

الدالة الأسية

دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة: $y = ab^x$

$$a \neq 0, b > 0, b \neq 1$$

$$y = 2(3)^x$$

$$y = 4^x$$

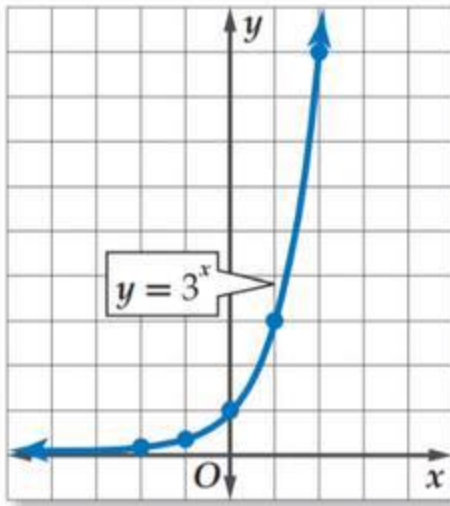
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

أمثلة

تمثيل الدالة الأسية

عندما $b > 1$, $a > 0$

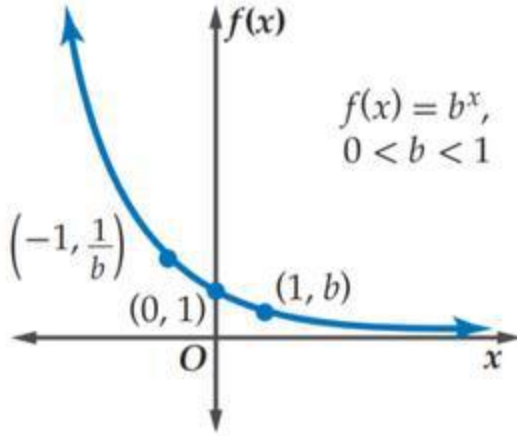
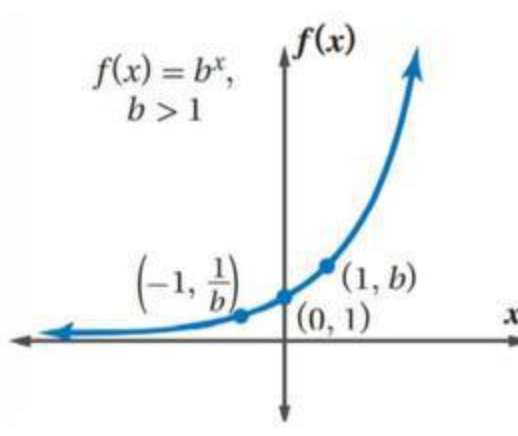
1

تمثيل الدالة الأسية $y = 3^x$ 

x	$(3)^x$	y
-2	$(3)^{-2}$	$\frac{1}{9}$
-1	$(3)^{-1}$	$\frac{1}{3}$
0	$(3)^0$	1
1	$(3)^1$	3
2	$(3)^2$	9

