4.1 Quadratic Functions

الدوال التربيعية .

Polynomial Function

دالة كثيرة الحدود .

degree "الدرجة"

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

المعامل الرئيسي Leading Coefficient .

Polynomial Function دالة كثيرة الحدود	Name اسمها	Degree درجتها	Leading Coefficient المعامل الرئيسي .
$f(x) = 2$	ثابتة Constant	0	2
$f(x) = 5x - 1$	خطية Linear	1	5
$f(x) = 4x^2 - x + 1$	تربيعية Quadratic	2	4
$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x + 5$	تكعيبية Cubic	3	2
$f(x) = x^4 + \sqrt{2}\, x^3 - 3x^2$	Quartic من الدرجة الرابعة	4	1

$f(x) = 0 \Rightarrow$ Zero Polynomial has **NO** degree

الصفر دالة كثيرة حدود صفرية ليس لها درجة .

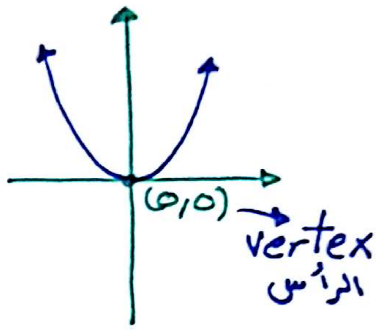
Scanned by CamScanner

Quadratic Function

$f(x) = ax^2 + bx + c$ → الصورة العامة.

قطع مكافئ.

$f(x) = x^2$ → **Parabola** → سؤال



المجال Domain: $(-\infty, \infty)$

المدى Range: $[0, \infty)$

تزايدية increasing: $[0, \infty)$

تناقصية decreasing: $(-\infty, 0]$

رسم ← Graph of Quadratic Function

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$F(x) = a(x-h)^2 + k$

الرأس

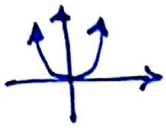
(h,k) → Vertex , axis of symmetry $x = h$

محور التماثل

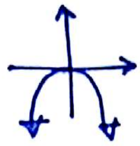
$h = \frac{-b}{2a}$, $k = f(h)$.

a

$a > 0$ المنحنى open up مفتوح لأعلى



$a < 0$ المنحنى open down مفتوح لأسفل.



$0 < |a| < 1$ wider يتوسع

$|a| > 1$ narrower يضيق

الانتقال الافقي

h: Horizontal shift "يتحرك باتجاه محور x"

$h > 0$ Right المنحنى ينتقل إلى اليمين

$h < 0$ Left. المنحنى ينتقل إلى اليسار

الانتقال الرأسي

k: Vertical shift "يتحرك باتجاه محور y"

$k > 0$ up ينتقل إلى أعلى

$k < 0$ down ينتقل لأسفل.

y-intercept الجزء الذي يقطع محور y.

$f(0) = c$

x-intercept الجزء الذي يقطع محور x.

نحل المعادلة التربيعية "نوجد قيم x"

Solve the equation

$ax^2 + bx + c = 0$

$b^2 - 4ac$ "المميز"

> 0 "موجب"

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$= 0$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

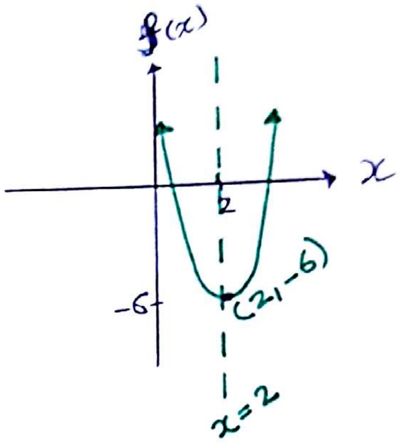
< 0 "سالب"

no-x intercept

Example 1 p.(117) :~

Graph each function. Give the domain and range.

ارسمي الدوال وأوجدي مجالها ومداها .



ⓐ $f(x) = x^2 - 4x - 2$

Domain : $(-\infty, \infty)$

أفضل نقطة من الرسم ← Range : $[-6, \infty)$

حتى نرسم لابد أن نعرف رأس المنحنى

الرأس Vertex : $(h,k) = (2,-6)$ و محور التماثل axis : $x = h$

$x = 2$

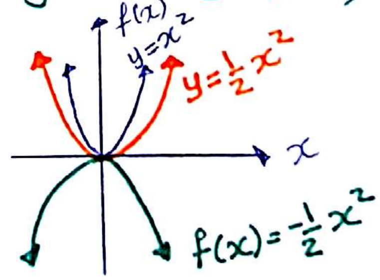
$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$k = f(h) = f(2) = (2)^2 - 4(2) - 2 = -6$$

بما $a>0$ «موجب» ⟸ المنحنى مفتوح لأعلى .

