أولاً:

السؤال الأول:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=1$$

وبالتالي $y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=-1$$

وبالتالي $y=-1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

السؤال الثاني:

$$(1)\dots\quad 2iz-(1+i)\bar{z}=4i$$

نوجد مرافق المعادلة (1) نجد $(2)\dots\quad -2i\bar{z}-(1-i)z=-4i$

من (2) نجد $\bar{z}=\frac{4i-(1-i)z}{2i}=2-\frac{1-i}{2i}z=2-\frac{(1-i)(-2i)}{(2i)(-2i)}z=2-\frac{(-2i-2)}{4}z=2+\frac{1}{2}(1+i)z$

نعوض في (1) فنجد $2iz-(1+i)\left(2+\frac{1}{2}(1+i)z\right)=4i$

$2iz-2(1+i)-\frac{1}{2}(1+i)^2z=4i$ أي $2iz-\frac{1}{2}(2i)z=4i+2+2i$

$iz=2+6i$ أي $z=\frac{2+6i}{i}=\frac{(2+6i)(-i)}{(i)(-i)}=\frac{-2i+6}{1}=6-2i$

السؤال الثالث:

$f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$ على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f(x)=\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}$$

وبالتالي $F(x)=\frac{1}{2}\ln(\tan x)$

السؤال الرابع:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

$$P(X=3)=1-\Big(P(X=1)+P(X=2)\Big)=1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{4}{8}$$

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=\frac{3+2+12}{8}=\frac{17}{8}$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2 p_i=\frac{3+4+36}{8}=\frac{43}{8}$$

$$V(X)=E(X^2)-\Big(E(X)^2\Big)=\frac{43}{8}-\left(\frac{17}{8}\right)^2=\frac{43}{8}-\frac{289}{64}=\frac{344-289}{64}=\frac{55}{64}$$

ثانياً:

التمرين الأول:

$c=3\sqrt{3}+i$ و $b=\sqrt{3}-i$ و $a=\sqrt{3}+i$

1) $$AB=\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|=|b-a|=\left|\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i\right|=|-2i|=\sqrt{0+4}=2$$

$$AC=\left|z_{\overrightarrow{AC}}\right|=|c-a|=\left|3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i\right|=\left|2\sqrt{3}\right|=\sqrt{12+0}=2\sqrt{3}$$

$$BC=\left|z_{\overrightarrow{BC}}\right|=|c-b|=\left|3\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i\right|=\left|2\sqrt{3}+2i\right|=\sqrt{12+4}=4$$

لدينا $AB^2+AC^2=4+12=16=BC^2$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A

2) $$e^{\frac{\pi}{3}i}.b=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+i=a$$

ومنه A صورة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

وبالتالي المثلث OAB متساوي الأضلاع

3) لإثبات أن O مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,-1)$ نثبت صحة العلاقة:

$$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\overset{?}{=}\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=z_{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}=2z_{\overrightarrow{OA}}+z_{\overrightarrow{OB}}-z_{\overrightarrow{OC}}=2a+b-c$$

محققة $2\left(\sqrt{3}+i\right)+\left(\sqrt{3}-i\right)-\left(3\sqrt{3}+i\right)=2\sqrt{3}+2i+\sqrt{3}-i-3\sqrt{3}-i=0$

التمرين الثاني:

$$f(x)=\frac{2\ln x+3}{\ln x-1} \quad \text{و} \quad]1,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+3}{\ln x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{2}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{\ln x}}{1-\frac{1}{\ln x}}=\frac{2+0}{1-0}=2$$

2) $f(x)$ ينتمي إلى المجال المفتوح الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.1 أي $\left|f(x)-2\right|<0.1$

$$\left|\frac{2\ln x+3}{\ln x-1}-2\right|<0.1$$

$$\left|\frac{2\ln x+3-2\ln x+2}{\ln x-1}\right|<0.1$$

أي $\frac{5}{\ln x-1}<\frac{1}{10}$ أي $50<\ln x-1$ أي $\ln x>51$ وبالتالي $x>e^{51}$ ومنه $A=e^{51}$

3) $$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}(\ln x-1)-\frac{1}{x}(2\ln x+3)}{(\ln x-1)^2}=\frac{\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{3}{x}}{(\ln x-1)^2}=\frac{-\frac{5}{x}}{(\ln x-1)^2}=\frac{-5}{x(\ln x-1)^2}$$

