-2)^2}\,dx$$

$$I = \int_0^3 |x-2|\,dx$$

ندرس إشارة $(x-2)$ على المجال $[0,3]$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	0		2		3
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$	0	$x-2$	

$$I = \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$I = \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3$$

$$I = (-2+4) - (0) + \left(\frac{9}{2}-6\right) - (2-4)$$

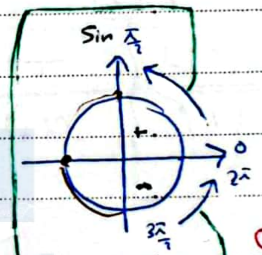
$$I = 2 + \frac{9}{2} - 6 + 2 = -2 + \frac{9}{2}$$

$$I = \frac{-4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$$

① تدريب : $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos 2x}\,dx$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1-\cos 2x)}\,dx$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 x}\,dx$$



$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin x|\,dx$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x\,dx + \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}} +2\sin x\,dx$$

$$I = \left[+2\cos x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \left[-2\cos x\right]_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = (2) - (0) + (0) - (2)$$

$I = 4$ ✗

α'

$\frac{1}{2}$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2|\sin x|\,dx$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -2\sin x\,dx$$

التكامل بالتجزئة

قانونه:

$$\int_a^b (u.v') = [u.v]_a^b - \int_a^b (u'.v)$$

يستعمل التكامل بالتجزئة استعمالاً واسعاً في حساب تكاملات من الشكل

$$\int_a^b x^n \cos mx\, dx \qquad \int_a^b x^n \sin mx\, dx$$

($x^n \to u$, $\cos mx \to v'$) ($x^n \to u$, $\sin mx \to v'$)

$$\int_a^b x^n e^{mx}\, dx \qquad \int_a^b x^n \ln x\, dx$$

($x^n \to u$, $e^{mx} \to v'$) ($x^n \to v'$, $\ln x \to u$) ليس مشتق لدينا طبيعي الحتمي

مثال، احسب $1)\ I = \int_0^{\pi} (x-1)\cos x\, dx$

نضع

$u(x) = x-1 \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$

$$\int_0^{\pi} (u.v') = [u.v]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (u'v)$$

$$I = [(x-1)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx \Rightarrow I = [(x-1)\sin x]_0^{\pi} + [\cos x]_0^{\pi}$$

$$I = (0)-(0) + (-1)-(1) \Rightarrow I = -2$$

مثال: احسب $2)\ I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x\, dx$

$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin 3x \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (u.v') = [u.v]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (u'.v)$$

$$I = \left[x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) \Rightarrow I = \left[-\frac{1}{3}x\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{9}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \left(\frac{\pi}{9}\right) - (0) + (0) - (0)$$

$$I = \frac{\pi}{9}$$

300

3) $I = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

$u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = 1$ نضع

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$\int_0^1 (u.v') = [u.v]_0^1 - \int_0^1 [u'.v]$

$I = \left[(x+2)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = \left[(x+2)e^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1$

$I = (3e) - (2) - [e - 1] = 2e - 1$

4) $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$

$\int_1^e (u.v') = [u.v]_1^e - \int_1^e [u'.v]$

$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$

$I = \left(\frac{e^2}{2}\right) - (0) - \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

5) $N = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$

$u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ نضع

$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$

$\int_0^\pi (u.v') = [u.v]_0^\pi - \int_0^\pi (u'.v)$

$N = \left[e^x \cos x\right]_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi e^x \cos x \, dx}_{M}$

نحسب $M = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$ نطبق التكامل بالتجزئة

$u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$

$v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$

$M = \left[e^x \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x \, dx \Rightarrow \boxed{M = \left[e^x \sin x\right]_0^\pi - N}$

$\ln x$ حتى لو كان لوحدها
بدو تجزئة

- نحتاج إلى تجزئة حتى لو كان لوحده $\int \ln x \, dx$ حيث نعتبر
$u(x) = \ln x \quad , \quad v'(x) = 1$

نعوض في N:

$$N = \left[-e^{x}\cos x\right]_0^{\pi} + \left[e^{x}\sin x\right]_0^{\pi} - N$$

$$2N = (e^{\pi}) - (-1) + (0) - (0) \Rightarrow$$

$$2N = e^{\pi} + 1 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{e^{\pi}+1}{2}$$

تمرين: جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

ملاحظة:
إذا طلب إيجاد تابع أصلي لتابع من أشكال توابع التجزئة يجب أن نشكل تكامل

1) $f(x) = x\cos x \quad : I = R$

(غالباً نضع x فوق)

$$F(x) = \int_{0}^{x} x\cos x \, dx$$

حسب المجال حيث يجب أن ينتمي إلى I ويفضل ألا يكون من حدود المجال

مثال: $I = [1, +\infty[$

(نضع ② تحت)

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$$

$$\int_0^{x} (u.v') = [u.v]_0^{x} - \int_0^{x} (u'.v)$$

$$F(x) = \left[x\sin x\right]_0^{x} - \int_0^{x} \sin x \, dx = \left[x\sin x\right]_0^{x} + \left[\cos x\right]_0^{x}$$

$$\boxed{F(x) = x\sin x + \cos x - 1}$$

تابع أصلي لـ f على I

2) $f(x) = x^2 . e^{x} \quad : I = R$

$$F(x) = \int_0^{x} x^2 . e^{x} \, dx$$

نضع:

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^{x} \Rightarrow v(x) = e^{x}$$

$$\int_0^{x} (u.v') = [u.v]_0^{x} - \int_0^{x} (u'.v)$$

$$F(x) = \left[x^2 e^{x}\right]_0^{x} - \underbrace{\int_0^{x} 2x e^{x} \, dx}_{I}$$

لحساب $I = \int_0^{x} 2x e^{x} dx$ نطبق التكامل بالتجزئة

$\boxed{3o2}$

إذا طلب إيجاد التابع الأصلي لتابع من أشكال النواتج الفرعية نحسب على شكل تكامل

$U(x) = 2x \Rightarrow U'(x) = 2$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$I = [2xe^x]_0^x - \int_0^x 2e^x\,dx = [2xe^x]_0^x - [2e^x]_0^x$$

$$I = 2xe^x - (2e^x - 2) \Rightarrow \boxed{I = 2xe^x - 2e^x + 2}$$

نعوض ب $F(x)$

$$F(x) = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x + 2)$$

$$\boxed{F(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}$$ تابع أصلي ل f على I

3) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$, $I = \mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = x^{-2}\ln x - \frac{1}{x^2}$$

$$F(x) = \underbrace{\int_1^x x^{-2}\ln x}_{I_1} - \int_1^x \frac{1}{x^2}\,dx$$

لحساب $I_1 = \int_1^x x^{-2}\ln x\,dx$ نضع نطبق التكامل بالتجزئة

$U(x) = \ln x \Rightarrow U'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x^{-2} \Rightarrow v(x) = \dfrac{x^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{x}$

$$\int_1^x (u.v') = [u.v]_1^x - \int_1^x (u'.v)$$

$$I_1 = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{x^2}\,dx$$

نعوض ب $F(x)$:

$$F(x) = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^x \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{x}\ln x}$$ تابع أصلي ل f على I

4) $f(x)=\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$, $I=\mathbb{R}_+^*$

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{x\cos x}{x^2}$

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{\cos x}{x}$

$f(x)=x^{-2}\sin x - x^{-1}\cos x$

$F(x)=\underbrace{\int_{\pi}^{x} x^{-2}\sin x\,dx}_{L_1}-\underbrace{\int_{\pi}^{x} x^{-1}\cos x\,dx}_{L_2}$

$v'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow v(x)=\ln x$

يعني $\ln$ بيعمل مشكلة α

لإيجاد $L_2=\int_1^x x^{-1}\cos x\,dx$ نستخدم التكامل بالتجزئة

$u(x)=x^{-1} \Rightarrow u'(x)=-x^{-2}$

$v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$

$\int_{\pi}^{x}(u.v')=[u.v]_1^x-\int_{\pi}^{x}(u'v)$

$L_2=[x^{-1}\sin x]_1^x-\int_{\pi}^{x}(-x^{-2}\sin x)$

$L_2=[x^{-1}\sin x]^x+\int_{\pi}^{x}(x^{-2}\sin x)$

نعوض في $F(x)$:

$F(x)=\int_{\pi}^{x}x^{-2}\cancel{\sin x}\,dx-[x^{-1}\sin x]_{\pi}^{x}-\int_{\pi}^{x}x^{-2}\cancel{\sin x}\,dx$

$F(x)=-[x^{-1}\sin x]_{\pi}^{x}$

$F(x)=-\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]_{\pi}^{x}$

$F(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$

إذا رضت بدل π ب(1) يكون :

$F(x)=-\dfrac{\sin x}{x}+\sin(1)$

لإيجاد $L_1=\int_1^x x^{-2}\sin x\,dx$ نستخدم التكامل بالتجزئة

$u(x)=x^{-2} \Rightarrow u'(x)=-2x^{-1}=-\frac{2}{x}$

$v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$

$\int_1^x(u.v')=[u.v]_1^x-\int_1^x(u'v)$

$L_1=[-x^{-2}\cos x]_1^x-\int_1^x\left(\frac{2}{x}\cos x\right)$

للملاحظة : في حال الأس السالب منبدل بين الـ u و v'

أي $\int x^{-2}\sin x$

نضع $v'(x)=x^{-2}$

$u(x)=\sin x$

وبعدها نحسب L_1 و نعوضها في $F(x)$

304

/ /

حساب تكامل بعض التوابع الكسرية الأولى

I. تكامل تابع كسري بسيط (عوامل المقام من الدرجة الأولى وغير مكررة) (إجراء توسيط مختلفين) ⇐ نفرق الكسر إلى مجموع كسور جزئية

مثال: احسب $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$

$$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

يوجد عددان a , b بحيث:

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+2)} \quad (*)$$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{ax+2a+bx+b}{(x+1)(x+2)}$$

بالمطابقة

$$a+b=2 \quad \text{.....} (1)$$

$$2a+b=1 \quad \text{.....} (2)$$

بالطرح

$$-a=1$$

ومنه $\boxed{a=-1}$ ومنه $\boxed{b=3}$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}\right) dx = \left[-\ln(x+1) + 3\ln(x+2)\right]_0^1$$

$$I = (-\ln 2 + 3\ln 3) - (3\ln 2) = 3\ln 3 - 4\ln 2 = \ln 27 - \ln 16 \Rightarrow$$

$$I = \ln\left(\frac{27}{16}\right)$$

مثال: احسب $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)}\,dx$$

يوجد عددان a , b بحيث:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} \quad (*)$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a-2b}{(x-2)(x+1)}$$

بالمطابقة نجد:

$$a+b=0 \quad \text{----}(1)$$
$$a-2b=1 \quad \text{----}(2)$$

بالطرح

$$3b=-1$$
$$\boxed{b=\frac{-1}{3}}$$

نعوض في (1) نجد $\boxed{a=\frac{1}{3}}$

نعوض في $(*)$

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$I=\int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\right) dx$$

$u'u$

$$I=\left[\frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln(x+1)\right]_0^1 = \left(0-\frac{1}{3}\ln 2\right) - \left(\frac{1}{3}\ln 2 - 0\right)$$

$$I=-\frac{2}{3}\ln 2$$

2) تكامل تابع كسري درجة بسطه أكبر أو تساوي درجة المقام

نستخدم القسمة الإقليدية

مثال: احسب

$$I=\int_0^1 \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}\,dx$$

يوجد عددان a , b بحيث:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} \quad (*)$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a-2b}{(x-2)(x+1)}$$

بالمطابقة نجد:

$$a+b = 0 \quad ----(1)$$
$$a-2b = 1 \quad ----(2)$$

بالطرح

$$3b = -1$$
$$\boxed{b = \frac{-1}{3}}$$

نعوض في (1) نجد $\boxed{a = \frac{1}{3}}$

نعوض في (*)

