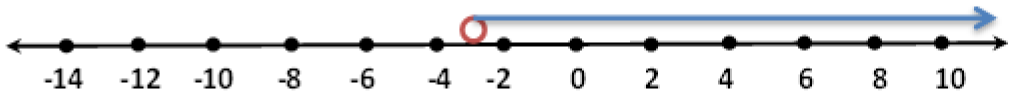
الفصل الأول: تحليل الدوال

التهيئة

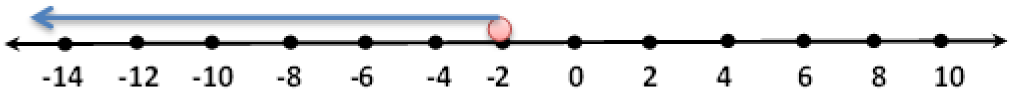
للفصل (1)

مثل كلاً من المتباينات الآتية على خط الاعداد: -

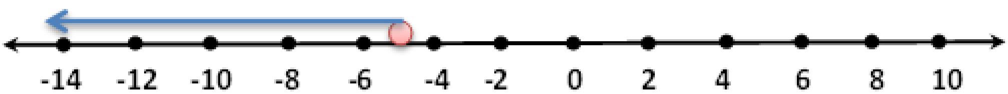
(1) $x > -3$



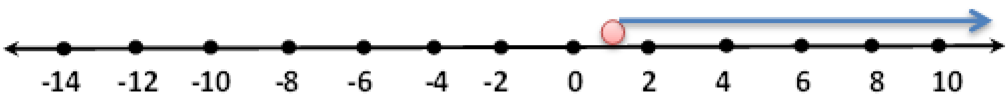
(2) $x \leq -2$



(3) $x \leq -5$



(4) $x \geq 1$



(5) $x \leq 7$

(6) $x > -4$

حل كلاً من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:-

(7) $y - 3x = 2$

$y = 2 + 3x$

(8) $y + 4x = -5$

$y = -5 - 4x$

(9) $2x - y^2 = 7$

(10) $y^2 + 5 = -3x$

$y^2 = 2x - 7$

$y = \pm\sqrt{2x - 7}$

$y^2 = -3x - 5$

$y = \pm\sqrt{-3x - 5}$

(11) $9 + y^3 = -x$

$y^3 = -x - 9$

$y = \sqrt[3]{-x - 9}$

(12) $y^3 - 9 = 11x$

$y^3 = 11x + 9$

$x = \sqrt[3]{11x + 9}$

---

(12) حلوى:

$$12D = n$$

$$D = \frac{n}{12}$$

$$n = 312$$

$$\therefore D = \frac{n}{12} = \frac{312}{12} = 26$$

عدد العبوات الكرتونية = 26 عبوة

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:-

(14) $3y - 4 @ y = 2$

$3\times 2 - 4 = 6 - 4$

$= 2$

(15) $2b + 7 @ b = -3$

$2\times -3 + 7 = -6 + 7$

$= 1$

(16) $x^2 + 2x - 3 @ x = -4a$

$(-4a)^2 + 2\times(-4a) - 3$

$16a^2 - 4a - 3$

(17) $5z - 2z^2 + 1 @ z = 5x$

$5\times(5x) - 2(5x)^2 + 1 =$

$25x - 50x^2 + 1$

(18) $-4c^4+7, c=7a^2$

$$-4\left(7a^2\right)^2+7$$
$$=-196a^4+7$$

(19) $2+3p^2, p=-5+2\text{n}$

$$2+3\left(-5+2n\right)^2$$
$$=2+3\left(25-20n+4n^2\right)$$
$$=2+75-60n+12n^2$$
$$=77-60n+12n^2$$

(20) درجة الحرارة:

$$c=\frac{5}{9}\left(F-32\right)$$
$$F=73^\circ f$$
$$c=\frac{5}{9}\left(73-32\right)$$
$$c=22.8^\circ c$$

(1 – 1) الدوال

تحقق من فهمك

(1A) $\{1,2,3,4,5,.........\}$

$$\{x \mid x\geq 1, x\in N\}$$

(1B) $X\leq -3$

$$\{x \mid x\leq -3, x\in R\}$$

(1C) $-1 \le X \le 5$

$$\{X \mid -1 \le X \le 5, X \in R\}$$

(2A) $-4 \le y < -1$

$$[-4,-1]$$

(2B) $a \ge -3$

$$[-3,\infty)$$

(3c) $x < -2, x > 9$

$$(-\infty,-2) \cup (9,\infty)$$

(3A) دالـــــــــــة: لأن كل قيمة لـــ x بقيمة واحدة لـــ y ؛ إذ لا يمكن للاستهلاك الشهري الحصول على قيميتين مختلفتين في شهر واحد لذا فإن y تمثل دالـــــة في x

(3B) ليـــــست دالـــــــة: لأنه يوجد x مرتبطة بقيمتين من y وعليه فإن y لا تمثل دالـــــة في x

(3C) دالـــــــــة: لأن أي خط رأسي يقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط

(3D) دالـــــــــــة: لأنه عند حل المعادلة بالنسبة لـ y نجد ان كل قيمة لـ x ترتيط بقيمة واحدة لـــ y

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$$ **(4A)**

$$f(12)=\frac{2\times(12)+3}{(12)^2-2\times(12)+1}$$
$$=\frac{24+3}{144-24+1}=\frac{27}{121}$$

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$$ **(4B)**

$$f(6x)=\frac{2\times(6x)+3}{(6x)^2-2\times(6x)+1}$$
$$=\frac{12x+3}{36x^2-12x+1}$$

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2-2x+1}$$ **(4c)**

$$f(-3a+8)=\frac{2(-3a+8)+3}{(-3a+8)^2-2(-3a+8)+1}$$
$$=\frac{-6a+16+3}{9a^2-48a+64+6a-16+1}$$
$$=\frac{-6a+19}{9a^2-42a-49}$$

$$f(x)=\frac{5x-2}{x^2+7x+12}$$ **(5A)**

$$\{x\,|\,x\neq -3, x\neq -4, x\in R\}$$

(5B) $h(a)=\sqrt{a^2-4}$

$(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

(5c) $g(x)=\dfrac{8x}{\sqrt{2x+6}}$

$(-3,\infty)$

---

(6) سرعة

$$v(t)=\begin{cases} 4t & , 0\le t\le 15 \\ 60 & , 15<t<240 \\ -6t+1500 & , 240\le t\le 250 \end{cases}$$

(6A)

$v(t)=4t$

$\therefore v(5)=4\times 5=20\,mi/h$

(6B)

$v(t)=4t$

$\therefore v(15)=4\times 15=60\,mi/h$

(6c)

$v(t)=-6t+1500$

$\therefore v(245)=-6\times 245+1500$

$=-1470+1500$

$=60\,mi/h$

تدرب وحل المسائل

(1) $x > 50$

$$= \{x \mid x > 50, x \in R\}$$
$$= [50, \infty)$$

---

(2) $x < -13$

$$= \{x \mid x < -13, x \in R\}$$
$$= (-\infty, -13)$$

---

(3) $x \leq -4$

$$= \{x \mid x \leq -4, x \in R\}$$
$$= (-\infty, -4]$$

---

(4) $\{-4, -3, -2, -1, ...\}$

$$= \{x \mid -4 \leq x, x \in Z\}$$

---

(5) $-31 < x \leq 64$

$$= \{x \mid -31 < x \leq 64, x \in R\}$$
$$= (-31, 64]$$

---

(6) 19 أو $<$ x $x > 21$

$$= \{x \mid x < -19 \quad R \quad > 21 , \quad \in \quad x x\}$$

$$= (-\infty, -19) \cup (21, \infty)$$

(7) 61 أو $\leq$ x $x \geq 67$

$$= \{x \mid x \leq 61 \quad R \quad \geq 67 , \quad \in \quad x x\}$$

$$= (\infty, 61] \cup [67, \infty)$$

(8) 45 أو $\leq$ x $x > 86$

$$= \{x \mid x \leq -45 \quad R \quad > 86, \quad \in \quad x x\}$$

$$= (-\infty, -45] \cup (86, \infty)$$

(9) المضاعفات الموجبة للعدد 5

$$\{x \mid x = 5n, n \in N\}$$

(10) $x \geq 32$

$$= \{x \mid x \geq 32, x \in R\}$$

$$= [32, \infty)$$

(11) دالــــــــــــــــة لأن كل قيمة لــ x بقيمة واحدة لـ y ؛حيث أن ارقام الحسابات لايمكن أن تتشابة

(12) ليــــست دالـــــــــة: لانه يوجد x مرتبطة بقيمتين من y وعليه فإن y لا تمثل دالـــة في x

(13) دالــــــــــــــــة لأن كل قيمة لــ x بقيمة واحدة لـ y

(14) دالــــــــــــــــة لأن كل قيمة لــ x بقيمة واحدة لـ y

(15) دالــــــــــــــــة لأن كل قيمة لــ x بقيمة واحدة لـ y

(16) ليست دالـــــــــة لأن كل قيمة لــ x لها قيمتين من y

(17) ليست دالـــــــة لأن أي خط رأسي يقطع التمثيل البياني في نقطتين؛ أى يوجد لبعض قيم x قيمتين لـــ y

(18) دالـــــــــة لأن أي خط رأسي يقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط

---

(19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

(a)
$$\begin{aligned} g(9) &= 2(9)^2 + 18\times 9 - 14 \\ &= 2\times 81 + 162 - 14 \\ &= 162 + 162 - 14 \\ &= 310 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} g(3x) &= 2(3x)^2 + 18\times 3x - 14 \\ &= 2\times 9x^2 + 54x - 14 \\ &= 18x^2 + 54x - 14 \end{aligned}$$

$$g(1+5m)=2(1+5m)^2+18\times(1+5\text{m})-14 \qquad (c)$$
$$=2\times(1+10m+25m^2)+18+90m-14$$
$$=2+20m+50m^2+18+90m-14$$
$$=50m^2+110m+6$$

$$h(\text{y})=-3\text{y}^3-6y+9 \qquad \textbf{(20)}$$

$$h(4)=-3(4)^3-6\times4+9 \qquad (a)$$
$$=-3\times64-24+9$$
$$=-192-24+9$$
$$=-207$$

$$h(-2y)=-3(-2y)^3-6\times(-2\text{y})+9 \qquad (b)$$
$$=-3\times(-8\text{y}^3)+12y+9$$
$$=24y^3+12y+9$$

$$h(5b+3)=-3(5b+3)^3-6\times(5b+3)+9 \qquad (c)$$
$$=-3(125\text{b}^3+225\text{b}^2+135\text{b}+27)-30\text{b}-18+9$$
$$=-375\text{b}^3-675\text{b}^2-405\text{b}-81-30b-18+9$$
$$=-375\text{b}^3-675\text{b}^2-435b-90$$

$$f(t)=\frac{4t+11}{3t^2+5t+1} \qquad \textbf{(21)}$$

$$f(-6)=\frac{4\times(-6)+11}{3(-6)^2+5\times(-6)+1} \qquad \text{(a)}$$
$$=\frac{-24+11}{3\times36-30+1}=\frac{-13}{79}$$

$$f(4t) = \frac{4\times 4t + 11}{3(4t)^2 + 5(4t) + 1} \qquad \text{(b)}$$

$$= \frac{16t + 11}{48t^2 + 20t + 1}$$

$$f(3-2\text{a}) = \frac{4(3-2a)+11}{3(3-2a)^2 + 5(3-2a) + 1} \qquad \text{(c)}$$

$$= \frac{12 - 8a + 11}{3(9 - 12a + 4a^2) + 15 - 10a + 1}$$

$$= \frac{23 - 8a}{18 - 36a + 12a^2 + 16 - 10a} = \frac{23 - 8a}{12a^2 - 46a + 34}$$

$$g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4} \qquad \textbf{(22)}$$

$$g(-2) = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2 + (-2) - 4} \qquad \text{(a)}$$

$$= \frac{3\times -8}{4 - 2 - 4} = \frac{-24}{-2} = 12$$

$$g(5x) = \frac{3(5x)^3}{(5x)^2 + 5x - 4} \qquad \text{(b)}$$

$$= \frac{375x^3}{25x^2 + 5x - 4}$$

$$g(8-4b)=\frac{3(8-4b)^3}{(8-4b)^2+(8-4b)-4} \qquad \text{(c)}$$

$$=\frac{3(512-768\mathrm{b}+384\mathrm{b}^2-64\mathrm{b}^3)}{(64-64\mathrm{b}+16\mathrm{b}^2)+4-4\mathrm{b}}$$

$$=\frac{1536-2304b+1152b^2-192b^3}{68-68b+16b^2}$$

$$g(m)=3+\sqrt{m^2-4} \qquad \textbf{(23)}$$

$$g(-2)=3+\sqrt{(-2)^2-4} \qquad \text{(a)}$$

$$=3+\sqrt{4-4}=3$$

$$g(3m)=3+\sqrt{(3m)^2-4} \qquad \text{(b)}$$

$$=3+\sqrt{9m^2-4}$$

$$g(4m-2)=3+\sqrt{(4m-2)^2-4} \qquad \text{(c)}$$

$$=3+\sqrt{(16m^2-16m+4)-4}$$

$$=3+\sqrt{16m^2-16m}$$

$$=3+4\sqrt{m^2-m}$$

$$t(x)=5\sqrt{6x^2} \qquad \textbf{(24)}$$

$$t(-4)=5\sqrt{6\left(-4\right)^2}=5\sqrt{6\times 16} \qquad \text{(a)}$$

$$=20\sqrt{6}$$

(b) $t(2x) = 5\sqrt{6(2x)^2}$

$= 5\sqrt{6 \times 4x^2}$

$= 10|x|\sqrt{6}$

(c) $t(7+n) = 5\sqrt{6(7+n)^2}$

$= 5|7+n|\sqrt{6}$

---

(25) مبيعات:

(a) $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$

$f(1) = 24 \times (1)^2 - 93 \times (1) + 78$

= 9 ملايين

(b) $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$

$f(5) = 24 \times (5)^2 - 93(5) + 78$

= 213ملايين

(c) اعتقد ان القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنوات الأخيرة والتي حققت أعلى مبيعات، حيث ان 213 قريبة 2Ä من 219 ، بينما أكبر 800Ä من 1

حدد مجال كل دالة مما يأتي:

(26) $f(x) = \dfrac{8x+12}{x^2+5x+4}$

$(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, \infty)$

---

(27) $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x-40}$

$(-\infty,-5)\cup(-5,8)\cup(8,\infty)$

(28) $g(a)=\sqrt{1+a^2}$

$(-\infty,\infty)$

(29) $h(x)=\sqrt{6-x^2}$

$[-\sqrt{6},\sqrt{6})$

---

(30) $f(a)=\dfrac{5a}{\sqrt{4a-1}}$

$(0.25,\infty)$

---

(31) $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x+1}$

$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$

---

(32) فيزياء:

T دالة في ℓ: لأن الطول لا يكون سالب مطلقاً

مجال الدالة $[0,\infty)$

أوجد $f(-5)$ و $f(12)$ لكل من الدالتين الاتيتين:

(33)
$$f(x) = -4x + 3$$
$$f(-5) = -4 \times (-5) + 3$$
$$= 20 + 3 = 23$$

$$f(x) = 3x^2 + 1$$
$$f(12) = 3(12)^2 + 1$$
$$= 3 \times 144 + 1$$
$$= 432 + 1 = 433$$

---

(34)
$$f(x) = \sqrt{x + 6}$$
$$f(-5) = \sqrt{-5 + 6}$$
$$= \sqrt{1} = 1$$

$$f(x) = \frac{2}{x} + 8$$
$$f(12) = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{12}_{6}} + 8$$
$$= 8\frac{1}{6}$$

---

(35) عمل:

$$T(x) = 2.1x$$
$$T(7000) = 2.1 \times 7000$$
$$= 14700$$

$$T(x) = 5000 + 2.4x$$
$$T(10000) = 5000 + 2.4 \times 10000$$
$$= 29000$$
$$T(x) = 8000 + 3x$$
$$T(50000) = 8000 + 3 \times 50000$$
$$= 158000$$

---

(36) دالة: لأن الخط الرأسي لا يقطع المنحنى في أكثر من مرة.

(37) لـــيست دالــــة: لأن الخط الرأسي (محور y) يقطع التمثيل البياني في $(0,0)$ و $(0,-4)$

---

(38) رياضة:

(a)
$$D(t) = \begin{cases} 4t & , 0 \le t \le 0.6 \\ 20t & , 0.6 < t \le 6.2 \\ 6t & , 6.2 < t \le 10.7 \end{cases}$$

(b) مجال الدالة: $[0,10.7]$

---

(39) هندسة:

(a)

$$r = \frac{c}{2\pi}$$

$$A = \cancel{\pi} \times \frac{c^2}{4\,\cancel{\pi^2}_{\pi}} = \frac{c^2}{4\pi}$$

$$A = \frac{c^2}{4\pi}$$

(b)

$$A(4) = \frac{4^2}{4\pi} = 1.27$$

$$A(0.5) = \frac{(0.5)^2}{4\pi} = 0.2$$

(c) كلما زاد المحيط زادت المساحة

(40) حسابات

$$\upsilon(t) = 1800 - 30t$$

مجال الدالة هو $D = \{t \mid 0 \le t \le 60, t \in N\}$

أوجد $f(a), f(a+h), \frac{f(a+h)+f(a)}{h}$ حيث $h \neq 0$ لكل مما يأتي:

(41) $f(x) = -5$

$$f(a) = -5$$

$$f(a+h) = -5$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-5-(-5)}{h} = 0$$

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \textbf{(42)}$$

$$f(a)=\sqrt{a}$$

$$f(a+h)=\sqrt{a+h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$

$$f(x)=\frac{1}{x+4} \quad \textbf{(43)}$$

$$f(a)=\frac{1}{a+4}$$

$$f(a+h)=\frac{1}{a+h+4}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h+4}-\frac{1}{a+4}}{h}$$

$$=\frac{a+4-a-h-4}{(a+h+4)(a+4)}\times\frac{1}{h}$$

$$=\frac{-\cancel{h}}{(a+h+4)(a+4)}\times\frac{1}{\cancel{h}}$$

$$=\frac{-1}{(a+h+4)(a+4)}$$

$$f(x)=x^2-6x+8 \quad \textbf{(44)}$$

$$f(a) = a^2 - 6a + 8$$

$$f(a+h) = (a+h)^2 - 6(a+h) + 8$$

$$= a^2 + 2ah + h^2 - 6a - 6h + 8$$

$$= a^2 + h^2 + 2ah - 6a - 6h + 8$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{a^2} + h^2 + 2ah \cancel{-6a} - 6h \cancel{+8} \cancel{-a^2} \cancel{+6a} \cancel{-8}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(h + 2a - 6)}{\cancel{h}} = h + 2a - 6$$

$f(x) = -14x + 6$ **(45)**

$$f(a) = -14a + 6$$

$$f(a+h) = -14(a+h) + 6$$

$$= -14a - 14h + 6$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{-14a} - 14h \cancel{+6} \cancel{+14a} \cancel{-6}}{h}$$

$$= -14$$

$f(x) = x^3 + 9$ **(46)**

$$f(a) = a^3 + 9$$

$$f(a+h) = (a+h)^3 + 9$$

$$= a^3 + h^3 + 3ah^2 + 3ha^2 + 9$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{a^3} + h^3 + 3ah^2 + 3ha^2 \cancel{+9} \cancel{-a^3} \cancel{-9}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(h^2 + 3ah + 3a^2)}{\cancel{h}} = h^2 + 3ah + 3a^2$$

$f(\mathrm{x}) = 5x^2$ **(47)**

$$f(a) = 5a^2$$

$$f(a+h) = 5(a+h)^2 = 5(a^2 + h^2 + 2ah)$$

$$= 5a^2 + 5h^2 + 10ah$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{5a^2} + 5h^2 + 10ah - \cancel{5a^2}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(5h + 10a)}{\cancel{h}} = 5h + 10a$$

$f(\mathrm{x}) = x^3$ **(48)**

$$f(a) = a^3$$
$$f(a+h) = (a+h)^3$$
$$= a^3 + h^3 + 3ah^2 + 3ha^2$$
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\cancel{a^3} + h^3 + 3ah^2 + 3ha^2 - \cancel{a^3}}{h}$$
$$= \frac{\cancel{h}(h^2 + 3ah + 3a^2)}{\cancel{h}} = h^2 + 3ah + 3a^2$$

---

(49) صناعة:

a) $A(\mathrm{L}) = \dfrac{L^2}{1.8}$

مجال الدالة هو: $[5, 11.5]$

b) $A(h) = 2.1h^2$

مجال الدالة هو: $[2.4, 5.5]$

c) $A = 52.9 \ \ in^2$

حدد ما إذا كانت y دالة في x أم لا.

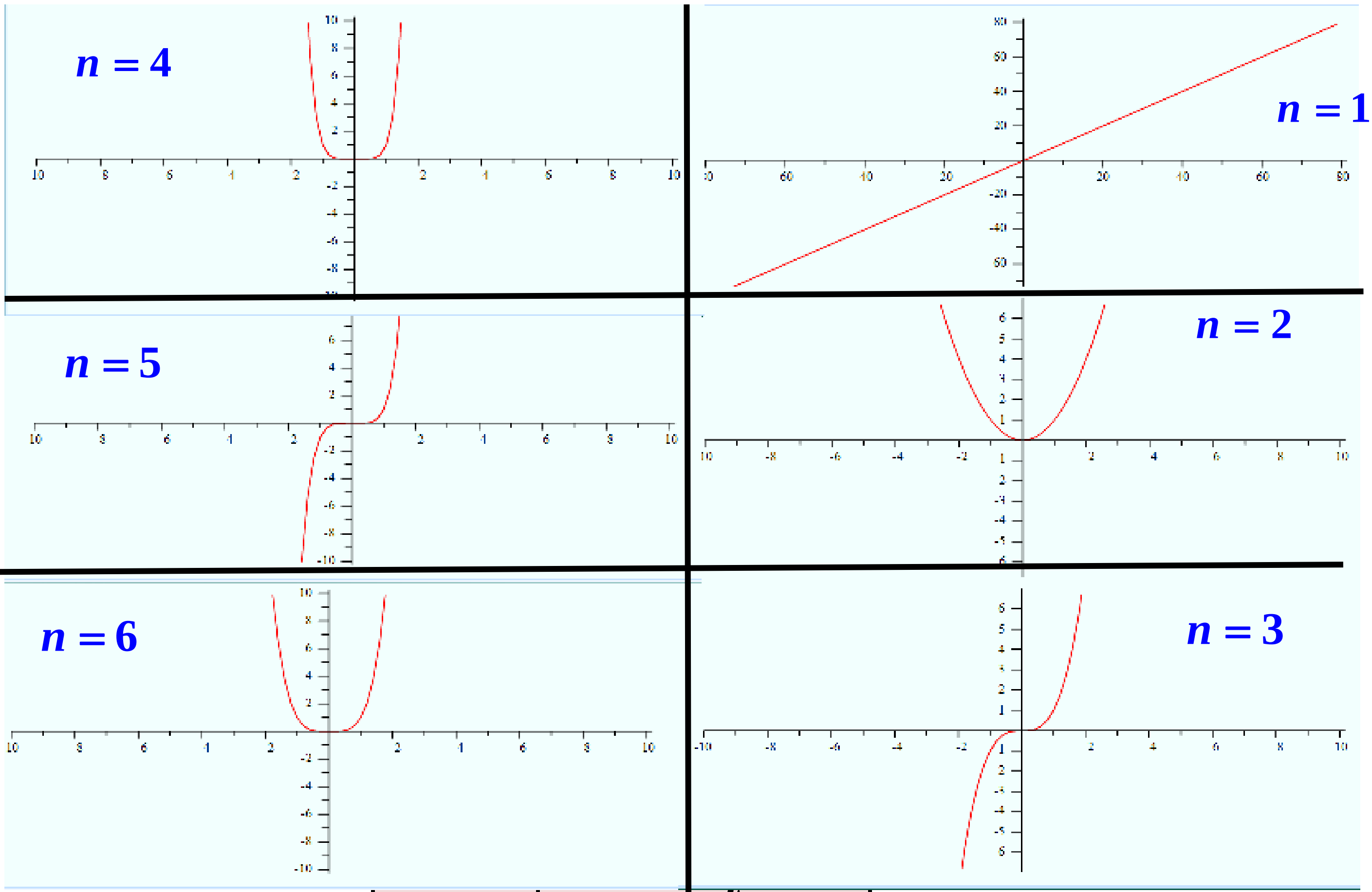
(50) $x = |y|$

ليست دالة، لأن لكل قيمة x في المجال يوجد قيمتان y في المدى وعليه فإن y لا تمثل دالـــــة في x

(51) $x = y^3$

دالة، لأن لكل قيمة x في المجال يوجد قيمة واحدة y في المدى وعليه فإن y تمثل دالـــة في x

(a) (52)



n	المدى
1	$(-\infty,\infty)$
2	$[0,\infty)$
3	$(-\infty,\infty)$
4	$[0,\infty)$
5	$(-\infty,\infty)$
6	$[0,\infty)$

(c) لفظياً: يكون المدى $[0,\infty)$ إذا كانت n زوجية.

(d) لفظياً: يكون المدى $(-\infty,\infty)$ إذا كانت n فردية.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(53) إكتشف الخطأ:

سليمان، المجال هو $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$ أو $\{x\,|x\neq -2, x\neq 2x\in R\}$

---

(54) المجال هو باستخدام رمز الفترة: $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,5)\cup(5,\infty)$

المجال هو باستخدام طريقة الصفة المميزة: $\{x\,|x\neq -3, x\neq -1, x\neq 5, x\in R\}$

* افضل طريقة الصفة المميزة للمجموعة لأنه بدلاً من كتابة أربع فترات تقع ضمنها x تُكتب ثلاث قيم غير ممكنة لـ x، والمجموعة التي يمكن أخذ منها (x) ، أي أنه عند تحديد قيمة ما على فترات متعددة تكون الصفة المميزة للمجموعة أكثر فاعلية.

---

(55) تحد:

$$G\left(\cancel{x}^{5}+1\right)=\frac{G(x-2)G(x-1)+1}{G(x)}$$

$$G(6)=\frac{G(7)G(4)+1}{G(6)}$$

$$=\frac{4}{7}$$

تبرير:

(56) خطأ، ليس بالضرورة إرتباط كل عنصر من y بعنصر من x.

(57) خطأ، يمكن لعنصرين أو اكثر من x الارتباط بالعنصر نفسه من y.

(58) صحيحة.

اكتب:

(59) تكون العلاقة دالة إذا ارتبطت كل قيمة x من المجال (مدخلة)بقيمة y واحدة فقط من المدى (مخرجة).

(60) إذا ارتبط كل عنصر من المجال (إحداثي x) في مجموعة الازواج المرتبة بعنصر واحد من المدى (إحداثي y) تكون العلاقة دالة.

(61) إذا ارتبطت كل قيمة لـ x في الجدول بقيمة واحدة مختلفة لـ y تكون العلاقة دالـــــة.

(62) إذا رسم خط رأسي عند أي قيمة x على التمثيل البياني وقطعه في نقطة واحدة تكون العلاقة دالة بأختبار الخط الرأسي.

(63) تربط بين الاحداثين y , x لكل زوج من الازواج المرتبة.

بسط كلاً مما يأتي:

(64) $\dfrac{2r-4}{r-2}$

$$\frac{2\cancel{(r-2)}}{\cancel{r-2}} = 2$$

---

(65) $\dfrac{r^2-7r-30}{r^2-5r-24}$

$$\frac{(r-10)\cancel{(r+3)}}{(r-8)\cancel{(r+3)}} = \frac{r-10}{r-8}$$

(66) $\dfrac{3y}{4x} + \dfrac{4y}{3x} - \dfrac{y}{4}$

$$\frac{3xy-16y+9y}{12x}=\frac{y(3x-16+9)}{12x}=\frac{y(3x-7)}{12x}$$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{16}}$$ **(67)**

$$\frac{\frac{4-a}{4a}}{\frac{16-a^2}{16a^2}}=\frac{4-a}{4a}\div\frac{(4-a)(4+a)}{16a^2}$$

$$=\frac{\cancel{4-a}^{\,1}}{\cancel{4a}_{\,1}}\times\frac{\cancel{16a^2}^{\,4a}}{\cancel{(4-a)}(4+a)}$$

$$=\frac{4a}{4+a}$$

$$\frac{6x^2-11x+4}{6x^2+x-2}\cdot\frac{12x^2+11x+2}{8x^2+14x+3}$$ **(68)**

$$\frac{\cancel{(2x-1)}(3x-4)}{\cancel{(2x-1)}\cancel{(3x+2)}}\cdot\frac{\cancel{(4x+1)}\cancel{(3x+2)}}{\cancel{(4x+1)}(2x+3)}=\frac{3x-4}{2x+3}$$

حل كل من المعادلتين:

(69) $\frac{8}{x}=1+\frac{2}{x-2}$

$$\frac{8}{x}=\frac{x-2+2}{x-2}$$

$$\therefore \frac{8}{x}=\frac{x}{x-2} \quad \rightarrow \quad \therefore x^2=8x-16$$

$$\therefore x^2-8x+16=0$$

وهي أولية   ∴ مجموعة الحل = $x=-4, x=4$

(70) $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

---

(71) $\frac{x+1}{x-3}-1\le 2$

$$\frac{x+1}{x-3}\le 2+1$$

$$\frac{x+1}{x-3}\le 3 \rightarrow \therefore x+1\le 3x-9$$

$$\therefore 1+9\le 3x-x$$

$$\therefore 10\le 2x \quad \rightarrow \quad \therefore 5\le x$$

---

(72) $\frac{6}{x}+2\ge 0$

$$\frac{6}{x}\ge -2 \qquad \therefore 6\ge -2x$$

$$\therefore x\ge -3$$

تدريب على الاختبار

(73) c) كل دالة تمثل علاقة

(74) c) $x \geq \frac{3}{2} \quad , x \neq 5$

(1-2) تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

تحقق من فهمك

(1A)
$$\upsilon(10) = 0.002(10)^4 - 0.11(10)^3 + 1.77(10)^2 - 8.6\times10 + 31$$
$$= 20 - 110 + 177 - 86 + 31 = 32$$

= 32 مليون ريال

(1B) في بداية متابعة المستثمر (اليوم 0) وفي اليومين 9 , 15 .

تحقق من فهمك

(2A) المجـــــــــــــال: $[-2,6)$

المـــــــــــــدى : $[0,4]$

(2B) المجـــــــــــــال: $(-4,2)\cup(2,\infty)$

المـــــــــــــدى : $(-\infty,2)\cup\{6\}$

تحقق من فهمك

(3A) $f(0) = 0^3 + 0^2 - 6 \times 0 + 4 = 4$

(3B) $f(0) = \sqrt{0^2 + 6} = \sqrt{6}$

تحقق من فهمك

(4A) $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 8x$

$$f(\text{x}) = 0$$
$$\therefore 3x^3 - 10x^2 + 8x = 0$$
$$\therefore x(3x^2 - 10x + 8) = 0$$
$$\therefore x(3x - 4)(x - 2) = 0$$
$$\therefore x = 0 \ , \ x = \frac{4}{3} \ or \ \ x = 2$$

أي أن اصفار الدالة f هي 2 , $\frac{4}{3}$, 0

(4B) $f(x) = \sqrt{4t + 1}$

$$f(x)=0$$
$$\therefore \sqrt{4t+1}=0$$
$$\therefore 4t+1=0$$
$$\therefore 4t=-1$$
$$\therefore t=\frac{-1}{4}$$

أي أن اصفار الدالة f هي $-\frac{1}{4}$

تحقق من فهمك

(5A) التحقق بيانياً: المنحنى متماثل حول محور y ، لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى يوجد

نقطة $(-x,y)$ على نفس المنحنى.

التحقق عددياً:

x	2	-2	3	-3
y	2	2	-3	3
(x,y)	$(2,2)$	$(-2,2)$	$(3,-3)$	$(-3,3)$

التحقق جبرياً:

$$f(x)=-x^2+6$$
$$f(-x)=-(-x)^2+6$$
$$=-x^2+6=f(x)$$

$f(x)=f(-x)$ ﻟ $\therefore$ المنحنى متماثل حول محور y

(5B) التحقق بيانياً: المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى يوجد

نقطة $(-x,-y)$ على نفس المنحنى.

← المنحنى متماثل حول محور x ، لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى يوجد نقطة $(x,-y)$ على نفس المنحنى.

← المنحنى متماثل حول محور y ، لأن لكل نقطة (x,y) على المنحنى يوجد نقطة $(-x,y)$ على نفس المنحنى.