لدينا $\sqrt{f(x)}=\sqrt{\frac{2\ln x+3}{\ln x-1}}=g(x)$ وبالتالي

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{\frac{-5}{x(\ln x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{2\ln x+3}{\ln x-1}}}=\frac{-5}{2x(\ln x-1)^2}\sqrt{\frac{\ln x-1}{2\ln x+3}}$$

التمرين الثالث:

1) $P(B)=60\%=\frac{60}{100}$ وبالتالي $P(B')=40\%=\frac{40}{100}$

$P(M)=40\%=\frac{40}{100}$ وبالتالي $P(M')=60\%=\frac{60}{100}$

ومنه نجد $P(M\cap B)=\frac{55}{100}\times\frac{60}{100}=\frac{33}{100}=33\%$ وبالتالي يكون الجدول:

	B	B'	
M	33%	**7%**	40%
M'	**27%**	**33%**	60%
	60%	40%	

2) احتمال أن يكون الطالب المختار أنثى متفوقة في الرياضيات هو: $P(M\cap B')=7\%=\frac{7}{100}$

3) احتمال أن تكون متفوقة في الرياضيات علماً أنها أنثى هو: $P(M\mid B')=\frac{P(M\cap B')}{P(B')}=\frac{\frac{7}{100}}{\frac{40}{100}}=\frac{7}{40}$

التمرين الرابع:

$$u_0 = 0 \text{ و } u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}$$

1) نفرض القضية $E(n): u_{n+1} > u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_1 = \frac{3}{2} > u_0 = 0$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $u_{n+1} > u_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+2} > u_{n+1}$ ؟.

التابع $f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$ متزايد تماماً لأن $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن: $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ أي $u_{n+2} > u_{n+1}$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n والمتتالية u_n متزايدة تماماً

2) نفرض القضية $E(n): -1 \le u_n \le 3$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n = 0$: $-1 \le u_0 = 0 \le 3$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $-1 \le u_n \le 3$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $-1 \le u_{n+1} \le 3$ ؟.

من الفرض $-1 \le u_n \le 3$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن: $f(-1) \le f(u_n) \le f(3)$ أي $-1 \le u_{n+1} \le 3$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n

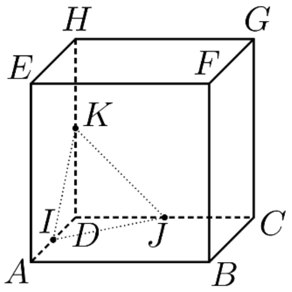
3) بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$

المعادلة $\frac{4x+3}{x+2} = x$ تكافئ $x^2 - 2x - 3 = 0$ أي $(x-3)(x+1) = 0$

إما $x = 3$ مقبول أو $x = -1$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة وحدها الأول 0 ومنه $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$

ثالثاً:

المسألة الأولى:



1) نفرض $\left(D, \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}, \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}, \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}\right)$ معلم كيفي ومنه يكون إحداثيات النقاط:

$I(3k,0,0)$ و $J(0,3k,0)$ و $K(0,0,3k)$

2) لدينا $\overrightarrow{IJ}(-3k,3k,0)$ أي $IJ = \sqrt{9k^2+9k^2+0} = \sqrt{18k^2} = 3k\sqrt{2}$

لدينا $\overrightarrow{IK}(-3k,0,3k)$ أي $IK = \sqrt{9k^2+9k^2+0} = \sqrt{18k^2} = 3k\sqrt{2}$

لدينا $\overrightarrow{JK}(0,-3k,3k)$ أي $JK = \sqrt{9k^2+9k^2+0} = \sqrt{18k^2} = 3k\sqrt{2}$

وبالتالي المثلث IJK متساوي الأضلاع ومساحته $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{18k^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9k^2\sqrt{3}}{2}$

2) لدينا $D(0,0,0)$ و $F(3,3,3)$ ومنه

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IJ} = (3,3,3).(-3k,3k,0) = -9k+9k+0 = 0$ أي أن $DF \perp IJ$

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{IK} = (3,3,3).(-3k,0,3k) = -9k+0+9k = 0$ أي أن $DF \perp IK$