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} \right) dx$$

سالب

$$I = \left[\frac{1}{3}\ln(2-x) - \frac{1}{3}\ln(x+1) \right]_0^1 = \left(0 - \frac{1}{3}\ln 2\right) - \left(\frac{1}{3}\ln 2 - 0\right)$$

$$I = -\frac{2}{3}\ln 2$$

2 - تكامل تابع كسري درجة بسطه أكبر أو تساوي درجة المقام

نستخدم القسمة الإقليدية

مثال: احسب

$$I = \int_0^1 \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}\, dx$$

306.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x-2 & 4x^3-3x \\ & \hline 2x+3 \end{array}$$

$-4x^3+6x^2+4x$

$6x^2+x$

$-6x^2+9x+6$

$10x+6$

$$I=\int_0^1\left[2x+3+\frac{10x+6}{2x^2-3x-2}\right]dx$$

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=25$

$x_2=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$ $\quad x_1=\frac{3+5}{4}=2$

$2x^2-3x-2=2(x-2)(x+\frac{1}{2})$

$=(x-2)(2x+1)$

$$I=\int_0^1\left[2x+3+\frac{10x+6}{(x-2)(2x+1)}\right]dx$$

يوجد العددان a , b بحيث

$$\frac{10x+6}{(x-2)(2x+1)}=\frac{a}{(x-2)}+\frac{b}{(2x+1)}$$

$$\frac{10x+6}{(x-2)(2x+1)}=\frac{a(2x+1)+b(x-2)}{(x-2)(2x+1)}=\frac{2ax+a+bx-2b}{(x-2)(2x+1)}$$

بالمطابقة

$2a+b=10$ ...①

$a-2b=6$ ...②

نضرب ① بـ 2 , نجمع ②

$5a=26 \Rightarrow \boxed{a=\frac{26}{5}}$

نعوض في ② :

$\frac{26}{5}-2b=6$

$-2b=6-\frac{26}{5}=\frac{4}{5}$

$\boxed{b=-\frac{2}{5}}$

ومنه

$$\frac{10x+6}{(x-2)(2x+1)}=\frac{\frac{26}{5}}{(x-2)}-\frac{\frac{2}{5}}{(2x+1)}$$

نعوض في (*)

$$I=\int_0^1\left[2x+3+\frac{\frac{26}{5}}{(x-2)}-\frac{\frac{2}{5}}{(2x+1)}\right]dx$$

$$\cancel{I=}\left[2\frac{x^2}{2}+3x+\frac{26}{5}\ln(x-2)-\frac{1}{5}\ln(2x+1)\right.$$

$$I=\left[2\frac{x^2}{2}+3x+\frac{26}{5}\ln|x-2|-\frac{1}{5}\ln(2x+1)\right]_0^1$$

$$I=\left[4-\frac{1}{5}\ln(3)\right]-\frac{26}{5}\ln(2)$$

$$I=\frac{-26\ln 2-\ln(3)}{5}+4$$

تمرين: جد دالة أصلية F لـ f على المجال I

1) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$; $I =]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$

يوجد العددان a , b بحيث

(*) $\boxed{\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{(x-1)} + \dfrac{b}{(x+1)}}$ $= \dfrac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a-b}{(x-1)(x+1)}$$

بالمطابقة: $a+b=1$

$a-b=3$

بالجمع: $2a=4 \Leftarrow \boxed{a=2}$

ومنه $\boxed{b=-1}$

نعوض في (*)

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$F(x) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1) \Rightarrow F(x) = \ln\left[\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\right]$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$; $I =]2, +\infty[$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-x-2 \\ \underline{-x^3 \pm x^2 \pm 2x} & x+1 \\ x^2+2x & \\ \underline{-x^2 \pm x \pm 2} & \\ 3x+2 & \end{array}$$

$f(x) = x+1 + \dfrac{3x+2}{x^2-x-2}$

$f(x) = x+1 + \dfrac{3x+2}{(x-2)(x+1)}$

يوجد العددان a , b بحيث:

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x+1)} \quad (*)$$

$\boxed{3 \bar{\circ} 8}$

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{ax+a+bx-2b}{(x-2)(x+1)}$$

بالمطابقة

$a+b=3$ ...(1)

$a-2b=2$ ...(2)

بالطرح

$3b=1 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{3}}$

ومنه $\boxed{a=\frac{8}{3}}$

$$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{8}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

نعوض في (*)

ومنه:

$$f(x) = x+1 + \frac{\frac{8}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1)$$

تابع أصلي لـ f على I

3) $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)^2}$ $\quad I =]-\infty; -2[$

$$f(x) = \frac{2x-1+5-5}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-5}{(x+2)^2}$$

$$f(x) = \frac{2(x+2)}{(x+2)^2} - \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)} - 5(x+2)^{-2}$$

$$F(x) = 2\ln(x+2) - \frac{5(x+2)^{-1}}{-1}$$

$$F(x) = 2\ln(x+2) + \frac{5}{x+2}$$

تابع أصلي لـ f على I

طريقة ثانية:

$$f(x) = (2x-1)(x+2)^{-2}$$

$$F(x) = \int_{-3}^{x} (2x-1)(x+2)^{-2}\,dx$$

تمرين : أحسب : $I = \int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^4}\,dx$

$$I = \int_0^3 \frac{x+1+1}{(x+1)^4}\,dx = \int_0^3 \left[\frac{x+1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+1)^4}\right] dx$$

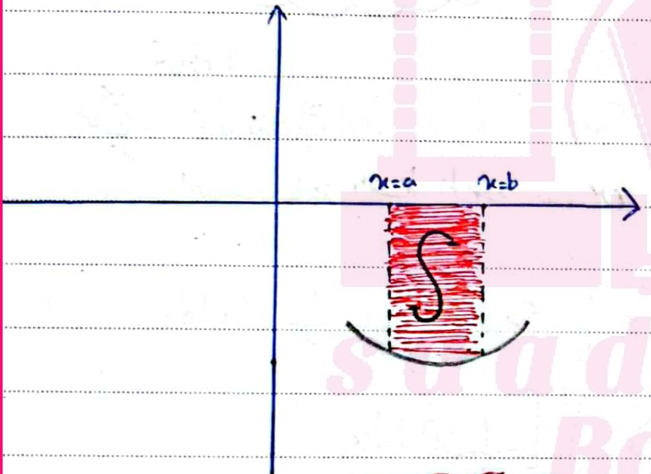
$$I = \int_0^3 \left[(x+1)^{-3} + (x+1)^{-4}\right] dx$$