التحقق عددياً:

x	3	-3	4	-4
y	± 4	± 4	± 3	± 3
(x,y)	$(3,4)$ $(3,-4)$	$(-3,4)$ $(-3,-4)$	$(4,3)$ $(4,-3)$	$(-4,3)$ $(-4,-3)$

التحقق جبرياً:

$$x^2+y^2=25$$
$$f(-x,-y)=(-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2$$
$$=f(x)$$

خ $f(-x,-y)=f(x,y)$ ∴ المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

$$x^2+y^2=25$$
$$f(x,-y)=x^2+(-y)^2=x^2+y^2$$
$$=f(x)$$

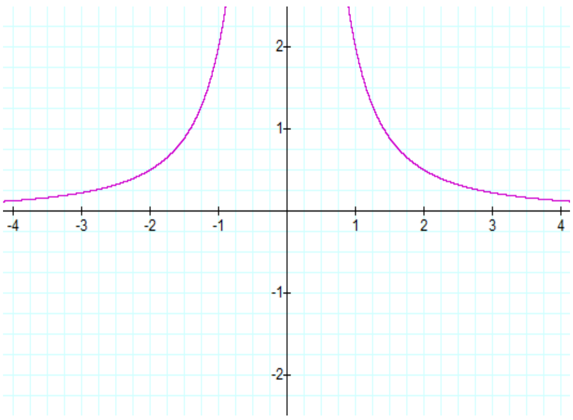
خ $f(x,-y)=\mathrm{f}(x,y)$ ∴ المنحنى متماثل حول محور x

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$f(-x, y) = (-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$
$$= f(x)$$

ح $f(-x, y) = f(x, y)$ ∴ المنحنى متماثل حول محور y

تحقق من فهمك

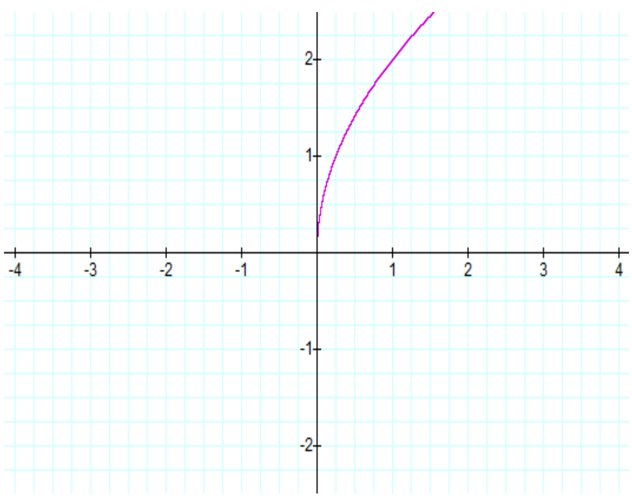


(6A) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

من التمثيل البياني يتضح أن الدالة زوجية لأنها متماثلة حول المحور y

التحقق جبرياً:

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2} = \frac{2}{x^2} = f(x)$$



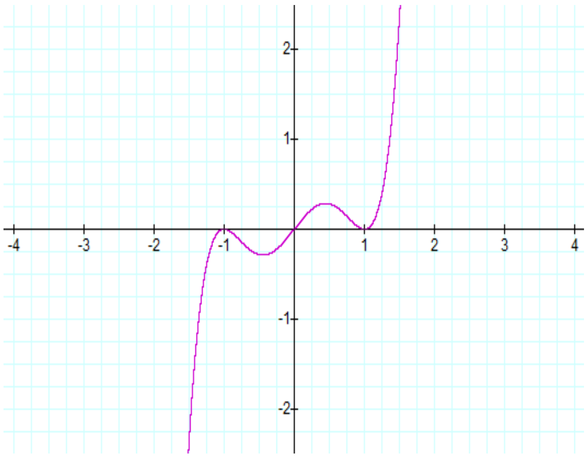
(6B) $g(x) = 4\sqrt{x}$

من التمثيل البياني يتضح أن الدالة ليست زوجية وليست فردية

التحقق جبرياً:

$$f(-x) = 4\sqrt{-x} \neq f(x)$$

(6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$



من التمثيل البياني يتضح أن الدالة فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل

التحقق جبرياً:

$$f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x)$$
$$= -(x^5 - 2x^3 + x) = -f(x)$$

تدرب وحل المسائل

■ استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير القيم المطلوبة ثم تحقق من إجابتك جبرياً وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مائة إذا لزم ذلك:

(1) $g(x) = -5\sqrt{x} + 50$

$g(6) = -5\sqrt{6} + 50 = 37.75$ (a

$g(12) = -5\sqrt{12} + 50 = 32.86$ (b

$g(19) = -5\sqrt{19} + 50 = 28.21$ (c

$g(x) = |x| + 2$ **(2)**

$g(-8) = |-8| + 2 = 10$ (a

$g(-3) = |-3| + 2 = 5$ (b

$g(0) = |0| + 2 = 2$ (c

$$p(t) = \begin{cases} -3 & , t < 2 \\ t - 1 & , t \geq 2 \end{cases}$$ **(3)**

$p(-6) = -3$ (a

$p(2) = 2 - 1 = 1$ (b

$p(9) = 9 - 1 = 8$ (c

$$f(x) = \frac{x - 1}{x}$$ **(4)**

a) $f(-3)=\frac{-3-1}{-3}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

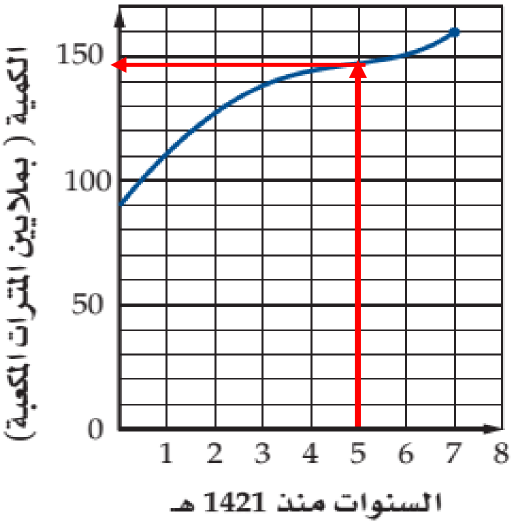
b) $f(0.5)=\frac{0.5-1}{0.5}=\frac{-0.5}{0.5}=-1$

c) $f(0)=\frac{0-1}{0}=\frac{-1}{0}$ غير معروفة

---

(5) مياه:

(a) 149 مليون متر مكعـــب

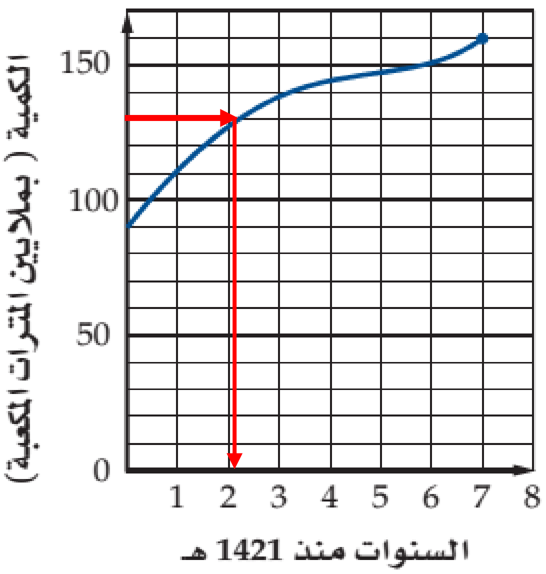


(b)

$$f(5)=0.0509(5)^4-0.3395(5)^3-2.2(5)^2+25.35\times 5+88.27$$

$$=149.395\approx 149.4$$ مليون متر مكعب

(c) 1422 هـ



التحقق جبريا

$$f(2) = 0.0509(2)^4 - 0.3395(2)^3 - 2.2(2)^2 + 25.35 \times 2 + 88.27$$
$$= 128.2684 \approx 130$$

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلاً مما يأتي لإيجاد كلاً من مجال الدالة ومداها:

(6) المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $[-3, \infty)$

---

(7) المجال = $(-4, 4]$

المدى = $[-1, 6]$

---

(8) المجال = $[-5, \infty)$

المدى = $[-2, \infty)$

---

(9) المجال = $(-\infty, 7]$

المدى = $\{-1\} \cup (1, \infty)$

---

(10) هندسة:

a) النحاس: المجال = $\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$

المدي = $\{y \mid y = 175\}$

الألومنيوم: المجال = $\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$

المدي = $\{y \mid 0.6 \le y \le 1.5, y \in R\}$

الزنك: المجال = $\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$

المدي = $\{y \mid 0.5 \le y \le 1.25, y \in R\}$

الفولاذ: المجال = $\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$

المدي = $\{y \mid 0.2 \le y \le 1.75, y \in R\}$

b) الطاقة عند الصفر السيليزي

النحاس: 1.75 جول

الألومنيوم: 1.2 جول

الزنك: 0.5 جول

الفولاذ: 1.5 جول

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لإيجاد مقطع المحور y وأصفار الدالة، ثم أوجد هذة القيم جبريا:

(11) $f(x)=\sqrt{x-1}$

لإيجاد مقطع y $\quad f(0)=\sqrt{0-1}=\sqrt{-1}\notin R$

$\therefore$ لايوجد مقطع y

لإيجاد مقطع x $\quad f(x)=\sqrt{x-1}=0$

$\therefore x-1=0 \quad \therefore x=1$

أصفار الدالة هي 1

---

(12) $f(x)=2x^3-x^2-3x$

لإيجاد مقطع y $\quad f(0)=2(0)^3-(0)^2-3(0)=0$

مقطع y هو 0

$f(x)=2x^3-x^2-3x=0$

لإيجاد مقطع x $\quad \therefore x(2x^2-x-3)=0 \quad \therefore x(2x-3)(x+1)=0$

$\therefore x=0 \ , \ x=\frac{3}{2} \ or \ x=-1$

أصفار الدالة هي $-1 \ , \ \frac{3}{2} \ , \ 0$

---

(13) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

لإيجاد مقطع y $\quad f(0)=\sqrt[3]{0}=0$

مقطع y هو 0

لإيجاد مقطع x

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=0$$
$$\therefore x=0$$

أصفار الدالة هي 0

---

(14) $f(x)=6x^2-x-2$

لإيجاد مقطع y $\quad f(0)=6(0)^2-(0)-2=-2$

مقطع y هو -2

لإيجاد مقطع x

$$f(x)=6x^2-x-2=0$$
$$\therefore (3x-2)(2x+1)=0$$
$$x=\frac{2}{3} \quad or \quad x=-\frac{1}{2}$$

أصفار الدالة هي. $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$

---

(15) $f(x)=x^3-3x+2$

لإيجاد مقطع y $\quad f(0)=(0)^3-3(0)+2=2$

مقطع y هو 2.

يتضح من التمثيل البياني أن أصفار الدالة هو 1 و -2

الحل جبريا:

$$f(x)=x^3-3x+2+x-x$$
$$(x^3-4x)+x+2$$
$$x(x^2-4)+(x+2)$$
$$x(x-2)(x+2)+(x+2)$$
$$(x+2)\{x(x-2)+1|\}$$
$$(x+2)(x^2-2x+1)=0$$

$x+2=0$ إذن $x=-2$

$$x^2-2x+1=0$$
$$(x-1)(x-1)$$

$x-1=0$ إذن $x=1$

أي صفري الدالة هما 1 و -2

---

(16) $f(x)=x^2+5x+6$

لإيجاد مقطع y $\quad f(0)=(0)^2+5(0)+6=6$

مقطع y هو 6

$$f(x)=x^2+5x+6=0$$

لإيجاد مقطع x $\quad \therefore (x+2)(x+3)=0$

$$x=-2 \;\; or \;\; x=-3$$

أصفار الدالة هي. $-2 \;,\; -3$

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لإختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل

عزز إجابتك عدديا، ثم تحقق منها جبريا.

(17) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل

(18) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x

(19) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

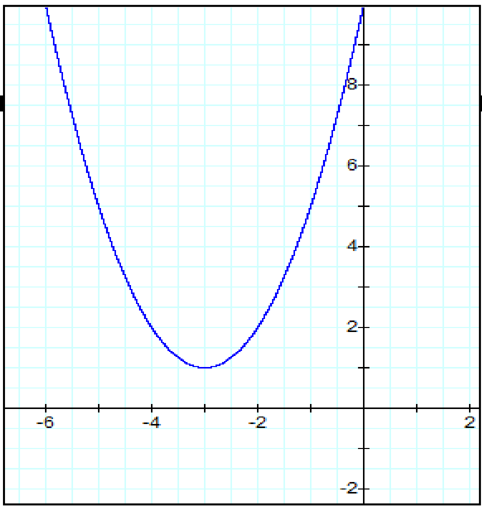
(20) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل

(21) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

(22) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

(23) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y

(24) لا يوجد تماثل

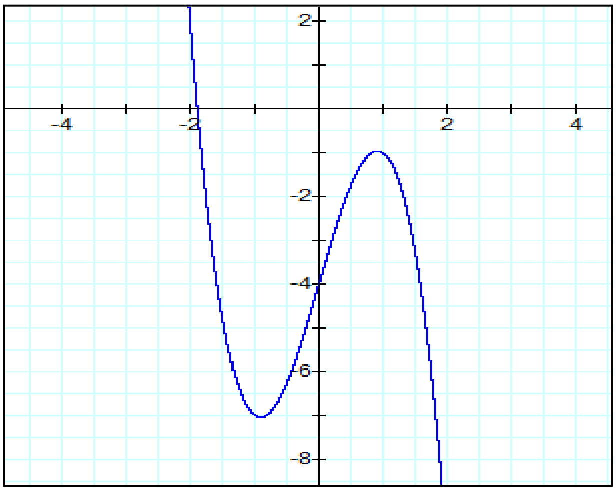


(25) $f(x)=x^2+6x+10$

ليست فردية وليست زوجية

التحقق جبريا $f(-x) = x^2 - 6x + 10 \neq f(x)$

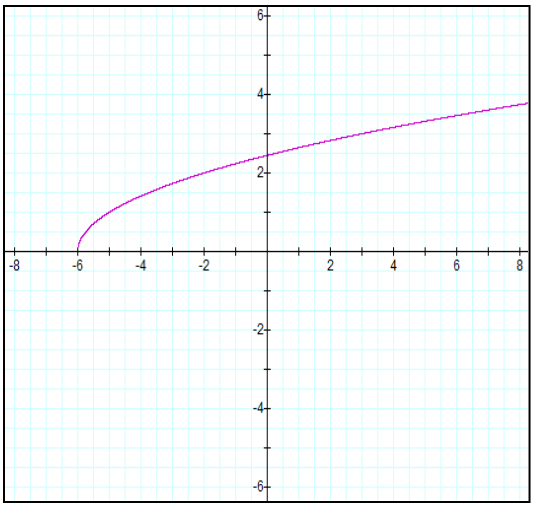
(26) $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$



ليست فردية وليست زوجية

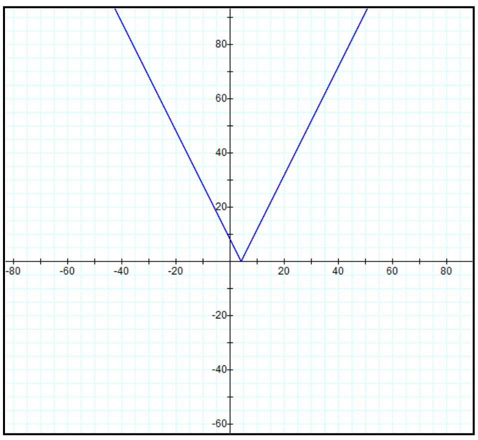
التحقق جبريا $f(-x) = 2x^3 - 5x - 4 \neq f(x)$

(27) $g(x) = \sqrt{x+6}$



ليست فردية وليست زوجية

التحقق جبرياً $g(-x) = \sqrt{-x+6} \neq g(x)$

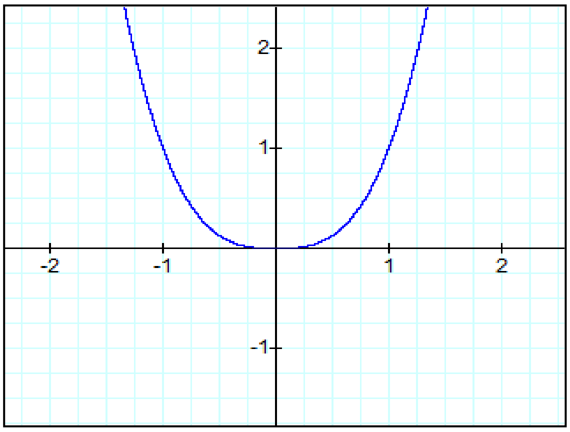


(28) $h(x) = |8 - 2x|$

ليست فردية وليست زوجية

التحقق جبريا $h(-x)=|8+2x|\neq h(x)$

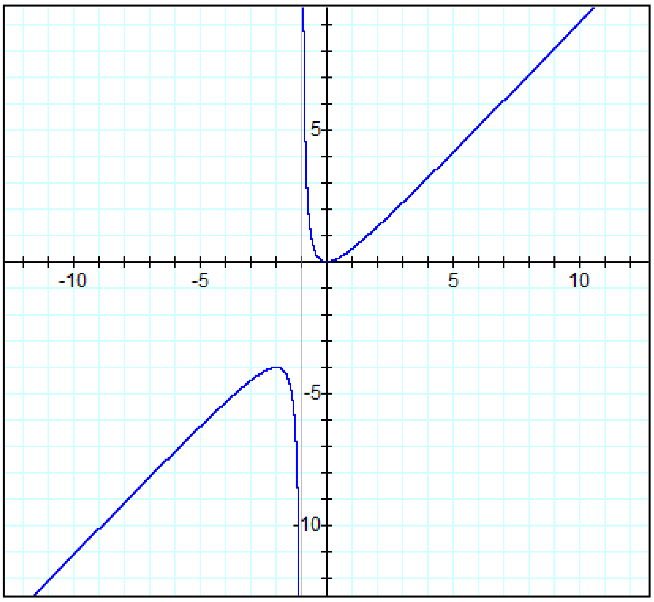
$(29)\ f(x)=|x^3|$



دالة زوجية لتماثلها حول المحور y

التحقق جبريا $f(-x)=|(-x)^3|=|x^3|=f(x)$

$(30)\ g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$



ليست فردية وليست زوجية

التحقق جبريا $g(-x)=\dfrac{x^2}{-x+1}\neq g(x)$

(31)

$f\left(-2\right)=-2$ (a

$f\left(-6\right)=$ غير معرفة (b

$f\left(0\right)=$ غير معرفة (c

(32) مبيعات

a) المجال = $\left\{x \mid 0 \le x \le 4, x \in W\right\}$

المدي = $\left\{y \mid 1200 \le y \le 11200, y \in R\right\}$

b) حوالي 4200 جهاز

التحقق جبرياً $h\left(2\right)=0.5(2)^2+0.5\times 2+1.2=4.2\times 1000=4200$

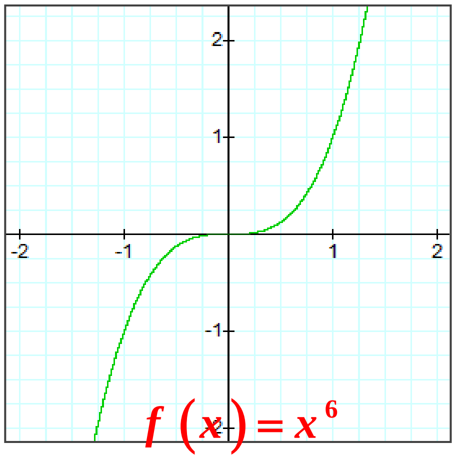
c) 1200، ويمثل المقطع y عدد الأجهزة المبيعة منه 1422 هـ

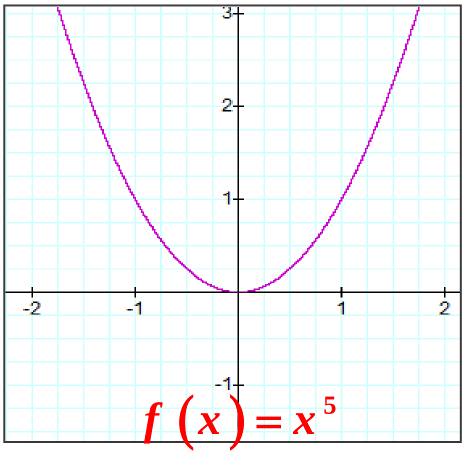
جبريا $h\left(0\right)=0.5(0)^2+0.5\times 0+1.2=1.2\times 1000=1200$

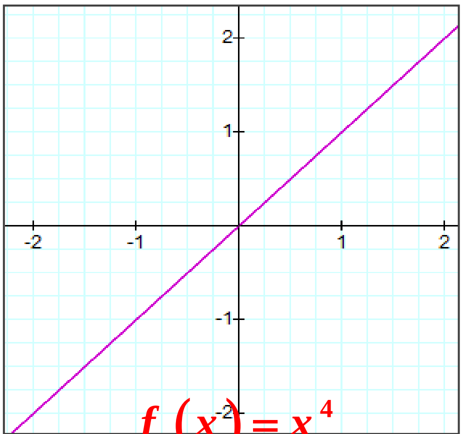
d) لا يوجد لهذه الدالة اصفار، لأنه لكل سنة من سنوات المجال يوجد عدد من الأجهزة المبيعة

33

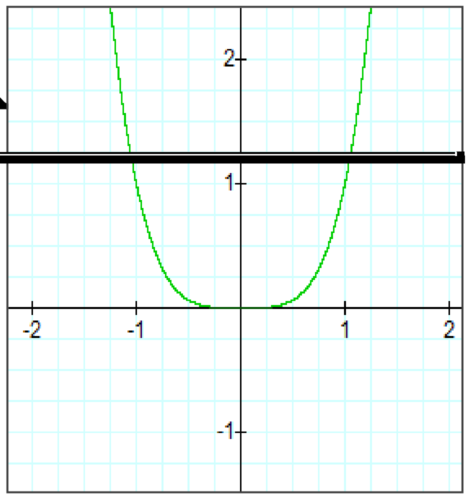
a)) $f\left(x\right)=x^3$ $f\left(x\right)=x^2$ $f\left(x\right)=x$

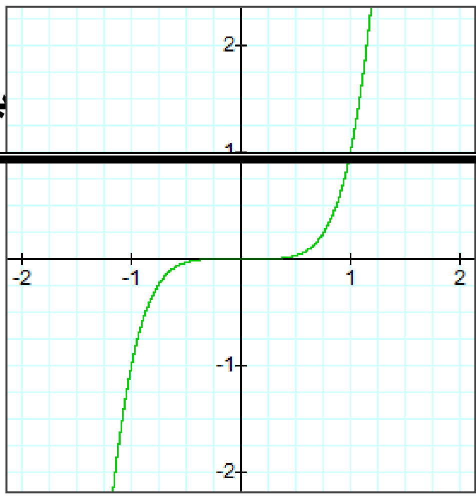


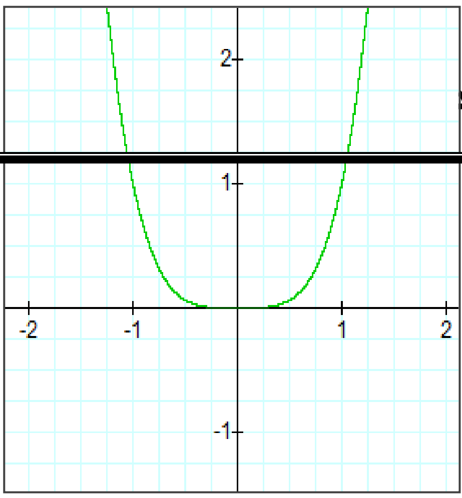




$f\left(x\right)=x^6$ $f\left(x\right)=x^5$ $f\left(x\right)=x^4$







b) $f(x)=x$ المجال $=\{x|x\in R\}$

المدى $=\{y|y\in R\}$

$f(x)=x^2$ المجال $=\{x|x\in R\}$

المدى $=\{y|y\geq 0, y\in R\}$

$f(x)=x^3$ المجال $=\{x|x\in R\}$

المدى $=\{y|y\in R\}$

$f(x)=x^4$ المجال $=\{x|x\in R\}$

المدى $=\{y|y\geq 0, y\in R\}$

$f(x)=x^5$ المجال $=\{x|x\in R\}$

المدى $=\{y|y\in R\}$

$f(x)=x^6$ المجال $=\{x|x\in R\}$

المدى $=\{y|y\geq 0, y\in R\}$

c) $f(x)=x$ متماثلة حول نقطة الأصل

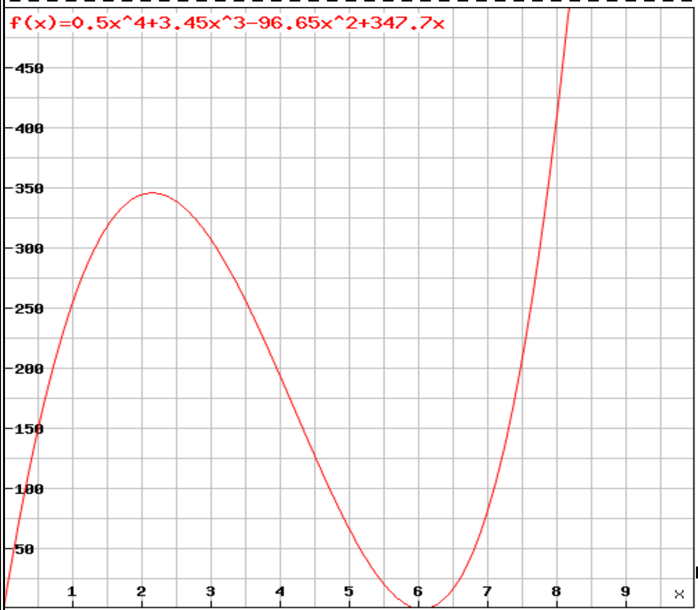
متماثلة حول نقطة الأصل $f(x) = x^3$

متماثلة حول نقطة الأصل $f(x) = x^5$

متماثلة حول المحور y $f(x) = x^2$

متماثلة حول المحور y $f(x) = x^4$

متماثلة حول المحور y $f(x) = x^6$



d)

$f(x) = x^{35}$

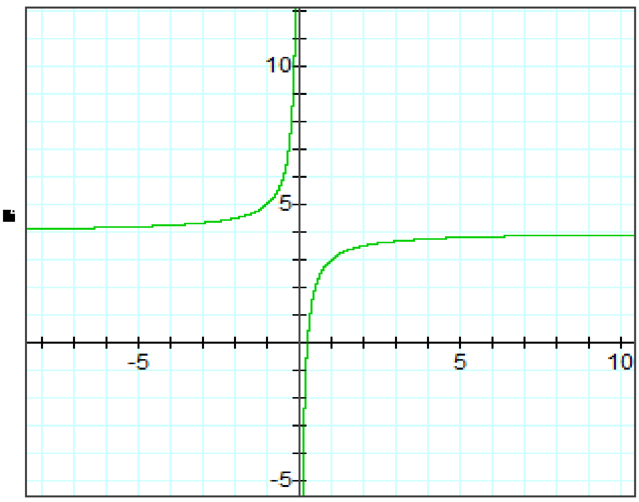
المجال $= \{x \mid x \in R\}$

المدى $= \{y \mid y \in R\}$

الدالة فردية ∴ فهي متماثلة حول نقطة الأصل

(34) صيدلة

$$0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$$



الحاسبة البيانية:

(35) $f(x)=\frac{4x-1}{x}$

$x=0.25$

جبرياً :

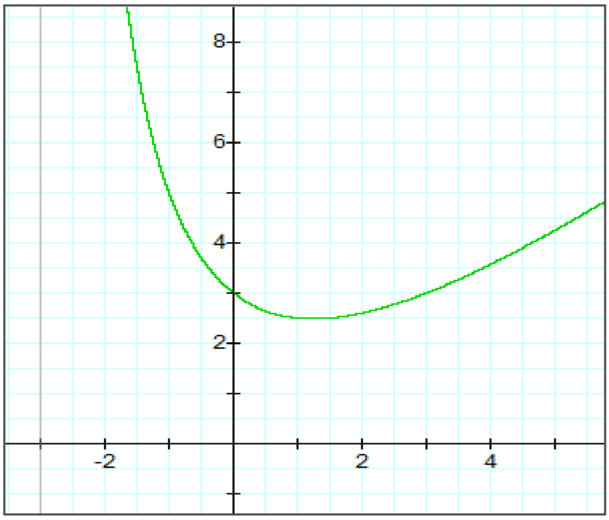
$$f(x)=\frac{4x-1}{x}=0$$

$$\therefore 4x-1=0$$

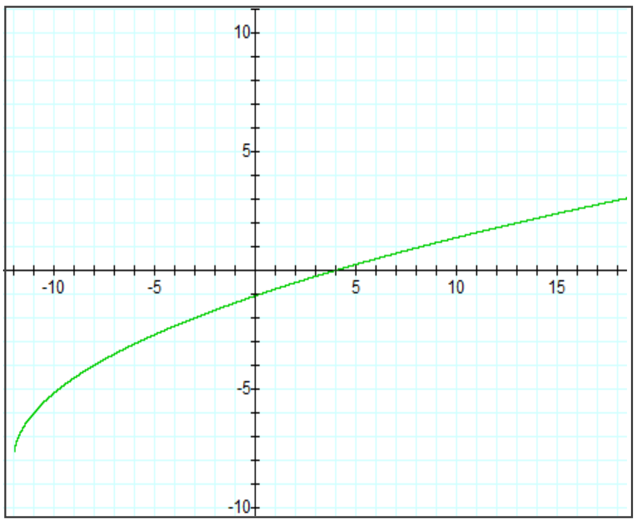
$$\therefore 4x=1 \qquad \therefore x=\frac{1}{4}$$

(36) $f(x)=\frac{x^2+9}{x+3}$

لا يوجد أصفار للدالة



(37) $h(x)=2\sqrt{x+12}-8$



$x = 4$

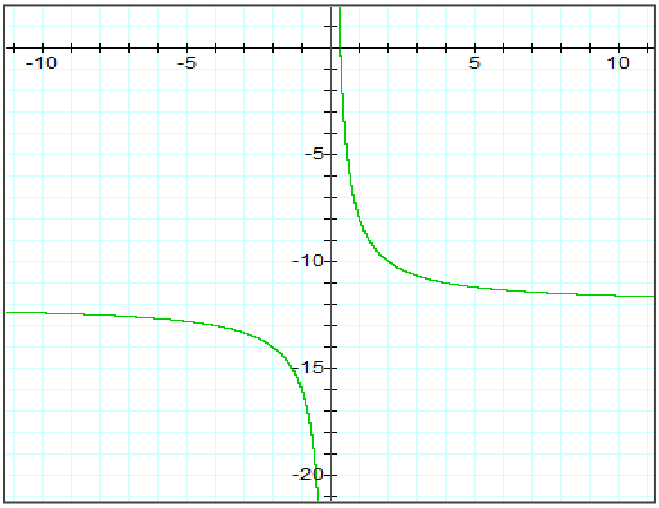
جبريا:

$$h(x) = 2\sqrt{x+12} - 8 = 0$$

$$\therefore \sqrt{x+12} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore x + 12 = 16 \quad \therefore x = 16 - 12 = 4$$

(38) $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$



$x = 0.33$

جبريا:

$$g(x) = -12 + \frac{4}{x} = 0$$

$$\therefore \frac{4}{x} = 12 \qquad \therefore 12x = 4$$

$$\therefore x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

استخدم التمثيل البياني f للدالة لتحديد مجالها ومداها

(39) المجال $= (-8,-4] \cup (-2,\infty)$

المدى $= (-6,\infty)$

---

(40) المجال $= (-\infty,-6] \cup (0,5) \cup (8,10)$

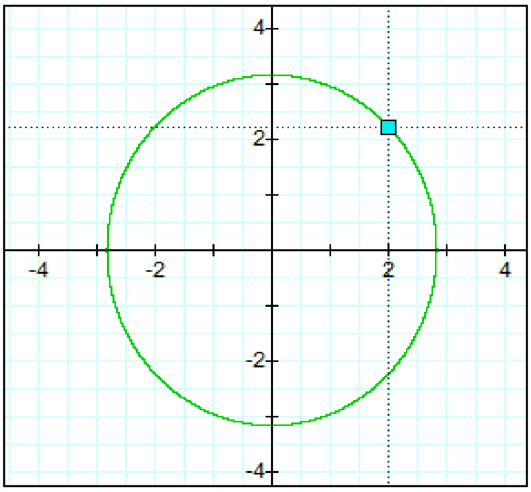
المدى = $(-\infty,8)\cup\{10\}$

---

(41) فيزياء:

a) المنحنى متماثل حول المحور *x* والمحور *y* ونقطة الأصل

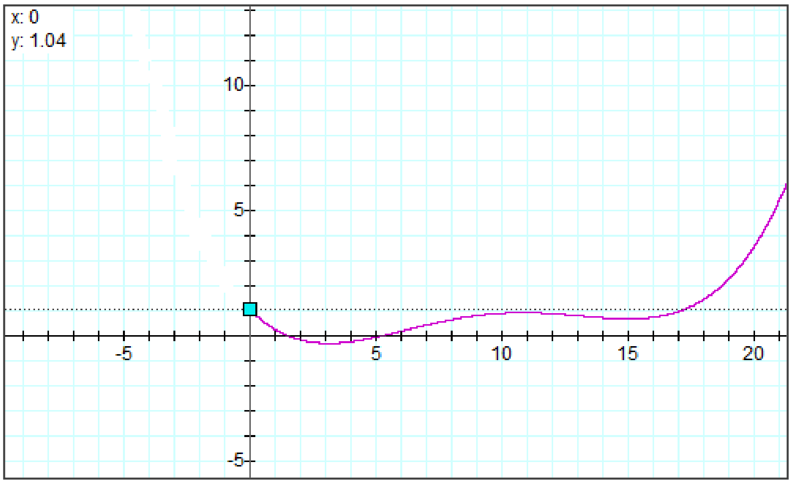
(*b*



(*c* $\left(2,-\sqrt{5}\right)$, $(-2,\sqrt{5})$, $(-2,-\sqrt{5})$

(42) أسهم:

a)



(*b* المجال = $\{x \mid 0 \le x \le 11, x \in W\}$

المدى = $\{y \mid -0.5 \le y \le 1, y \in R\}$

(*c* قيمة المقطع $y = 1.04$ ويمثل نسبة التغير المئوية الإبتدائية في الأسعار

(*d* أصفار الدالة 5.2 , 1.5 وتمثل خط الأساس أو الوقت الذي يكون فية نسبة التغير صفر

43) تمثيلات متعددة:

)

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$			غير		

a) جدوليا

---

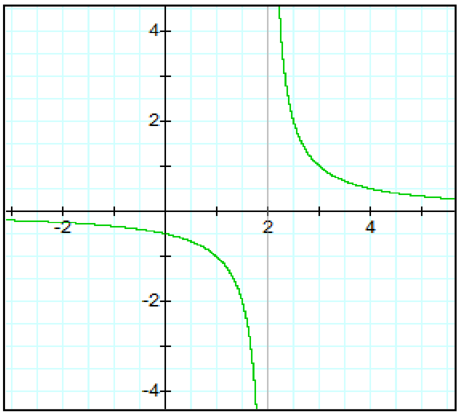
b) تحليليا:

عندما تقترب x من 2 من اليسار تقترب الدالة من $-\infty$

عندما تقترب x من 2 من اليمين تقترب الدالة من ∞

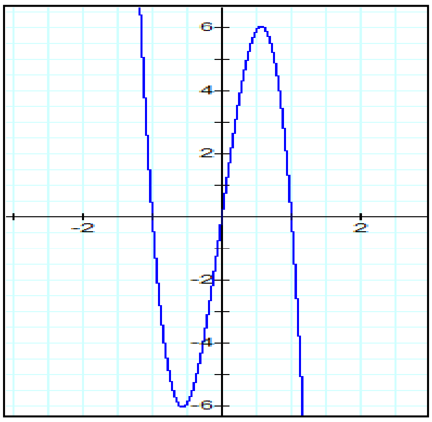
---

c) عندما تقترب الدالة من 2 من جهة اليسار تتناقص قيم الدالة بلا حدود، وعندما تقترب الدالة من 2 من جهة اليمين تتزايد قيم الدالة بلا حدود.