وبالتالي (DF) عمودي على المستوي IJK ومنه $\overrightarrow{n_{IJK}} = \overrightarrow{DF}(3,3,3)$ ومنه معادلة المستوي تعطى بالشكل:

$$3x+3y+3z+d=0$$

I نقطة من المستوي IJK فهي تحقق معادلته $9k+d=0$ أي $d=-9k$

ومنه $3x+3y+3z-9k=0$ وبالتالي $IJK: x+y+z=3k$

3) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم $(DF): \begin{cases} x=3t \\ y=3t : t\in\mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}$ في معادلة المستوي $IJK: x+y+z=3k$

$3t+3t+3t=3k$ أي أن $t=\frac{k}{3}$ ومنه $M(k,k,k)$

$\frac{x_I+x_J+x_K}{3} = \frac{3k}{3} = k = x_M$ و $\frac{y_I+y_J+y_K}{3} = \frac{3k}{3} = k = y_M$ و $\frac{z_I+z_J+z_K}{3} = \frac{3k}{3} = k = z_M$

وبالتالي M مركز ثقل المثلث IJK أياً كانت k.

3) بما أن M منتصف القطعة المستقيمة $[DF]$ أي أن $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$

$$(k,k,k) = \frac{1}{2}(3,3,3) = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

ومنه $k = \frac{3}{2}$

المسألة الثانية:

$$f(x)=(x+1)e^{-x} \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=0$$

وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta=(x+1)e^{-x}$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x}>0$ دوماً

عندما $x>-1$: C فوق المقارب Δ عندما $x<-1$: C تحت المقارب Δ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2) $$f'(x)=e^{-x}-e^{-x}(x+1)=(1-x-1)e^{-x}=-xe^{-x}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $x=0$ حيث $f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(0)=1$ قيمة حدية كبرى

3) على المجال $]-\infty,0]$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $-1\in f(]-\infty,0])=]-\infty,1]$

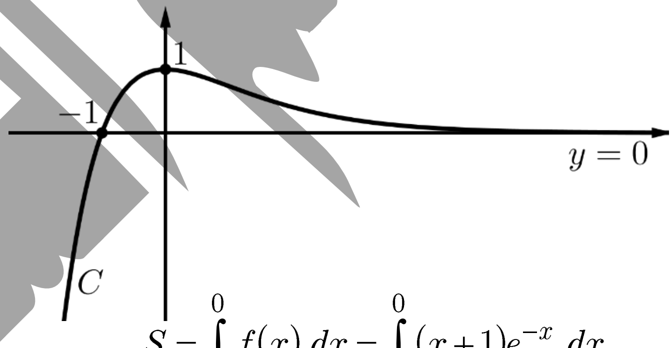
وبالتالي للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0]$

على المجال $[0,+\infty[$ التابع مستمر ومتناقص تماماً و $-1\notin f([0,+\infty[)=]0,1]$

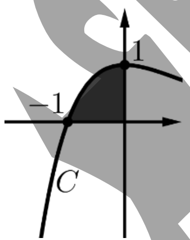
وبالتالي ليس للمعادلة $f(x)=-1$ حل في المجال $[0,+\infty[$

وبالتالي للمعادلة $f(x)+1=0$ حل وحيد أياً كانت x من $\mathbb{R}$.

4)



5) $$S=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}\,dx$$



$u=x+1$	$u'=1$
$v'=e^{-x}$	$v=-e^{-x}$

$$S=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^{-x}\,dx=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}-\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}=(-1-0)-(1-e)=e-2$$

6) $f(-x)=(-x+1)e^{x}=-(x-1)e^{x}=-f_1(x)$ وبالتالي C_1 نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

انتهى حل النموذج الأول

الشامل

أولاً:

السؤال الأول:

$$P: ax+by+cz=abc$$

$$h=dist(O,P)=\frac{|-abc|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

بالتربيع نجد $h^2=\dfrac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$ وبالتالي

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}=\frac{a^2}{a^2b^2c^2}+\frac{b^2}{a^2b^2c^2}+\frac{c^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{(bc)^2}+\frac{1}{(ac)^2}+\frac{1}{(ab)^2}$$

السؤال الثاني:

$$4^{x+1}=5^{x-1}$$
$$e^{(x+1)\ln 4}=e^{(x-1)\ln 5}$$
$$(x+1)\ln 4=(x-1)\ln 5$$
$$x\ln 4+\ln 4=x\ln 5-\ln 5$$
$$x\ln 4-x\ln 5=-\ln 4-\ln 5$$
$$x(\ln 4-\ln 5)=-(\ln 4+\ln 5)$$
$$x=-\frac{\ln 4+\ln 5}{\ln 4-\ln 5}=-\frac{\ln 20}{\ln\frac{4}{5}}$$