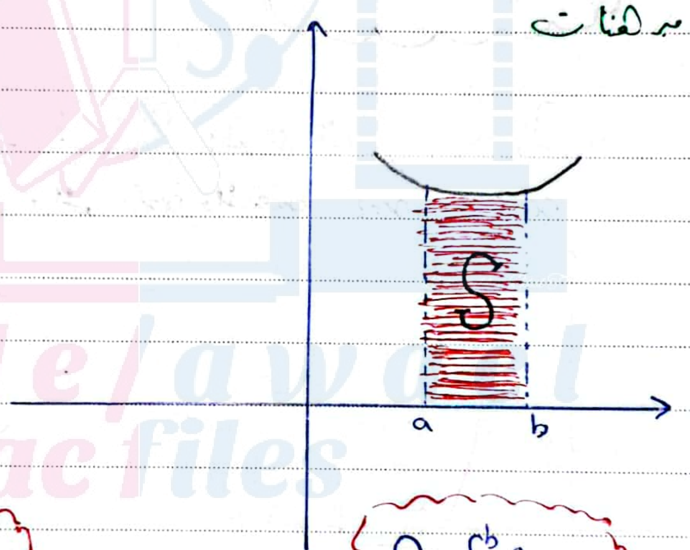
$$I = \left[\frac{(x+1)^{-2}}{-2} + \frac{(x+1)^{-3}}{-3}\right]_0^3 = \left[\frac{-1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3}\right]_0^3 =$$

$I =$

توظيف التكامل في حساب المساحات

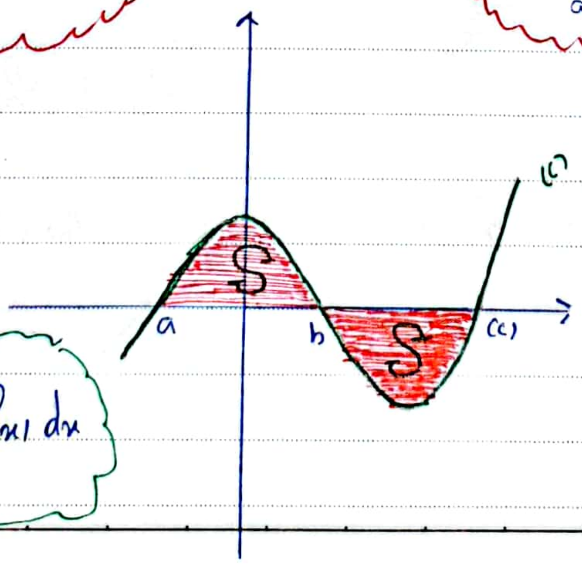
مبرهنات



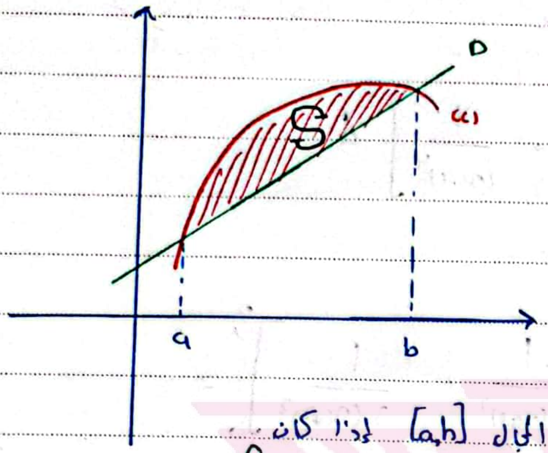


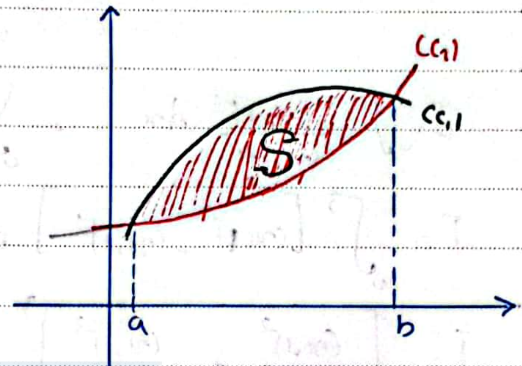
$$S = \int_a^b -f(x)\,dx$$

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$S = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c -f(x)\,dx$$





في المجال $[a,b]$ إذا كان

$f_1(x) \geq f_2(x)$

فإن:

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

في المجال $[a,b]$ إذا كان

$f(x) \geq y_D$

فإن:

$$S = \int_a^b [f(x) - y_D]\,dx$$

تمرين:

ليكن التابع $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ المعرف على $]1,+\infty[$

احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=2$ و $x=3$

$$S = \int_2^3 -f(x)\,dx = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x-1} + \sqrt{x}\right)dx$$

$$S = \int_2^3 \left[-\frac{1}{x-1} + x^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$S = \left[-\ln(x-1) + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^3$$

$$S = \left[-\ln(x-1) + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_2^3$$

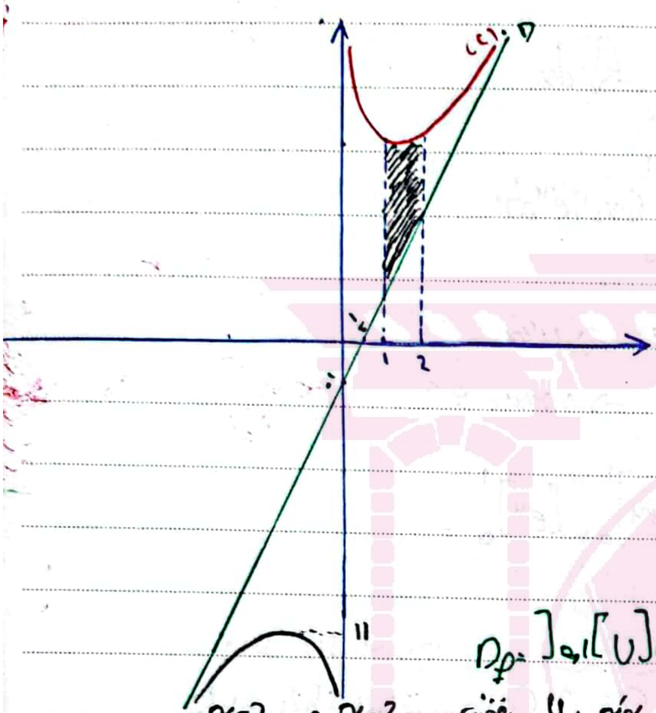
$$S = (-\ln 2 + 2\sqrt{3}) - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = -\ln 2 + 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