تزايدية	نوعها
R	المجال
R^+	المدى
$a = 1$	المقطع y
(خط أفقي) محور x	خط التقارب

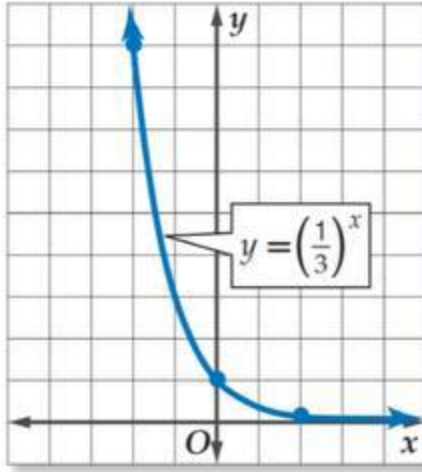
الدوال الرئيسية " الأم " للدوال الأسية

الدوال الرئيسية " الأم " لدوال الاضمحلال الأسي	الدوال الرئيسية " الأم " لدوال النمو الأسي
صورتها	
$f(x) = b^x$, $0 < b < 1$	$f(x) = b^x$, $b > 1$
تمثيلها البياني	
 <p style="text-align: center;">$f(x) = b^x$, $0 < b < 1$</p>	 <p style="text-align: center;">$f(x) = b^x$, $b > 1$</p>
خصائص منحنى الدالة	
متصل - متباين - متناقص	متصل - متباين - متزايد
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
خط التقارب	
المحور x	المحور x
مقطع المحور y	
1	1

تمثيل الدالة الأسية

عندما $0 < b < 1$, $a > 0$

2

تمثيل الدالة الأسية $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$

تنافسية	نوعها
R	المجال
R^+	المدى
$a = 1$	المقطع y
(خط أفقي) محور x	خط التقارب

ملاحظات

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم ، فمثلاً تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة .
- إذا كانت $a < 0$ أي قيمة a سالبة ، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x

النمو الأسي

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

t الفترة الزمنية ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للنمو

الأساس $(1 + r)$ يسمى عامل النمو.

تستعمل عادة لتمثيل النمو السكاني .

مثال

بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة

1431 - 1425 2% تقريباً .

إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ

أوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة .

الحل :

$$y = a(1 + r)^t$$

$$y = 22678262(1 + 0.02)^t$$

الاضمحلال الأسي

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

t الفترة الزمنية ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للاضمحلال

الأساس $(1 - r)$ يسمى عامل الاضمحلال .

وتستعمل عادة في التطبيقات المالية .

مثال

سيارة كان سعرها 80000 ريال ، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة

أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها .

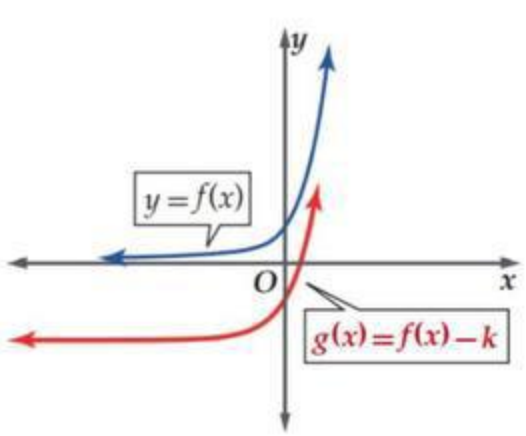
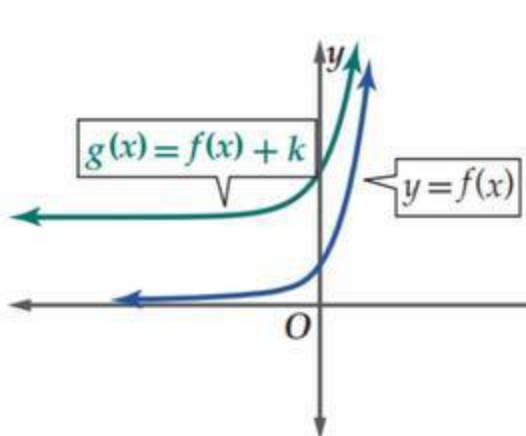
الحل :

