

# Hyperbolic Functions and Inverse Trigonometric Functions

الدوال الزائدية و الدوال المثلثية العكسية

Math 111

Lecture 11

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University  
Department of Mathematics

2016

## اشتقاق الدوال الزائدية:

مبرهنة:

- $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x,$
- $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x,$
- $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x,$
- $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x,$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x,$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x,$

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1)y = \sinh(x^2 + 2x + 5) ,$$

$$(2)y = \ln(x \tanh(x)).$$

$$(3)y = e^{\sinh(\sqrt{x})}.$$

تكامل الدوال الزائدية:  
مبرهنة:

- $\int \sinh x dx = \cosh x + c,$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + c,$
- $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + c,$
- $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\operatorname{coth} x + c,$
- $\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + c,$
- $\int \operatorname{csch} x \operatorname{coth} x dx = -\operatorname{csch} x + c,$

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية :

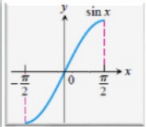
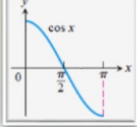

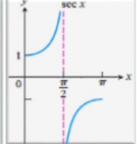
$$(1) \int \left( \frac{1}{t} - \cosh t \right) dt ,$$

$$(2) \int x - \frac{2}{\sinh^2 x} dx.$$

مراجعة الدوال المثلثية العكسية:

كما هو معروف أن الدوال المثلثية الأساسية ليست دوالاً تقابلية. ولكن نستطيع وضع بعض الشروط لمجال الدوال لكي نحصل على فترات تكون فيها الدوال تقابلية كالتالي:

الدالة	المجال	المدى
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, \infty)$
$\sec x$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

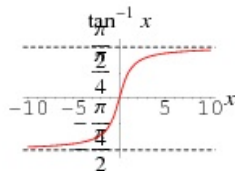
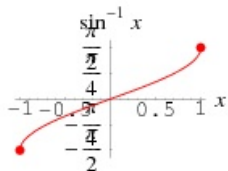
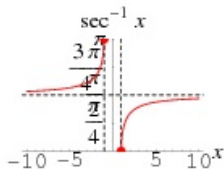
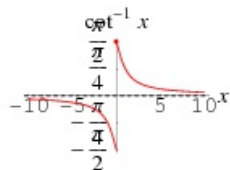
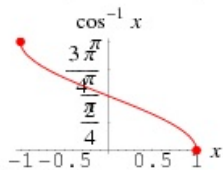
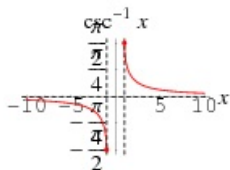
نرمز لدوال المثلثية العكسية بالرمز التالي:

- $y = \sin^{-1} x = \text{arssin } x,$
- $y = \cos^{-1} x = \text{arccos } x,$
- $y = \tan^{-1} x = \text{arstan } x,$
- $y = \sec^{-1} x = \text{arssec } x,$

ملاحظة:

$$\sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \text{csc } x$$

## شكل الدوال المثلثية العكسية:





اشتقاق الدوال المثلثية العكسية:  
مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1)y = \sin^{-1}(x^5 + 2x)$$

$$(2)y = \arccos (\ln x^2)$$

$$(3)y = \tan^{-1} (e^x)$$

تكامل الدوال المثلثية العكسية:  
مبرهنة:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{4 - e^{6x}}} dx ,$$

$$(2) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx.$$

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1)y = \sin^{-1}(\sqrt{x})$$

$$(2)y = \arcsin (\ln x)$$

$$(3)y = \cos^{-1} (\cos e^x)$$

$$(4)y = 3^{\sin^{-1}(x^3)}$$

$$(5)y = x \cosh e^{4x}$$

$$(6)y = \ln \sinh 2x$$

$$(7)y = \sqrt{x} \tanh \sqrt{x}$$

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx ,$$

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx.$$

$$(3) \int \frac{\sec x \tan x}{1 + \sec^2 x} dx.$$

$$(4) \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

$$(5) \int \operatorname{sech}^2 5x dx.$$

$$(6) \int x \sinh(2x^2) dx.$$

$$(7) \int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

*Thanks for listening.*