/ /

محلول من قبل (27/40)

$f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمستقيم $D: y=2x-1$ والمستقيمين $x=2$, $x=1$



$$S = \int_1^2 (f(x) - y_D)\,dx$$

$$S = \int_1^2 \frac{8}{x+1}\,dx$$

$$S = \left[8\ln(x+1)\right]_1^2$$

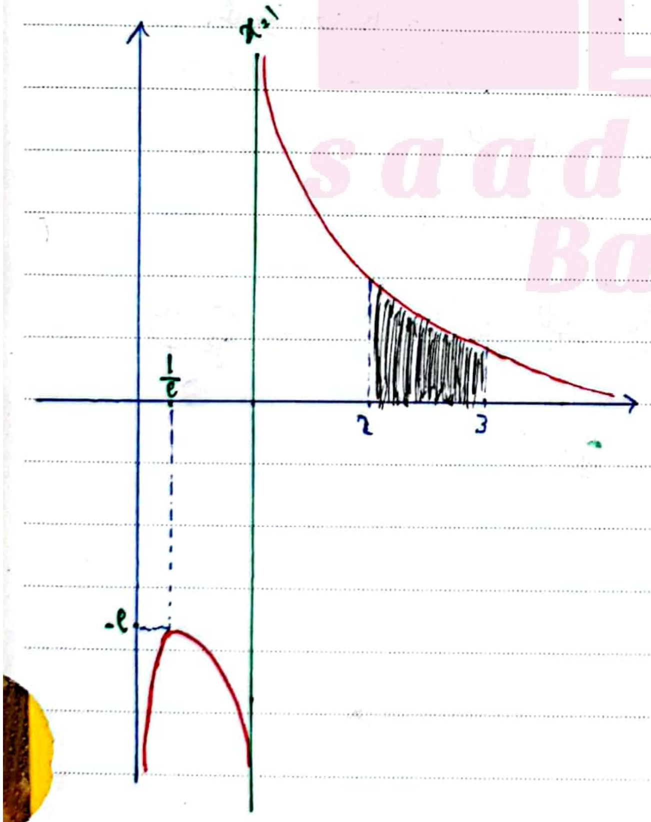
$$S = (8\ln 3) - (8\ln 2)$$

$$S = 8\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

محلول من قبل (دورة 2016)

$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=3$, $x=2$



$$S = \int_2^3 f(x)\,dx$$

$$S = \int_2^3 \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^3 \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

u' , $u>0$

$$S = \left[\ln(\ln x)\right]_2^3$$

$$S = \left[\ln(\ln 3)\right] - \left[\ln(\ln 2)\right]$$

$$S = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$$

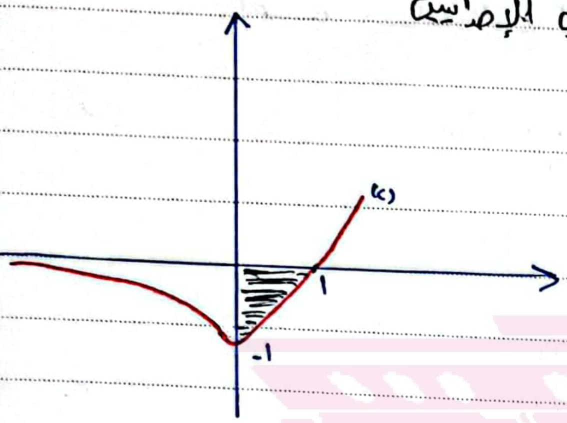
$$S = \ln\left[\frac{\ln 3}{\ln 2}\right]$$

/ /

8 / 210

$f(x) = (x-1)e^x$ معرف على R

احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمحورين الإحداثيين



$$S = \int_0^1 -f(x)\,dx$$

$$S = \int_0^1 (-x+1)e^x\,dx$$

$u(x) = -x+1 \Rightarrow u'(x) = -1$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$S = \left[(-x+1)e^x\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1 =$$

$S =$

نشاط (1) ص 242

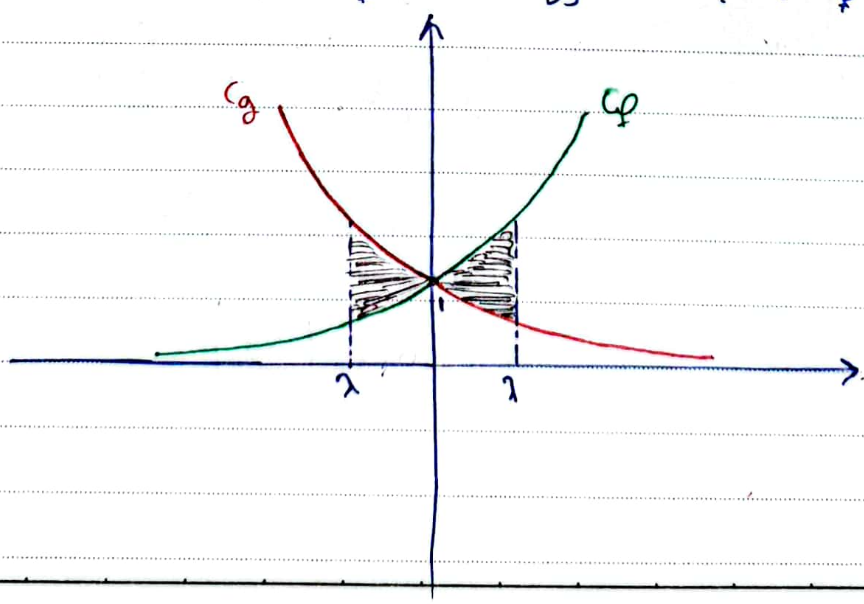
تأمل الخطين البيانيين C_f و C_g للتابعين $f: x \to e^x$ و $g: x \to e^{-x}$ المعرفين على R