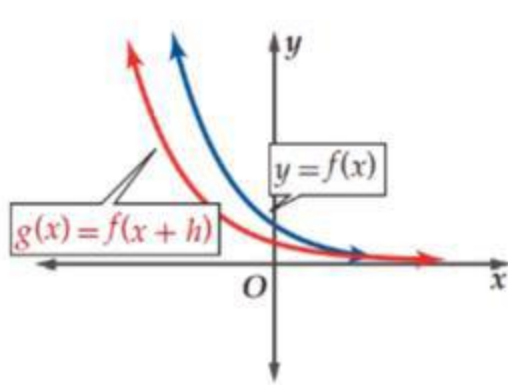
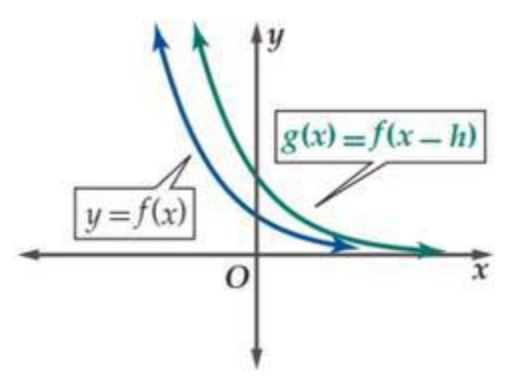
$$y = a(1 - r)^t$$

$$y = 80000(1 - 0.15)^t$$

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسية (الأم)

لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

الانسحاب	
رأسي	
$g(x) = f(x) + k$	
خارج k	
(-) أسفل	(+) أعلى
$g(x) = f(x) - k$	$g(x) = f(x) + k$
	

الانسحاب	
أفقي	
$g(x) = f(x - h)$	
داخل h	
(+) يسار	(-) يمين
$g(x) = f(x + h)$	$g(x) = f(x - h)$
	

$$0 < b < 1$$

مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$(0, \infty), R^+$$

$$\{y | y > 0\}$$

المدى

$$b > 1$$

مثال: $y = 2^x$

$$(0, \infty), R^+$$

$$\{y | y > 0\}$$

المدى

الصورة الأصلية

$$f(x) = b^x$$

$$f(x) = ab^x$$

$$a > 0$$

إيجاد مدى الدالة

الأسية

الدالة متأثرة

بالانعكاس

الدالة متأثرة

بالانسحاب

حول محور x

$$f(x) = -f(x)$$

تغيير اتجاه إشارة التباين (<)

$$y = -2^x$$

$$\{y | y < 0\}$$

المدى

$$y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$$

$$\{y | y < 2\}$$

المدى

الانعكاس حول محور y

لا يؤثر على المدى

الانسحاب الرأسي

للأسفل (-)

$$y = 2^{x+3} - 5$$

$$\{y | y > -5\}$$

لأعلى (+)

$$y = 2^x + 1$$

$$\{y | y > 1\}$$

المدى

$$y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$$

$$\{y | y > -1\}$$

$$y = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} + 3$$

$$\{y | y > 3\}$$

المدى

الانسحاب الأفقي لا يؤثر على المدى

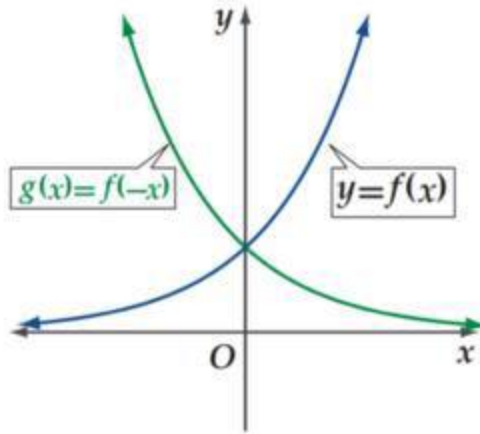
التحويلات الهندسية للدوال الرئيسية (الأخر)

لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

الانعكاس

الانعكاس حول المحور y

$$g(x) = f(-x)$$



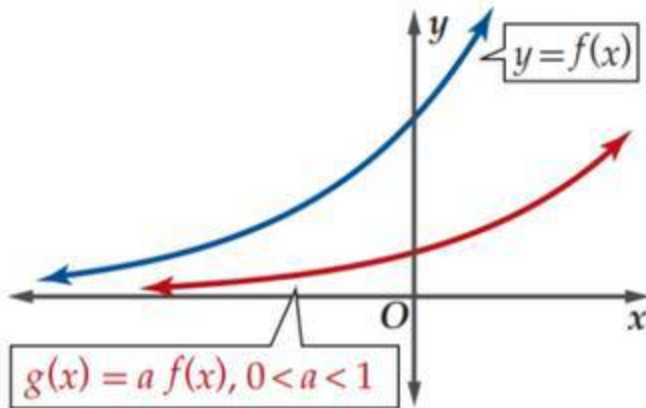
التمدد

رأسي

$$g(x) = a \cdot f(x)$$

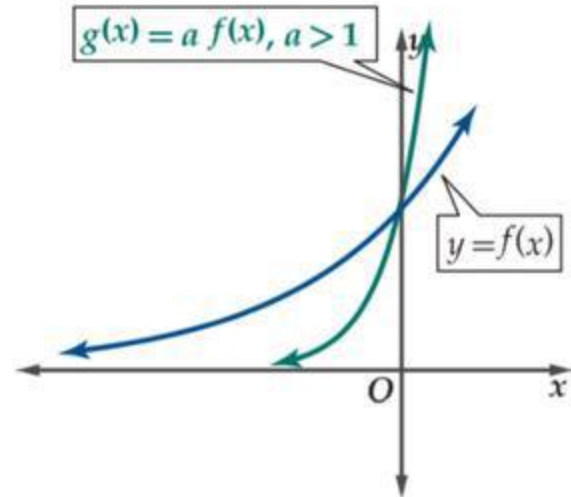
تضييق

$$0 < a < 1$$



توسع

$$a > 1$$



المعادلة الأسية

هي معادلة تتضمن متغيرات في موقع الأس .

خاصية المساواة للدوال الأسية

إذا كان $b > 0, b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$ وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$

حل كل معادلة مما يأتي :

$$2^x = 8^3$$

$$2^{2x} = 2^4$$

مثال

الحل :

الأساس مختلف !

$$2^x = 8^3$$

$$2^x = (2^3)^3$$

$$2^x = 2^9$$

$$x = 9$$

$8 = 2^3$

الأساس متشابه

$$2^{2x} = 2^4$$

$$2x = 4$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

الربح المركب

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

A المبلغ الكلي بعد t سنة ، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال

استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعاً ربحاً سنوياً نسبته 4.3% ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر . ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين ؟

الحل :

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

$$A = 70000 \left(1 + \frac{0.043}{12} \right)^{(12)(7)}$$

$$A \approx 94533.78$$

المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر ، حيث الأساس موجب.

حل المتباينات الأسية

لدالة الاضمحلال

إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ ،
إذا فقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$
وإذا كان $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$

لدالة النمو

إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ ،
إذا فقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$
وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$

مثال

حل المتباينة :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$$

الحل :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3t+5)} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{5(t-6)}$$

$$2(3t+5) \leq 5(t-6)$$

$$6t+10 \leq 5t-30$$

$$t \leq -40$$

$$3^2 = 9$$

$$3^5 =$$

$$243$$

حل المتباينة :

$$10^{5b+2} > 1000$$

الحل :

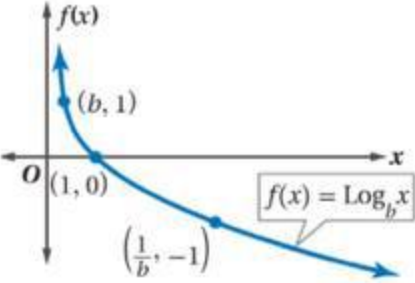
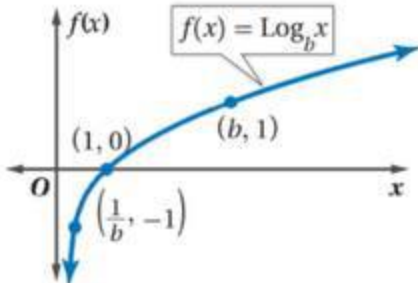
$$10^{5b+2} > 10^3$$