---

c) عندما تتزايد x بشكل كبير وتكون $x > 3$ يتزايد مقام الكسر بشكل كبير وهذا يؤدي إلى تناقص قيمة الكسر لكنة لا يصل الي الصفر وعلية لا يقطع المنحني المحور x.

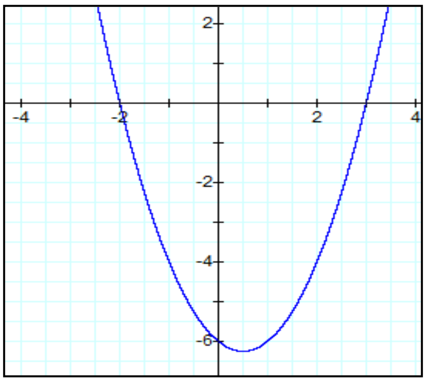


الحاسبة البيانية:

$h(x)=x^5-17x^3+16x$ (44)

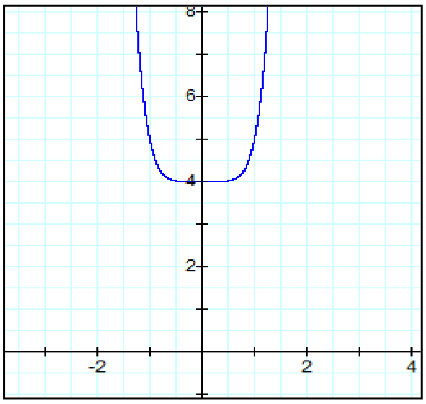
الدالة فردية لتماثلها حول نقطة الأصل

$f(x)=x^2-x-6$ (45)

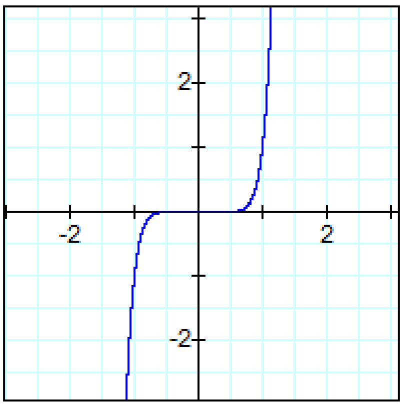


الدالة ليست زوجية وليست فردية

$h(x)=x^6+4$(46)



الدالة زوجية لتماثلها حول المحور y

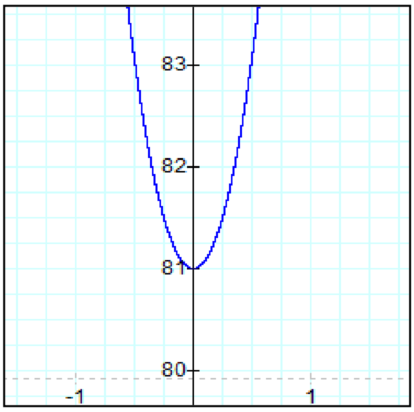


$f(g)=g^9$(47)

الدالة فردية لتماثلها حول نقطة الأصل

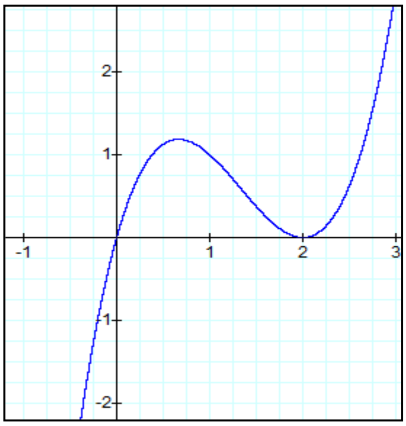
---

(48) $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$



الدالة زوجية لتماثلها حول المحور y

(49) $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$

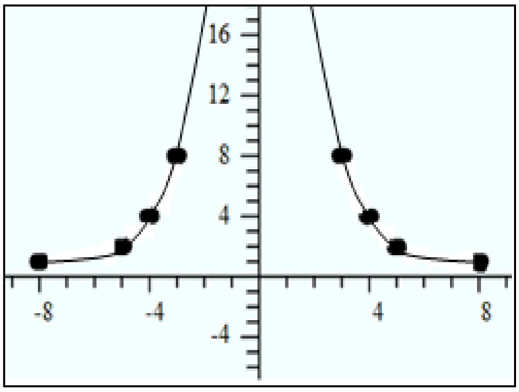


الدالة ليست زوجية وليست فردية

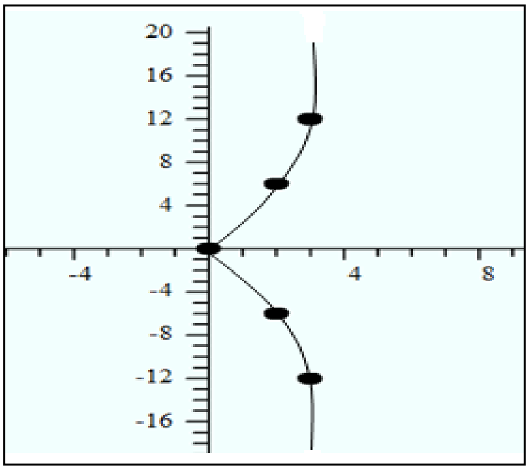
مسائل مهارات التفكير العليا

مسائل مفتوحة:

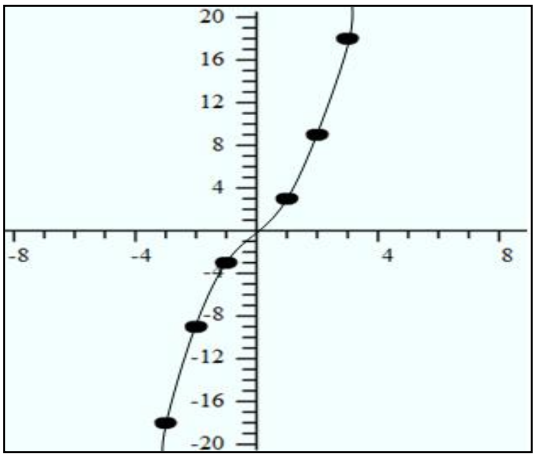
(50)



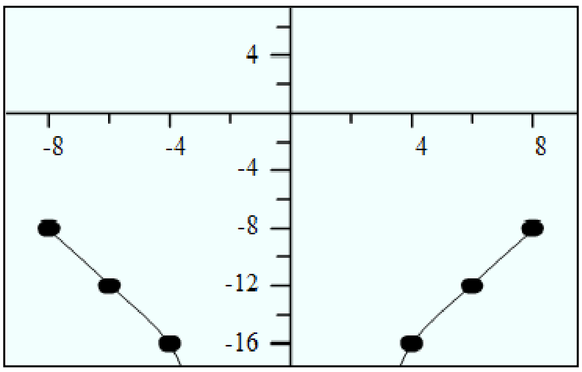
(51)



(52)

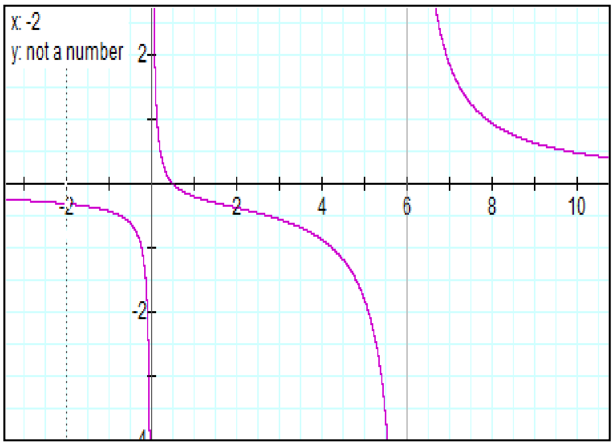


(53)



(54) يمكن أن تقطع الدالة محور x أكثر من مقطع لأن قيمة x لا تعتمد علي قيمة y في حين قيمة

y تعتمد على قيمة x،ويجب أن ترتبط كل قيمة لـــــ x بقيمة واحدة فقط لـــــ y، إذا قطعت العلاقة المحور y أكثر من مقطع فإنها لا تحقق إختبار الخط الرأسي، وبالتالي لا تكون دالة.



(55) تحدّ: $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^3-4x^2-12x}$

المجال: $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,6)\cup(6,\infty)$

المدى: $\{y \mid y \in R\}$

<u>تبرير</u>

(56) $f(x)=nx^2$

خطأ: هذا المدي يكون صحيح فقط عندما $n>0$ ولكن عندما $n=0$ فإن $f(x)=0$

وكذلك عندما $n<0$ فإن $f(x)<0$

---

(57) صحيح: إذا كانت $n=0$ يكون المدى $\{y \mid y=0\}$ وإذا كانت n سالبة تكون الدالة معرفة في المجال $\{x \mid x \le 0, x \in R\}$ ويكون المدى $\{y \mid y \ge 0, y \in R\}$ وإذا كانت n

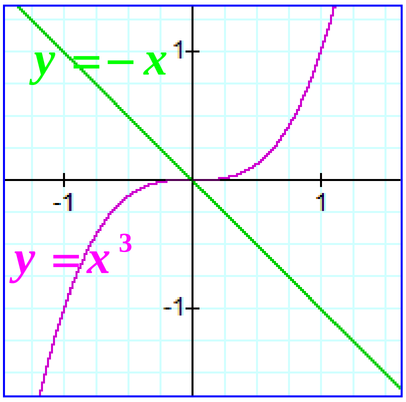
موجبة معرفة في المجال $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$ ويكون المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

---

(58) خطأ، حيث في الدالة $y = x^3$ (وهي دالة فردية)، صورة النقطة $(2, 8)$

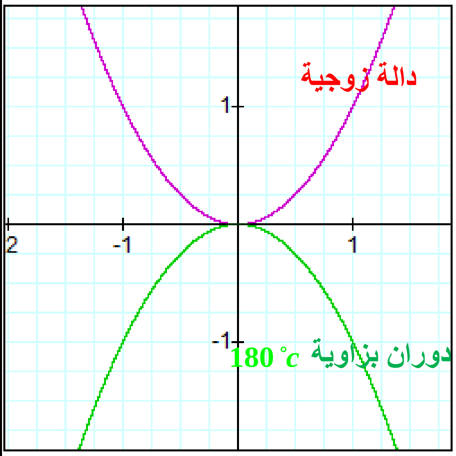
بإنعكاس في المستقيم $y = -x$ هي النقطة $(-8, -2)$

وليست النقطة $(-2, -8)$



---

(59) صحيح، إذا كانت n عدداً زوجياً فإن الدالة تدور مضاعفات $360^\circ c$ وهذا يعيد الدالة إلى موقعها الأصلي وإذا كانت n عدداً فردياً فإن الدالة تدور مضاعفات $180^\circ c$ حول نقطة الأصل وهو دوران مكافىء لإنعكاس حول المحور x الذي يعمل على عكس إشارات y والذي يبقي على الدالة زوجية.



تبرير

(60) $b(x) = a(-x)$

دالة فردية، حيث $b(x)$ إنعكاس للدالة $a(x)$ في المحور y وهي متماثلة حول نقطة الأصل، وعليه فإن الدالة $b(x)$ فردية.

---

(61) $b(x)=-a(x)$

دالة فردية، حيث $b(x)$ إنعكاس للدالة $a(x)$ في المحور y وهي متماثلة حول نقطة الأصل، وعليه فإن الدالة $b(x)$ فردية.

---

(62) $b(x)=[a(-x)]^2$

دالة زوجية. حيث $b(-x)=[a(x)]^2=[-a(-x)]^2=[a(-x)]^2=b(x)$

---

(63) $b(x)=a(|x|)$

دالة زوجية. حيث $b(-x)=a(|-x|)=a(|x|)=b(x)$

---

(64) $b(x)=[a(x)]^3$

دالة فردية. حيث $b(-x)=[a(-x)]^3=[-a(x)]^3=-[a(x)]^3=-b(x)$

تبرير

(65) أحيانا يمثل دالة، منحنى العلاقة المتماثل حول المحور y يمثل دالة أحياناً ومثله منحنى العلاقة المتماثل حول المستقيم $x = 4$ ، لأن المستقيم $x = 4$ هو ازاحة للمحور y بمقدار 4 وحدات إلى اليمين.

(66) لا يمثل دالة. منحنى العلاقة المتماثل حول المحور x لا يمثل دالة ومثله المنحنى المتماثل حول المستقيم $y = 2$، لأن المستقيم $y = 2$ هو انسحاب للمحور x بمقدار وحدتين إلى اعلى.

(67) لا يمثل دالة. منحنى العلاقة المتماثل حول محور x لا يمثل دالة.

اكتب

(68) إذا كانت العلاقة متماثلة حول محور x فإنه يوجد نقطتان على خط رأسي واحد وعلى بعدين متساويين من المحور x. وهذا يعني ان عنصر من المجال الدالة ارتبط بعنصرين من المدى و هذا يخالف تعريف الدالة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتي:

(69) $g(x) = x^2 - 10x + 3$

(a)
$$g(2) = 2^2 - 10(2) + 3$$
$$= 4 - 20 + 3 = -13$$

$$g(-4x) = (-4x)^2 - 10(-4x) + 3$$ (b)

$$= 16x^2 + 40x + 3$$

$$g(1+3n) = (1+3n)^2 - 10(1+3n) + 3$$ (c)

$$= 1 + 9n^2 + 6n - 10 - 30n + 3$$

$$= 9n^2 - 24n - 6$$

$$p(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^2 - 2}$$ **(70)**

$$p(3) = \frac{2(3)^3 + 2}{(3)^2 - 2}$$ (a

$$= \frac{56}{7} = 8$$

$$p(x^2) = \frac{2(x^2)^3 + 2}{(x^2)^2 - 2}$$ (b

$$= \frac{2x^6 + 2}{x^4 - 2}$$

$$p(x+1) = \frac{2(x+1)^3 + 2}{(x+1)^2 - 2}$$ (c

$$= \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 2}{x^2 + 2x + 1 - 2}$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 4}{x^2 + 2x - 1}$$

---

(71) $h(x)=2x^2+4x-7$

(a

$$h(-9)=2(-9)^2+4(-9)-7$$
$$=2\times81-36-7$$
$$=162-43=119$$

(b

$$h(3x)=2(3x)^2+4(3x)-7$$
$$=18x^2+12x-7$$

(c

$$h(2+m)=2(2+m)^2+4(2+m)-7$$
$$=2(4+4m+m^2)+8+4m-7$$
$$=8+8m+2m^2+8+4m-7$$
$$=2m^2+12m+9$$

حدد مجال كل دالة من الدوال الآتية:

(72) $f(x)=x^2-\sqrt{2}$

المجال: $\{x \mid x\in R\}$

---

(73) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$

المجال: $\{x \mid x\neq\pm4\ ,\ x\in R\}$

---

(74) $f(x)=\sqrt{3x+18}$

المجال: $\{x \mid x\geq-6\ ,\ x\in R\}$

بسط كلاً مما يأتي:

(75) $27^{\frac{1}{3}}=\left(3^{\cancel{3}}\right)^{\frac{1}{\cancel{3}}}=3$

(76) $64^{\frac{5}{6}}=\left(2^{\cancel{6}}\right)^{\frac{5}{\cancel{6}}}=2^{5}=32$

(77) $49^{-\frac{1}{2}}=\left(7^{\cancel{2}}\right)^{-\frac{1}{\cancel{2}}}=7^{-1}=\frac{1}{7}$

---

(78) $16^{-\frac{3}{4}}=\left(2^{\cancel{4}}\right)^{-\frac{3}{\cancel{4}}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$

(79) $25^{\frac{3}{2}}=\left(5^{\cancel{2}}\right)^{\frac{3}{\cancel{2}}}=5^{3}=125$

(80) $36^{-\frac{3}{2}}=\left(6^{\cancel{2}}\right)^{-\frac{3}{\cancel{2}}}=6^{-3}=\frac{1}{216}$

تدريب على اختبار

(81) (B $x=\sqrt{n-1}$

(82) (D $1<f(x)<10$

(1-3) الاتصال والنهايات

تحقق من فهمك

(1A) $f(x)=x^3$

* $f(0)=0^3=0$ أي ان الدالة معرّفة عند $x=0$

*

x	-0.999	-0.99	-0.9	0	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	-0.997	-0.970	-0.729	0	0.729	0.970	0.997

يُبين الجدول ان $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

* تُقدر قيمة $\lim\limits_{x\to 0}(x^3)$ بالعدد 0 وبما أن $f(0)=0$ ، نستنتج أن $f(x)$ متصلة عند $x=0$

(1B) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & ,x<0 \\ x & ,x\ge 0 \end{cases}$

* $f(0)=x=0$، أي أن الدالة معرّفة عند $x=0$

*

x	-0.999	-0.99	-0.9	0	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	-1.001	-1.010	-1.11	0	0.9	0.99	0.999

يُبين الجدول ان $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

* تُقدر قيمة $\lim_{x\to 0}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{x}\\ x\end{matrix}\right.$ بالعدد 0 وبما ان $f(0)=0$ ، نستنتج ان $f(x)$ متصلة عند $x=0$

تحقق من فهمك

$(2A)$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ عندما $x=0$

(1) $f(0)$ غير موجودة

(2)

x	-0.999	-0.99	-0.9	0	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	1.002	1.020	1.245		1.245	1.020	1.002

* يتبين من الجدول أن $\lim_{x\to 0} f(x) \approx 1.245$

(3) $f(x)$ غير متصلة عند $x=0$ لأن $f(0)$ غير موجودة وبما أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة

فإن عدم الإتصال يكون قابل للإزالة عند $x=0$

($2B$) $f(x)=\begin{cases}5x+4 & , \; x>2 \\ 2-x & , \; x\le 2\end{cases}$ عندما $x=2$

(1) $f(2)=2-2=0$

(2)

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0	14.005	14.05	14.5

* يتبين من الجدول أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

(3) بما أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ $f(x)$ غير متصلة عدم اتصال غير قابل للإزالة $x=2$

تحقق من فهمك

أعد تعرف الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ لتصبح متصلة عند $x=1$

(1 $f(1)=\dfrac{0}{0}$

(2 ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 1

x	−2	−1	.999	1	1.001	3	4
$f(x)$	−1	0	1.999		2001	4	5

يظهر في الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 2 عندما تقترب x من 1 من الجهتين أي أن

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

$f(x)$ غير متصلة عند $x=1$ لأن $f(1)$ غير موجودة وبما أن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجودة فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=1$

(3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$$

تحقق من فهمك

$4A$) $f(x)=x^3+2x^2-8x+3$ في الفترة $[-6,4]$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-93	-32	3	18	19	12	3	-2	3	24	67

بما أن $f(-5)$ سالبة و $f(-4)$ موجبة $\therefore$ يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[-5,-4]$

وكذلك يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,1]$ والفترة $[1,2]$

$4B$) $f(x)=\dfrac{x^2-6}{x+4}$ في الفترة $[-3,4]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	-1.67	-1.5	-1	-0.33	0.43	1.25

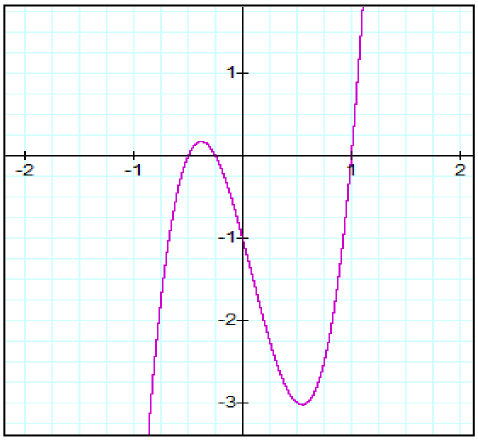
بما أن $f(-3)$ موجبة و $f(-2)$ سالبة $\therefore$ يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[-3,-2]$

وكذلك يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[2,3]$

تحقق من فهمك

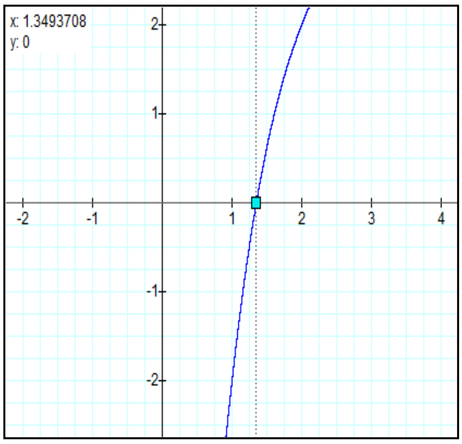
$(5A)$ $f(x)=8x^3-2x^2-5x-1$ في الفترة $[-5,5]$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1026	-525	-220	-63	-6	-1	0	45	182	459	924



* من الرسم يتضح وجود صفرين حقيقيين للدالة في الفترة

$[-1,0]$ وكذلك يوجد صفر للدالة عند $x=1$



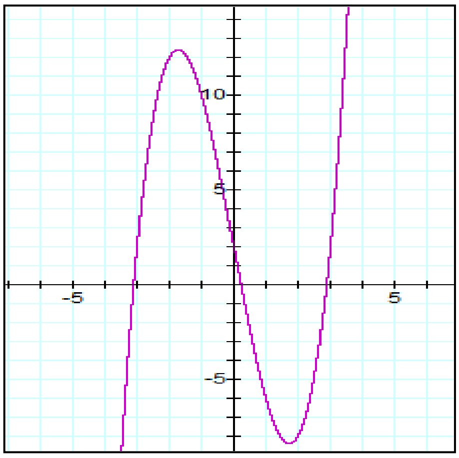
$(5B)$ $f(x)=x^3-7x^2+18x-14$ في الفترة $[0,4]$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-14	-2	2	4	10

بما أن $f(1)$ سالبة و $f(2)$ موجبة

$\therefore$ يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[1,2]$

تحقق من فهمك



$$g(x)=x^3-9x+2 \quad (6A)$$

التحليل البياني:

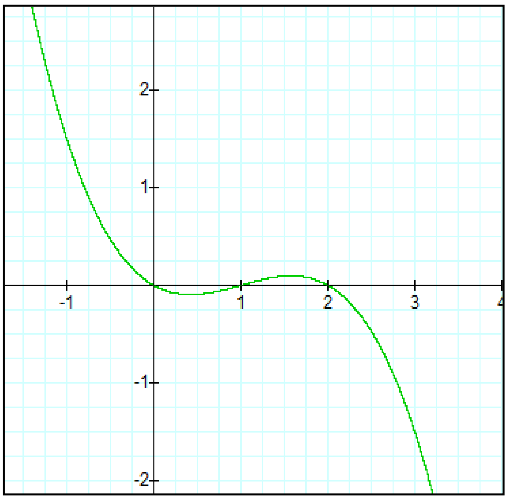
يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$

وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

التعزيز العددي:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$g(x)$	$-1\cdot10^{12}$	$-1\cdot10^{9}$	$-1\cdot10^{6}$	2	$1\cdot10^{6}$	$1\cdot10^{9}$	$1\cdot10^{12}$

لاحظ أنه عندما $x\to\infty$ فإن $g(x)\to\infty$ وبالمثل عندما $x\to-\infty$ فإن $g(x)\to-\infty$



$$f(x)=\frac{-x^3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x}{2} \quad (6B)$$

التحليل البياني:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

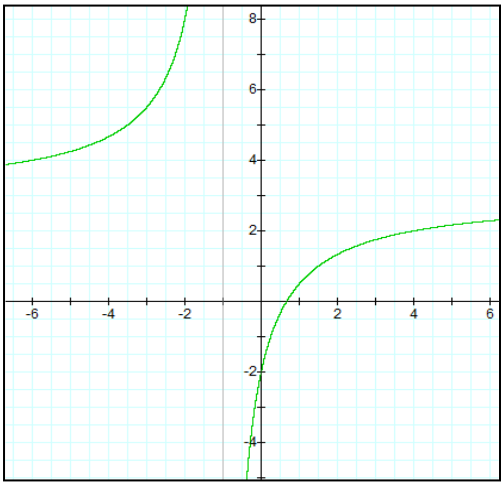
وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

التعزيز العددي:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$g(x)$	$2\cdot10^{11}$	$2\cdot10^{8}$	$3\cdot10^{5}$	0	$-2\cdot10^{5}$	$-2\cdot10^{8}$	$-2\cdot10^{11}$

لاحظ أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to-\infty$ وبالمثل عندما $x\to-\infty$ فإن $g(x)\to\infty$

تحقق من فهمك



$$(7A)\_\ f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$$

التحليل البياني:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$

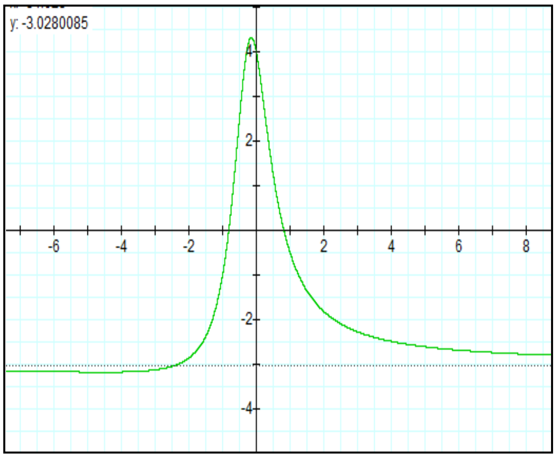
وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

التعزيز العددي:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$g(x)$	3.0005	3.005	3.5	-2	2.95	2.99	2.9995

لاحظ أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to3$ وبالمثل عندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to3$

$(7B)$ $f(x)=\dfrac{-6x^2+4}{2x^2+x+1}$



التحليل البياني:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-3$

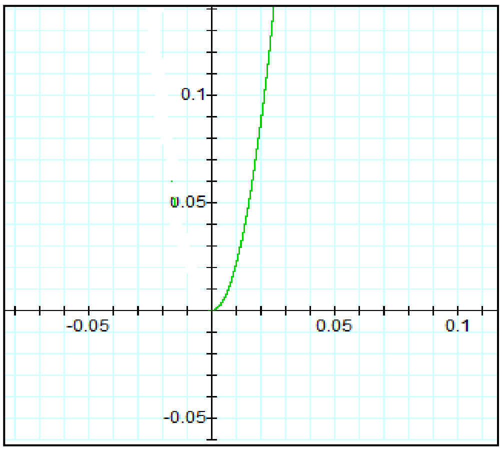
وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$

التعزيز العددي:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$g(x)$	-3.0001	-3.001	-3.1	4	-2.98	-2.99	-2.9998

لاحظ أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to-3$ وبالمثل عندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to-3$

تحقق من فهمك



(8) فيزياء:

$q(v)=\dfrac{\rho v^2}{2}$

حيث أن ρ ثابت يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $v\to\infty$ فإن $q(v)\to\infty$ وعندما

$v=0$ فإن $q(v)=0$

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت كل دالة ما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة وبرر إجابتك بإستعمال اختبار الاتصال إذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال: لا نـهائي، قفزي، قابل للازالة

(1) الدالة معرّفة عند $x=-5$ ، وتؤول قيم الدالة إلى 3.61 عندما تقترب x من 8 من الجهتين، $f(8)=3.61$ ، والدالة متصلة عند 8

(2) الدالة معرّفة عند $x=8$ ، وتؤول قيم الدالة إلى 3.61 عندما تقترب x من 8 من الجهتين، $f(8)=3.61$ ، والدالة متصلة عند 8

(3) الدالة غير متصلة اتصال قابل للازالة عند $x=-b$، الدالة معرّفة عند $x=b$ تقترب قيم الدالة إلى 0 عندما تقترب x من 0 من الجهتين، $h(6)=0$ الدالة متصلة عند $x=6$

(4) الدالة غير متصلة إتصال لا نـهائي عند $x=1$

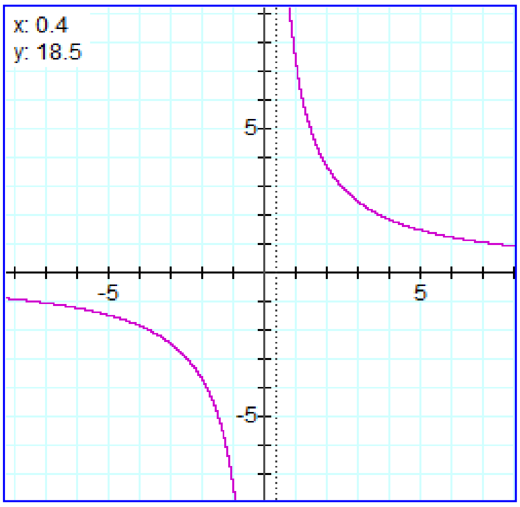
(5) الدالة غير متصلة إتصال قابل للازالة عند $x=4$، والدالة غير متصلة إتصال لا نـهائي عند $x=1$، وقيم الدالة تقترب من $\frac{1}{3}$ عند $x\to 4$ من الجهتين

(6) الدالة غير متصلة إتصال لا نـهائي عند $x=0$، والدالة معرّفة عند $x=6$، وقيم الدالة تقترب من 0 عند $x\to 6$ من الجهتين، $h(6)=0$، الدالة متصلة عند $x=6$

(7) الدالة غير متصلة اتصال قفزي عند $x=-6$، حيث $f(x)=6$ تقترب من -25 عندما تقترب x من -6 من جهة اليسار وتقترب من 8 عندما تقترب $x\to -6$ من جهة اليمين

فيزياء:

(8) $f(\omega)=\dfrac{7.4}{\omega}$



(a) الدالة متصلة

التبرير (1) $f(0.4)=18.5$

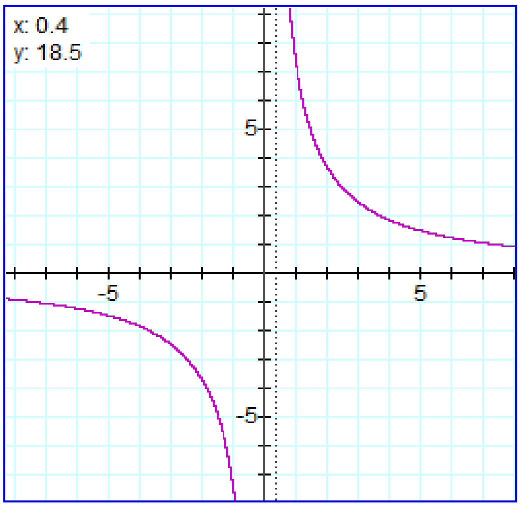
ω	0.39	0.399	0.3999	0.4	0.4001	0.401	0.41
$f(\omega)$	18.9	18.54	18.505	18.5	18.495	18.45	18.05

(2) يتبين من الجدول أن $\lim\limits_{x\to 0.4} f(\omega)=18.5$

(3) $f(\omega)$ متصلة عند $\omega=0.4$ لإن $\lim\limits_{x\to 0.4} f(\omega)=f(0.4)=18.5$

(b) يتضح من الرسم البياني أن الدالة غير متصلة (لا نهائي) عند $\omega=0$ لإن الدالة تقترب من قيمتين مختلفتين على يمين ويسار العدد 0

(c)



---

9)

أعد تعرف الدالة $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ لتصبح متصلة عند $x=-3$

1- $f(-3)=\frac{0}{0}$

2- ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001		-5.999	-5.99	-5.9

يظهر في الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من -6 عندما تقترب x من -3 من الجهتين أي أن

$$\lim_{x\to -3} f(x)=-6$$

$f(x)$ غير متصلة عند $x=-6$ لأن $f(-3)$ غير موجودة وبما أن $\lim_{x\to -3} f(x)$ موجودة فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=-3$

-3

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3} & x\neq -3\\ -6, & x=-3\end{cases}$$

(10

أعد تعرف الدالة $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ لتصبح متصلة عند $x=5$

-1 $f(5)=\frac{0}{0}$

-2 ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 5

x	4.9	4.99	4.999	5	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	9.9	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1

يظهر في الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 10 عندما تقترب x من 5 من الجهتين أي أن

$\lim_{x\to 5} f(x)=10$

$f(x)$ غير متصلة عند $x=10$ لأن $f(5)$ غير موجودة وبما أن $\lim_{x\to 5} f(x)$ موجودة فإن

عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=5$

-3

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-25}{x-5} & x\neq 5\\ 10, & x=5\end{cases}$$

(11

أعد تعرف الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لتصبح متصلة عند $x=\sqrt{2}$

-1 $f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{0}{0}$

-2 ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من $\sqrt{2}$

x	$\sqrt{1.9}$	$\sqrt{1.99}$	$\sqrt{1.999}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2.001}$	$\sqrt{2.01}$	$\sqrt{2.1}$
$f(x)$	2.792	2.825	2.82807		2.82878	2.832	2.863

يظهر في الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 2.8285 عندما تقترب x من $\sqrt{2}$ من الجهتين أي أن

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)=2.8285$$

$f(x)$ غير متصلة عند $x=2.8285$ لأن $f\left(\sqrt{2}\right)$ غير موجودة وبما أن $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)$ موجودة فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=\sqrt{2}$