1) ارسم الخطين البيانيين C_f و C_g

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي (ناقش تبعاً لإشارة λ)

$g(x) = f(x)$

① C_g نظير C_f بالنسبة للمحور yy' (C_f يرسم مباشرة لأنه تابع مرجعي)



② من أجل $\lambda > 0$

$$S = \int_0^{\lambda} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$S = \int_0^{\lambda} (e^{x} - e^{-x})\,dx = \left[e^{x} + e^{-x}\right]_0^{\lambda}$$

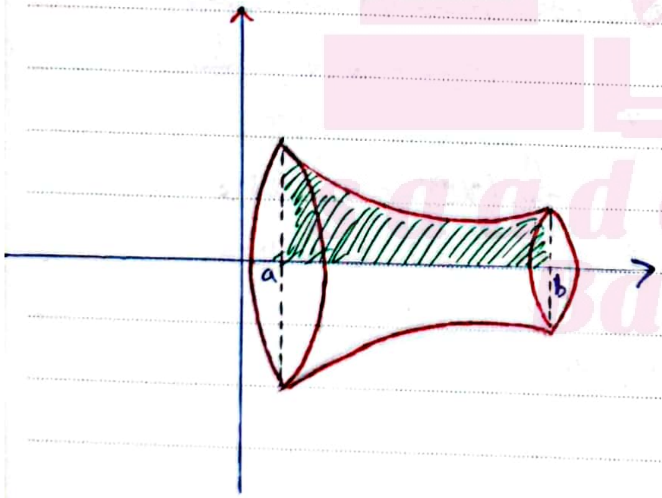
$$S = e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2$$

ومن أجل $\lambda < 0$

$$S = \int_{\lambda}^{0} (g(x) - f(x))\,dx$$

$$S = \int_{\lambda}^{0} (e^{-x} - e^{x})\,dx = \left[-e^{-x} - e^{x}\right]_{\lambda}^{0}$$

$$S = (-2) - (-e^{-\lambda} - e^{\lambda}) = -2 + e^{-\lambda} + e^{\lambda}$$



حساب حجم مجسم دوراني:

المقطع هو دائرة مركزها $I(x, 0)$

حيث $a \leq x \leq b$

ونصف قطرها $f(x)$

تكون مساحة المقطع

$$A(x) = \pi (f(x))^2$$

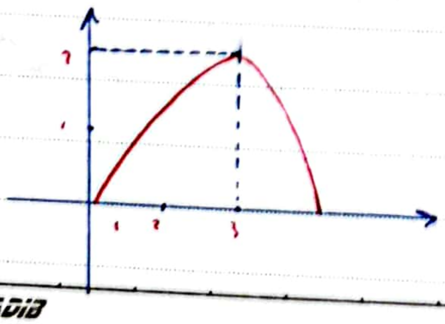
ومنه حجم المقطع

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

مجموع مساحات الأقراص

أي

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$



التمرين الثاني ، اختبار (3) ص 215

$f(x) = x\sqrt{3 - x}$ معرف على $[0, 3]$

314

عندما يدور (C) دورة كاملة حول محور الفواصل يولد مجسماً دورانياً S

① ما طبيعة مقطع هذا الجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل

② عين $A(x)$ مساحة هذا المقطع بدلالة x ثم استنتج V حجم الجسم S

① المقطع دائرة مركزها $I(x,0)$

نصف قطرها $f(x) = x\sqrt{3-x}$

② $A(x) = \pi (f(x))^2$

$A(x) = \pi x^2 (3-x)$

$\boxed{A(x) = \pi (3x^2 - x^3)}$

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \pi \int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx$$

$$V = \pi \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \pi\left[27 - \frac{81}{4}\right] = \frac{27\pi}{4}$$

$D = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (2-x)e^x$ $\quad \left(\frac{26}{250}\right.$

① ادرس تغيرات f وارسم (C)

f معرف واشتقاقي ومستمر على $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

عندما $x \to -\infty$ نكتب:

$f(x) = 2e^x - xe^x$

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$ $\quad$ ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$

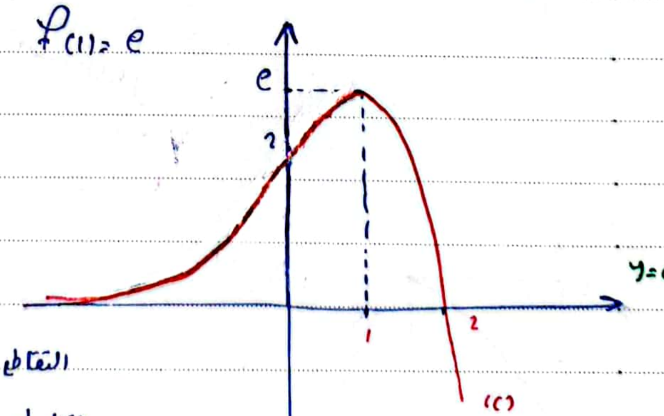
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = (1-x)e^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e	↘	$-\infty$



التقاطع مع yy' نجعل $x=0 \Leftarrow f(x)=2$

التقاطع مع xx' نجعل $y=0 \Leftarrow x=2$

② احسب مساحة السطح المحصور بين (C) و المحور $x'x$ والمستقيم $x=2$

$$S=\int_0^2 f(x)\,dx \Rightarrow S=\int_0^2 (2-x)e^x dx$$

$u(x)=2-x \Rightarrow u'(x)=-1$

$v'(x)=e^x \Rightarrow v(x)=e^x$

$$\int_0^2 (u.v')=[u.v]_0^2-\int_0^2 (u'.v)$$

$$S=[(2-x)e^x]_0^2-\int_0^2 (-e^x)=[(2-x)e^x]_0^2+[e^x]_0^2$$

$$S=0-2+e^2-1 \Rightarrow S=e^2-3$$

③ عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنه يولد جسماً دورانياً حجمه V

a) عين الأعداد a,b,c حتى يكون $G: x \to (ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x \to (f(x))^2$

b) استنتج قيمة V

a)