سالب = a المنحنى مفتوح لأسفل

ⓑ $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ « قارني Compare with $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$)



Domain : $(-\infty, \infty)$

Range : $(-\infty, 0]$

Vertex : $(h,k) = (0,0)$ و axis : $x = h$

$x = 0$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-\frac{1}{2})} = 0$$

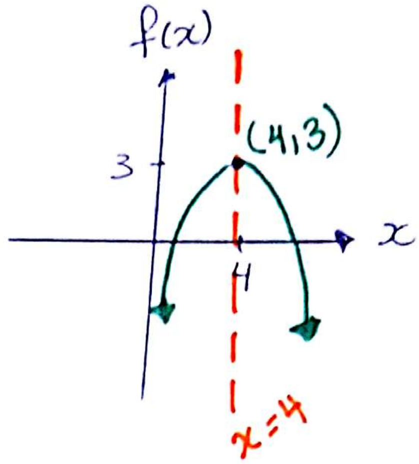
$$k = f(h) = f(0) = 0$$

وبالمثل بالنسبة لـ $y = \frac{1}{2}x^2$ ، $y = x^2$ ولكن المدى يختلف

Range of $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$: $[0, \infty)$

سالب إذا المنحنى مفتوح لأسفل

(c) $F(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$



Domain : $(-\infty, \infty)$

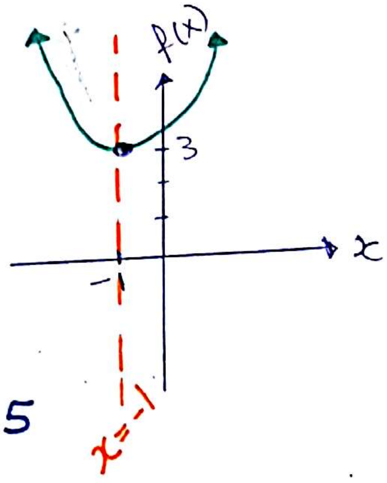
Range: $(-\infty, 3]$

Vertex : $(h, k) = (4, 3)$, axis : $x = h$
$x = 4$

HW2 p_o (120) :~ Find the axis and vertex

أوجدي الرأس ومحور التماثل.

$f(x) = 2x^2 + 4x + 5$



Vertex : $(h, k) = (-1, 3)$

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = \frac{-4}{4} = -1$

$k = f(h) = f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) + 5$
$= 3$

axis : $x = h$
$x = -1$

$f(x) = a(x-h)^2 + k$
$= 2(x+1)^2 + 3$

- Completing the square: آكمال المربع .

- Graph $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$

$$f(x) = -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 1$$

اضافة وطرح
مربع نصف معامل x

$$= -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 1$$

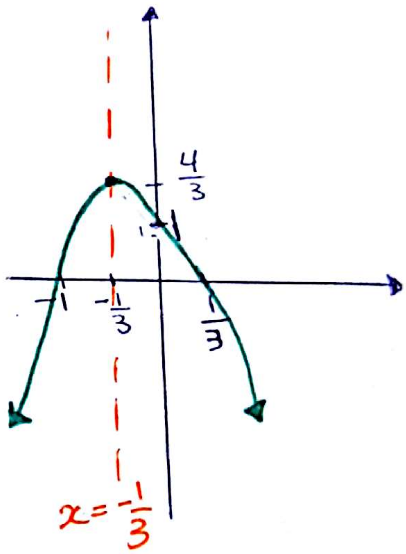
$$= -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 3\left(-\frac{1}{9}\right) + 1$$

على الصورة :-

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$$= -3\left(x^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3} + 1$$

$$= -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$



Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $(-\infty, \frac{4}{3}]$

Vertex: $(h, k) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

axis : $x = h \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

y-intercept : $f(0) = -3(0)^2 - 2(0) + 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

x-intercept : $-3x^2 - 2x + 1 = 0$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$(3x - 1)(x + 1) = 0$

$3x - 1 = 0$ or $x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $x = -1$

increasing $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, decreasing $\left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$

* كيف نوجد الدالة من خلال الرسم؟

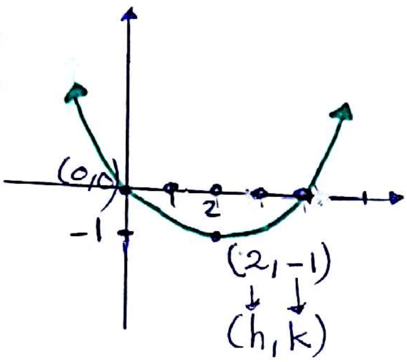
- في الصفحات السابقة: المعطى: الدالة ، المطلوب: الرسم.
- الآن العكس: المعطى: الرسم ، المطلوب: الدالة.