$$5b+2 > 3$$

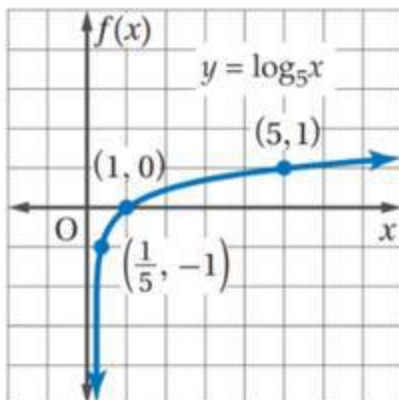
$$5b > 1$$

$$b > \frac{1}{5}$$

الدالة الرئيسية (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدوال الرئيسية " الأم "	
صورتها	
$f(x) = \log_b x$, $0 < b < 1$	$f(x) = \log_b x$, $b > 1$
تمثيلها البياني	
	
خصائص منحنى الدالة	
متصل - متباين - متناقص	متصل - متباين - متزايد
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
خط التقارب	
المحور y	المحور y
مقطع المحور x	
1	1

مثال الدالة $f(x) = \log_5 x$ بيانياً :



الحل :

الأساس $b = 5 > 1$

$\frac{1}{b}$	-1
1	0
b	1

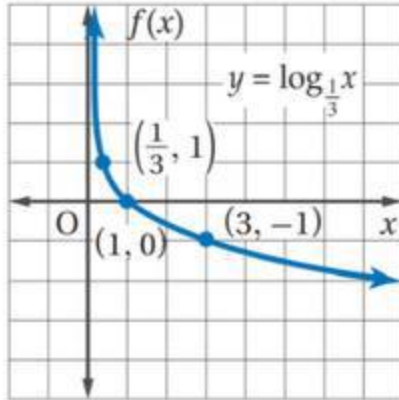
المنحنى متصل ومتزايد.

$\frac{1}{5}$	-1
1	0
5	1

مثال

مثال

مثل الدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ بيانياً :



الحل :

الأساس $b = \frac{1}{3}$, $0 < \frac{1}{3} < 1$

$\frac{1}{b}$	-1
1	0
b	1

3	-1
1	0
$\frac{1}{3}$	1

المنحنى متصل ومتناقص.

ملاحظة

يمكن تطبيق التحويلات الهندسية لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً تماماً كما في الدوال الأسية.

إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

لابد أن تكون الدالة متباينة.

نستبدل x بـ y والعكس.

نحول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية ونجعل y في طرف.

مثال

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$

الحل :

$y = 0.5^x$ متباينة فإن لها دالة عكسية

$$x = 0.5^y$$

$$y = \log_{0.5} x$$

اللوغاريتم للأساس b

اللوغاريتم: هو الأس y الذي يجعل المعادلة $x = b^y$ صحيحة.
 فإذا كان x, b عددين موجبين و $b \neq 1$ تكتب على الصورة $y = \log_b x$

الصورة الأسية

الصورة اللوغاريتمية

$$x, b > 0, b \neq 1$$

$$b^y = x$$

$$\log_b x = y$$

التحويل من ...

الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

$$125^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$$

الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

$$\log_4 16 = 2$$

$$4^2 = 16$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد قيمة ما يلي :

$$\log_3 81$$

$$\log_3 81 = y$$

$$3^y = 81$$

$$3^y = 3^4$$

$$y = 4$$

الحل :

مثال

2

$$\log_b b = 1$$

التبرير:

$$b^1 = b$$

مثال:

$$\log_{10} 10 = 1$$

1

$$\log_b 1 = 0$$

التبرير:

$$b^0 = 1$$

مثال:

$$\log_6 1 = 0$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b \neq 1, b > 0$

x عدد حقيقي فإن:

4

$$b^{\log_b x} = x, x > 0$$

التبرير:

$$\log_b x = \log_b x$$

مثال:

$$3^{\log_3 1} = 1$$

3

$$\log_b b^x = x$$

التبرير:

$$b^x = b^x$$

مثال:

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

ملاحظات

- لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$
- $\log_b 0$ غير معرف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x

الدالة اللوغاريتمية

هي دالة تكتب على الصورة: $f(x) = \log_b x$

حيث $b \neq 1$ و $x, b > 0$

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات .

ملاحظة

$$\log_a(x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$$

تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة ، احسب قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$

مثال

الحل :

بما أن الأساس 6 نعبر عن $\sqrt[3]{36}$ على صورة قوة 6

$$\begin{aligned} \log_6 \sqrt[3]{36} &= \log_6 36^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_6 (6^2)^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_6 (6)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \log_6 6 \\ &= \frac{2}{3} (1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

كتابة العبارات اللوغاريتمية

الصورة المختصرة

اكتب العبارة بالصورة المختصرة :

$$= -5 \log_2 (x+1) + 3 \log_2 (6x)$$

الحل :

$$= \log_2 (x+1)^{-5} + \log_2 (6x)^3$$

$$= \log_2 (x+1)^{-5} (6x)^3$$

$$\log_2 \frac{(6x)^3}{(x+1)^5}$$

$$\log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$$

الصورة المطولتة

اكتب العبارة بالصورة المطولتة :

$$\log_{13} 6a^3bc^4$$

الحل :

$$= \log_{13} 6 + \log_{13} a^3 + \log_{13} b + \log_{13} c^4$$

$$= \log_{13} 6 + 3 \log_{13} a + \log_{13} b + 4 \log_{13} c$$

خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

إذا كان b عدداً موجباً حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

خصائص اللوغاريتمات

خاصية لوغاريتم القوة

لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

لأي عدد حقيقي m وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$
 $\log_b x^m = m \log_b x$

مثال:

استعمل $\log_3 7 \approx 1.7712$
 فقرب قيمة $\log_3 49$
الحل:
 $\log_3 49 = \log_3 (7)^2$
 $= 2 \log_3 7$
 $= 2 (1.7712)$
 $= 3.5424$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحاً منه لوغاريتم المقسوم عليه.

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$
 $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

مثال:

استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$
 لتقريب قيمة $\log_3 4.5$
الحل:
 $\log_3 4.5 = \log_3 \left(\frac{9}{2}\right)$
 $= \log_3 9 - \log_3 2$
 $= \log_3 3^2 - \log_3 2$
 $= 2 - 0.63$
 $= 1.37$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$
 $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

مثال:

استعمل $\log_4 2 = 0.5$
 لإيجاد قيمة $\log_4 32$
الحل:
 $\log_4 32 = \log_4 (16 \times 2)$
 $= \log_4 (4^2 \times 2)$
 $= \log_4 4^2 + \log_4 2$
 $= 2 + 0.5$
 $= 2.5$

حل المعادلات اللوغاريتمية

1 تحتوي على **لوغاريتم واحد** .
تحويل إلى الصيغة الأسية ثم نوجد الحل .

1

حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$

مثال

الحل :

$$9^{\frac{3}{2}} = x$$

$$(3)^{2(\frac{3}{2})} = x$$

$$x = 27$$

2 تحتوي على **لوغاريتمات في كلا الطرفين** .
تستخدم خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية للمساواة
ثم نوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

2

حل المعادلة $\log_2 x^3 = \log_2 8$

مثال

الحل :

$$x^3 = 8$$

$$x^3 = 2^3$$

$$x = 2$$

3 تحتوي على **أكثر من لوغاريتم في الطرف الواحد** .
نختصرها باستخدام خصائص اللوغاريتمات ثم تحول
إلى الصورة الأسية ونوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

3

حل المعادلة $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

مثال

الحل :

$$\log_7 x^2 = \log_7 (27)(3)$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \pm 9$$

$x = 9$ و **نستبعد $x = -9$ لأنه لا يوجد لوغاريتم لعدد سالب** .