-3

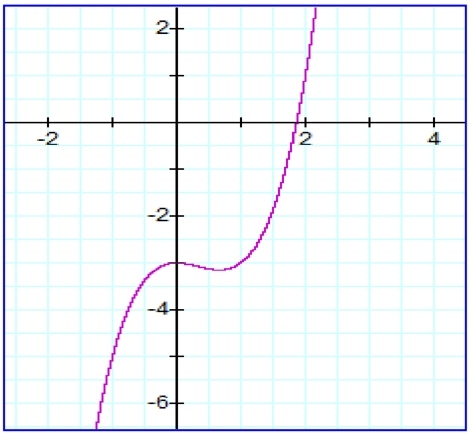
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & x\neq\sqrt{2}\\ 2.8285, & x=\sqrt{2}\end{cases}$$

* حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي ينحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة

في الفترة المعطاة

(12) $f(x) = x^3 - x^2 - 3$ في الفترة $[-2,4]$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-15	-5	-3	-3	1	15	45

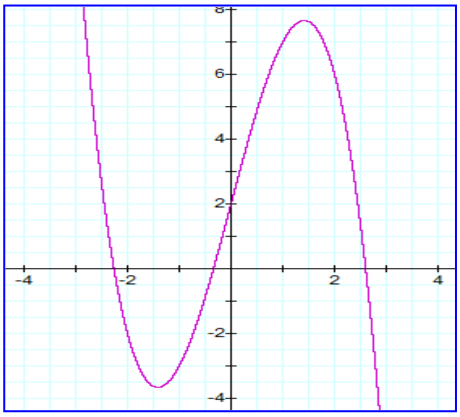


بما أن $f(1)$ سالبة و $f(2)$ موجبة

$\therefore$ يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[1,2]$

(13) $g(x) = -x^3 + 6x + 2$ في الفترة $[-4,4]$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	42	11	-2	-3	2	7	6	-7	-38

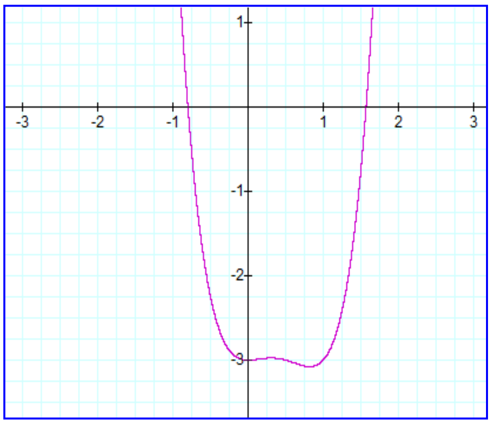


بما أن $g(-3)$ موجبة و $g(-2)$ سالبة $\therefore$ يوجد صفر للدالة $g(x)$ في الفترة $[-3,-2]$

وكذلك يوجد صفر للدالة $g(x)$ في الفترة $[-1,0]$ و الفترة $[2,3]$

---

(14) $f(x)=2x^4-3x^3+x^2-3$ في الفترة $[-3,3]$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	249	57	3	-3	-3	9	87

بما أن $f(-1)$ موجبة و $f(0)$ سالبة ∴ يوجد صفر للدالة

$f(x)$ في الفترة $[-1,0]$ وكذلك يوجد صفر للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,1]$

(15) $h(x)=\dfrac{x^2+4}{x-5}$ في الفترة $[-2,4]$

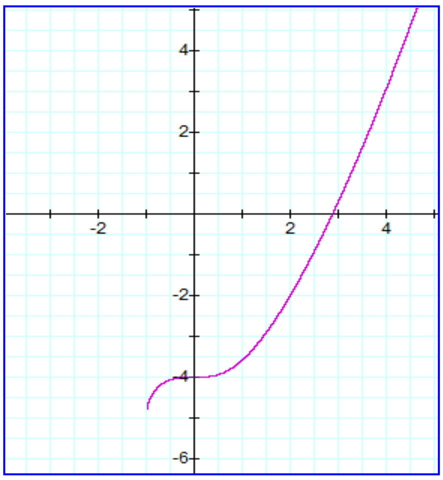
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x)$	-1.14	-0.83	-0.8	-1.25	-2.67	-6.5	-20

من بيانات الجدول ومن الرسم البياني يتضح أنه لا يوجد أصفار

للدالة $h(x)$

---

(16) $g(x)=\sqrt{x^3+1}-5$ في الفترة $[0,5]$



x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	-4	-3.59	-2	0.29	3.06	6.22

بما أن $g(2)$ موجبة و $g(3)$ سالبة ∴ يوجد صفر للدالة

$g(x)$ في الفترة $[2,3]$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عددياً:

(17) واضح من الرسم أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$ وكذلك $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$4\cdot10^{16}$	$4\cdot10^{12}$	$4\cdot10^{8}$	0	$4\cdot10^{8}$	$4\cdot10^{12}$	$4\cdot10^{16}$

---

(18) واضح من الرسم أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$ و $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	$5\cdot10^{12}$	$5\cdot10^{9}$	-1	$-5\cdot10^{9}$	$-5\cdot10^{12}$

---

(19) واضح من الرسم أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$ وكذلك $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	-9995	-995	-0.333	1005	10005

---

(20) واضح من الرسم أن $f(x) \to -4$ عندما $x \to \infty$ وكذلك $f(x) \to -4$ عندما $x \to -\infty$

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	-3.998	-3.981	-0.833	-4.019	-4.001

---

(21) واضح من الرسم أن $f(x)\to\infty$ عندما $x\to\infty$ وكذلك $f(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	-5000	-500	غير معرفة	499.7	4999.7

---

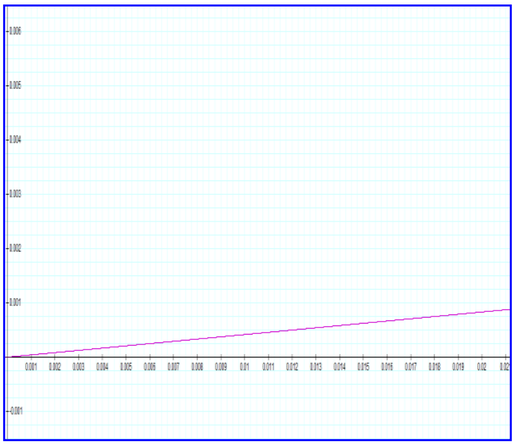
(22) واضح من الرسم أن $f(x)\to-2$ عندما $x\to\infty$ وكذلك $f(x)\to-2$ عندما $x\to-\infty$

x	-1000	-10	0	10	1000
$f(x)$	-1.999999	-1.99	-5	-1.98	-1.999999

---

(23) كيمياء:

(a)



(b) يبين سلوك طرفي التمثيل البياني أنه إذا زاد تركيز العامل المساعد فإن معدل التفاعل الكيميائي يقترب من 0.5

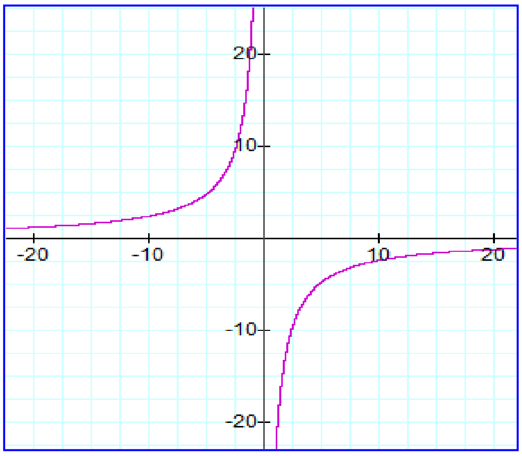
x	0	100	1000	10000
$R(x)$	0	0.446	0.494	0.499

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما تقترب x من ∞. برر إجابتك.

24) $f(u)=\frac{12}{u}$

عندما $u\to\infty$ فإن $f(u)\to 0$

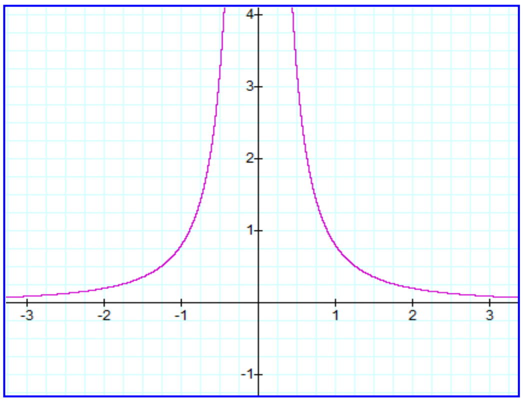
وعندما $u\to-\infty$ فإن $f(u)\to 0$



(25) $q(x)=-\frac{24}{x}$

من الرسم البياني عندما $x\to\infty$ فإن $q(x)\to 0$

وعندما $x\to-\infty$ فإن $q(x)\to 0$



(26) $f(x)=\frac{0.8}{x^2}$

من الرسم البياني يتضح أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to 0$

وعندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to 0$

(27) $h(r)=\frac{-1}{r^2+1}$

عندما $r\to\infty$ فإن $h(r)\to 0$

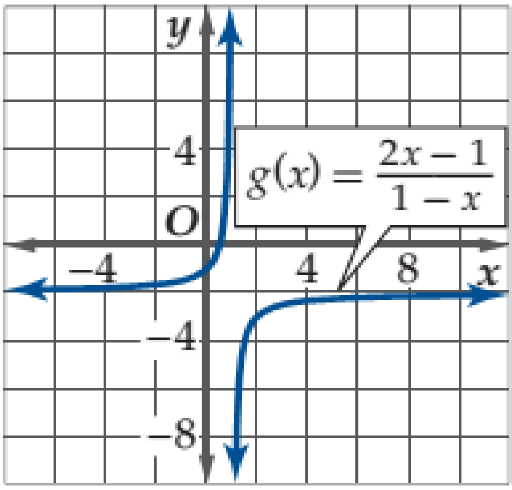
وعندما $r\to-\infty$ فإن $h(r)\to 0$

فيزياء:

(28) $E(m)=\frac{p^2}{2m}$

عند تزايد كتلة الجسم تقترب طاقة حركة السيارة من 0

استعمل التمثيل البياني لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحني لوصف سلوك طرفي التمثيل.

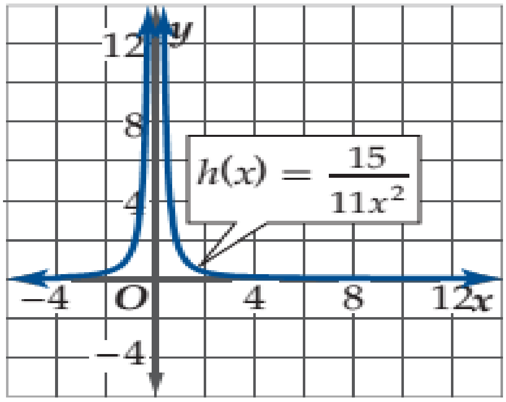


(29) الدالة غير متصلة عند $x=1$ اتصال غير نهائي

حيث أن الدالة غير معرفة عند $x=1$

سلوك طرفي الدلة:

من الرسم البياني يتضح أنه عندما $x\to\infty$ فإن
$g(x)\to-2$ وعندما $x\to-\infty$ فإن $g(x)\to-2$



(30) الدالة غير متصلة عند $x=0$ عدم اتصال لا نهائي

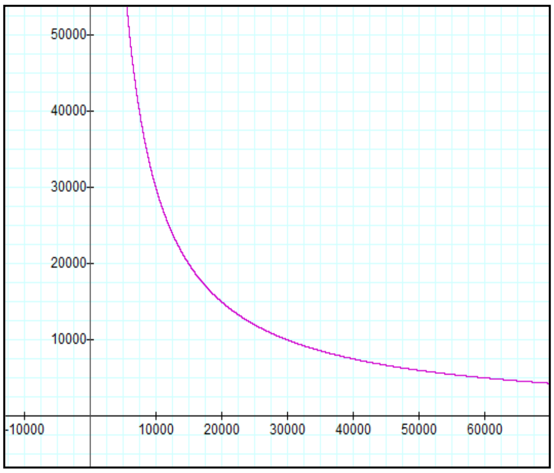
حيث أن الدالة غير معرفة عند $x=0$

سلوك طرفي الدلة:

من الرسم البياني يتضح أنه عندما $x\to\infty$ فإن
$h(x)\to0$ وعندما $x\to-\infty$ فإن $h(x)\to0$

(31) **فيزياء:**

(a) $f(\lambda)=\dfrac{c}{\lambda}$

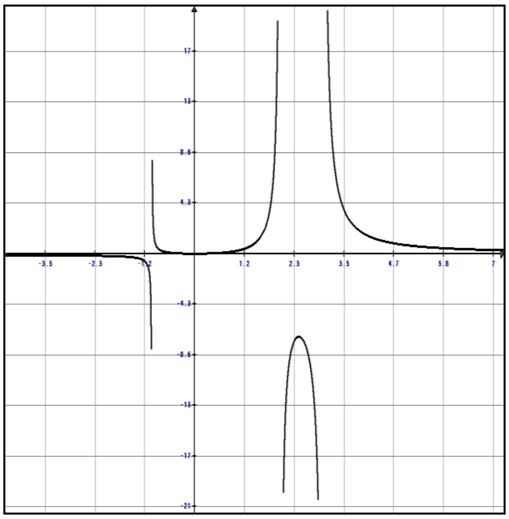


(b) **سلوك طرفي الدلة:**

من الرسم البياني يتضح أنه عندما $\lambda \to \infty$ فإن $f(\lambda)\to 0$ وعندما $\lambda \to 0$ فإن $f(\lambda)\to \infty$

(c) الدالة غير متصلة عند $\lambda = 0$

الحاسبة البيانية:



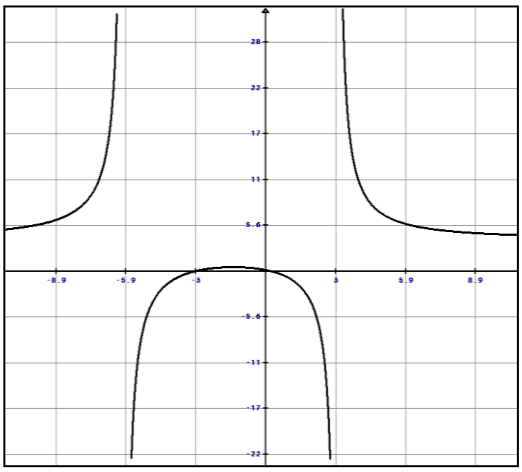
(32) **الإتصال:** الدالة غير متصلة، عدم اتصال لانهائي عند $x=3$ ، $x=2$ ، $x=-1$

سلوك طرفي الدالة:

$f(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$

، $f(x)\to 0$ عندما $x\to-\infty$

الأصفار: للدالة صفر حقيقي عند $x=0$



(33) **الإتصال:** الدالة غير متصلة، عدم اتصال لانهائي عند $x=3$ ، $x=-6$

سلوك طرفي الدالة:

$h(x)\to 4$ عندما $x\to\infty$

، $h(x)\to 4$ عندما $x\to-\infty$

الأصفار: للدالة صفر حقيقي عند $x=0.25$ ، $x=-3$

---

(34) الإتصال: الدالة غير متصلة، عدم اتصال لا نهائي عند

$x=-4$ ، $x=3$

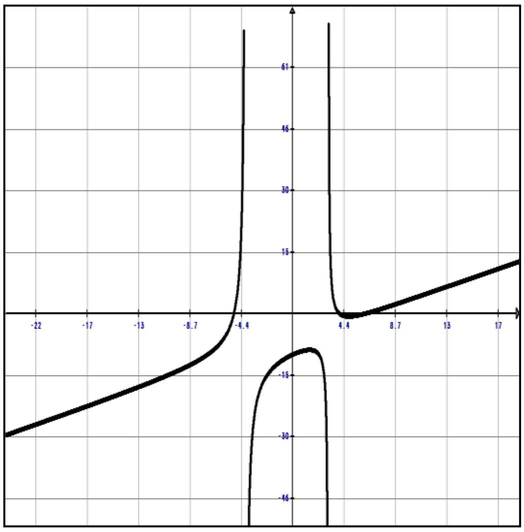
سلوك طرفي الدالة:

$h(x)\to\infty$ عندما $x\to\infty$

، $h(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$

الأصفار: للدالة صفر حقيقي عند

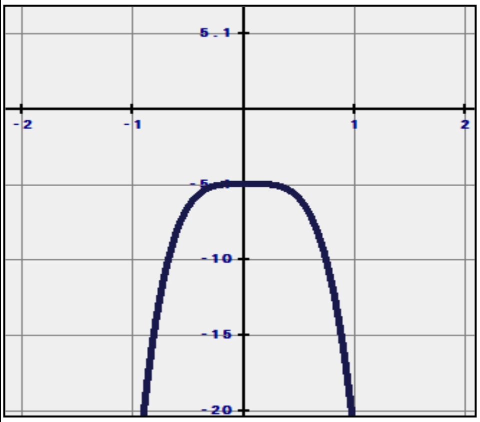
$x=-5$ ، $x=4$ ، $x=6$



الحاسبة البيانية:

(35) واضح من الرسم أن $g(x)\to-\infty$ عندما $x\to\infty$

وكذلك $g(x)\to-\infty$ عندما $x\to-\infty$

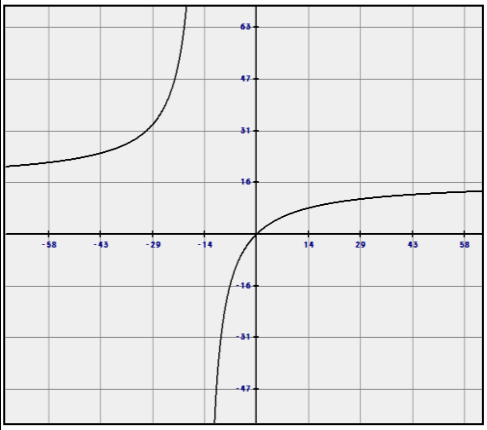


x	-1000	-100	0	100	1000
$g(x)$	$-1\cdot10^{15}$	$-1\cdot10^{10}$	-5	$8\cdot10^{9}$	$9.8\cdot10^{14}$

---

(36) واضح من الرسم أن $f(x)\to16$ عندما $x\to\infty$

وكذلك $f(x)\to16$ عندما $x\to-\infty$



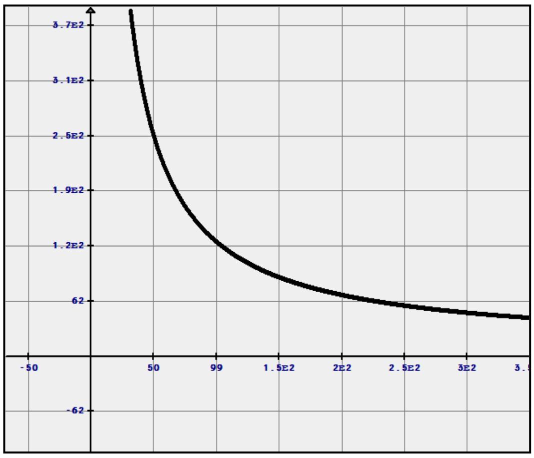
x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	16.02	16.24	غير معرفة	15.76	15.97

أعمال:

(37)

(a) $$f(n)=\frac{9n+12000}{n}$$

(b)



(c) عندما تزيد عدد القمصان بشكل كبيرجداً ($n\to\infty$)
فإن تكلفة القميص الواحد تساوي 9 ريالات.

تمثيلات متعددة:

(38) (a)

$$f_1(x)=\frac{3x^3+2}{x^3+4}$$

$$f_2(x)=\frac{-x^3+5}{x^3+7}$$

$$f_1(x)=\frac{9x^3-6}{x^3+8}$$

$c=1$				
a	b	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
-1	5	7	-1	-1
9	-6	8	9	9

(b) $$f(x)=\frac{ax^3+b}{cx^3+d}$$

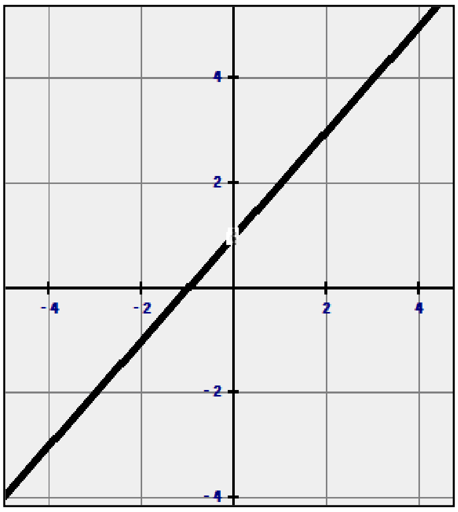
a	b	c	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
6	5	3	1	2	2
3	4	12	13	0.25	0.25
7	1	7	-4	1	1

(c) نـهاية الدالة $f(x)=\frac{ax^3+b}{cx^3+d}$ عند $x\to\infty$ ، $x\to-\infty$ تساوي $\frac{a}{c}$

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير:

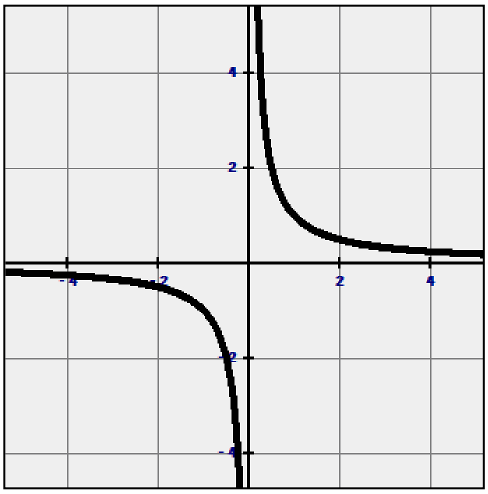
(39) $f(x)=\frac{x^5+x^6}{x^5}$



من الرسم البياني الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x=0$
(عدم إتصال قابل للإزالة) لإن $f(0)$ غير موجودة

---

(40) $f(x)=\frac{x^4}{x^5}$



من الرسم البياني الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x=0$
(عدم إتصال لا نـهائي) لإن $f(0)$ غير موجودة كما أن الدالة كلما اقتربت x من 0 من الجهتين فإن $f(x)$ تقترب من ∞ ، $-\infty$

---

(41) تحد:

$a=9$ ، $b=3$

تبرير: أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ في كل الحالات الآتية، وبرر إجابتك.

(42) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

بما أن $f(x)$ دالة زوجية فإن التمثيل البياني عند $x=-\infty$ يكون مشابهاً للتمثيل البياني وعند $x=\infty$

(43) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

بما أن $f(x)$ دالة فردية فإن التمثيل البياني عند $x = -\infty$ يكون معاكساً لسلوكها عند $x = \infty$

---

(44) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

بما أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل فإن التمثيل البياني عند $x = -\infty$ يكون معاكساً لسلوكها عند $x = \infty$ حيث أن $(x, y) \to (-x, -y)$

---

(45) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

بما أن الدالة متماثلة حول محور y لذا فإن التمثيل البياني عند $x = -\infty$ يكون مشابهاً للتمثيل البياني عند $x = \infty$ حيث أن $f(x) = f(-x)$

---

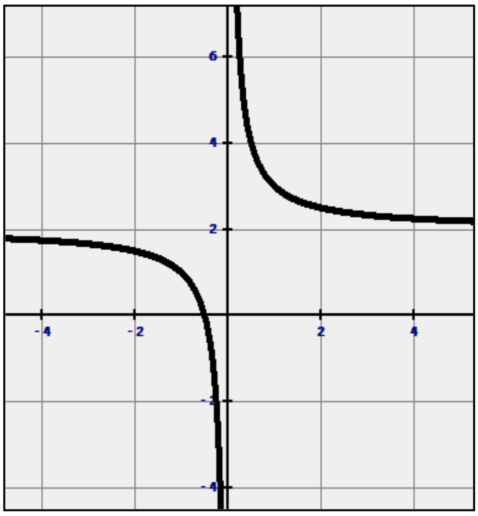
(46) أكتب:

الدالة $f(x) = \frac{x(x+3)}{x}$ عدم إتصال قابل للإزالة عند $x = 0$ ويمكن إزالتة عن طريق قسمة كلاً من البسط والمقام على x فتصبح دالة أخري $g(x) = (x+3)$

الدالة $f(x)$ تختلف عن الدالة $g(x)$ لأن $f(0)$ غير معرفة ولكن $g(0) = 3$

مراجعة تراكمية:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كل من الدوال الآتية بيانياً، وتحديد أصفارها.
ثم تحقق من إجابتك جبرياً.



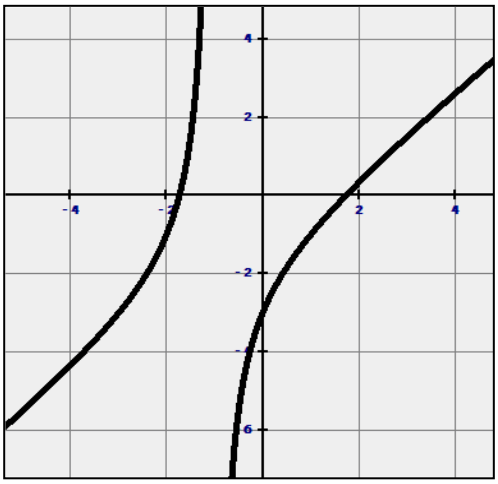
(47) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$

جبرياً:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x}=0$$

$$\therefore\ 2x+1=0\quad \therefore\ 2x=-1$$

$$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$$



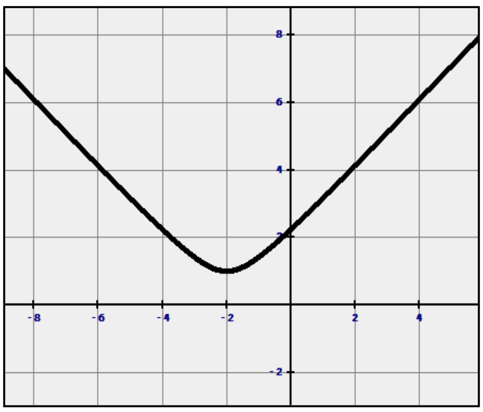
(48) $g(x)=\dfrac{x^2-3}{x+1}$

جبرياً:

$$g(x)=\frac{x^2-3}{x+1}=0$$

$$\therefore\ x^2-3=0\quad \therefore\ x^2=3$$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$$



(49) $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

من الرسم البياني يتضح أنه
لا يوجد أصفار للدالة.

حدد مجال الدالة لكل من الدوال الآتية:

(50) $f(x)=\dfrac{4x+6}{x^2+3x+2}$

المجال: $(-\infty,-2)\cup(2,-1)\cup(-1,\infty)$

(51) $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2-2x-10}$

المجال: $\left(-\infty,1-\sqrt{11}\right)\cup\left(1-\sqrt{11},1+\sqrt{11}\right)\cup\left(1+\sqrt{11},\infty\right)$

(52) $g(a)=\sqrt{2-a^2}$

المجال: $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

إذا كانت $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-3x+1}$ فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

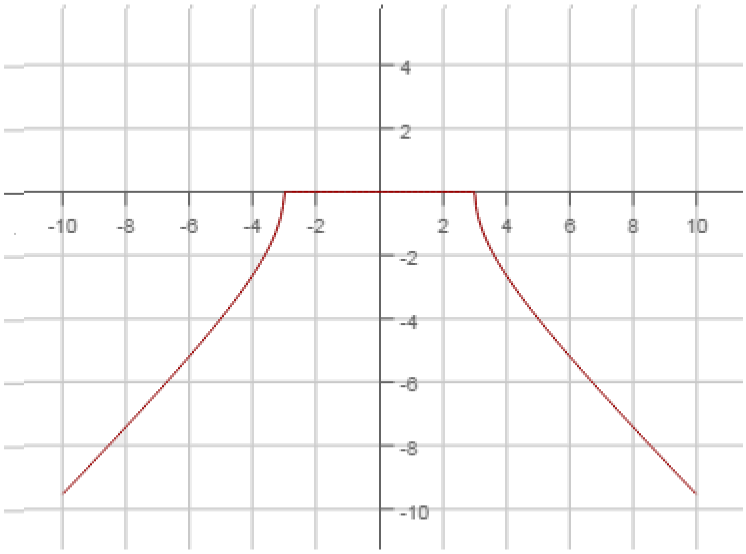
(53) $f(9)=\dfrac{2\cdot9-5}{9^2-3\cdot9+1}=\dfrac{13}{55}$

(54) $$f(3b)=\frac{2(3b)-5}{(3b)^2-3(3b)+1}=\frac{6b-5}{9b^2-9b+1}$$

(55)

$$f(2a-3)=\frac{2(2a-3)-5}{(2a-3)^2-3(2a-3)+1}=\frac{4a-6-5}{4a^2-12a+9-6a+9+1}$$
$$=\frac{4a-11}{4a^2-18a+19}$$

مثل بيانياً كل من الدوال الآتية باستخدام الحاسبة البيانية، ثم حلل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبرياً. وإن كانت زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها.



(56

$$h(x)=\sqrt{x^2-9}$$
$$\sqrt{x^2-9}=0$$
$$x=\pm 3$$

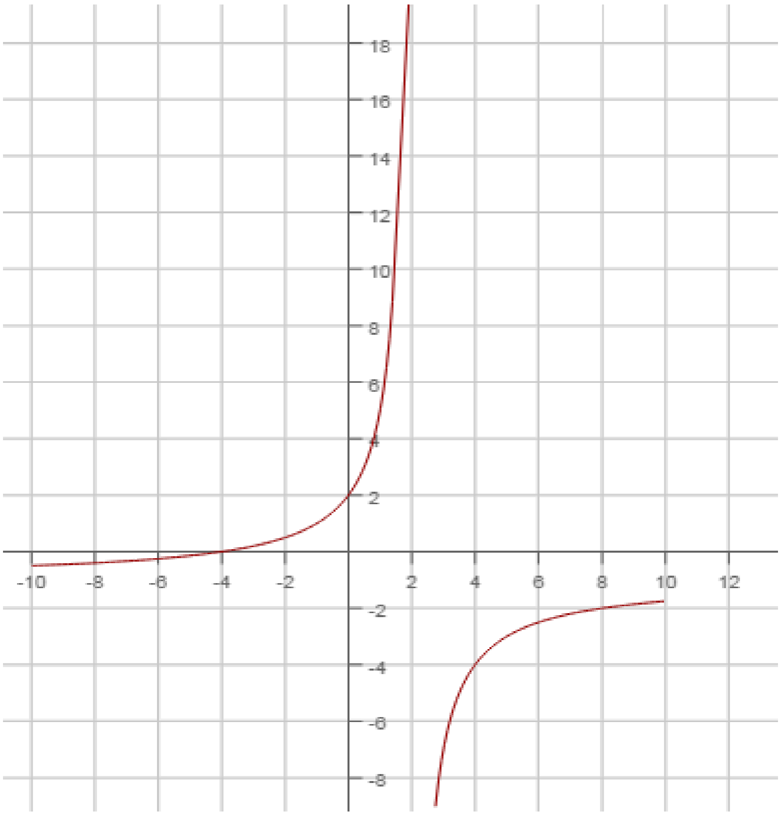
الدالة متماثلة حول المحور y

$$h(-x)=\sqrt{(-x)^2-9}$$
$$\sqrt{x^2-9}=0$$
$$x=\pm 3$$

$$h(x)=h(-x)$$

لذا فهي دالة زوجية

(57) $$g(x)=x^6-3$$



$$f(x)=\frac{x+4}{x-2}$$

$$f(x)=0$$

$$x=-4$$

$$f(-x)=\frac{-x+4}{-x-2}$$

$$f(x)=0$$

$$x=4$$

$$f(x)\neq f(-x)$$

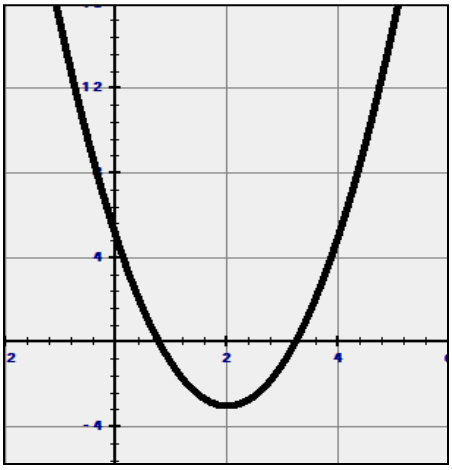
ليست زوجية أو فردية

تدرب على الاختبار:

(58) D 4

(59) A $[6,7]$

(1-4)القيم القصوى ومتوسط معدل التغير



$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ (**1A**)

يبين الرسم البياني أن الدالة f متناقصة في الفترة $(-\infty, 2)$

ومتزايدة في الفترة $(2, \infty)$

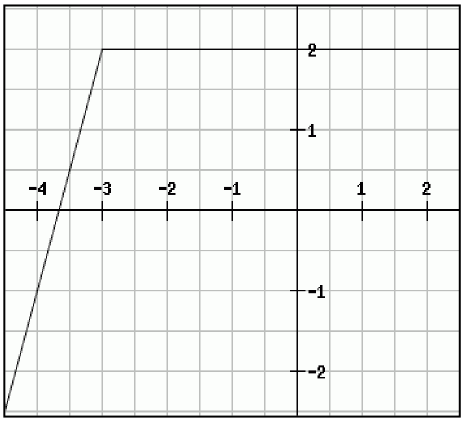
الفترة $(2, \infty)$

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	−3	5	29	69	125	197

الفترة $(-\infty, 2)$

x	−8	−6	−4	−2	0	2
$f(x)$	197	125	69	29	5	−3

(**1B**)



$$h(x) = \begin{cases} 3x + 11 & , \ x < -3 \\ 2 & , \ x \geq -3 \end{cases}$$

يبين الرسم البياني أن الدالة h متزايدة في الفترة $(-\infty, -3)$

وثابتة على الفترة $(-3, \infty)$

الفترة $(-3, \infty)$

x	−3	−2	−1	0	1	2
$h(x)$	2	2	2	2	2	2

الفترة $(-\infty, -3)$

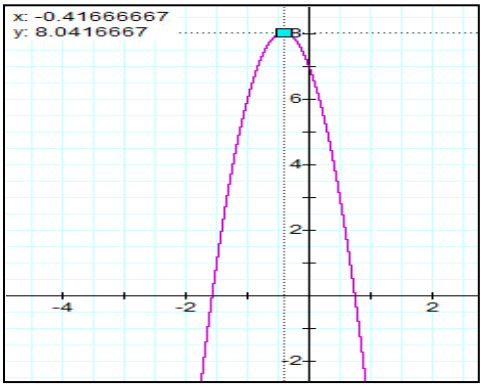
x	−8	−7	−6	−5	−4	−3
$h(x)$	−13	−10	−7	−4	1	2

$f(x) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x$ (**2A**)

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x=-1.5$، ومقدارها 2 كما توجد قيمة صغرى محلية عند $x=-0.5$، ومقدارها -0.3 كما توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x=1$، ومقدارها 3

$$g(x)=x^5-2x^4-2x^3+3x^2 \quad (2B)$$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x=-1.5$، ومقدارها 2 كما توجد قيمة صغرى محلية عند $x=-0.5$، ومقدارها -0.3 كما توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x=1$، ومقدارها 3



$$h(x)=7-5x-6x^2 \quad (3A)$$

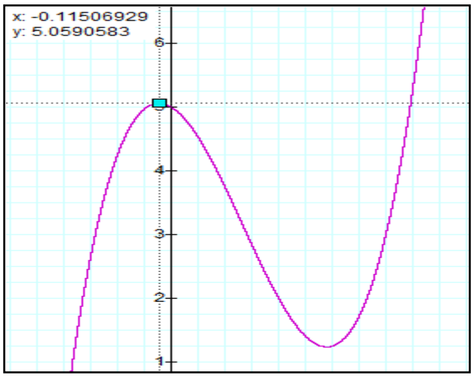
من الرسم البياني يتضح أنه يوجد للدالة قيمة عظمى مطلقة عند النقطة $(-0.42, 8.04)$

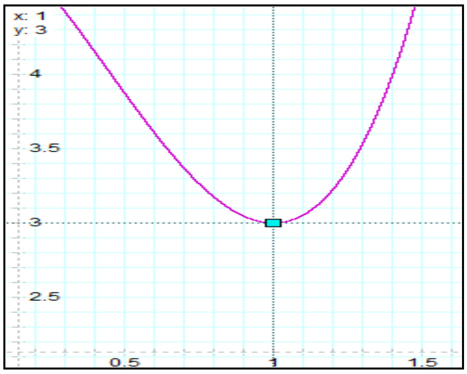
$$g(x)=2x^3-4x^2-x+5 \quad (3B)$$

من الرسم البياني يتضح أنه يوجد للدالة

قيمة عظمي محلية عند $(-0.12, 5.06)$

وقيمة صغري محلية عند $(1, 3)$

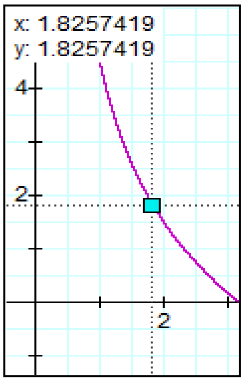




(4) **صناعة:**

نصف القطر حوالى $1.83 \ in$

الإرتفاع حوالي $1.83 \ in$



($5A$) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ في الفترة $[2, 3]$

$$m_{\sec} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

$$= \frac{(3)^3-2(3)^2-3(3)+2-(2)^3+2(2)^2+3(2)-2}{1}$$

$$= \frac{6}{1} = 6$$

(**5B**) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x$ في الفترة $[-5,-3]$

$$m_{\sec} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{f(-3)-f(-5)}{-3+5}$$

$$= \frac{(-3)^4-6(-3)^2+4(-3)-(-5)^4+6(-5)^2-4(-5)}{2}$$

$$= \frac{-440}{2} = -220$$

(**6**) $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$ من 0.5 الي 1 ثانية

$$m_{\sec}=\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$$

$$=\frac{d(1)-d(0.5)}{1-0.5}$$

$$=\frac{-16(1)^2+20(1)+4+16(0.5)^2-20(0.5)-4}{0.5}$$

$$=\frac{-2}{0.5}=-4 \quad ft/\sec$$

سرعة الجسم تتناقص في الفترة من 0.5 الي 1 ثانية.

تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقرباً إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزز إجابتك عددياً:

(1) $f(x)=x^3-x^2-2x+3$

متزايدة في الفترة $(-\infty,-0.5)$، ومتناقصة في الفترة $(-0.5,1)$،

و متزايدة في الفترة $(1,\infty)$

---

(2) $f(x)=x^4-3x^3-x+1$

متناقصة في الفترة $(-\infty,2.5)$، ومتزايدة في الفترة $(2.5,\infty)$

---

(3) $f(x)=\frac{x-2}{x}$

متزايدة في الفترة $(-\infty,0)$، ومتزايدة في الفترة $(0,\infty)$

---

(4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,x\ge 0\\ -\sqrt{-x} & ,x<0\end{cases}$

متزايدة في الفترة $(-\infty,\infty)$

---

(5) <u>كرة سلة</u>:

$f(t)=-64.4t^2+48.3t+5$

(a)

(b) أقصي أرتفاع يصل إلية المنحنى $14.06\ ft$

قدّر قيم x التي يكون لكلّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقرباً إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًّا.

(6) $f(x)=x^5-3x^4+2x^2$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية ومقدارها 0.25 عند $x=0.5$، $x=-0.5$، كما توجد قيمة صغري محلية عند $x=2.5$، ومقدارها -9 كما لها قيمة صغري محلية عند $x=0$، ومقدارها 0

---

(7) $f(x)=-x^4+4x^2-1$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية ومقدارها 3 عند $x=1.5$، $x=-1.5$، كما توجد قيمة صغري محلية عند $x=0$، ومقدارها -1

---

(8) $f(x) = -x^5 + 10x^3$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغري محلية ومقدارها -58.8 عند $x = -2.5$، كما توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2.5$، ومقدارها 58.8

(9) $f(x) = x^6 - 20x^4 + 3x^3$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغري محلية ومقدارها -1043 عند $x = 3.5$، كما توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3.5$، ومقدارها -1335، ولها قيمة عظمى محلية عند $x = 0$، ومقدارها 0

---

(10) $f(x) = -x^5 + 4x^4 - 4x^3$

يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغري محلية ومقدارها -1 عند $x = 1$، كما توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2$، ومقدارها 0

---

(11) $f(x) = -0.5x^4 + 2.5x^3 + x^2 - 6.5x$

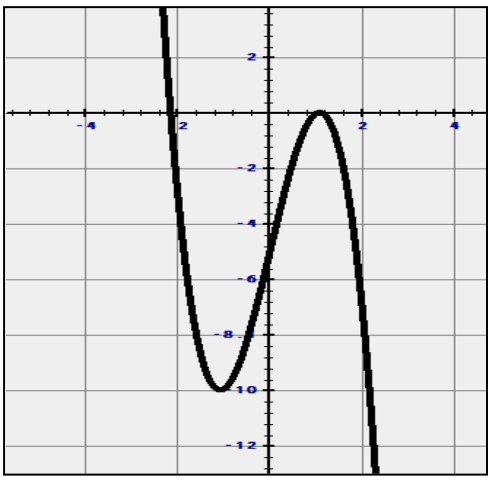
يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغري محلية ومقدارها -3.5 عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية عند $x = -1$، ومقدارها 4.5، ولها قيمة عظمى مطلقة عند $x = 4$، ومقدارها 22.5

الحاسبة: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربه إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

(12) $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

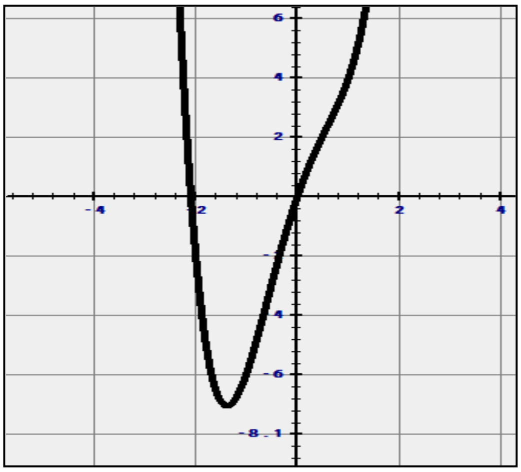
للدالة قيمة عظمى محلية عند $(1.08, 0.04)$،

وصغرى محلية عند $(-1.08, -10)$



(13) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

للدالة قيمة صغرى مطلقة عند $(-1.38, -7.08)$

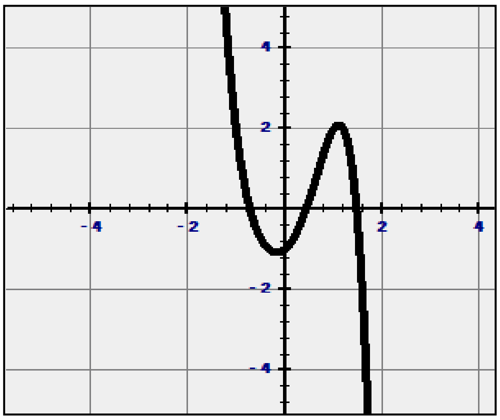


---

(14) $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

للدالة قيمة صغرى محلية عند $(-0.17, -1.08)$،

و عظمى محلية عند $(1.11, 2.12)$



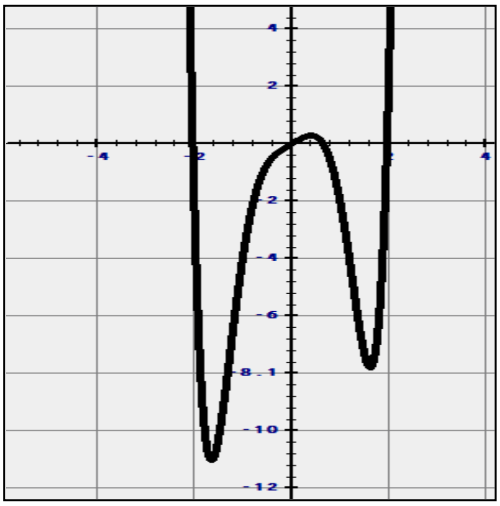
---

(15) $f(x) = x^6 - 4x^4 + x$

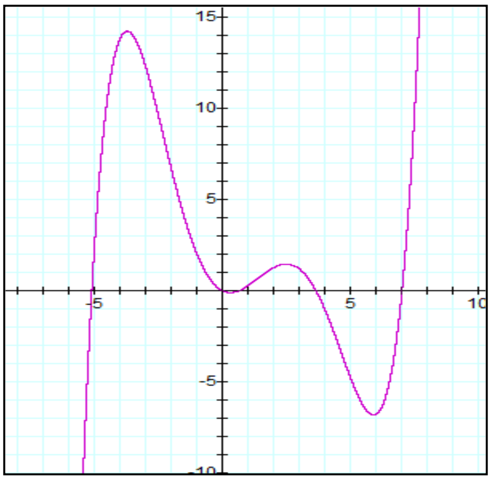
للدالة قيمة صغرى مطلقة عند $(-1.64, -11.12)$،

وعظمى محلية عند $(0.41, 0.30)$،

وصغرى محلية عند $(1.62, -7.85)$



$$f\left(x\right)=0.008x^{5}-0.05x^{4}-0.2x^{3}+1.2x^{2}-0.7x$$ **(16)**



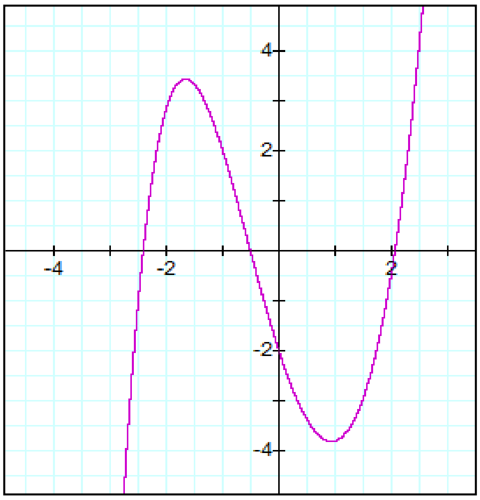
للدالة قيمة عظمى محلية عند $\left(2.49,1.45\right)$،

وصغرى محلية عند $\left(5.90,-6.83\right)$،

وعظمى محلية عند $\left(-3.72,14.23\right)$،

وصغرى محلية عند $\left(0.32,-0.11\right)$

$$f\left(x\right)=0.025x^{5}-0.1x^{4}-0.57x^{3}+1.2x^{2}-3.5x-2$$ **(17)**

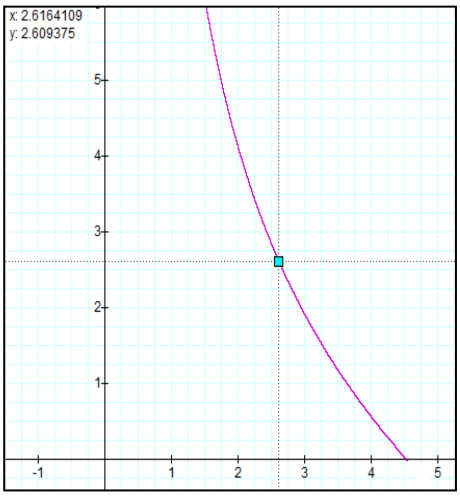


للدالة قيمة عظمى محلية عند $\left(-1.66,3.43\right)$،

وصغرى محلية عند $\left(0.93,-3.82\right)$

---

(18) **هندسة:**



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = 20.5π بوصة مربعة

$$2\cancel{\pi}rh+\cancel{\pi}r^{2}=20.5\cancel{\pi}$$

$$\therefore\ 2rh+r^{2}=20.5$$

نصف القطر = 2.6 بوصة ، الإرتفاع = 2.6 بوصة

$$g(x) = 3x^2 - 8x + 2 \quad \textbf{(19)}$$

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{g(8) - g(4)}{8 - 4}$$

$$= \frac{1474 - 162}{4} = 328$$

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \textbf{(20)}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5}$$

$$= \frac{19574 - 1854}{4} = 4430$$

$$f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6 \quad \textbf{(21)}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)}$$

$$= \frac{-1861 + 7}{6} = -309$$

$$h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9 \quad \textbf{(22)}$$

$$\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{h(6) - h(3)}{6 - 3}$$

$$= \frac{-7929 + 279}{3} = -2550$$

$$f(x) = \frac{x - 3}{x} \quad \textbf{(23)}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(12) - f(5)}{12 - 5}$$

$$= \frac{0.75 - 0.4}{7} = 0.05$$

(24) $f(x)=\sqrt{x+8}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(4)-f(-4)}{4-(-4)}$$

$$=\frac{3.464-2}{8}=0.183$$

طقس:

(25) $f(x)=-0.5455x^2+7.09x+21.45$

(a)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(4)}{5-4}$$

$$=\frac{43.263-41.082}{1}=2.181$$

(b)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(10)-f(7)}{10-7}$$

$$=\frac{37.8-44.351}{3}=-2.18$$

(26) **استعمل التمثيل البياني:**

(a)

في الفترة $[5,15]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(15)-f(5)}{15-5}=5$$

في الفترة $[15,20]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(20)-f(15)}{20-15}=3$$

في الفترة $[25, 45]$ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(45)-f(25)}{45-25}=0.5$

(b)

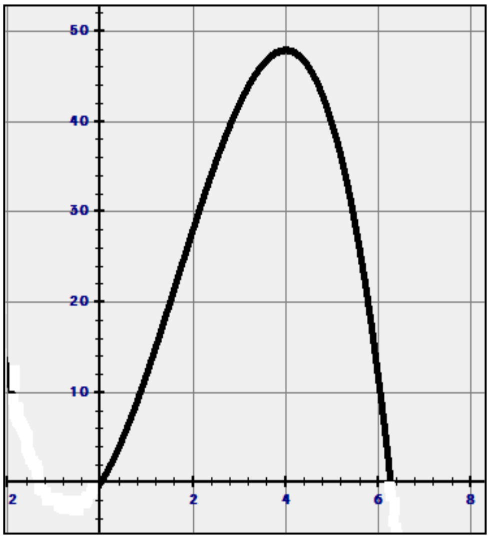
تتزايد سرعة الجسم أو يتسارع الجسم في الفترات الثلاث، وأكبر معدل لتسارع الجسم في الفترة $[5, 15]$ ويقل التسارع في الفترة $[25, 45]$ لكن سرعة الجسم تظل في تزايد.

---

(27) تكنولوجيا:

$$p(x)=-x^3+5x^2+8x$$

(a)



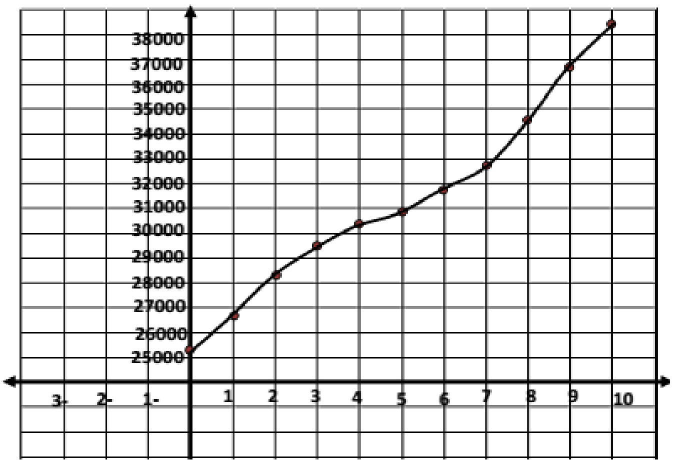
(b) 400 ريال

(c) 48 ريال

(28) دخـــــل:

$$I(x)=-1.465x^5+35.51x^4-277.99x^3+741.06x^2+847.8x+25362$$

(a)



(b)

$$\frac{I(x_2)-I(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{I(10)-I(3)}{10-3}$$

$$=\frac{38556-29590}{7}=1280.9$$

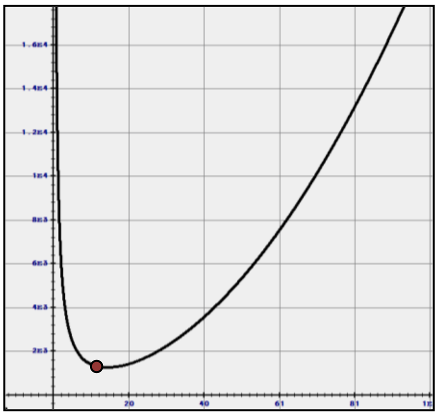
معدل التغير من عام 1423 إلى عام 1430 يساوي 1280.9 ريال.

(c) متوسط التغير أقل ما يمكن في الفترة من عام 1420 إلى عام 1424ويساوي 826.4 ريال، ويكون أعلى ما يمكن فى الفترة من عام 1423 إلى عام 1427ويساوي 1711.44ريال

---

(29) صندوق:

إيجاد الدالة:



$\therefore \ell\omega h = 3024 \quad , \because \ell = \omega$

الحجم = 3024

$\therefore \omega^2 h = 3024 \quad , \therefore h = \dfrac{3024}{\omega^2}$

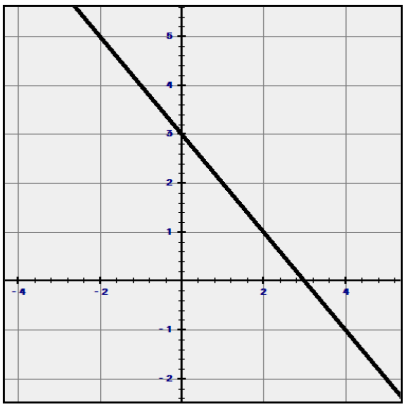
مساحة السطح = $f(\omega)=2\omega^2+4\omega h=2\omega^2+\dfrac{12096}{\omega}$

الأبعاد التي تجعل مساحة السطح أقل ما يمكن هي $\ell=\omega=h=14.5\ ft$

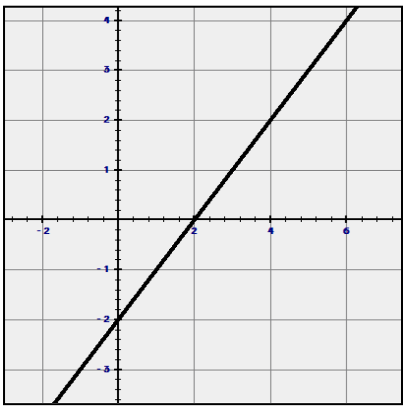
القيمة الصغرى المطلقة عند $\omega=14.5\ ft$

مثل بيانياً الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

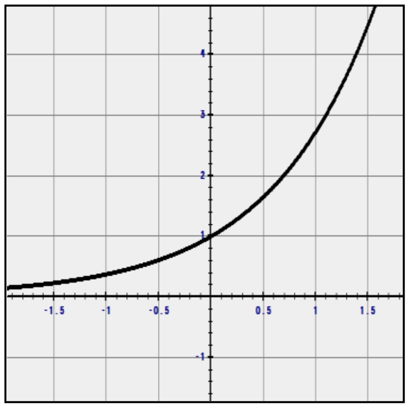
(31)



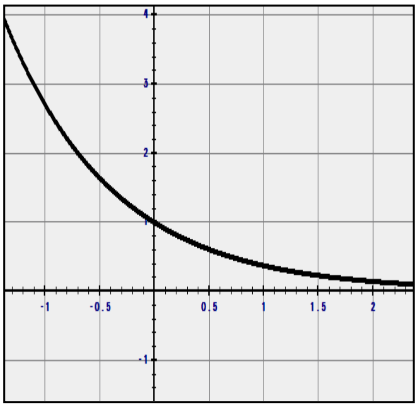
(30)



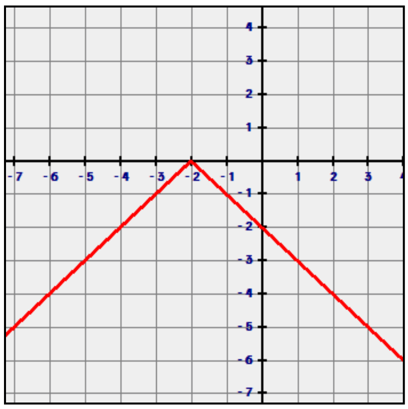
(32)



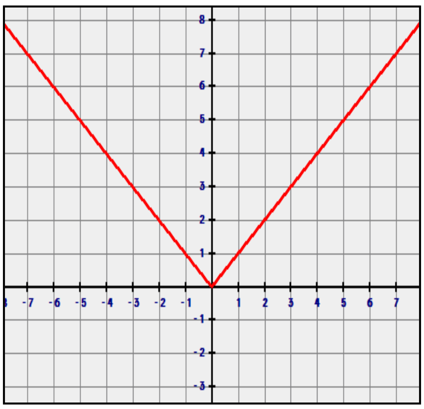
(33)



(34)



(35)



حدّد إحداثي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت وبين نوعها:

(36) $f\left(x\right)=2\left(x-3\right)^2+5$

النقطة $(3,5)$، صغرى مطلقة.

---

(37) $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$

النقطة $(-5,-1)$، عظمى مطلقة.

---

(38) $f(x) = -4|x-22| + 65$

النقطة $(22,65)$، عظمى مطلقة.

---

(39) $f(x) = \left(36 - x^2\right)^{0.5}$

النقطة $(0,6)$، عظمى مطلقة.

---

(40) $f(x) = x^3 + x$

لايوجد قيم قصوى مطلقة.

---

(41) سفر:

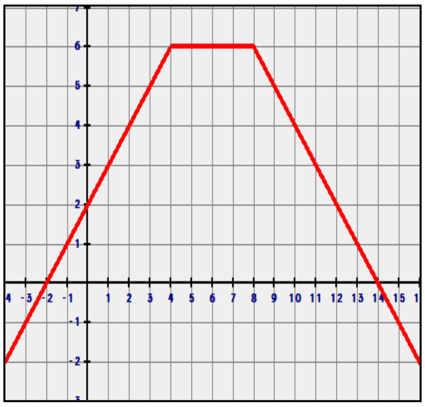
من أسباب الإختلاف في متوسط التغير هو أن ما قد واجه عبد الله إشارات ضوئية في أثناء سيرة مما أدى إلى نقص في معدل المسافة المقطوعة، وسبب آخر انه قد يكون سلك بعض الطرق المختصرة في بعض الأوقات، ويكون المعدل ثابتاً في بعض الفترات نتيجة انه لم يواجة أي إشارات ضوئية في أثناء سيرة أو أنه سلك طريقاً سريعا.

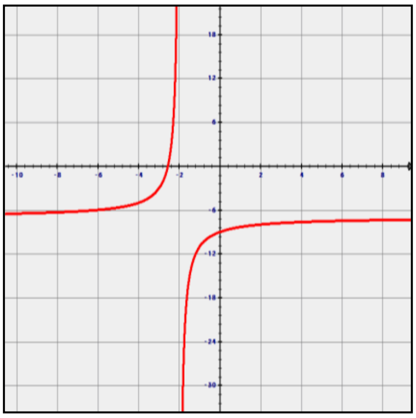
مسائل مهارات التفكير العليا.

مسائل مفتوحة: مثل بيانياً الدالة $f(x)$ في كل من السؤالين الآتيين:

(42)

(43)





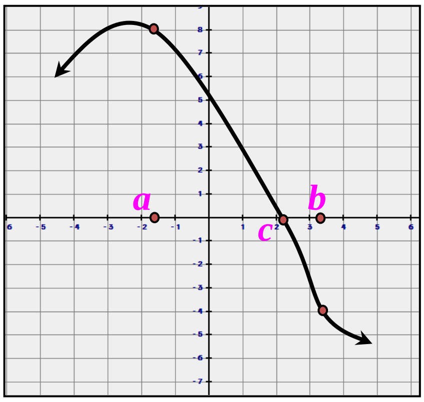
(44) تبرير:

$f(c)$ قيمة صغرى محلية لذا فإن $f(a)$ أكبر من $f(c)$ عند $a<c$. وإذا تزايدت قيم x من a إلى c فإن قيم الدالة تتناقص.

---

(45) تحدٍ:

$g(a)$ موجبة و g متصلة و $b>a$ لذلك عندما تتزايد قيم المجال من a إلى b تتناقص قيم الدالة g من الموجب للسالب. ويكون قيمة $g(c)$ تنتمي للفترة $[-4,8]$

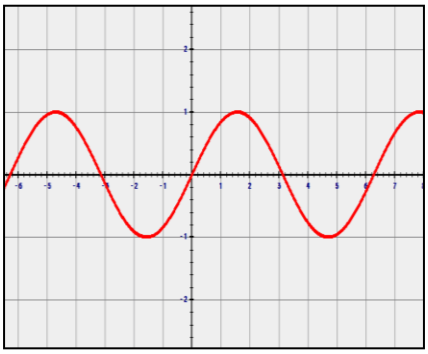


---

(46) تحدٍ:

يوجد قيمة عظمى محلية عند عدد لانهائي من قيم x ومقدارها 1

يوجد قيمة صغرى محلية عند عدد لانهائي من قيم x ومقدارها -1



(47) تبرير:

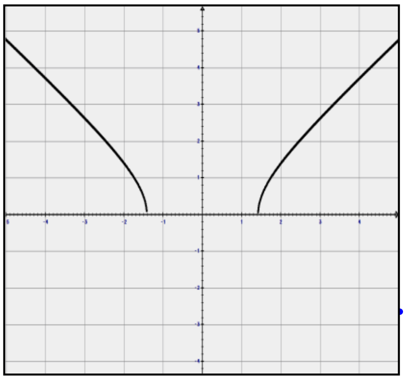
عندما تكون الدالة ثابتة على فترة فإن قيم y متساوية، لذا فإن قيم y لنقاط القاطع تكون متساوية، ويكون القاطع في هذة الحالة أفقياً وميله يساوي صفر.

(48) **اكتب :**

عندما تكون الدالة متزايدة على فترة يكون متوسط معدل التغير موجباً.

وإذا كانت الدالة متناقصة على فترة يكون متوسط معدل التغير سالباً.

وإذا كانت الدالة ثابتة على فترة يكون متوسط معدل التغير صفراً.



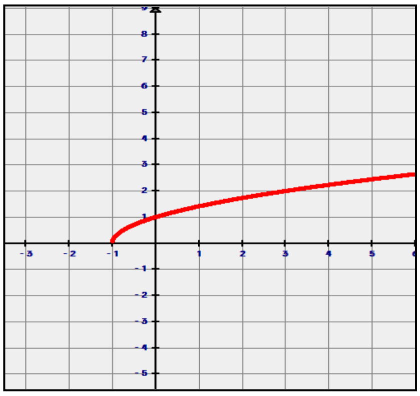
مراجعة تراكمية:

(49) $f(x)=\sqrt{x^2-2}$

الدالة معرفة عند $x=-3$

$f(x)\to 2.65$ عندما $x\to -3$ من الطرفين $\therefore\ f(-3)=2.65$

لذا الدالة متصلة عند $x=-3$

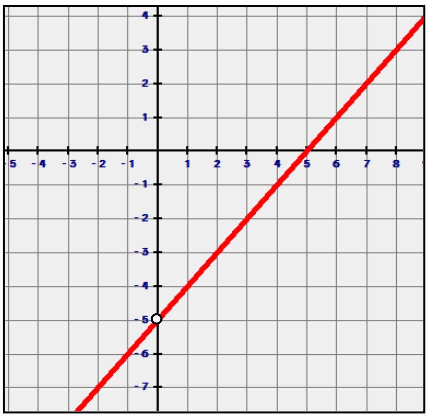


(50) $f(x)=\sqrt{x+1}$

الدالة معرفة عند $x=3$

$f(x)\to 2$ عندما $x\to 3$ من الطرفين $\therefore\ f(3)=2$

لذا الدالة متصلة عند $x=3$



(51) $h(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$

للدالة نقطة عدم إتصال قابلة للإزالة عند $x=-5$

حيث أن الدالة غير معرفة عند $x=-5$

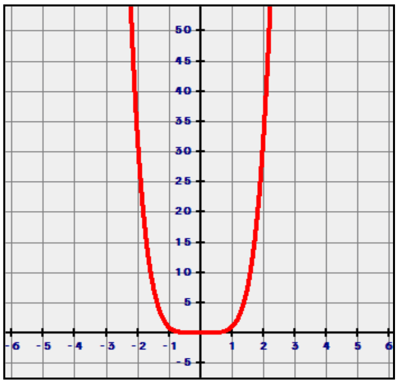
الدالة معرفة عند $x=5$،

$h(x)\to 0$ عندما $x\to 5$ من الطرفين $\therefore\ h(5)=0$

لذا الدالة متصلة عند $x=5$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً مستعملاً الحاسبة البيانية.

(52) $f(x)=\left|x^5\right|$

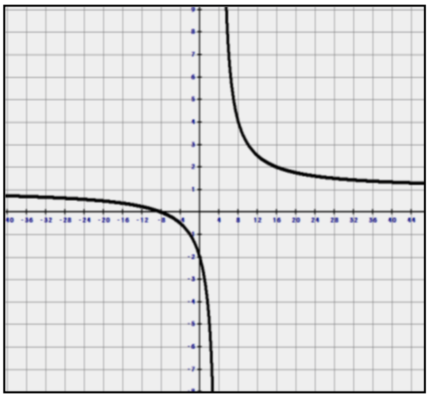


دالة زوجية، متماثلة حول محور y

$f(-x)=\left|(-x)^5\right|=x^5=f(x)$

---

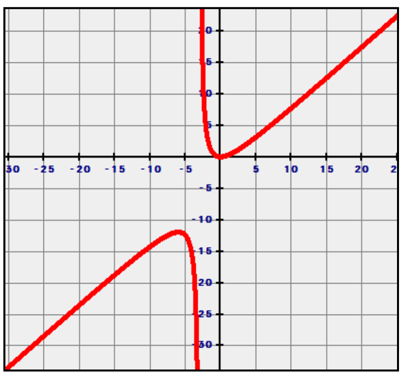
(53) $f(x)=\dfrac{x+8}{x-4}$



ليست فردية وليست زوجية.

---

(54) $g(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$



ليست فردية وليست زوجية.

أوجد مجال كل دالة مما يأتي:

(55) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-5}$

المجال $=\left\{x \middle| x\neq\sqrt{5}\ \ , x\in R\right\}$

---

(56) $g(x)=\sqrt{x^2-9}$

المجال $=(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$

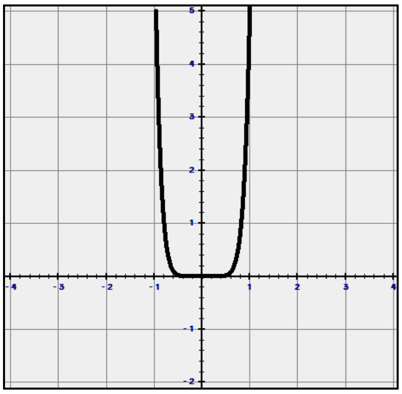
---

(57) $h(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-7}}$

المجال $=\left(-\infty,-\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7},\infty\right)$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

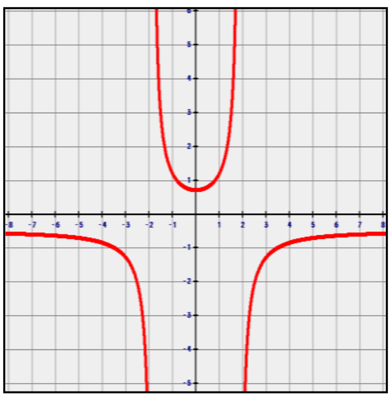
(58) $f(x)=x^{10}-x^9+5x^8$



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to\infty$

وعندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to\infty$

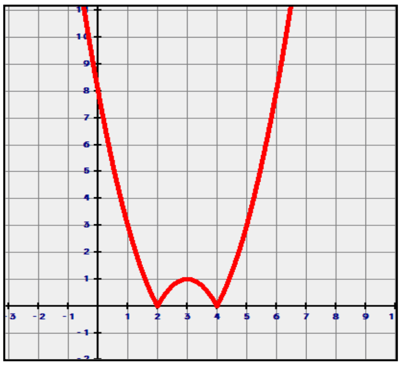
(59) $g(x)=\dfrac{x^2+5}{7-2x^2}$



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to-0.5$

وعندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to-0.5$

(60) $h(x)=\left|(x-3)^2-1\right|$



يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to\infty$

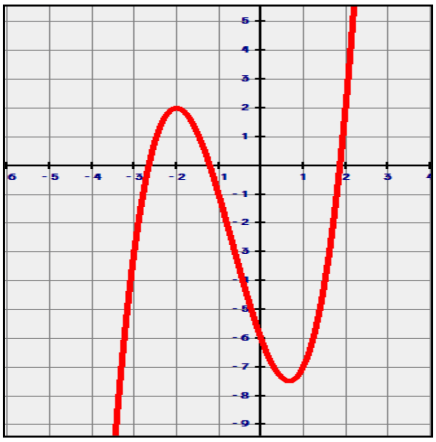
وعندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to\infty$

تدرب على الإختبار

(61) (A) $q+n$

---

(62)



(C) قيمة عظمى محلية عند $x=-2$

قيمة صغري محلية عند $x=0.7$

الفصل (1) إختبار منتصف الفصل

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت تمثل y دالة في x:

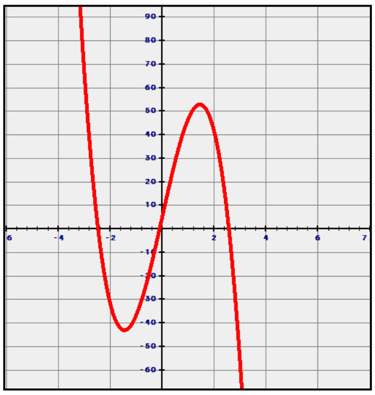
(1) دالـــــــــــة

(2) دالـــــــــــــــــة

(3) ليست دالـــــــــــــــــة

(4) دالـــــــــــــــــة

(5) $f(2)=2$



(6) كرة قدم:

a) $h(3)=-8\times(3)^2+50\times3+5=83ft$

b) $[0,2.55)$ حيث أن الزمن لا يكون سالباً والإرتفاع أيضاً لا يمكن أن يكون سالبا.