السؤال الثالث:

$u_{11}=51$ و $u_7=31$

$$u_{11}-u_7=(11-7)r$$
$$51-31=4r$$

$r=5$ أي $20=4r$

$$u_{20}-u_{11}=(20-11)r$$
$$u_{20}=9r+u_{11}=9(5)+51=45+51=96$$

السؤال الرابع:

$$S=\{0,1,3,5,8\}$$

1) $5\times 4=20$

2) $3\times 4=12$

ثانياً:

التمرين الأول:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-2x$$

1) $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

2) $$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2=-3$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-2x+3x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$$

3) وبالتالي C يقبل مقارب مائل من الشكل $y=ax+b$ أي $\Delta: y=-3x$

الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-2x+3x=\sqrt{x^2+1}+x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2}}>0$

وبالتالي C فوق المقارب Δ

التمرين الثاني:

$$P(z)=z^3-(2+2i)z^2+(2+4i)z-4i$$

1) $$P(2i)=(2i)^3-(2+2i)(2i)^2+(2+4i)(2i)-4i$$

$$P(2i)=-8i-(2+2i)(-4)+(2+4i)(2i)-4i=-8i+8+8i+4i-8-4i=0$$

وبالتالي $z_0=2i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

2) $$P(z)=(z-2i)Q(z)=(z-2i)(z^2-2z+2)$$

$$\begin{array}{r|l} & z^2-2z+2 \\ \hline z-2i & z^3-(2+2i)z^2+(2+4i)z-4i \\ & \ominus z^3 \quad \oplus 2iz^2 \\ \hline & -2z^2 \quad +(2+4i)z-4i \\ & \oplus 2z^2 \quad \ominus 4iz \\ \hline & 2z \quad +4i \\ & \ominus 2z \quad \ominus 4i \\ \hline & 0 \end{array}$$

3) $$P(z)=0$$

إما $z_0=2i$

أو $z^2-2z+2=0$

$$\Delta=b^2-4ac=4-8=-4$$

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{2-2i}{2}=1-i$$

التمرين الثالث:

$A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

1) الشعاعين $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

2) نبحث عن عددين a و b بحيث $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$

$$(-1,-1,1)=a(9,-1,-1)+b(3,-2,1)=(9a+3b,-a-2b,-a+b)$$

بالمطابقة نجد $\begin{pmatrix} (1) & 9a+3b=-1 \\ (2) & -a-2b=-1 \\ (3) & -a+b=1 \end{pmatrix}$

بطرح (2) و (3) نجد $-3b=-2$ أي $b=\dfrac{2}{3}$

نعوض في (3) أي $-a+\dfrac{2}{3}=1$ أي $a=-\dfrac{1}{3}$

للتأكيد نعوض في (1) فنجد $9\left(-\dfrac{1}{3}\right)+3\left(\dfrac{2}{3}\right)=-3+2=-1$ محققة

أي $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً ومنه النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

3) $$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$3\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

$$3\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}$$

$$2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$

وبالتالي D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$.

التمرين الرابع:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx \text{ و } J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$$

1) $$J-I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$$

$u=x$	$u'=1$
$v'=\cos 2x$	$v=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$J-I=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$(1)\ldots\qquad J-I=(0-0)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

2) $$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$$

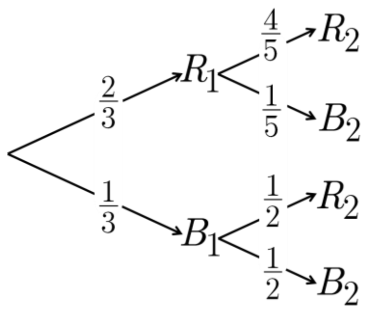
$$(2)\ldots\qquad I+J=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}$$

بجمع (1) و (2) نجد $2J=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$ ومنه $J=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$

وبالتالي $I=J+\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$

ثالثاً:

المسألة الأولى:



(1

(2
$$P(R_2)=P(R_1\cap R_2)+P(B_1\cap R_2)$$
$$P(R_2)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{15}+\frac{1}{6}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$$

(3
$$P(R_1\mid R_2)=\frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{7}{10}}=\frac{16}{21}$$