موضوع سؤال

Page (123) : Find a quadratic function.

أوجد الدالة التربيعية.

(17)



من خلال الرسم نلاحظ أن

① vertex $= (2, -1)$

$h = 2, \quad k = -1$

② $a > 0 \Longrightarrow$ المنحنى مفتوح للأعلى

* نكتب الصورة العامة للدالة التربيعية بدلالة h, k

$$\boxed{f(x) = a(x-h)^2 + k}$$

$$f(x) = a(x-2)^2 + (-1)$$

نوجد قيمة a من خلال التعويض عن كل x بصفر نوجد $f(0)$ ولابد أن تكون قيمة a الناتجة موجبة لأن الرسم مفتوح للأعلى.

$$f(0) = a(0-2)^2 - 1$$

$$0 = a(-2)^2 - 1$$

$$0 = 4a - 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{4}$$

لماذا $f(0) = 0$ ؟!

لأن من الرسم عندنا النقطة $(0,0)$ معنا هنا:

$(x, f(x))$

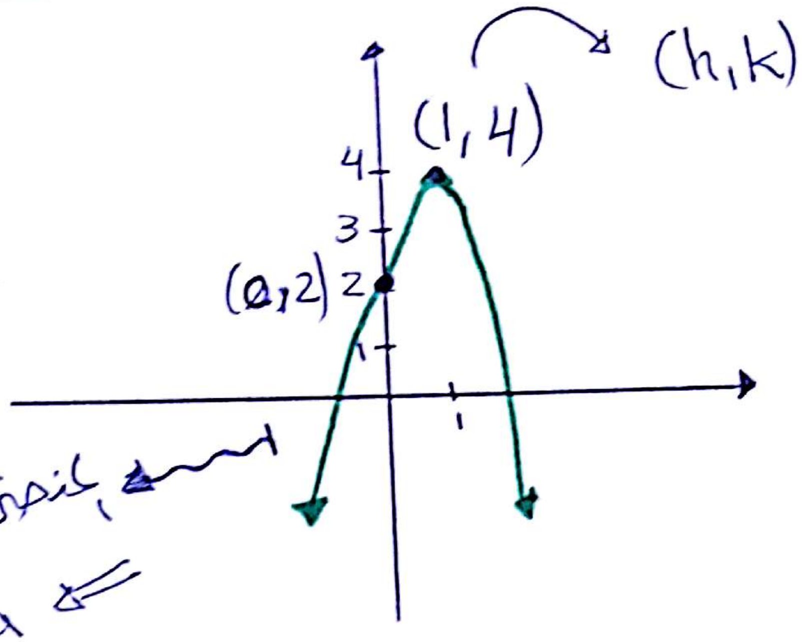
$(0, f(0))$

$(0, 0)$

$\therefore$ quadratic function is :-

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1}$$

(18)



المنحنى مفتوح لأسفل
$\Leftarrow$ a سالبة.

$$\text{vertex } (1,4) = (h,k)$$

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$= a(x-1)^2 + 4$$

$$f(0) = a(0-1)^2 + 4$$

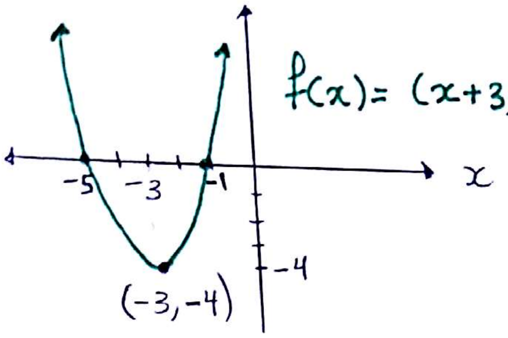
$$2 = a(-1)^2 + 4 = a + 4$$

$$\therefore a = 2-4 \Longrightarrow a = -2$$

$$\therefore \boxed{f(x) = -2(x-1)^2 + 4}$$

Exercise 4.1

1



Domain: $(-\infty,\infty)$

Range: $[-4,\infty)$

Vertex: $(h,k)=(-3,-4)$

axis: $x=h \Rightarrow x=-3$

y-intercept: $f(0)=(0+3)^2-4$

$= 9-4=5$

$y=5$

x-intercept:

من خلال الرسم : المنحنى يقطع محور x عند :

$x=-1, \quad x=-5$

or

Solve the equation:

$(x+3)^2-4=0$

$(x+3)^2=4$

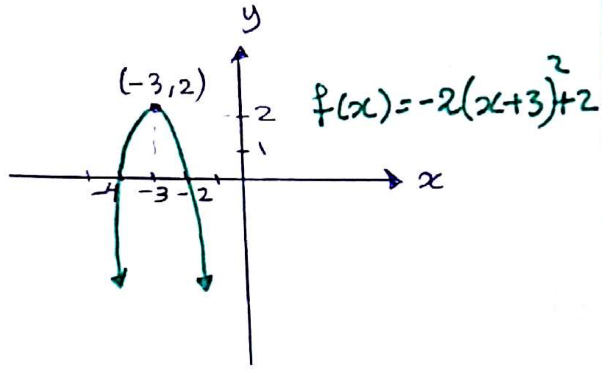
خاصية الجذر التربيعي

$x+3=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

$x=-3\pm 2$

$x=-1, \quad x=-5$

2



Domain: $(-\infty,\infty)$

Range: $(-\infty,2]$

Vertex: $(h,k)=(-3,2)$

axis: $x=h \Rightarrow x=-3$

y-intercept:

$f(0)=-2(0+3)^2+2=-2(9)+2$

$=-18+2=-16$

$y=-16$

x-intercept:

من الرسم : $x=-4, \quad x=-2$

or Solve the equation

$-2(x+3)^2+2=0$

$-2(x+3)^2=-2$

$(x+3)^2=\frac{-2}{-2}=1$

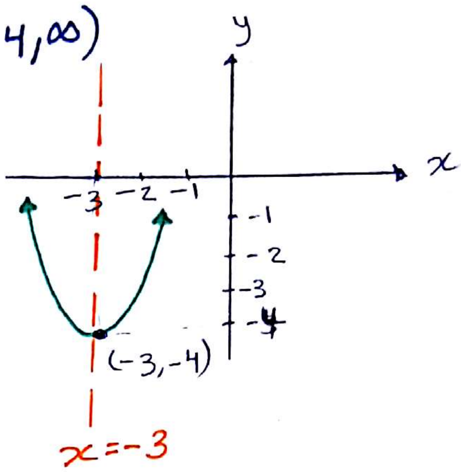
$x+3=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

$x=-3\pm 1$

$x=-4, \quad x=-2$

⑥ $f(x) = (x+3)^2 - 4$

Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $[-4, \infty)$



vertex: $(h,k) = (-3,-4)$

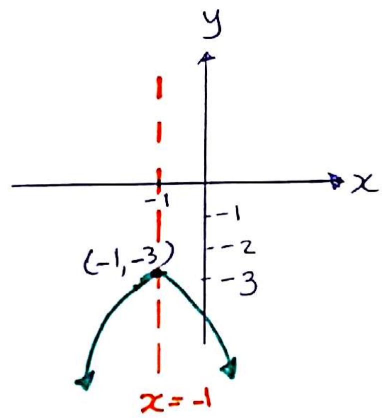
axis: $x = h \Rightarrow x = -3$

تزايدية increasing $[-3, \infty)$

تناقصية decreasing $(-\infty, -3]$

⑦ $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$

Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $(-\infty, -3]$



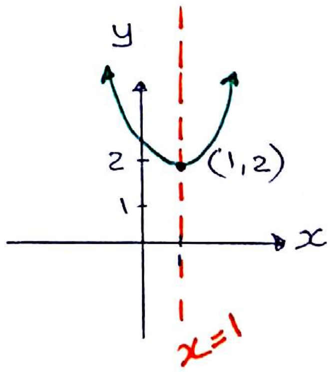
vertex: $(h,k) = (-1,-3)$

axis: $x = h \Rightarrow x = -1$

increasing $(-\infty, -1]$, decreasing $[-1, \infty)$

⑧ $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $[2, \infty)$



vertex: $(h,k) = (1,2)$

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$

$k = f(h) = f(1) = 1^2 - 2(1) + 3 = 2$

axis: $x = h \Rightarrow x = 1$

increasing $[1, \infty)$, decreasing $(-\infty, 1]$