استعمل التمثيل البيانى للدالة h أدناه لإيجاد مجالها ومداها فى كل مما يأتى:

(7) المجال: $[0,\infty)$ ، المدى: $[0,\infty)$

(8) المجال: $\{x \mid x\in R\}$ ، المدى: $\{y \mid y\in Z\}$

أوجد المقطع y والأصفار لكلٍ من الدالتين الآتيتين:

(9) $f(x)=x^3-16x$

لإيجاد المقطع y نضع $x=0$ $\therefore$ $f(x)=0$ $\therefore$ المقطع $y=0$

لإيجاد الأصفار نضع $f(x)=0$

$$\therefore x^3-16x=0$$

$$\therefore x(x^2-16)=0$$

$$\therefore x(x-4)(x+4)=0$$

$$\therefore x=0\ ,x=4\ or\quad x=-4$$

(10) $f(x)=5-\sqrt{x}$

لإيجاد المقطع y نضع $x=0$ $\therefore$ $f(x)=5-0=5$ $\therefore$ المقطع $y=5$

لإيجاد الأصفار نضع $f(x)=0$

$$\therefore\ 5-\sqrt{x}=0$$
$$\therefore\ \sqrt{x}=5$$
$$\therefore\ x=25$$

اختبر تماثل كلٍ من المعادلتين الآتيتين حول المحور x ، والمحور y، ونقطة الأصل.

(11) $x^2+y^2=9$

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل لأن

$$f(-x,-y)=(-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2=f(x,y)$$

المنحنى متماثل حول محور x لأن

$$f(x,-y)=x^2+(-y)^2=x^2+y^2=f(x,y)$$

المنحنى متماثل حول محور y لأن

$$f(-x,y)=(-x)^2+y^2=x^2+y^2=f(x,y)$$

---

(12) $xy=4$

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل لأن $f(-x,-y)=(-x)(-y)=xy=f(x,y)$

المنحنى غير متماثل حول محور x لأن

$$f(x,-y)=x(-y)=-xy\neq f(x,y)$$

المنحنى غير متماثل حول محور y لأن

$$f(-x,y)=(-x)(y)=-xy\neq f(x,y)$$

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x=5$ وبرر إجابتك :

(13) الدالة غير متصلة، لأن الدالة غير معرفة عند $x=5$

(14) الدالة متصلة عند $x=5$ لأن

الدالة معرفة عند $x=5$ وقيمتها 2.5

$f(x)\to 2.5$ عندما $x\to 5$ من الطرفين $\therefore \lim_{x\to 5} f(x)=2.5$

$\because \lim_{x\to 5} f(x)=f(5)$ اذن الدالة متصلة عند $x=5$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي:

(15)

يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to-\infty$

وعندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to\infty$

---

(16)

يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$ فإن $f(x)\to 5$

وعندما $x\to-\infty$ فإن $f(x)\to 5$

---

(17) اختيار من متعدد:

c) لا نهائي

لان قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 1.5 من اليسار وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 1.5 من اليمين

استعمل التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة مقربه إلى أقرب 0.5 وحدة

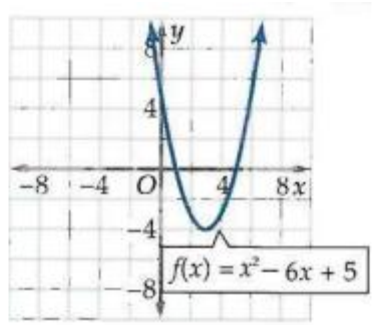
(18) متزايدة في الفترة $(3,\infty)$، ومتناقصة في الفترة $(-\infty,3)$

---

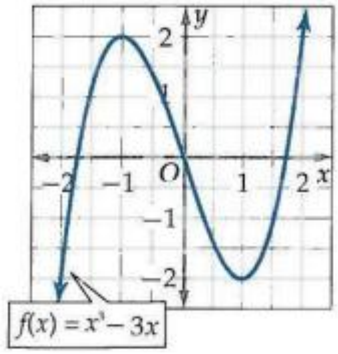
(19) متزايدة في الفترة $(-\infty,-2)$، ومتناقصة في الفترة $(-2,1.5)$، و متزايدة في الفترة $(1.5,\infty)$

---

(20)



يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية ومقدارها -4 عند $x=3$



يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية ومقدارها 2 عند $x=-1$، كما توجد قيمة صغرى محلية عند $x=1$، ومقدارها -2

(21) فيزياء:

$d(t)=16t^2$

متوسط السرعة في الفترة $[0,3]$ $\dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}=\dfrac{16(3)^2-16(0)^2}{3-0}=48\ ft/s$

(1-5)الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

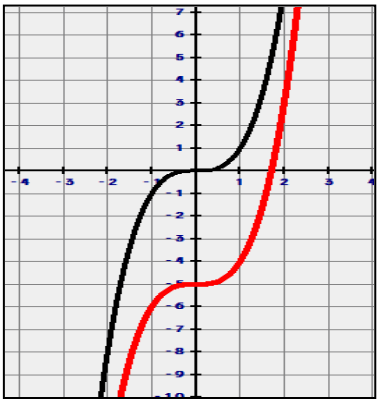
تحقق من فهمك

$f(x)=|x|$ **(1A)**

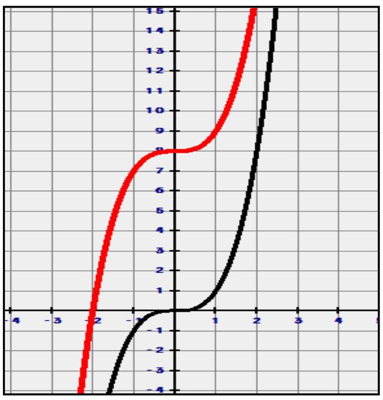
- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid 0 \le y < \infty, y \in R\}$
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$
- الدالة زوجية والمنحنى متماثل حول محور y
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- المنحنى متناقص في الفترة $(-\infty,0)$ ومتزايد في الفترة $(0,\infty)$
- يبدأ المنحنى عند $x=0$ وينتهي عند $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

تحقق من فهمك

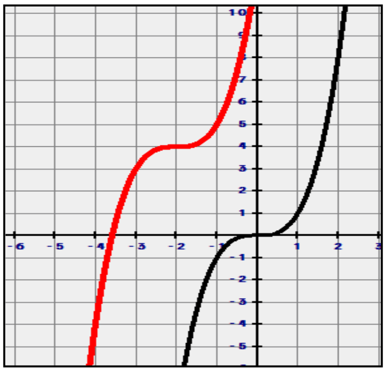
$h(x)=x^3-5$ **(2A)**



$h(x)=8+x^3$ **(2B)**



$h(x)=(x+2)^3+4$ (2C)



تحقق من فهمك

صف العلاقة بين منحنى $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)$ ثم أكتب معادلة $g(x)$ في كل من السؤالين الآتيين.

(3A) منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x ، وإنسحاب وحدتين إلى أسفل. $g(x)=-\frac{1}{x}-2$ أو $g(x)=-\left(\frac{1}{x}+2\right)$

(3B) منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x ، وإنسحاب أربع وحدلت لليسار. $g(x)=\frac{1}{-x-4}$ أو $g(x)=-\frac{1}{x+4}$

تحقق من فهمك

(4A) $f(x)=[x]$ ، $g(x)=\frac{1}{2}[x]$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق لمنحنى الدالة $f(x)=[x]$ لأن $g(x)=\frac{1}{2}[x]=\frac{1}{2}f(x)$

و $0<\frac{1}{2}<1$

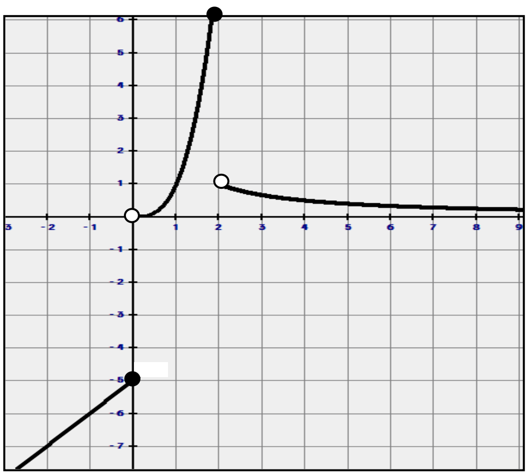
(4B) $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)=\frac{5}{x}+3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو توسيع رأسي لمنحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$

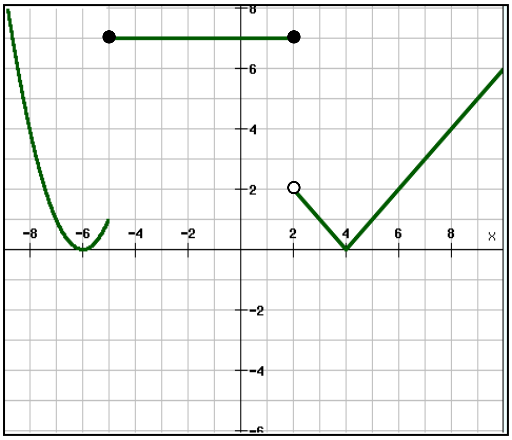
معاملة 5 وحدة، وإنسحاب ثلاث وحدات للأعلى.

تحقق من فهمك

(5A) $f(x)=\begin{cases} x-5 & ,x\le 0 \\ x^3 & ,0<x\le 2 \\ \frac{2}{x} & ,x>2 \end{cases}$



(5B)



$$f(x)=\begin{cases}(x+6)^2 & , x<-5\\ 7 & , -5\le x\le 2\\ |4-x| & , x>2\end{cases}$$

تحقق من فهمك

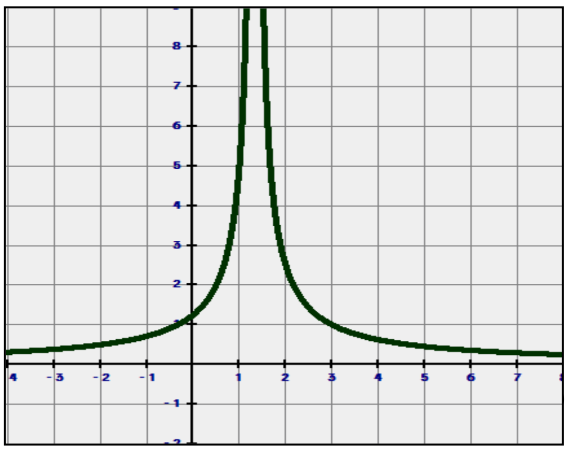
(6) كهرباء: $I(x)=\sqrt{\frac{x}{11}}$

(**A**) منحنى الدالة $I(x)$ هو توسيع افقي لمنحنى الدلة $f(x)=\sqrt{x}$

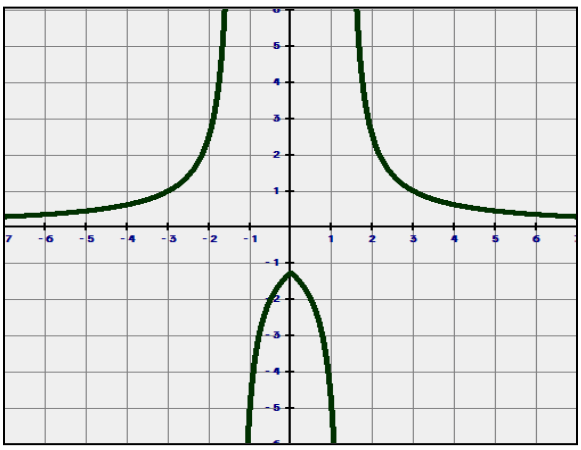
(**B**) عندما تكون المقاومة 15 فإن $I(x)=\sqrt{\frac{x}{15}}$

(7**A**) $f(x)=\frac{5}{3x-4}$

$g(x)=|f(x)|$

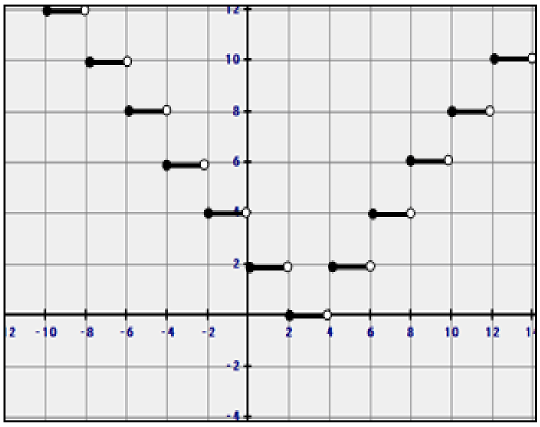


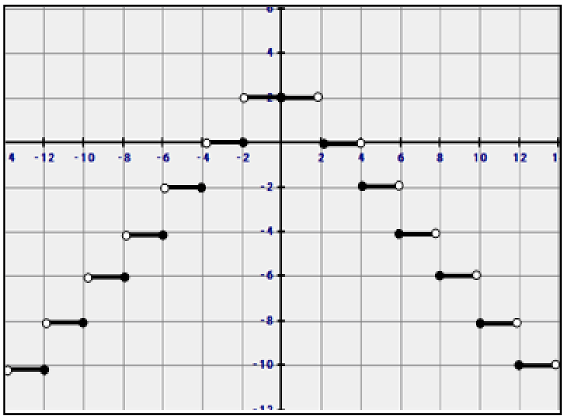
$h(x)=f(|x|)$



$g(x)=|f(x)|$

$h(x)=f(|x|)$





تدرب وحل المسائل

صف الخصائص لكل دالة من الدوال الرئيسية الأم الآتية:

(1) $f(x)=[\![x]\!]$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y \in Z\}$
- يقطع المنحنى المحور y عند $(0,0)$
- يقطع المنحنى المحور x عند $0 \le x < 1$
- لا يوجد تماثل للدالة، وليست فردية وليست زوجية.
- للدالة عدم إتصال قفزي عند $\{x \mid x \in Z\}$.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$
- الدالة ثابتة عند $\{x \mid x \notin Z\}$، ومتزايدة عند $\{x \mid x \in Z\}$.

---

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

- مجال الدالة $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y \neq 0, y \in R\}$
- المنحنى لا يقطع أي من المحورين.
- الدالة فردية، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
- للدالة عدم إتصال لا نهائي عند $x = 0$.
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- الدالة متناقصة في $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

---

(3) $f(x) = x^3$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y \in R\}$
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$
- الدالة فردية، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- المنحنى متزايد عند جميع قيم المجال.

---

(4) $f(x) = x^2$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$
- المنحنى يقطع المحور x ، والمحور y عند $(0,0)$
- الدالة زوجية، والمنحنى متماثل حول المحور y.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال، $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
- المنحنى متزايد في الفترة $(0,\infty)$، ومتناقص في الفترة $(-\infty,0)$.

(5) $f(x) = c$

- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$

- مدى الدالة $\{y \mid y = c , c \in R\}$
- المنحنى يقطع المحور y عند $(0,c)$
- المنحنى يقطع المحور x في عدد لانهائي من النقاط عندما $c = 0$
  المنحنى لا يقطع المحور x عندما $c \neq 0$
- الدالة زوجية، والمنحنى متماثل حول المحور y.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال، $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$
- الدالة ثابتة على الفترة $(-\infty,\infty)$.

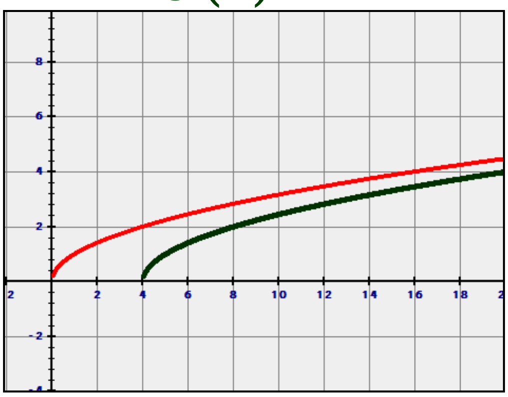
---

(6) $f(x) = x$

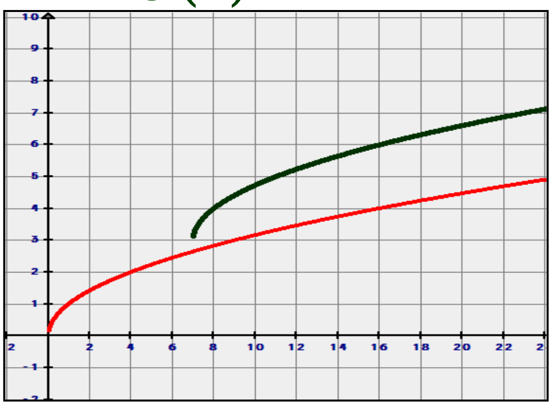
- مجال الدالة $\{x \mid x \in R\}$
- مدى الدالة $\{y \mid y , y \in R\}$
- المنحنى يقطع المحور x ، والمحور y عند $(0,0)$
- الدالة فردية، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- المنحنى متزايد في الفترة $(-\infty,\infty)$.

استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين:

(7) $g(x) = \sqrt{x-4}$

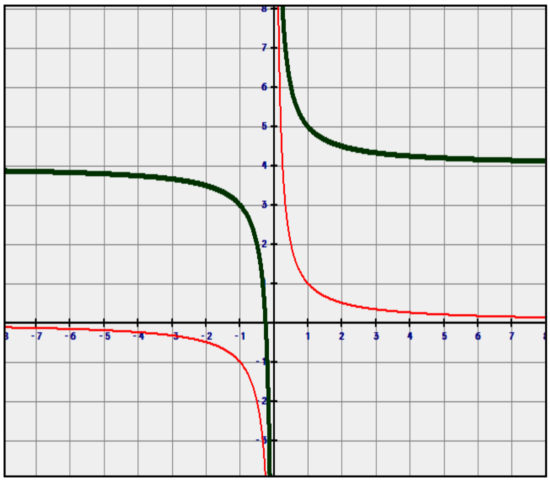


(8) $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

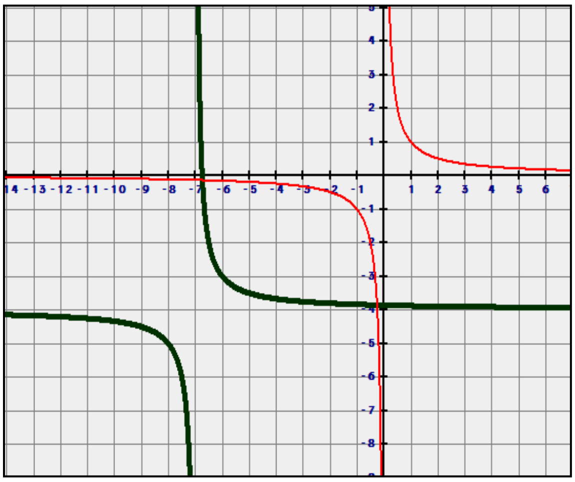


استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين:

(9) $g(x)=\dfrac{1}{x}+4$



(10) $g(x)=\dfrac{1}{x+7}-4$



صف العلاقة بين منحنى $f(x)=[\![x]\!]$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين،

ثم اكتب معادلة $g(x)$.

(11) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره ثلاث وحدات إلى اليسار $g(x)=[\![x+3]\!]$.

---

(12) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بإنعكاس حول محور x، يتبعه انسحاب مقداره اربع وحدات إلى اللأعلى $g(x)=-[\![x]\!]+4$.

صف العلاقة بين منحنى $f(x)=|x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين،

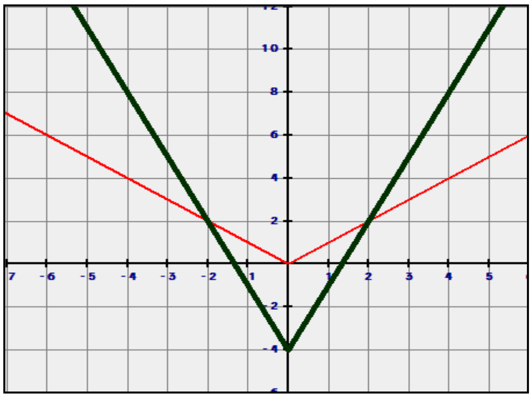
ثم اكتب معادلة $g(x)$.

(13) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بإنسحاب مقداره ثمان وحدات إلى اليمين $g(x)=|x-8|$.

(14) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره وحدة إلى اليمين ووحدتان إلى الاسفل، $g(x)=|x-1|-2$.

اكتب الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما في مستوى إحداثي واحد.

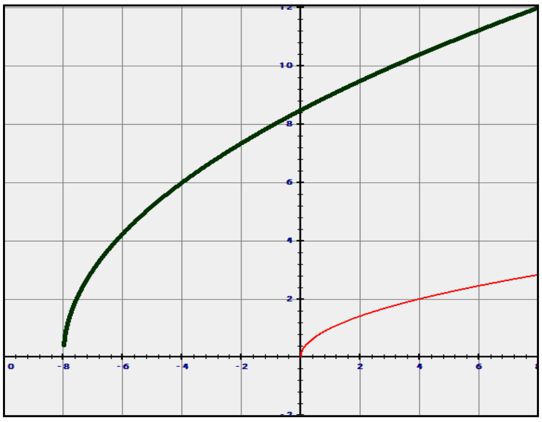
(15) $g(x)=3|x|-4$



$f(x)=|x|$ ، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بإنسحاب أربع وحدات إلى الأسفل للدالة $f(x)$

---

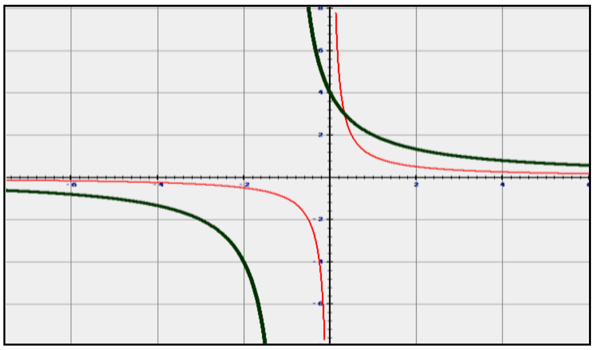
(16) $g(x)=3\sqrt{x+8}$



$f(x)=\sqrt{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بإنسحاب ثمان وحدات إلى اليسار للدالة $f(x)$

---

(17) $g(x)=\dfrac{4}{x+1}$

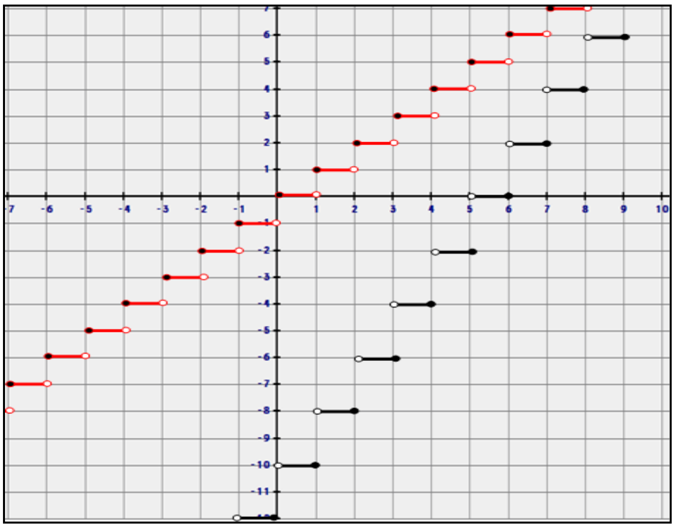


$f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي بإنسحاب وحدة واحدة إلى اليسار للدالة $f(x)$

$g(x)=2[\![x-6]\!]$ (18)

$f(x)=[\![x]\!]$ ، منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي

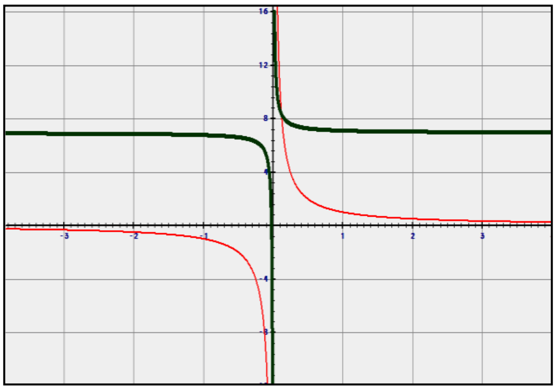
بإنسحاب ست وحدات إلى اليمين للدالة $f(x)$



$g(x)=\dfrac{1}{6x}+7$ (19)

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، منحنى $g(x)$ هوتضيق رأسي يتبعه

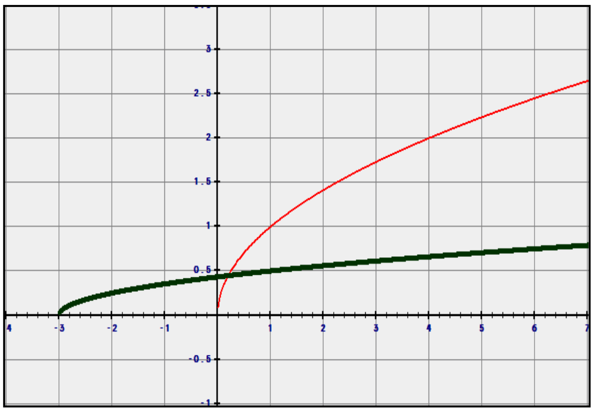
إنسحاب سبع وحدات إلى أعلى للدالة $f(x)$



$g(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{4}$ (20)

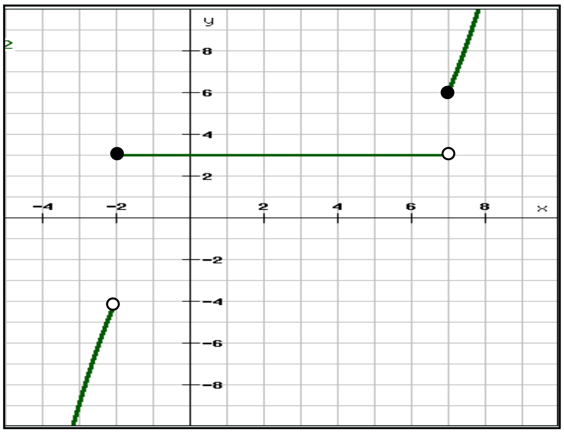
$f(x)=\sqrt{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي

بإنسحاب ثلاث وحدات إلى اليسار للدالة $f(x)$

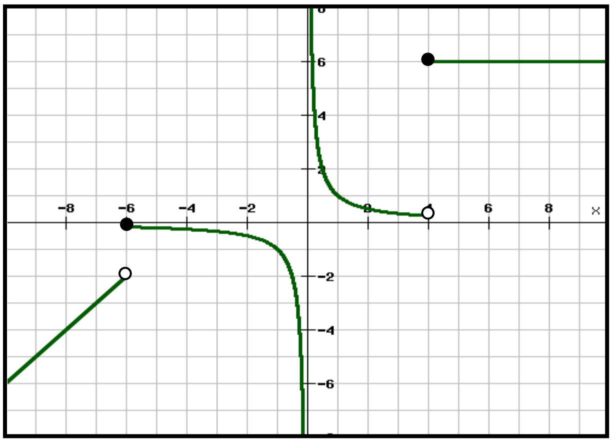


مثل منحنى كل من الدوال الآتية بيانياً:

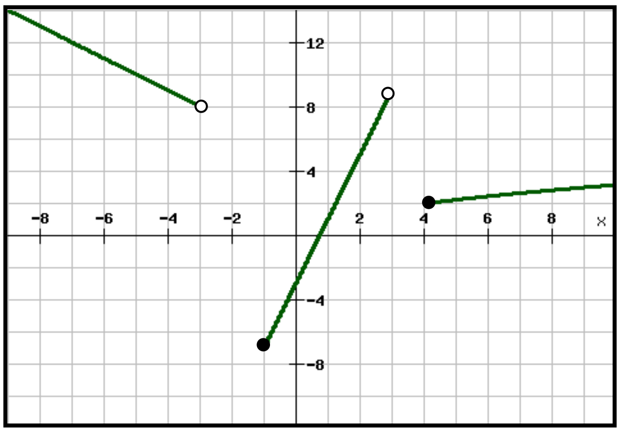
(21)
$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & , \ x<-2 \\ 3 & , \ -2\le x<7 \\ (x-5)^2+2 & , \ x\ge 7 \end{cases}$$



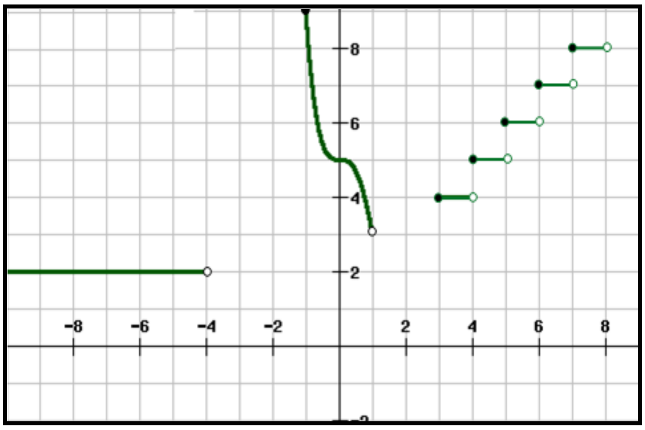
(22)
$$g(x)=\begin{cases} x+4 & , \ x<-6 \\ \dfrac{1}{x} & , \ -6\le x<4 \\ 6 & , \ x\ge 4 \end{cases}$$



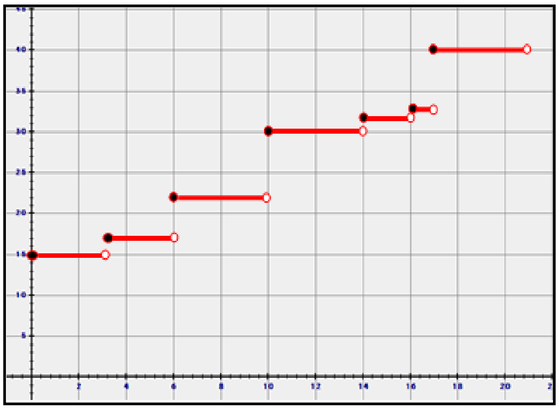
(23)
$$h(x)=\begin{cases} |x-5| & , \ x<-3 \\ 4x-3 & , \ -1\le x<3 \\ \sqrt{x} & , \ x\ge 4 \end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases} 2 & , \quad x<-4 \\ x^4-3x^3+5 & , \quad -1\le x<1 \\ \lfloor x \rfloor+1 & , \quad x\ge 3 \end{cases}$$ (24)



(25) أسعار:



---

(26) أعمال:

a) منحنى $C(x)$ هوتضيق رأسي يتبعه إنسحاب عشرون وحدة إلى أعلى للدالة $f(x)$

b) $C(x)=30+0.1\lfloor x \rfloor$

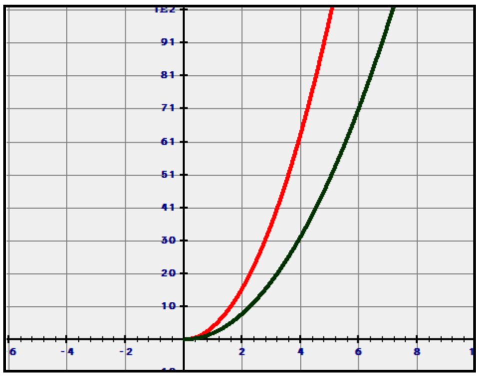
c) نعم، بعد 100دقيقة.

