اسم الطالب/ة:..............................

مدة الاختبار: ساعتان

مركز أونلاين التعليمي

اختبار المتتاليات

بكالوريا 2019

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول: $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ وفيها $u_0=1$ ، والمطلوب :

احسب u_3 ثم احسب المجموع $S=u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8$..

السؤال الثاني : لتكن المتتالية :
$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-2 \quad , \quad v_n=u_n+3 \end{cases}$$

① برهن v_n متتالية هندسية وعين أساسها .

② اكتب عبارة v_n ثم استنتج u_n بدلالة n

السؤال الثالث : ادرس اطراد المتتاليتين $(y_n)_{n\geq0}$ ، $(x_n)_{n\geq0}$ المعرفتين

وفق : $y_n=\frac{4n+1}{n+2}$, $x_n=\frac{4n+5}{n+1}$

السؤال الرابع : أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$u_0=0$ ، $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماماً.

السؤال الخامس : لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق :
$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

① أثبت بالتدريج أن $u_n>0$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة : $v_n=\frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية واكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n

السؤال السادس : $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق : $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n\geq0$

① أثبت أن التابع $x\to\frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2}\leq u_n\leq1$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً

السؤال السابع : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي : $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$

① أثبت أن $0\leq u_n\leq4$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة .

انتهت الأسئلة ..

مع أطيب الامنيات لكم بالنجاح

أ. فارس جقل .. دورات (ر ف ك) .. اللاذقية 0955186517

المتتالية $(U_n)_{n\geq \star} \Leftarrow$ الحد الأول $U_\star$

حسابية .

2 4 6 8 10 12 ...

كل حد ينتج عن سابقه [بإضافة] العدد 2

$\Leftarrow$ $r = 2$ [أساس المتتالية]

* القانون :

$$U_\star - U_\heartsuit = (\star - \heartsuit) r$$

* برهان حسابية :

$U_{n+1} - U_n =$ عدد

* قانون المجموع :

$$S = \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2} \times \text{عدد الحدود}$$

هندسية

2 4 8 16 32 64 ....

كل حد ينتج عن سابقه [بضربه] بالعدد 2

$\Leftarrow$ $q = 2$ [أساس المتتالية]

* القانون :

$$\frac{U_\star}{U_\heartsuit} = q^{\star - \heartsuit}$$

* برهان الهندسية :

$\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ عدد

* قانون المجموع :

$$S = \text{الحد الأول} \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

دراسة الاطراد

معيار الطرح

$U_{n+1} - U_n = \heartsuit$

- >0 متزايدة تماما
- <0 متناقصة تماما
- $=0$ ثابتة

معيار القسمة

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \heartsuit$

- >1 متزايدة تماما
- <1 متناقصة تماما
- $=1$ ثابتة

الاشتقاق .

نفرض $f(x) = ...$

ثم نشتق $f'(x)$

- >0 متزايدة تماما
- <0 متناقصة تماما
- $=0$ $\Downarrow$ جدول الاطراد

Scanned by CamScanner

سلم تصحيح اختبار المتتاليات

* السؤال الأول:

$q = 2 \qquad u_0 = 1$

$$\frac{u_3}{u_0} = q^{3-0}$$

نعوض $\frac{u_3}{1} = q^3$

$$u_3 = (2)^3 \times 1 = 8$$

$$S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8$$

$$S = u_3 \times \frac{1-q^6}{1-q}$$

$$= 8 \times \frac{1-2^6}{1-2} = 8 \times \frac{1-64}{-1}$$

$$= 8 \times \frac{-36}{-1} = 8 \times 36 = 504$$

* السؤال الثاني:

$\boxed{1}$ الشرط:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}u_n - 2 + 3}{u_n+3} = \frac{\frac{1}{3}u_n + 1}{u_n+3}$$

*دائماً اطلع أمثال u_n عامل مشترك

$$= \frac{\frac{1}{3}[u_n+3]}{u_n+3} = \frac{1}{3} \in R$$

$\Leftarrow$ المتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$\boxed{2}$

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$

v_n * مجهول، v_0 * معلوم

$$v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$\frac{v_n}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow v_n = 4\,\frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^n}$$

لدينا: $v_n = u_n + 3$

$$\Rightarrow u_n = v_n - 3$$

$$u_n = \frac{4}{3^n} - 3$$

* السؤال الثالث:

$\boxed{1}$

$$y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

نفرض تابع

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$$

التابع مستمر واشتقاقي $R\setminus\{-2\}$

$$f'(x) = \frac{4(x+2) - 1(4x+1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x+8-4x-1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

$\Leftarrow$ التابع f متزايد تماماً

$\Leftarrow$ المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

2

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1}$$

نفرض تابع :

$$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - 1(4x+5)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{4x}+4-\cancel{4x}-5}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

<= التابع متناقص تماماً فالمتتالية متناقصة تماماً

*السؤال الرابع:

برهان متزايدة تماماً <= $u_{n+1} > u_n$

البرهان : ١- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

أي سنبرهن

$$u_1 > u_0$$

$1 > 0$ (محققة)

