المتتاليات

متتالية هي تابع منطلقه (مجموعة تعريفه) $\mathbb{N}$ ومستقره $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

وبشكل عام نرمز للمتتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$

حيث: n_0 من $\mathbb{N}$ وتعطى بنص المسألة

ونسمي الـ U_n الحد ذو الدليل n

طرق تعريف المتتالية:

أولاً: تعريف صريح: $U_n = f(n)$

مثال: لتكن لدينا متتالية $(U_n)_{n \geq 0}$

وفق: $U_n = \frac{2n}{n+3}$

$$U_5 = \frac{2(5)}{5+3} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$U_0 = \frac{2(0)}{0+3} = \frac{0}{3} = 0$$

ثانياً: تعريف بالتدريج: $U_0 =$ الحد البدء

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

مثال: لتكن لدينا المتتالية الآتية:

$(U_n)_{n \geq 0}$

$U_0 = 3$ ، $U_{n+1} = 2U_n + 3$

$$\Rightarrow U_1 = 2U_0 + 3 = 2(3) + 3 = 9$$

$$\Rightarrow U_2 = 2U_1 + 3 = 2(9) + 3 = 21$$

$$\Rightarrow U_3 = 2U_2 + 3 = 2(21) + 3 = 45$$

أنواع المتتاليات

المتتالية الحسابية: كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد حقيقي r ويسمى أساس متتالية

2, 5, 8, 11, 14

الحد الأول هو 2

والأساس $r = 3$

سؤال امتحاني: لإثبات متتالية حسابية.

$U_{n+1} - U_n =$ عدد ثابت.

أو: $U_{n+1} = U_n +$ عدد ثابت

- القانون الأساسي:

$$U_m - U_p = (m-p) \times r$$

أو: $U_m = U_p + (m-p) \times r$

U_m: حد ما ذو دليل m.

U_p: حد آخر ذو دليل p.

r: أساس المتتالية.

فائدة القانون الأساسي:

1) كتابة U_n بدلالة n.
2) حساب حدها لمعرفة حد آخر وأساس.
3) حساب الأساس r لمعرفة أي حدين

- قانون المجموع:

$$S = \frac{n}{2}(a+l).$$

a: هو الحد الأول في المجموع.

l: هو الحد الأخير في المجموع.

n: هو عدد الحدود ويساوي

الدليل الأخير - الدليل الأول + 1

أ. محمد أحمد 0935031573

Scanned by CamScanner

- المتتالية الهندسية:

كل حد ينتج من سابقه بضربه بعدد حقيقي q ويسمى أساس المتتالية

3, 6, 12, 24, 48

الحد الأول هو 3

والأساس $q=2$

- القانون الأساسي:

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

أي: $U_m = U_p \cdot q^{m-p}$

U_m: حد ما ذو دليل m.

U_p: حد آخر ذو دليل p.

q: أساس المتتالية.

فائدة القانون الأساسي:

1) كتابة U_n بدلالة n
2) حساب حد ما بمعرفة حد آخر وأساسها
3) حساب الأساس بمعرفة أي حدين

- قانون المجموع:

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

a: هو الحد الأول في المجموع.

q: أساس المتتالية.

n: هو عدد الحدود ويساوي الدليل الأخير - الدليل الأول + 1.

أ. محمد أحمد - 0935031573 -

- لإثبات أن المتتالية هندسية:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{عدد ثابت (حقيقي)}$$

أي: $U_{n+1} = U_n \times q$

M 0935031573 أ. محمد أحمد AH

- المتتالية المطردة:

1) $U_{n+1} > U_n$ متزايدة تماماً.
2) $U_{n+1} \geq U_n$ متزايدة.
3) $U_{n+1} < U_n$ متناقصة تماماً.
4) $U_{n+1} \leq U_n$ متناقصة.
5) $U_{n+1} = U_n$ ثابتة.

كيف ندرس جهة إطراد المتتالية:

1) معيار الطرح (حسب الفرق):

$$U_{n+1} - U_n = \text{عدد}$$

العدد: a) $0 <$ عدد (موجب) متتالية متزايدة تماماً.

b) $0 >$ عدد (سالب) متتالية متناقصة تماماً.

c) $0 =$ عدد متتالية ثابتة.

2) معيار القسمة:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{عدد}$$

العدد:

a) $1 <$ عدد $\Leftarrow$ المتتالية متزايدة تماماً.

b) $1 >$ عدد $\Leftarrow$ المتتالية متناقصة تماماً.

c) $1 =$ عدد $\Leftarrow$ المتتالية ثابتة.

Scanned by CamScanner

3) معيار الاشتقاق :

$u_n = f(u_n)$

مثال: $u_n = n + 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$

وصانشتق $f'(x)$

a) $f'(x) > 0$ التابع متزايد تماماً وبالتالي متتالية متزايدة

b) $f'(x) < 0$ التابع متناقص تماماً وبالتالي متتالية متناقصة

Scanned by CamScanner

البرهان بالتدريج أو بالاستقراء الرياضي:

1) نثبت أن القضية صحيحة من أجل
$n = n_0$
حيث n_0 تتعلق بنص المسألة إما
$n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$ أو .....

2) نفرض أنه القضية صحيحة من أجل
n أي $E(n)$

3) نبرهن أنه القضية صحيحة من أجل
$n+1$ أي $E(n+1)$

ملاحظات هامة جداً:

* لإثبات الخطوة الثالثة إما أنه نبدأ بالخطوة (2) ونفيد الطرفين إضافة حدود أو طرح حدود الوصول إلى الخطوة الثالثة.

* أو نبدأ بأحد أطراف الخطوة الثالثة حتى الوصول للطرف الآخر
(مع الاستفادة من 2)

Scanned by CamScanner