G تابع أصلي لـ $(f(x))^2$ $\Rightarrow G'(x)=(f(x))^2$

$\Rightarrow (2ax+b)e^{2x}+2e^{2x}(ax^2+bx+c)=(2-x)^2 e^{2x}$

$\Rightarrow (2ax+b+2ax^2+2bx+2c)e^{2x}=(4-4x+x^2)e^{2x}$

$\Rightarrow [2ax^2+(2a+2b)x+b+2c]e^{2x}=(x^2-4x+4)e^{2x}$

بالمطابقة:

- $2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$
- $2a+2b=-4 \Rightarrow 1+2b=-4 \Rightarrow b=\frac{-5}{2}$
- $b+2c=4 \Rightarrow -\frac{5}{2}+2c=4 \Rightarrow 2c=\frac{13}{2} \Rightarrow c=\frac{13}{4}$

$$G(x)=\left(\frac{1}{2}ax-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{2x}$$

b)

$$V=\pi\int_0^2 (f(x))^2 dx \Rightarrow V=\pi[G(x)]_0^2$$

التابع الأصلي

$$\Rightarrow V=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{2x}\right]_0^2$$

$\Rightarrow V=$

316

$\left(\frac{12}{242}\right.$

$\left(\frac{6}{245}\right.$ ليكن f التابع المعرف على $R\{-3\}$ وفق $f(x)=\frac{4x^2-5x+1}{x+3}$

① جد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$

② احسب $J=\int_2^0 f(x)\,dx$

①

$$\begin{array}{r|l} & 4x-17 \\ x+3 & 4x^2-5x+1 \\ & \mp 4x^2 \mp 12x \\ \hline & -17x+1 \\ & \pm 17x \pm 51 \\ \hline & 52 \end{array}$$

$\Rightarrow f(x)=4x-17+\frac{52}{x+3}$

بالمطابقة نجد $a=4$, $b=-17$, $c=52$

②

$J=\int_2^0 f(x)\,dx=\int_2^0\left(4x-17+\frac{52}{x+3}\right)dx=\left[2x^2-17x+52\ln(x+3)\right]_2^0$

$J=(52\ln(3))-\left[8-34+52\ln(5)\right]=52\ln 3+26-52\ln 5$

$J=26+52\ln\left(\frac{3}{5}\right)$

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$ ($\frac{7}{245}$

① جد الأعداد a, b, c التي تحقق $f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

② احسب $I=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$

①

(أ) (ب)

$$f(x)=\frac{x^2-1+1}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

فك الحد، نختصر

$$f(x)=\boxed{\frac{x+1}{(x-1)}}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

نقسم اقليديا

$$f(x)=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{array}{r|l} x & x-1 \\ \hline -x+1 & 1 \\ \hline +1 & \end{array}$$

$$f(x)=\left[\frac{x}{(x-1)}\right]^2$$

$$f(x)=\left[1+\frac{1}{x-1}\right]^2$$

$$f(x)=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد

$a=1$ $b=2$ $c=1$

②

$$I=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx \Rightarrow I=\int_{-3}^{0}\left[1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$I=\int_{-3}^{0}\left[1+\frac{2}{x-1}+(x-1)^{-2}\right]dx \Rightarrow I=\left[x+2\ln(-x+1)-\frac{1}{x-1}\right]_{-3}^{0}$$

$$I=$$

($\frac{8}{245}$ أثبت أن $\frac{1}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$ واستنتج قيمة $I=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}\,dx$

$$L_2=1-\frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow L_2=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}=L_1$$

عن طريق الضرب في e^{-x} البسط والمقام

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}\,dx \Rightarrow I=\int_0^1\left(1-\frac{\overset{u'}{e^x}}{\underset{u}{1+e^x}}\right)dx$$

$$I=\left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^1$$

$$\Rightarrow I=(1-\ln(1+e))-(-\ln 2)$$

$$I=1-\ln(1+e)+\ln 2=1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$$

/ /

19) $\frac{19}{248}$ نريد حساب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}$

أحسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ ثم $I+J$ ، استنتج I

$$\star\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{2\cos x}{1+2\sin x} dx$$

u' ، u

$$J = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}\ln 3\right) - (0) \Rightarrow J = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$\star\ I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{1+2\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x + \cos x}{1+2\sin x}$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(2\sin x+1)}{1+2\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$I+J = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I+J = 1$$

ومنه

$$I + \frac{1}{2}\ln 3 = 1 \Rightarrow I = 1 - \frac{1}{2}\ln 3$$

للتدريب: 18 ص248

عندما نطلب إيجاد تابع أصلي ضمن شرط فهذا يعني:
نطلب إيجاد قيمة K

$\left(\frac{3}{244}\right.$ في كل من الحالات الآتية هات تابعاً أصلياً F للتابع f على مجال I نطلب تحديده ويحقق الشرط:

1) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x \quad , \quad F(1) = 0$

$f(x) = 2x^{-2} + x \qquad I = \mathbb{R}^*$

$F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} + K$

$F(1) = 0 \Rightarrow -2 + \frac{1}{2} + K = 0$

$\Rightarrow K = \frac{3}{2}$

ومنه: $\boxed{F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}}$ تابع أصلي لـ f على I

2) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} \quad , \quad F(0) = 0$

$I = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$f(x) = (2x+1)^{-2}$

$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{-1}}{-1} + K$

$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{2(2x+1)} + K$

$F(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + K = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

ومنه: $\boxed{F(x) = \frac{-1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}}$ تابع أصلي لـ f على I

3) $f(x) = \sin x \cos^2 x \quad , \quad F(\frac{\pi}{2}) = 0$

$f(x) = -\underbrace{(-\sin x)}_{u'} \underbrace{\cos^2 x}_{u^2}$

$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + K$

$F(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow K = 0$

ومنه: $\boxed{F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3}}$ تابع أصلي لـ f على I