---

(27) فيزياء:

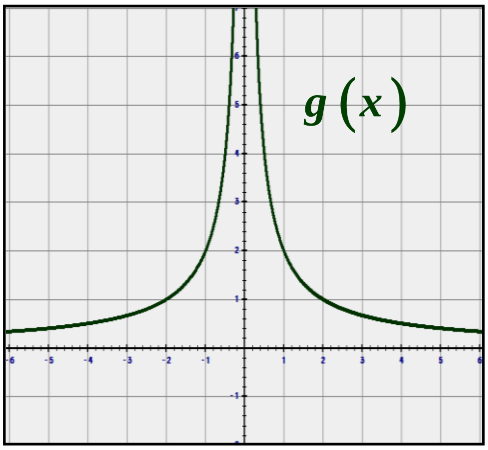
a) منحنى $E(x)$ هو توسع رأسي للدالة $f(x)$

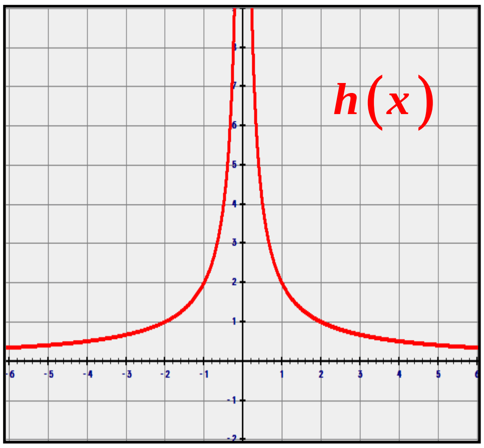
b) منحنى $E(x)=4x^2$ ، منحنى $E(x)=2x^2$

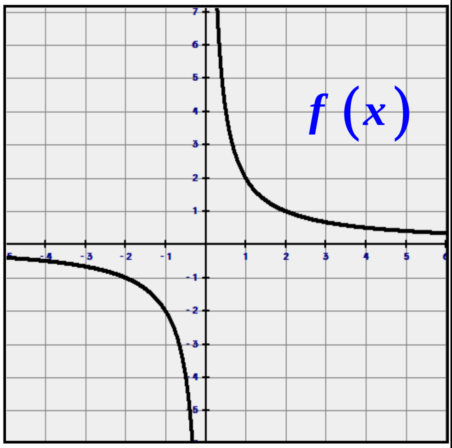


استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل منحنى الدالتين $h(x)=f(|x|)$ ، $g(x)=|f(x)|$ في كلاً مما يأتي:

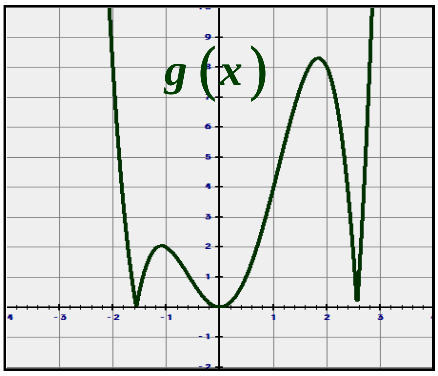
(28) $f(x)=\dfrac{2}{x}$

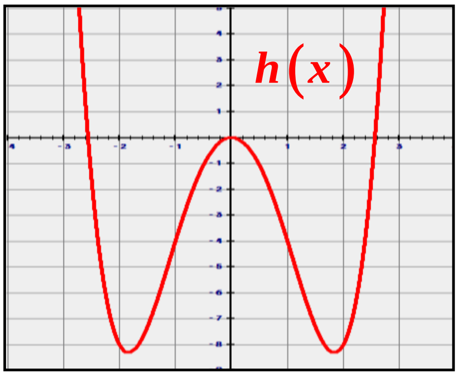


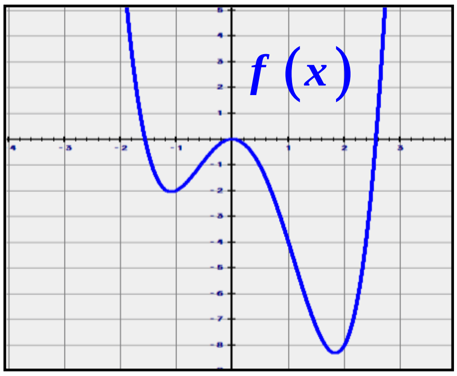




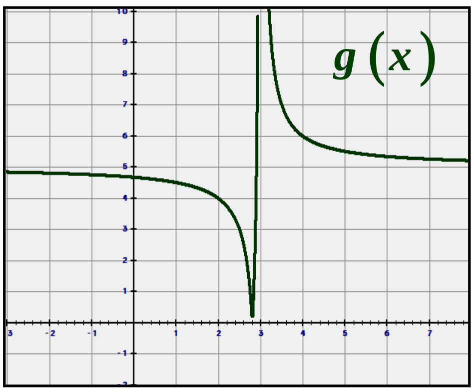
(29) $f(x)=x^4-x^3-4x^2$

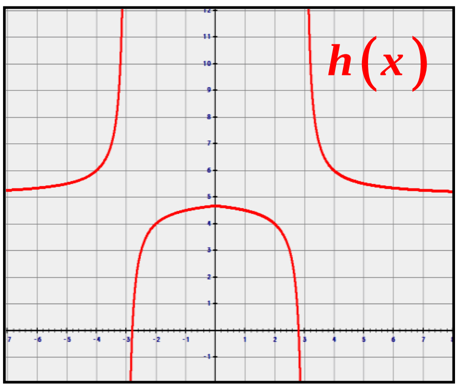


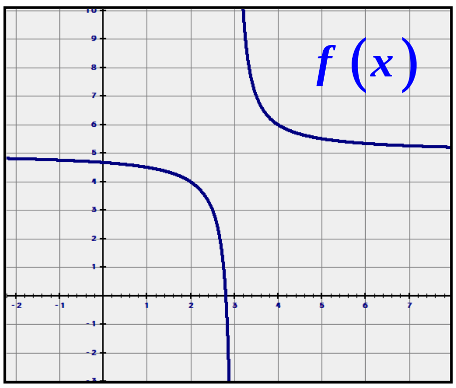




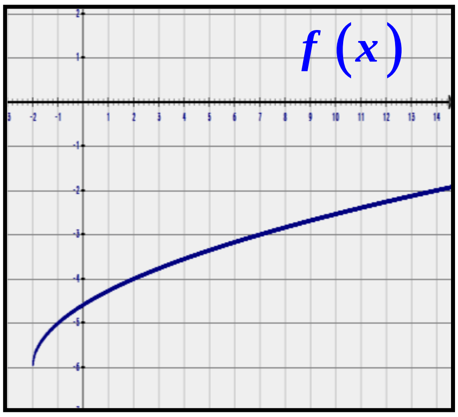
(30) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+5$

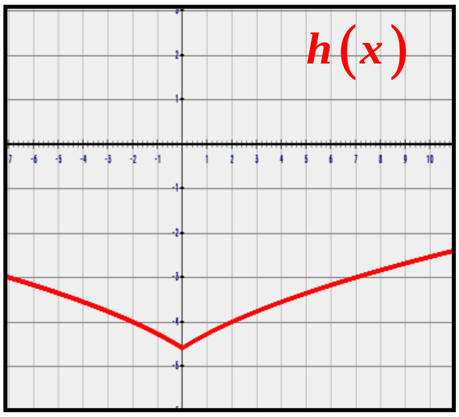


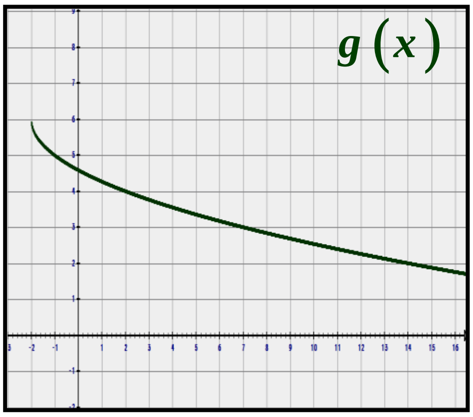




(31) $f(x)=\sqrt{x+2}-6$







اكتب الدالة الناتجة من إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الئيسية (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

(32) $g(x)=\dfrac{2}{x+7}+5$

(33) $g(x)=-3[\![x]\!]-4$

__فيزياء :__

(34) $g(t)=2t+t^2=(t+1)^2-1$

إنسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار ووحدة واحده لأسفل.

---

(35) $g(t)=t^2+10$

إنسحاب بمقدار عشرة وحدات إلى الأعلى.

---

(36) $g(t)=1+8t+2t^2=2(t+2)^2-7$

توسع رأسي، وإنسحاب مقدارة وحدتان إلى اليسار وإنسحاب مقدارة سبع وحدات لأسفل.

---

(37) $g(t)=3+5t+\dfrac{3}{2}t^2=\dfrac{3}{2}\left(t+\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{7}{6}$

توسع رأسي، وإنسحاب مقدارة $\dfrac{5}{3}$ وحدة إلى اليسار وإنسحاب مقدارة $\dfrac{7}{6}$ وحدة لأسفل.

اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍ مما يأتي:

$g(x) = -0.5(x-5)^3 - 8$ (38

(39 **تسوق:**

$g(x) = 0.12 f(x)$ (a

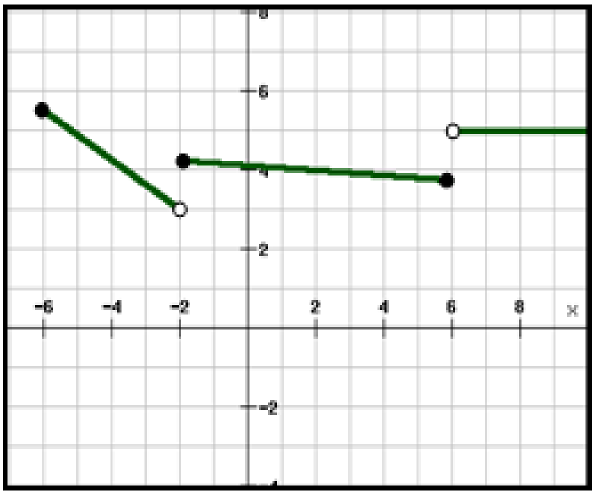
(b $g(x) = f(x-30)$

(c $g(x) = f(x) - 0.45$

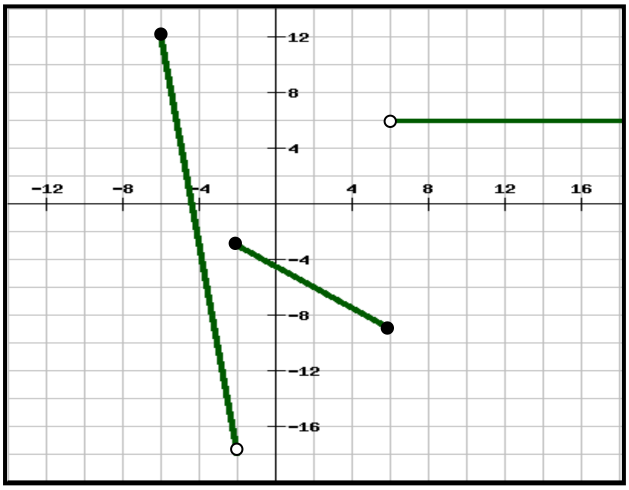
اكتب دالة تمثل المنحنى في كل مما يأتي:

$f(x) = \dfrac{-4}{x+5} + 6$ (40

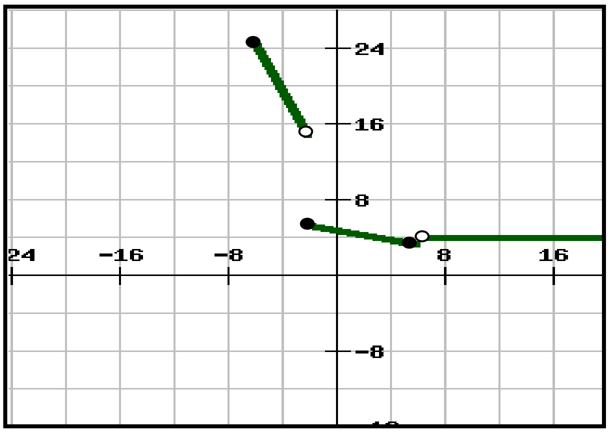
(41



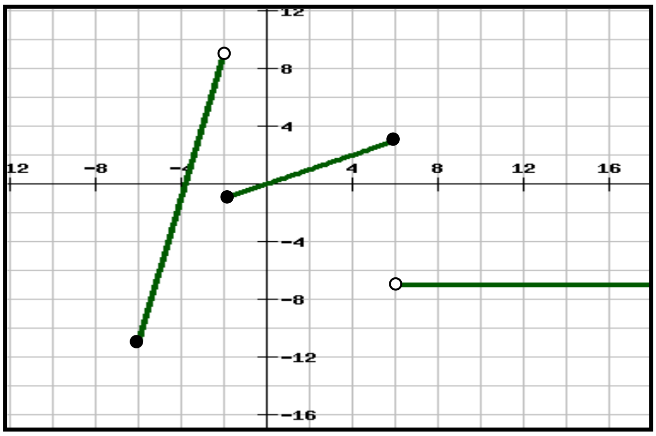
(42



(43)

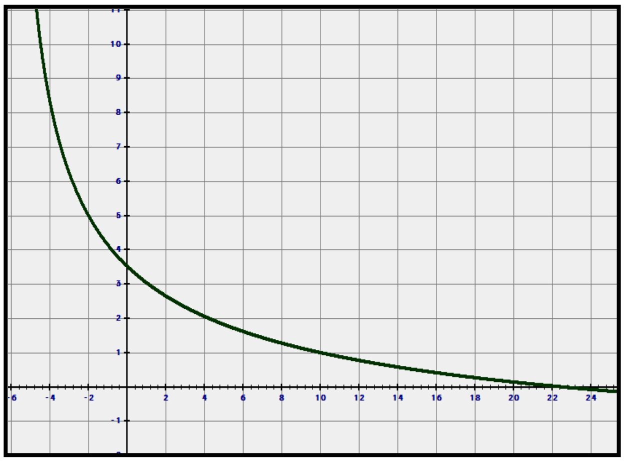


(44)

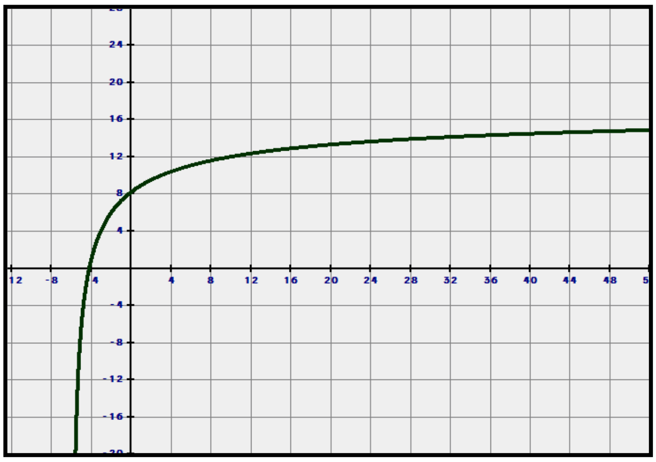


استعمل $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

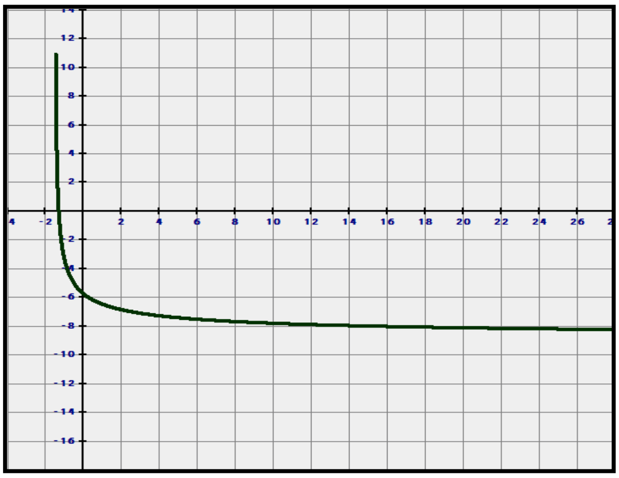
(45) $g(x) = 2f(x) + 5$



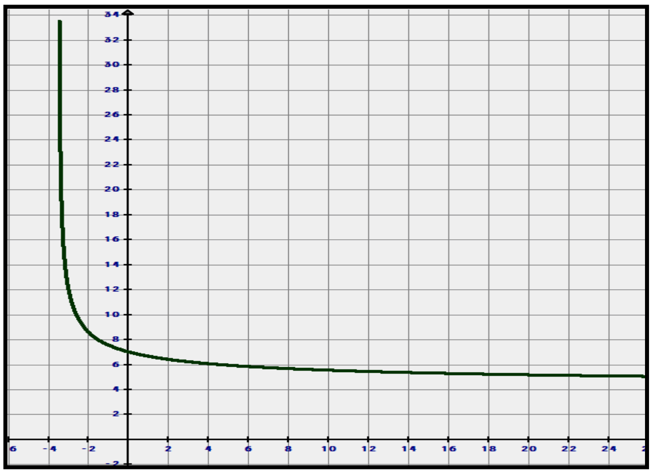
(46) $g(x) = -3f(x) + 6$



(47) $g(x) = f(4x) - 5$



(48) $g(x) = f(2x+1) + 8$



(49) تمثيلات متعددة:

a) جدوليا:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a)+g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
-4	15	-13	2	2
1	10	7	17	17

b) لفظيا:

$h(a)$ تساوي جمع $g(a)$ و $f(a)$

c) جبريا:

$$f(x)+g(x)=x^2+2x+7+4x+3$$
$$=x^2+6x+10=h(x)$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

50) اكتشف الخطأ:
كلاهما صحيح، في دالة أكبر عدد صحيح، سحب الدالة الأصلية a وحدة لليسار يماثل سحب الدالة الأصلية a وحدة إلى الأعلى.

---

51) تبرير:
$f(x)=h(x)$، وليكن $f(x)=x^3$ دالة فردية الدالة $g(x)$ إنعكاس للدلة $f(x)$ في المحور y اذن $g(x)=-x^3$، والدالة $h(x)$ إنعكاس للدلة $g(x)$ في المحور x ومنها $h(x)=-(-x)^3=x^3$ ومنها $f(x)=h(x)$.

---

52) تبرير:
أحيانا، إذا كانت $f(x)$ زوجية فتكون قيمتها صحيحة للدوال الزوجية التي تقع قيمتها في الربع الأول، وفي الربع الثاني، وتكون الدالة زوجية.

- -

53) أحيانا، إذا كانت $f(x)$ زوجية فإن $f(x)=f(-x)$ وهذا صحيح فقط للدوال الزوجية التي تقع قيمتها في الربع الثالث والربع الرابع.

54) تحدٍ:

منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بإنسحاب 6 وحدات إلى اليسار و 8 وحدات إلى الأسفل

$$g(x)=\sqrt{x+6}-8$$

---

(55) **تبرير:**

التوسع الرأسي للدالة $f(x)$ بمقدار أربعة يكافئ $4f(x)$، والتضيق الأفقي لنفس الدالة يكافئ $f\left(\frac{x}{4}\right)$ وعند إجراء كلاً التحولين فإم الناتج $f(x)$ إذا كانت $f(x)$ دالة خطية.

وإذا كانت $f(x)$ ليست خطية. فإن الناتج لن يكون $f(x)$ لذا $4f\left(\frac{x}{4}\right)\neq f(x)$

---

(56) **اكتب:**

الترتيب مهم لأنه يمكن الحصول على منحنيات مختلفة بترتيب مختلف من التحويلات الهندسية.

فمثلاً إذا كانت الدالة $g(x)$ هي الدالة $f(x)=x+5$ بإنسحاب 5 وحدات لأعلى ثم إنعكاس حول محور x فإن $g(x)=-x-10$ وإذا كانت الدالة $h(x)$ هي الدالة $f(x)=x+5$ بإنعكاس حول محور x ثم إنسحاب 5 وحدات لأعلى فإن $h(x)=-x$

نلاحظ أن $h(x)\neq g(x)$ أي أن إختلاف الترتيب في التحويلات يعطي دوال مختلفة.

مراجعة تراكمية:

أوجد متوسط معدل التغير لكل من الدوال الآتية في الفترة المعطاة:

(57) $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{g(3)-g(-1)}{3+1}=\frac{-12}{4}=-3$

(58) $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{g(8)-g(4)}{8-4}=\frac{24}{4}=6$

(59) $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{g(3)-g(-2)}{3+2}=\frac{-70}{5}=-14$

مستعملاً التبرير المنطقي، حدد سلوك طرفي التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية عندما تقترب x من مالانهاية، وبرر إجابتك:

(60) $q(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$ تتناقص قيمة الكسر لتكون $q(x)=0$ وكذلك عندما $x\to-\infty$

(61) $f(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$ تتناقص قيمة الكسر لتكون $f(x)=0$ وكذلك عندما $x\to-\infty$

(62) $p(x)\to 1$ عندما $x\to\infty$ تقترب الدالة من $\frac{x}{x}$ لذا يكون $p(x)=1$ وكذلك عندما $x\to-\infty$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتعيين قيمة كل من المقطع y، والاصفار......:

(63) المقطع $y=13$، اصفار الدالة $\{2.25, 5.75\}$

(64) المقطع $y=0$، اصفار الدالة $\{-1, 0, 2\}$

(65) المنحنى لا يقطع المحور y، وأصفار الدالة 3

تدرب على اختبار

(66) *D* $(1,\infty)$

(67) *B* $\{y \mid y \geq 4\}$

(1-6)العمليات على الدوال وتركيب دالتين

($1A$) $f(x)=x-4 \quad , g(x)=\sqrt{9-x^2}$

* $(f+g)(x)=x-4+\sqrt{9-x^2}$

مجال الدالة $f(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومجال الدالة $g(x)$ هو $[-3,3]$ لذا فإن مجال $(f+g)$ هو تقاطع المجالين وهو $[-3,3]$

* $(f-g)(x)=x-4-\sqrt{9-x^2}$ $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ المجال: $[-3,3]$

* $(f \cdot g)(x)=x\sqrt{9-x^2}-4\sqrt{9-x^2}$ $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ المجال: $[-3,3]$

* $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}$ $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ المجال: $(-3,3)$

($1B$)

$f(x)=x^2-6x \quad , \quad g(x)=\sqrt{x}$

* $(f+g)(x)=x^2-6x+\sqrt{x}$

مجال الدالة $f(x)$ هو $(-\infty,\infty)$ ومجال الدالة $g(x)$ هو $[0,\infty)$ لذا فإن مجال $(f+g)$ هو تقاطع المجالين وهو $[0,\infty)$

* $(f-g)(x)=x^2-6x-\sqrt{x}$ $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ المجال: $[0,\infty)$

* $(f \cdot g)(x)=x^2\sqrt{x}-6x\sqrt{x}$ $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ المجال: $[0,\infty)$

* $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-6x}{\sqrt{x}}$ $\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$ المجال: $(0,\infty)$

تحقق من فهمك

أوجد $[f\circ g](3)$, $[g\circ f](x)$, $[f\circ g](x)$ في كل مما يأتي:

$$f(x)=3x+1\ ,\ g(x)=5-x^2\quad (2A)$$

$$[f\circ g](x)=f\left(5-x^2\right)=3\left(5-x^2\right)+1=15-3x^2+1=16-3x^2$$

$$[g\circ f](x)=g(3x+1)=5-(3x+1)^2=5-9x^2-6x-1=6-9x^2-6x$$

$$[f\circ g](3)=16-3(3)^2=16-27=-11$$

$$f(x)=6x^2-4\ ,\ g(x)=x+2\quad (2B)$$

$$[f\circ g](x)=f(x+2)=6(x+2)^2-4=6(x^2+4x+4)-4=6x^2+24x+20$$

$$[g\circ f](x)=g\left(6x^2-4\right)=\left(6x^2-4\right)+2=6x^2-2$$

$$[f\circ g](3)=6(3)^2+24(3)+20=54+72+20=146$$

تحقق من فهمك

(3A)

$$[f\circ g](x)=f\left(x^2-1\right)=\sqrt{x^2-1+1}=x$$

المجال: $\{x \mid x\in R\}$

(3B)

$$[f\circ g](x)=f\left(x^2+x\right)=\frac{5}{x^2+x}$$

المجال: $\{x \mid x\neq 0, x\neq 1\ ,\ x\in R\}$

تحقق من فهمك

(4A) $h(x)=x^2-2x+1$

بالتحليل: $h(x)=(x-1)(x-1)=(x-1)^2$

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=x-1$

(4B) $h(x)=\frac{1}{x+7}$

$f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)=x+7$

تحقق من فهمك

(5) أعمال:

(5A)

$c(x)=x-100$

$d(x)=0.85x$

(5B)

$[c\circ d](x)=0.85x-100$ ← تمثل سعر الحاسوب بالإستفادة أولاً من الخصم.

$[d\circ c](x)=0.85x-85$ ← تمثل سعر الحاسوب بالإستفادة من القيمة أولاً.

(5C)

الإستفادة من الخصم أولاً ثم القيمة $[c\circ d](x)$ يجعل السعر أقل.

تدرب وحل المسائل

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$ للدالتين $g(x)$ ، $f(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة:

(1)

$(f+g)(x)=x^2+\sqrt{x}+4$ المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x)=x^2-\sqrt{x}+4$ المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=\sqrt{x^5}+4\sqrt{x}$ المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\sqrt{x^3}+\frac{4}{\sqrt{x}}$ المجال: $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

---

(2)

$(f+g)(x)=-x^3+x+5$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x)=-x^3-x+11$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=-x^4+3x^3+8x-24$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{8-x^5}{x-3}$ المجال: $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$

---

(3)

$(f+g)(x)=x^2+6x+8$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x)=x^2+4x+4$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=x^3+7x^2+16x+12$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{x+2}}=x+3$ المجال:

$\{x \mid x \neq -2, x \in R\}$

---

(4)

$(f+g)(x)=x^2+10x$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x)=x^2-8x$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=9x^3+9x^2$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+x}{9x}=\frac{\cancel{x}(x+1)}{9\cancel{x}}=\frac{x+1}{9}$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

---

(5)

$(f+g)(x)=2x$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x)=-14$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=x^2-29$ المجال: $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-7}{x+7}$ المجال: $\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$

---

(6)

$(f+g)(x)=x^3+x+\frac{6}{x}$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x)=-x^3-x+\frac{6}{x}$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=6x^2+6$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{6}{x^4+x^2}$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \neq -1 , x \in R\}$

---

(7)

$(f+g)(x)=\frac{x^2+12}{4x}$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x)=\dfrac{x^2-12}{4x}$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=\dfrac{3}{4}$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x^2}{12}$ المجال: $\{x \mid x \neq 0,\ x \in R\}$

---

(8)

$(f+g)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+4\sqrt{x}$ المجال: $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$(f-g)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}$ المجال: $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=4$ المجال: $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{1}{4x}$ المجال: $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

---

(9)

$(f+g)(x)=\sqrt{x+8}+\sqrt{x+5}-3$ المجال: $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$(f-g)(x)=\sqrt{x+8}-\sqrt{x+5}+3$ المجال: $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=\sqrt{x^2+13x+40}-3\sqrt{x+8}$ المجال: $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5}-3}$ المجال: $\{x \mid x \geq -5, x \neq 4\ ,\ x \in R\}$

---

(10)

$(f+g)(x)=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-4}$ المجال: $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(f-g)(x)=\sqrt{x+6}-\sqrt{x-4}$ المجال: $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x)=\sqrt{x^2+2x-24}$ المجال: $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}}$ المجال: $\{x \mid x > 4, x \in R\}$

<u>أوجد</u> $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](6)$ في كل مما يأتي:

(11) $f(x)=2x-3 \;,\; g(x)=4x-8$

$[f \circ g](x)=8x-19$

$[g \circ f](x)=8x-20$

$[f \circ g](6)=29$

---

(12) $f(x)=-2x^2-5x+1 \;,\; g(x)=-5x+11$

$[f \circ g](x)=-50x^2+145x-101$

$[g \circ f](x)=10x^2+25x+1$

$[f \circ g](6)=-1031$

---

(13) $f(x)=x^2-16 \;,\; g(x)=x^2+7x+11$

$[f \circ g](x)=x^4+14x^3+71x^2+154x$

$[g \circ f](x)=x^4-25x^2+155$

$[f \circ g](6)=7905$

---

(14) $f(x)=2+x^4 \;,\; g(x)=-x^2$

$$[f\circ g](x)=8x^{8}+2$$
$$[g\circ f](x)=-x^{8}-4x^{4}-4$$
$$[f\circ g](6)=1679618$$

حدد مجال $f\circ g$، ثم أوجد $f\circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية:

(15)

المجال: $\{x \mid x\neq \pm\sqrt{3},\ x\in R\}$

$$[f\circ g](x)=\frac{1}{x^{2}-3}$$

---

(16)

المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$$[f\circ g](x)=\frac{2}{x^{2}+3}$$

---

(17)

المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$$[f\circ g](x)=x$$

---

(18)

المجال: $\{x \mid x<6\ ,\ x\in R\}$

$$[f\circ g](x)=\frac{5}{\sqrt{6-x}}$$

---

(19)

المجال: $\{x \mid x>-8\ ,\ x\in R\}$

$$[f\circ g](x)=\frac{-4}{\sqrt{x+8}}$$

---

(20)

المجال: $\{x \mid x\in R\}$

$$[f\circ g](x)=x+2$$

---

(21) النظرية النسبية:

a) $\{v \mid 0\le v<c\ ,\ v\in R\}$

لا يمكن أن تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة الضوء. ولا تكون v أكبر من c لأنك ستحصل على عدد سالب تحت الجزر التربيعي وهذة كمية غير معرفة ولا يمكن أن تكون السرعة أقل من الصفر لأنها لا يمكن أن تكون سالبة.

---

b)

$$m(10)=100\ kg$$
$$m(10000)=100.0000001\ kg$$
$$m(1000000)=100.0005556\ kg$$

---

c) عندما تقترب v من c من اليسار تزاد قيمة v و عندما تزداد قيمة v يكو ن $m(v)$ تقترب من ∞

---

d)

$$m(v)=f(g(v))$$

$$f(v)=\frac{100}{\sqrt{1-v^2}}\ ,\ g(v)=\frac{v}{c}$$

أوجد دالتين f، g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x)=[f\circ g](x)$ على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x)=x$.

$$h(x)=\sqrt{4x+2}+7 \quad (22)$$

$$f(x)=\sqrt{x}+7$$

$$g(x)=4x+2$$

$$h(x)=\frac{6}{x+5}-8 \quad (23)$$

$$f(x)=\frac{6}{x}-8$$

$$g(x)=x+5$$

$$h(x)=|4x+8|-9 \quad (24)$$

$$f(x)=|x|-9$$

$$g(x)=4x+8$$

$$h(x)=[\![-3(x-9)]\!] \quad (25)$$

$$f(x)=[\![-3x]\!]$$

$$g(x)=x-9$$

$$h(x)=\sqrt{\frac{5-x}{x+2}} \quad (26)$$

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$g(x)=\frac{5-x}{x+2}$$

$$h(x)=\left(\sqrt{x}+4\right)^{3} \quad (27)$$

$$f(x) = x^3$$
$$g(x) = \sqrt{x} + 4$$

---

(28) $h(x) = \dfrac{8}{(x-5)^2}$

$$f(x) = \frac{8}{x^2}$$
$$g(x) = x - 5$$

---

(29) $h(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x-6}$$
$$g(x) = x + 4$$

---

(30) **ميكانيكا الكم:**

a) $f(v) = \dfrac{h}{25v}$

b) قيمة v ليست صفر. وإذا كانت تساوي صفر فلا وجود لطول الموجة.

c) $\lambda = \dfrac{h}{200}$

d)
$$f(v) = a[b(v)] = \frac{h}{25v}$$
$$a(v) = \frac{h}{v}$$

---

(31) **وظائف:**

$h[f(x)]$ (a وتحسب العمولة بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

(b حوالي 6000 ريـــــــــــال

أوجد دالتين f، g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x)=[f\circ g](x)$ على ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x)=x$.

(32)

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$g(x)=x^3-4$$

(33)

$$f(x)=x-\frac{4}{x^2+1}$$

$$g(x)=\sqrt{x-1}$$

(34)

$$f(x)=\frac{x-4}{2x-9}+\sqrt{\frac{4}{x-4}}$$

$$g(x)=x+4$$

أوجد $f(0.5), f(-6), f(x+1)$ في كل مما يأتي مقرباً الناتج لأقرب جزء من عشرة.