٢- نفرض صحة العلاقة من أجل n :

(محققة) $u_{n+1} > u_n$ $\boxed{\star}$

٣- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

اي سنبرهن

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

البرهان : ننطلق من ★ :

$$u_{n+1} > u_n$$

نربع <=

$$u_{n+1}^2 > u_n^2$$

نضيف $\boxed{1}$:

$$1+u_{n+1}^2 > 1+u_n^2$$

نجذر

$$\sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2}$$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

<= المتتالية متزايدة تماماً

* بتكون العلاقة الثالثة تراجعية
ننطلق من ★ ونعمل عمليات
لنوصل ع العلاقة

*السؤال الخامس:

$\boxed{1}$ العلاقة $\boxed{u_n > 0}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

نطبق اقليدس :

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x} & 1+x \\ \hline -x-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \Longrightarrow \frac{x}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1+x}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{-1}{1+u_n}$$

١- نبرهن صحة العلاقة من أجل العدد 0

أي سنبرهن : $u_0 > 0$

$1 > 0$ [محققة]

٢- نفرض صحة العلاقة من أجل n أي

$\boxed{\star}$ $u_n > 0$

٣- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي سنبرهن $u_{n+1} > 0$

البرهان: ننطلق من $\boxed{\star}$ $\Leftarrow$ $u_n > 0$

$\boxed{+1} \Rightarrow 1+u_n > 1$

نقلب ونغير الجهة $\Rightarrow \dfrac{1}{1+u_n} < 1$

نضرب بـ (-1) ونغير الجهة $\Rightarrow \dfrac{-1}{1+u_n} > -1$

نضيف $\boxed{1}$ $\Rightarrow 1+\dfrac{-1}{1+u_n} > 0$

$$u_{n+1} > 0$$

$\boxed{2}$ $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ (حسابية)

سنبرهن: $v_{n+1} - v_n =$ عدد ثابت

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1 \in R$$

$\Leftarrow$ المتتالية حسابية وأساسها $\boxed{r=1}$

*

$$v_\star - v_\heartsuit = (\star - \heartsuit) r$$

n الحد معلوم

$$v_n - v_0 = n(r)$$

$$v_n - 1 = n(1)$$

$$v_n = n+1$$

استنتاج u_n:

$$v_n \cdot u_n = 1$$

$\Leftarrow$

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n+1}$$

* السؤال السادس:

* $\boxed{1}$ $x \longrightarrow \dfrac{3x+2}{2x+6}$ $\Leftarrow$ $f(x)$

التابع مستمر واشتقاقي على $R\setminus\{-3\}$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{\cancel{6x} + 18 - \cancel{6x} - 4}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

فالتابع متزايد تماما

* $\dfrac{1}{2} \le u_n \le 1$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل العدد 0

أي سنبرهن:

$$\frac{1}{2} \le u_0 \le 1$$

$\dfrac{1}{2} \le 1 \le 1$ (محققة)

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n أي:

$\dfrac{1}{2} \le u_n \le 1$ $\boxed{\star}$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي

سنبرهن:

$$\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$$

البرهان: ننطلق من $\boxed{\star}$

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$$

نصور الأطراف:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \leq \frac{5}{8}$$

ولكن $\frac{5}{8} < 1 \Longleftarrow$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3u_n+2}{2u_n+6} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

$\boxed{2}$ معيار المتناقصة:

$$u_n > u_{n+1}$$

١- نبرهن صحة العلاقة من أجل العدد 0

$$u_0 > u_1$$

(محققة) $1 > \frac{5}{8}$

٢- نفرض صحة العلاقة من أجل n أي:

محققة $u_n > u_{n+1}$ $\boxed{\star}$

٣- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي
سنبرهن

$$u_{n+1} > u_{n+2}$$

البرهان: ننطلق من $\boxed{\star}$

$$u_n > u_{n+1}$$

نصور الأطراف:

$$f(u_n) > f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} > u_{n+2}$$

* السؤال السابع:

$\boxed{1}$

$$0 \leq u_n \leq 4$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $E(0)$:

$$0 \leq u_0 \leq 4$$

$$0 \leq 1 \leq 4$$

محققة

نفرض $E(n)$.

$\boxed{\star}$ $0 \leq u_n \leq 4$

نبرهن $E(n+1)$ أي سنبرهن:

$$0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

ننطلق من $\boxed{\star}$

$$0 \leq u_n \leq 4$$

$\boxed{12+}$ $12 \leq 12+u_n \leq 16$

نجذر $\sqrt{12} \leq \sqrt{12+u_n} \leq \sqrt{16}$

ولكن $0 < \sqrt{12}$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

محققة

شرط التناقص : $U_{n+1} < U_n$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$$U_1 < U_0$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$U_{n+1} < U_n$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي

سنبرهن

$$U_{n+2} < U_{n+1}$$

البرهان ننطلق من ★ :

نصوّر الأطراف

$$f(U_{n+1}) < f(U_n)$$

$$\Rightarrow \quad U_{n+2} < U_{n+1}$$

وهو المطلوب $\Rightarrow$ المتتالية متناقصة

تماماً .