حل المتباينات اللوغاريتمية

1 تحتوي على لوغاريتم واحد .
 إذا كان $x > 0, b > 1$ و $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$

مثال

الحل :

$$x \geq 4^3$$

$$x \geq 64$$

مجموعة الحل :

$$\{x | x \geq 64, x \in R\}$$

عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرفاً

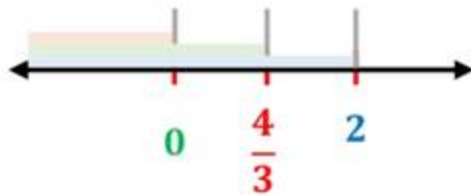
2 تحتوي على لوغاريتمات في كلا الطرفين .
 إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ ، إذا فقط إذا كان $x > y$

أوجد مجموعة حل المتباينة

$$\log_8(2x) > \log_8(6x - 8)$$

مثال

الحل :



مجموعة الحل :

$$\left\{x \mid \frac{4}{3} < x < 2, x \in R\right\}$$

لتحديد الفترة كاملة

$$2x \leq 0 \bullet$$

$$x \leq 0$$

$$6x - 8 \leq 0 \bullet$$

$$6x \leq 8$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

$$2x > 6x - 8$$

$$-4x > -8$$

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{-8}{-4}$$

$$x < 2$$

اللوغاريتمات العشرية

هو لوغاريتم أساسه 10

تكتب دون كتابة الأساس 10

$$\log_{10} x = \log x, \quad x > 0$$

إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log x$ كونه أمراً أساسياً

ويستعمل المفتاح **LOG** لإيجاد قيمته.

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة ما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$$\log 7$$

الحل :

مثال

اضغط على المفاتيح : **LOG** 7 **ENTER** =

$$\log 7 \approx 0.8451$$



خصائص اللوغاريتمات العشرية

$$\log x = y$$

$$10^y = x$$

1

$$\log 1 = 0$$

$$10^0 = 1$$

2

$$\log 10 = 1$$

$$10^1 = 10$$

3

$$\log 10^m = m$$

$$10^m = 10^m$$

4

حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسية بدلالة الأساس نفسه ، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين .

حل المعادلة $3^x = 15$ وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

مثال

$$3^x = 15 \quad \text{الحل :}$$

$$\log 3^x = \log 15$$

$$x \log 3 = \log 15$$

$$x = \frac{\log 15}{\log 3}$$

$$x \approx 2.4650$$

حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

يمكن استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسية لحل متباينات أسية .

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

مثال

الحل :

$$\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1}$$

$$2x \log 3 \geq (x + 1) \log 6$$

$$2x \log 3 \geq x \log 6 + \log 6$$

$$2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$$

$$x(2 \log 3 - \log 6) \geq \log 6$$

$$x \geq \frac{\log 6}{2 \log 3 - \log 6}$$

$$\{x | x \geq 4.4190, x \in R\}$$

هنا المقدار موجب لذا

تبقى إشارة التباين

كما هي .

عند الضرب أو القسمة على عدد سالب يتغير اتجاه إشارة التباين . لذا لا بد قبل القسمة على المقدار $2 \log 3 - \log 6$ معرفة إذا كان موجباً أم سالباً .

صيغة تغيير الأساس

هي **صيغة** تستخدم لكتابة عبارات **لوغاريتمية مكافئة** لأخرى **بأساس مختلف**.

لأي أعداد موجبة a, b, n ، حيث $a \neq 1, b \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b ←
 لوغاريتم الأساس القديم للأساس b ←

مثال :

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد

قيمته مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

مثال

الحل :

$$\log_6 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} = \frac{\log 8}{\log 6}$$

$$\approx 1.1606$$