16/248) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sin^4 x$

① احسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 4x$

② استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$

① f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=4\sin^3 x\cos x$$

f' اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f''(x)=4\left[(3\sin^2 x\cos x)\cos x-\sin x(\sin^3 x)\right]$$

$$f''(x)=12\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^4 x$$

$$f''(x)=12\sin^2 x\cos^2 x-4f(x)$$

$$\Rightarrow 4f(x)=12\sin^2 x\cos^2 x-f''(x)$$

$$f(x)=3\sin^2 x\cos^2 x-\frac{1}{4}f''(x)$$

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\left[\sin(x+x)+\sin(x-x)\right]$ ، $\sin(x-x)=0$ ، $\frac{1}{2}\sin 2x$

$$\Rightarrow f(x)=3(\sin x\cos x)^2-\frac{1}{4}f''(x)=3\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2-\frac{1}{4}f''(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{4}\sin^2 2x-\frac{1}{4}f''(x)$$

$$f(x)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)-\frac{1}{4}f''(x)$$

$$\boxed{f(x)=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}f''(x)}$$

②

$$\boxed{F(x)=\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}f'(x)}$$ تابع أصلي لـ f على $\mathbb{R}$

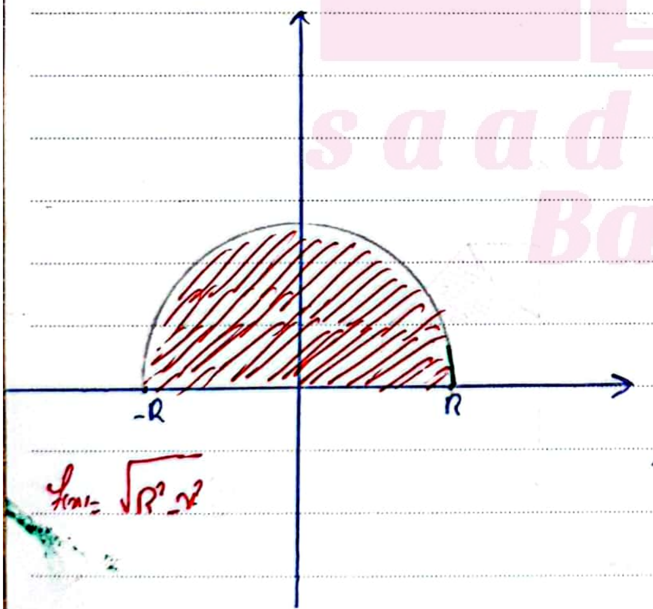
للتدريب 20/249)

/ /

(نش / 243) اعتمادا على التكامل المحدد استنتج حجم الكرة

الكرة تنتج عن دوران نصف دائرة حول محور الفواصل

نكون حجم :



$$V = \pi \int_{-R}^{R} (f(x))^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)$$

$$V = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$V = \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) \right]$$

$$V = \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

ملاحظة:

تابع min	تابع max
$\min(2,2)=2$	$\max(3,9)=9$
$\min(7,5)=5$	$\max(-1,-3)=-1$
$\min(3,3)=3$	$\max(5,5)=5$

($\frac{4}{2\text{ن}}$) ليكن التابع $f(x)=\min(x^2,2-x)$ المعرف على $[0,2]$

① ارسم C_f على المجال $[0,2]$ (اكتب كتابة $f(x)$ بصيغة مستقلة عن min)

② احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$ ، ماذا تمثل هذا العدد

① ندرس اشارة الفرق

$x^2-(2-x)$ على المجال $[0,2]$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \to x=-2$ مرفوض

$x=1$ مقبول

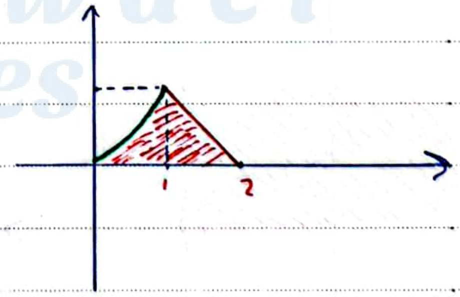
x	0		1		2
x^2+x-2		$-$	0	$+$	
min		x^2	0	$2-x$	

نعوض بمجال دراسة أصغر [illegible] x^2

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x\in[0,1] \\ 2-x & ; x\in[1,2] \end{cases}$$

مستقيم

نلاحظ أنه عندما [illegible] min هي x^2 أو $2-x$



②

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 (2-x)\,dx$$

وهو تمثل مساحة الحيز المحصور بين (C) والمحور $x'x$ والمستقيمين $x=0$, $x=2$

ملاحظة:

لإثبات أنّ $f(x_0)$ قيمة حدية:

1) نعيّن مجال مفتوح D_1 يضم x_0

2) نوجد $D_1 \cap D$

3) نتحقق من الشرط

شرط القيمة الكبرى محليا:

أيا يكن $x \in D_1 \cap D$ فإنّ $f(x) \leq f(x_0)$

شرط القيمة الصغرى محليا:

أيا يكن $x \in D_1 \cap D$ فإنّ $f(x) \geq f(x_0)$

مثال:

تأمل الجدول الذي يمثل تغيرات f

x	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

1) اثبت أنّ $f(-1)$ قيمة حدية محلية:

نختار $D_1 =]-2,2[$ مجال يضم (-1) يكون

$D_1 \cap D =]-2,2[\cap [-1,+\infty[= [-1,2[$

ومنه أيا يكن $x \in [-1,2[$ فإنّ

$f(x) \geq f(-1)$

إذا $f(-1)=2$ قيمة صغرى محليا

* $f(2)$ قيمة كبرى محلية لأنّ $f'(2)=0$ والمشتق عندها غيّر إشارته

(22/79) 1) تيقن أنه في حالة $0 \leq x \leq a$ يكون $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$

2) استنتج أنّ $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$ ، $a > 0$

1) $0 \leq x \leq a$

ومنه $1 \leq 1+x \leq 1+a$

ومنه $1 \geq \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{1+a}$

/ /

(2) وجدنا سابقاً أنّ

$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

$0<a$ باعتبار

$$\int_0^a \frac{1}{1+a} \leq \int_0^a \frac{1}{1+x}\,dx \leq \int_0^a 1\,dx$$

$$\left[\frac{1}{1+a}x\right]_0^a \leq \left[\ln(1+x)\right]_0^a \leq [x]_0^a$$

$$\boxed{\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a}$$