(4
$$X=\{-2,1,4\}$$
$$P(X=-2)=P(B_1\cap B_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$P(X=1)=P(B_1\cap R_2)+P(R_1\cap B_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{2}{15}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$$
$$P(X=4)=P(R_1\cap R_2)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

x_i	-2	1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=-\frac{2}{6}+\frac{3}{10}+\frac{32}{15}=\frac{-10+9+64}{30}=\frac{63}{30}=\frac{11}{10}$$
$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2 p_i=\frac{4}{6}+\frac{3}{10}+\frac{128}{15}=\frac{20+9+256}{30}=\frac{285}{30}=\frac{57}{6}$$
$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\frac{57}{5}-\frac{121}{100}=\frac{1019}{100}$$

المسألة الثانية:

$$f(x)=\begin{cases} x-x\ln x : x>0 \\ 0 \quad\quad : x=0 \end{cases} \text{ و } [0,+\infty[$$

1) $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x-x\ln x)=0-0=0=f(0)$$

وبالتالي f مستمر عند الصفر.

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x\ln x}{x}=\lim_{x\to 0}(1-\ln x)=+\infty$$

وبالتالي التابع f غير اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماساً شاقولياً في المبدأ معادلته $x=0$

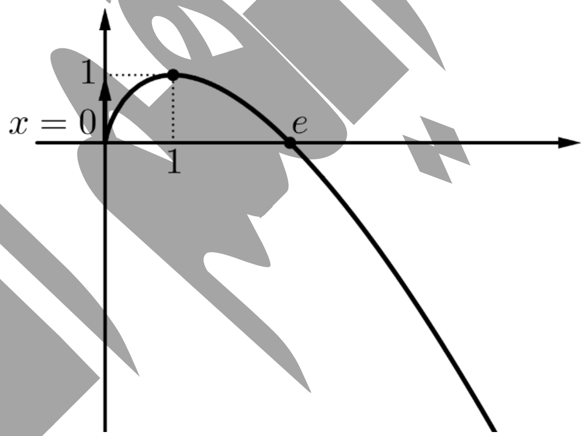
3) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x)=-\infty$$

$$f'(x)=1-\ln x-\frac{1}{x}.x=-\ln x$$

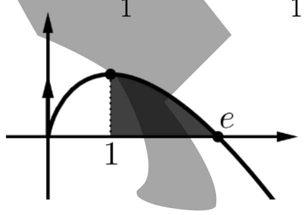
عندما $f'(x)=0$ فإن $x=1$ حيث $f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$f(1)=1$ قيمة حدية كبرى



4) $$S=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e (x-x\ln x)\,dx=\int_1^e x\,dx-\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e-I=\frac{e^2-1}{2}-I$$



$u=\ln x$	$u'=\dfrac{1}{x}$
$v'=x$	$v=\dfrac{1}{2}x^2$

$$I=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}-0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2-1}{2}\right)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

وبالتالي $$S=\frac{e^2-1}{2}-I=\frac{e^2-1}{2}-\frac{e^2+1}{4}=\frac{e^2-3}{4}$$

(5 $u_0=\frac{1}{e}$ و $u_{n+1}=f(u_n)=u_n-u_n\ln(u_n)$

(a نفرض القضية $E(n):0<u_n<1$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $0<u_0=\frac{1}{e}<1$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $0<u_n<1$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $0<u_{n+1}<1$ ؟.

من الفرض $0<u_n<1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]0,1[$ فإن:

$f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي $0<u_{n+1}<1$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n

(b نفرض القضية $E(n):u_{n+1}>u_n$

- نثبت صحة العلاقة $E(0)$ من أجل $n=0$: $u_1=\frac{2}{e}>u_0=\frac{1}{e}$ محققة.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ من أجل n: $u_{n+1}>u_n$ محققة.
- نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+2}>u_{n+1}$ ؟.

من الفرض $u_{n+1}>u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $]0,1[$ فإن:

$f(u_{n+1})>f(u_n)$ أي $u_{n+2}>u_{n+1}$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n والمتتالية u_n متزايدة تماماً

- بما أن المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x)=x$

المعادلة $x-x\ln x=x$ تكافئ $x\ln x=0$

إما $x=1$ مقبول أو $x=0$ مرفوض لأن المتتالية متزايدة وحدها الأول $\frac{1}{e}$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$

انتهى حل النموذج الثاني

الشامل