(35)

$$f(0.5) = -0.75$$
$$f(-6) = 22$$
$$f(x+1) = x^2 + 4x + 1$$

---

(36)

$$f(0.5) = 8.7$$
$$f(-6) = 11.6$$
$$f(x+1) = \frac{2}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} - 2x - \frac{7}{3}$$

---

(37)

$$f(0.5) = 8.7$$
$$f(-6) = 11.6$$
$$f(x+1) = \sqrt{-x} + 18x^2 + 36x + 11$$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ لكل مما يأتي:

(38)

$$[f \circ g \circ h](x) = x + 6\sqrt{x} + 11$$

(39)

$$[f \circ g \circ h](x) = \sqrt{\frac{1}{x^2}+2}$$

(40)

a) $g(x) = x^2 + 4$

b) $g(x) = 4x + 8$

(41)

a) $g(x) = 9x^2$

b) $g(x) = 50x^2 + 25$

(42)

a) $g(x) = \frac{1}{4x}$

b) $g(x) = \sqrt{x}$

بإستعمال منحنى الدالتين $f(x)$, $g(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:

(43)

$$(f+g)(2) = 2 + (-1) = 1$$

(44)

$$(f-g)(-6) = 4 - (-5) = 9$$

(45)

$$(f \cdot g)(4) = 0$$

(46)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-2)=\frac{4}{3}$$

(47)

$$(f\circ g)(-4)=f(-4)=0$$

(48)

$$(g\circ f)(6)=g(-2)=-3$$

(49) كيمياء:

a) $\{m \mid m>0\ ,\ m\in R\}$ لا يمكن أن تكون كتلة جسم ما سالبة أو تساوي الصفر.

b) $7.22\ m/s$ تقريباً

c) تتناقص سرعتها.

d) $v(m)=(f\circ g)(m)$

$$f(m)=\sqrt{m}$$

$$g(m)=\frac{(24.9435)(303)}{m}$$

أوجد ثلاث دوال $h\ ,\ g\ ,\ f$ بحيث يكون $a(x)=[f\circ g\circ h](x)$ في كل مما يأتي:

(50)

$$f(x)=x^2$$

$$g(x)=\sqrt{x}+4$$

$$h(x)=x-7$$

(51)

$f(x)=\sqrt{x}$

$g(x)=x^2+8$

$h(x)=x-5$

---

(52)

$f(x)=\dfrac{3}{x}$

$g(x)=x^2+4$

$h(x)=x-3$

---

(53)

$f(x)=\dfrac{4}{x+1}$

$g(x)=x^2$

$h(x)=\sqrt{x}+3$

أوجد $[f\circ g](x),[g\circ f](x)$ في كل مما يأتي وحدد أي قيود على مجال دالة التركيب **في كل حالة:**

(54)

$[f\circ g](x)=x$ ، مجـــــــــــالها $\{x\,|x\geq -4, x\in R\}$

$[g\circ f](x)=x-3$ ، مجـــــــــــالها $\{x\,|x\geq -4, x\in R\}$

(55)

$[f\circ g](x)=\sqrt{\sqrt{16+x^2}+6}$ ، مجــــــــــــــــالها $\{x\,|x\geq -6, x\in R\}$

$[g\circ f](x)=\sqrt{x+22}$ ، مجــــــــــــــــالها $\{x\,|x\geq -6, x\in R\}$

(56)

$[f\circ g](x)=\sqrt[4]{9-x^2}$ ، مجــــــــــــــــالها $\{x\,|x\geq -4, x\in R\}$

$[g\circ f](x)=\sqrt{9-x^2}$ ، مجــــــــــــــــالها $\{x\,|0\leq x\leq 9, x\in R\}$

---

(57)

$[f\circ g](x)=\dfrac{6x-24}{x-12}$ ، مجــــــــــــــــالها $\left\{x\,\middle|\,x\neq 4, x\neq -\dfrac{1}{2}, x\neq 12, x\in R\right\}$

$[g\circ f](x)=\dfrac{4x+2}{4x-1}$ ، مجــــــــــــــــالها $\left\{x\,\middle|\,x\neq 4, x\neq -\dfrac{1}{2}, x\neq \dfrac{1}{4}, x\in R\right\}$

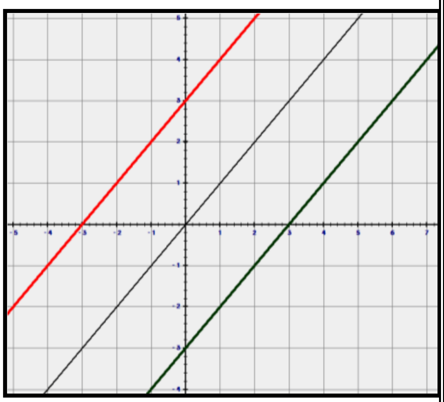
---

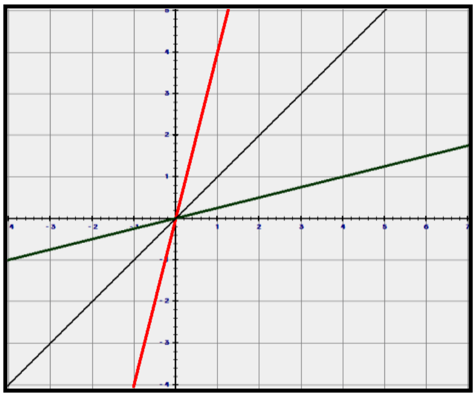
(58) تمثيلات متعددة:

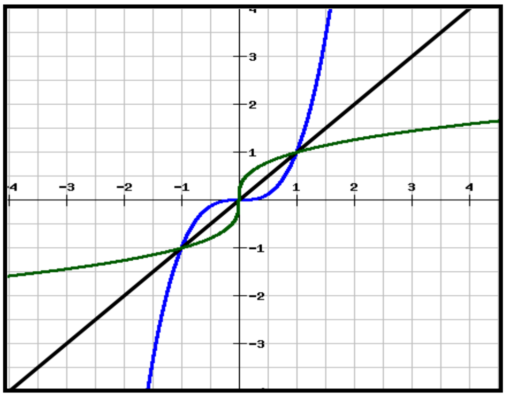
a) جبرياً: لكل دالة $[f\circ g](x)=x$

b) لفظياً: لكل زوج من الدوال تختصر الأعداد بعضها مع بعض على ألا يكون للتركيب أية معاملات غير الواحد، ولا يبقى ثوابت.

c) بيانياً:







d) لفظياً: محور الإنعكاس بين كل زوج من الدوال هو المستقيم $y = x$

e) تحليلياً: يكافئ كل من التركيبين $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ الدالة المحايدة.

f) تحليلياً:

(a) $g(x) = x + 6$

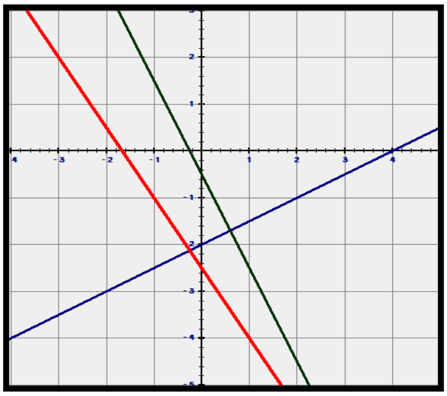
(b) $g(x) = 5x$

(c) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

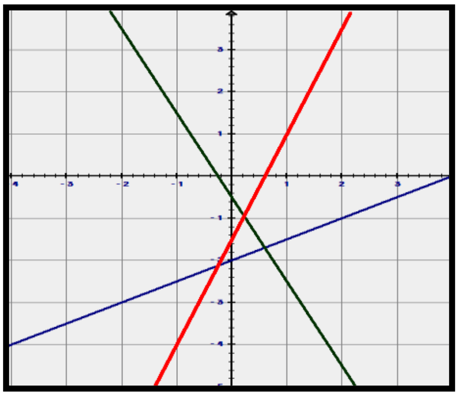
(d) $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$

مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً بإستعمال الشكل المجاور:

(59) $(f + h)(x)$

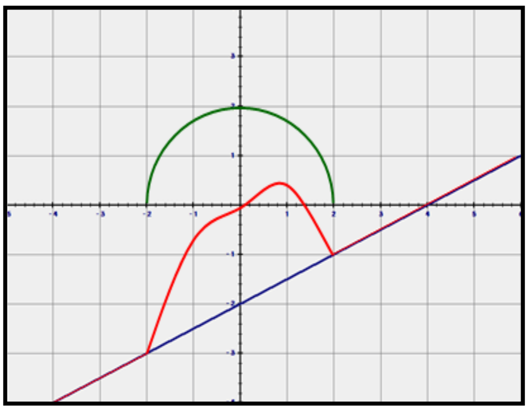


(60) $(f - h)(x)$

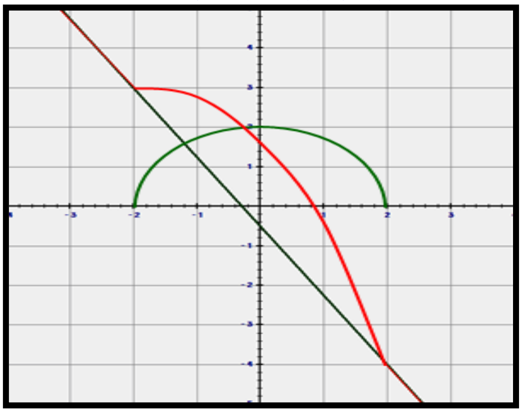


---

(61) $(f + g)(x)$



(62) $(h + g)(x)$



حدد مجال كل من دالتى التركيب الآتيتين، بإستعمال الشكل الآتى:

(63) $[-10,-4]\cup[2,8] = \{x \mid -10 \le x \le -4 \;\; R \;\; 2 \le \quad \le 8 \, , \quad \in \; x x\}$

(64) $\{x \mid -4 \le x \le 10 \quad , x \in R\}$

مسائل مهارات التفكير العليا:

تبرير:

(65) دالة فردية

(66) دالة فردية

(67) دالة زوجية

(68) دالة زوجية

تحد:

(69) $f\left(x\right)=\sqrt{x}$

(70) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{2}$

(71) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$

(72) $f\left(x\right)=\left|x\right|$

---

(73) **تبرير:**

غير صحيحة فهي ليست دائما دالة خطية

إذا كانت $g\left(x\right)=x^{2}+x+1$ ، $f\left(x\right)=\sqrt{x}$

، $[f \circ g](x)=\sqrt{x^{2}+x+1}$ وهذة ليست دالة خطية.

---

(74) **أكتب:**
مجالها $\{x \mid x \neq 3 \ , \ x \in R\}$ بإيجاد النقاط التي تكون عندها الدالة غير متصلة وندرس إتصالها عند أصفار الدالتين ويمكن معرفة النقاط التي يكون عندها الدالة تقترب من ∞.

مراجعة تراكمية:

أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكل من الدوال الآتية مقربة لأقرب جزء من مائة، ثم حدد قيم x التي تقع عندها هذه القيم:

(75) $(0 \ , \ 4)$ قيمة عظمى محلية، $(1 \ , \ 3)$ قيمة صغري محلية.

---

(76) $(1.29 \ , \ 1.3)$ قيمة عظمى محلية، $(-1.29 \ , \ -7.3)$ قيمة صغري محلية.

---

(77) $(-0.75 \ , \ -2.11)$ قيمة عظمى مطلقة.

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة:

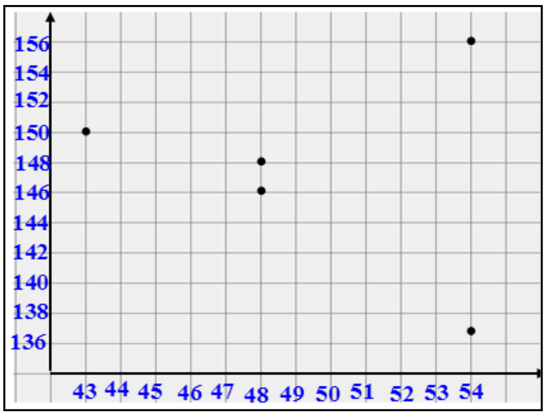
(78) للدالة صفر في الفترة $(1 \ , \ 2)$ عند $x = 1.73$ وكذلك في الفترة $(-2 \ , \ -1)$ عند $x = -1.73$

---

(79) للدالة صفر في الفترة $(2 \ , \ 3)$ عند $x = 2.41$ وكذلك في الفترة $(-1 \ , \ 0)$ عند $x = -0.41$

(80)

(a



b) المجال: $\{43, 48, 54\}$

المدى: $\{137, 146, 148, 150, 156\}$

c) لا تمثل العلاقة دالة؛ لأن القيمتان 48 , 54 من المجال ترتبطان كل منهما بقيمتين من المدى.

تدرب على الإختبار

(81) B) $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

(82) B) 3

(1-7) العلاقات والدوال العكسية

(1)

$(1A)$ نعم

$(1B)$ لا

---

(2)

$(2A)$

$$y=-16+x^3$$
$$x=-16+y^3$$
$$y^3=x+16$$
$$y=\sqrt[3]{x+16}$$
$$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+16}$$

$(2B)$

$$y=\frac{x+7}{x}$$

$$x=\frac{y+7}{y}$$

$$xy=y+7$$

$$xy-y=7$$

$$y(x-1)=7$$

$$y=\frac{7}{x-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{7}{x-1} \quad , x\neq 1$$

$(2C)$ غير موجودة

(3) اثبت جبرياً أن كلاً من الدالتين $g \,,\, f$ تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

$(3A)$

$$f(g(x))=18-3\left(6-\frac{x}{3}\right)$$

$$=18-18+x$$

$$=x$$

$$g(f(x))=6-\frac{18-3x}{3}$$

$$=6-6+x$$

$$=x$$

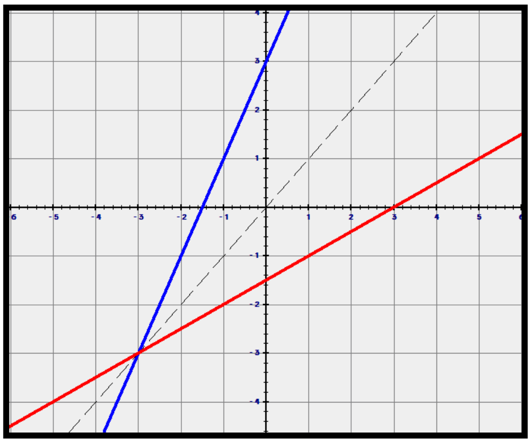
$(3B)$

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\left(\sqrt{x-10}\right)^2+10$$
$$=x-10+10$$
$$=x$$
$$g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt{x^2+10-10}$$
$$=\sqrt{x^2}$$
$$=x$$

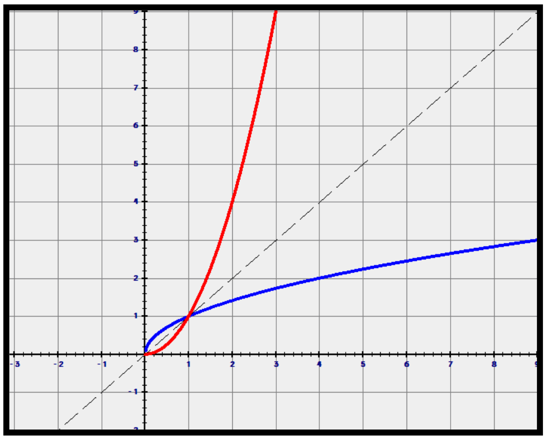
---

(4) استعمل التمثيل البيانى لكل دالة مما يأتى لتمثيل الدالة العكسية لها بيانياً:

(4A)



(4B)



(5) توفير:

(5A) يحقق منحنى الدالة إختبار الخط الأفقي، لذا فإن الدالة العكسية للدالة $f\left(x\right)$ موجودة

$$y = 0.2(0.65x - 1800)$$
$$x = 0.2(0.65y - 1800)$$
$$x = 0.13y - 360$$
$$y = \frac{x + 360}{0.13}$$
$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x + 360}{0.13}$$

(5B) في الدالة العكسية تمثل x مقدار التوفير الشهري وتمثل $f^{-1}(x)$ الراتب الشهري.

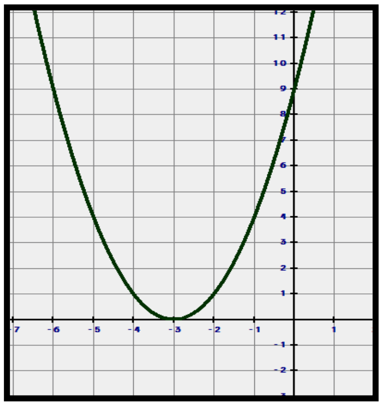
(5C) $x \geq 2769.23$

6615.38 (5D) ريـــــــــــال تقريباً.

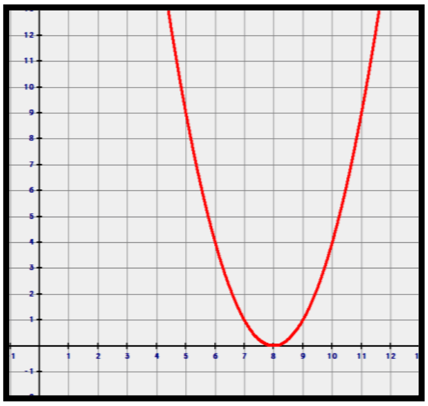
تدرب وحل المسائل:

مثل كل من الدوال الآتية بيانياً بإستخدام الحاسبة البيانية، ثم طبق إختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا:

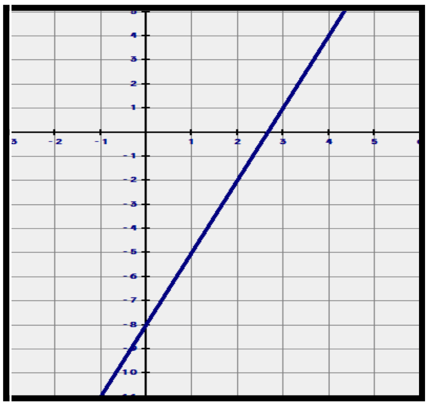
(1) لا



(2) لا

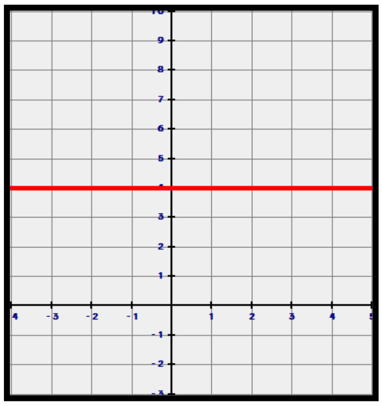


(3) نعم

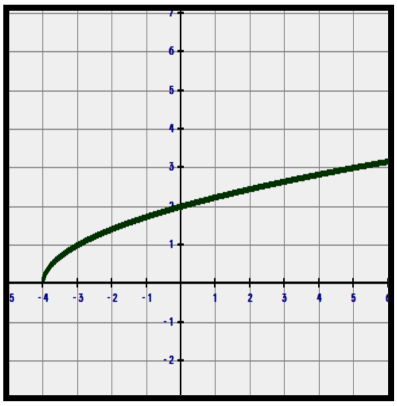


---

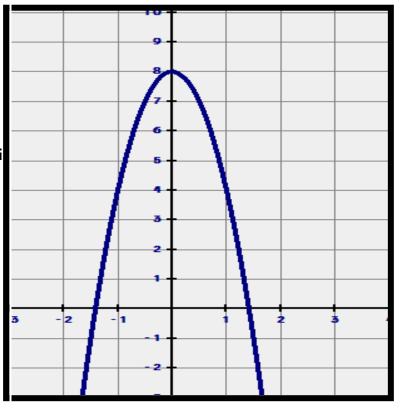
(4) لا



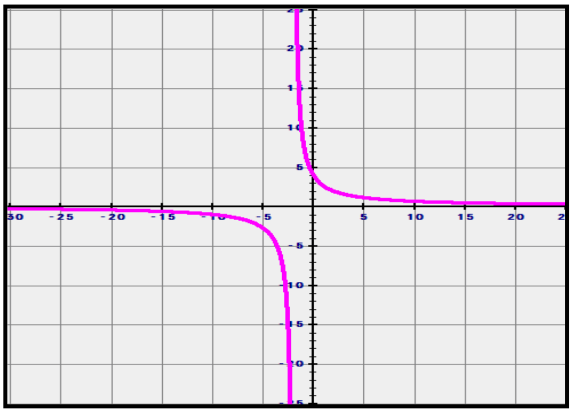
(5) نعم



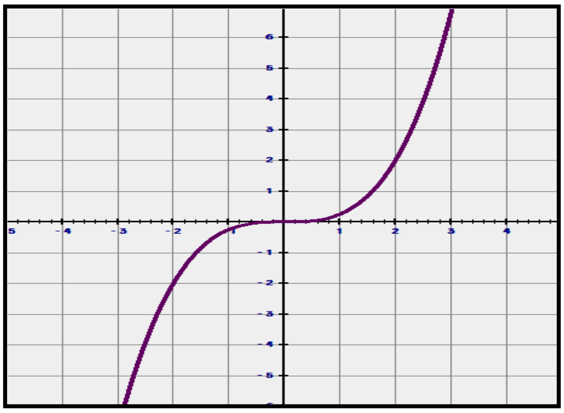
(6) لا



(7) نعم



(8) نعم



أوجد الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ في كل مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود التي علية، وإذا لم يكن ممكناً فاكتب غير موجودة.

(9) غير موجودة

(10) غير موجودة

(11) $f^{-1}(x) = x^2 - 8 \; , \; x \geq 0$

(12) غير موجودة

(13) غير موجودة

(14) $g^{-1}(x) = \dfrac{6}{1-x} \; , \; x \neq 1$

(15) $f^{-1}(x) = 8 - \dfrac{36}{x^2} \; , \; x > 0$

(16) $g^{-1}(x) = -3 + \dfrac{49}{x^2} \; , \; x > 0$

(17) $h^{-1}(x)=\dfrac{5x+4}{3x-1}\ ,\ x\neq\dfrac{1}{3}$

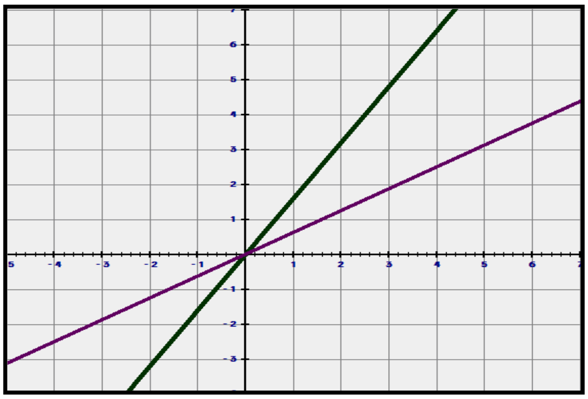
(18) غير موجودة

---

(19) سرعة:

a) $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1.6}$ حيث $f^{-1}(x)$ السرعة بالميل لكل ساعة، (x) سرعة الجسم بالكيلومتر لكل ساعة.

b)



اثبت أن كلاًمن الدالتين $f\ ,\ g$ تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

(20)

$$f\left(g\left(x\right)\right)=4\left(\frac{x-9}{4}\right)+9$$
$$=x-9+9$$
$$=x$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\frac{4x+9-9}{4}$$
$$=\frac{4x}{4}$$
$$=x$$

(21)

$$f\left(g(x)\right)=-3\left(\sqrt{\frac{5-x}{3}}\right)^{2}+5$$

$$=-3\left(\frac{5-x}{3}\right)+5$$

$$=-5+x+5=x$$

$$g\left(f(x)\right)=\sqrt{\frac{5+3x^{2}-5}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{3x^{2}}{3}}$$

$$=\sqrt{x^{2}}=x$$

---

(22)

$$f\left(g(x)\right)=\frac{\left(\sqrt{4x-32}\right)^{2}}{4}+8=\frac{4x-32}{4}+8=x-8+8=x$$

$$g\left(f(x)\right)=\sqrt{4\left(\frac{x^{2}}{4}+8\right)-32}=\sqrt{x^{2}+32-32}=\sqrt{x^{2}}=x$$

---

(23)

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\left(x^{\frac{2}{3}}-8+8\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=x$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\left[\left(x+8\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}-8$$

$$=x+8-8=x$$

---

(24)

$$f\left(g\left(x\right)\right)=2\left(\sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}\right)^{3}-6$$

$$=2\left(\frac{x+6}{2}\right)-6$$

$$=x+6-6=x$$

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt[3]{\frac{2x^{3}-6+6}{2}}$$

$$=\sqrt[3]{x^{3}}=x$$

---

(25)

$$f\left(g(x)\right)=\frac{\frac{2x+6}{1-x}-6}{\frac{2x+6}{1-x}+2}=\frac{\frac{2x+6-6+6x}{1-x}}{\frac{2x+6+2-2x}{1-x}}$$

$$=\frac{8x}{8}=x$$

$$g\left(f(x)\right)=\frac{2\left(\frac{x-6}{x+2}\right)+6}{1-\left(\frac{x-6}{x+2}\right)}=\frac{\frac{2x-12+6x+12}{x+2}}{\frac{x+2-x+6}{x+2}}$$

$$=\frac{8x}{8}=x$$

---

(26) **فيزياء:**

(a $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{2x}{m}}$ تمثل السرعة بالمتر / ثانية، x هي طاقة الحركة بالجول، m هي كتلة الجسم بالكيلوجرام

(b

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=\tfrac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right)^2$$

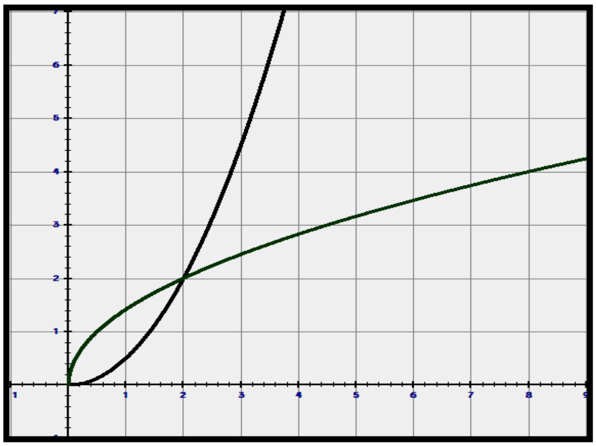
$$=\tfrac{1}{2}m\left(\frac{2x}{m}\right)=x$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=9\left(\tfrac{1}{2}mx^2\right)=\sqrt{\frac{2\left(0.5mx^2\right)}{m}}$$

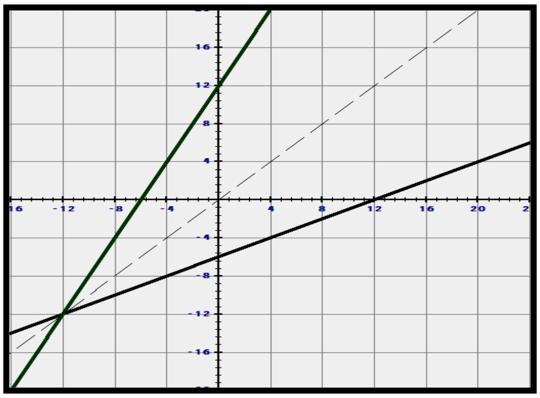
$$=\sqrt{x^2}=x$$

بما أن $f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ فإن كل الدالتين عكسية للأخرى.

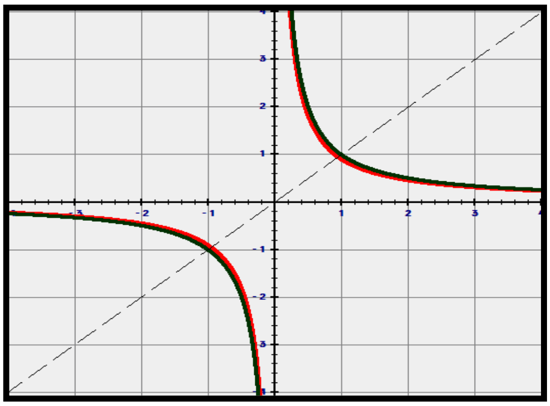
(c



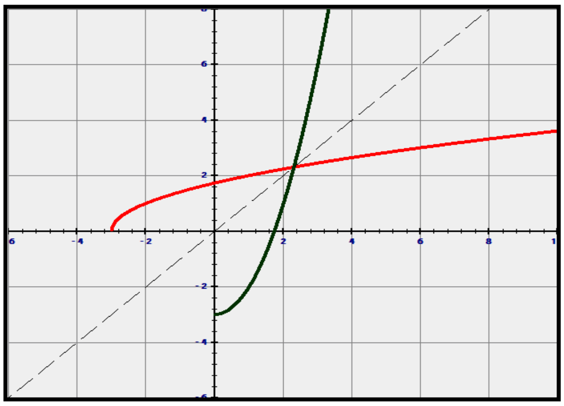
(27)



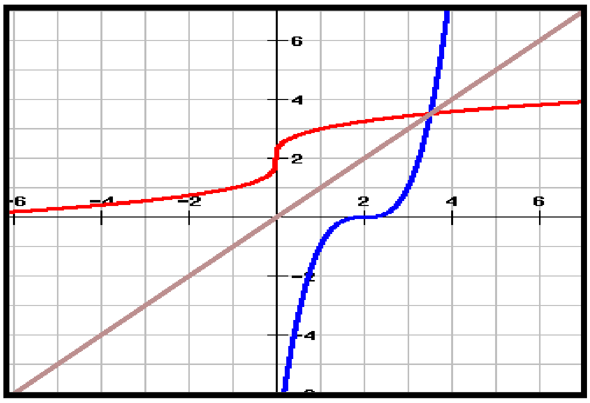
(28)



(29)



(30)



(31)**وظائف:**

a) تحقق الدالة $f(x)$ إختبار الخط الأفقى $f^{-1}(x)=20(x-420)$

b) تمثل x عمولة فالح خلال إسبوع، أما $f(x)$ فتمثل مقدار مبيعات فالح.

c) $x \geq 0$، لأنه لايمكن أن تكون المبيعات بالسالب.

d) 6000 ريـــــــــــــال

حدد إذا كانت الدالة العكسية موجودة فى كل مما يأتى أم لا:

(32) غيــــــــــــر موجودة

(33) موجودة

(34) غيــــــــــــر موجودة

(35) موجودة

كون جدولاً للدالة $f^{-1}(x)$ في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، إذا كم تكن موجودة فاذكر السبب.

(36) $f^{-1}(x)$ موجودة

x	-4	0	3	5	9	13
$f(x)$	-6	-4	-1	3	6	10

---

(37)

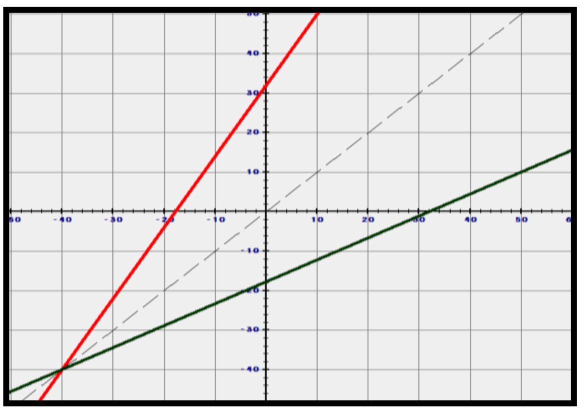
$f^{-1}(x)$ غير موجودة لأن عند عمل إختبار الخط الافقي فإنه يقطع المنحى في أكثر من نقطة

---

(38) درجات الحرارة:

a) $f^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ وتمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات فهرنهايت إلى سيلزيوس

b)



$$f\left(f^{-1}(x)\right)=\tfrac{9}{5}\left(\tfrac{5}{9}(x-32)\right)+32$$
$$=x-32+32=x$$
$$f^{-1}\left(f(x)\right)=\tfrac{5}{9}\left(\tfrac{9}{5}x+32-32\right)$$
$$=\tfrac{5}{9}\left(\tfrac{9}{5}x\right)=x$$

c) $(k\circ f)(x)=x+273.15$ وتستعمل للتحويل من درجة الحرارة السليزية إلى درجة الحرارة المطلقة.

---

d) 333.15 درجة مطلقة تقريباً

ضع قيوداً على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة، ثم أوجد الدالة العكسية.

(39) $f^{-1}(x)=\sqrt{x}+5\ ,\ x\geq 5$

(40) $f^{-1}(x)=x-11\ ,\ x\leq -9$

(41) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+6}\ ,\ x\geq 0$

(42) $f^{-1}(x)=x-1\ ,\ x\geq -5$

---

(43) أزهـــــــــار:

a) $f(x)=5x+3(75-x)$ حيث x تمثل عدد أزهار الجوزي

b) $f^{-1}(x)=0.5x-112.5$

c) مجال $f^{-1}(x)=0.5x-112.5$ ، $\{x\,|\,1225\leq x\leq 375\ ,\ x\in R\}$

مجال $f(x)=5x+3(75-x)$ ، $\{x\,|\,10\leq x\leq 75\ ,\ x\in R\}$

d) عدد زهرات القرنفل = 35 زهرة.

إذا كانت الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، فأكتب المجال وللمدى لكل من f ، f^{-1}

(44)

مجال $f(x) = \{x \mid x \geq 6, x \in R\}$

مدى $f(x) = \{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

مجال $f^{-1}(x) = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

مدى $f^{-1}(x) = \{y \mid y \geq 6, y \in R\}$

---

(45)

$f^{-1}(x)$ غيـــــــر موجودة

---

(46)

مجال $f(x) = \{x \mid x \neq 4, x \in R\}$

مدى $f(x) = \{y \mid y \neq 3, y \in R\}$

مجال $f^{-1}(x) = \{x \mid x \neq 3, x \in R\}$

مدى $f^{-1}(x) = \{y \mid y \neq 4, y \in R\}$

---

(47)

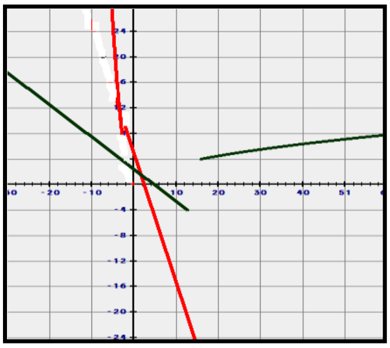
مجال $f(x) = \{x \mid x \neq 3, x \in R\}$

مدى $f(x) = \{y \mid y \neq 4, y \in R\}$

مجال $f^{-1}(x) = \{x \mid x \neq 4, x \in R\}$

مدى $f^{-1}(x) = \{y \mid y \neq 3, y \in R\}$

أوجد الدالة العكسية في كل مما يأتي، إن أمكن، ثم مثل في مستوى إحداثي واحد، وأذكر أية قيود على المجال:



(48) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,\ 16\le x\\ 2.5-\dfrac{x}{2} & ,\ 13>x\end{cases}$

---

(49) غيــــــــر موجودة

---

(50) إتصالات:

a) $r(x)=x-50$

b) $d(x)=0.9x$

c) $T(x)=0.9x-50$

d) $T^{-1}(x)=\dfrac{x+50}{0.9}$ ، وتمثل الدالة العكسية السعر الأصلي للجهاز كدالة في سعر الجهاز بعد الخصم وإجراء التخفيض.

e) 900 ريــــــــــــــــــــــــــال.

إذا كانت $g(x)=2x+6$ ، $f(x)=8x-4$ فأوجد:

(51) $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(x)$

$$\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(x)=\frac{x+2}{16}$$

(52) $\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)$

$$\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)=\frac{x-44}{16}$$

(53) $\left(f\circ g\right)^{-1}(x)$

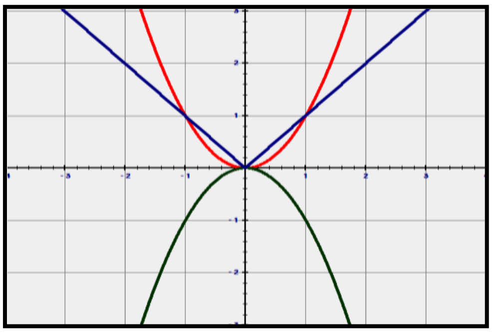
$$\left(f\circ g\right)^{-1}(x)=\frac{x-44}{16}$$

(54) $\left(g\circ f\right)^{-1}(x)$

$$\left(g\circ f\right)^{-1}(x)=\frac{x+2}{16}$$

---

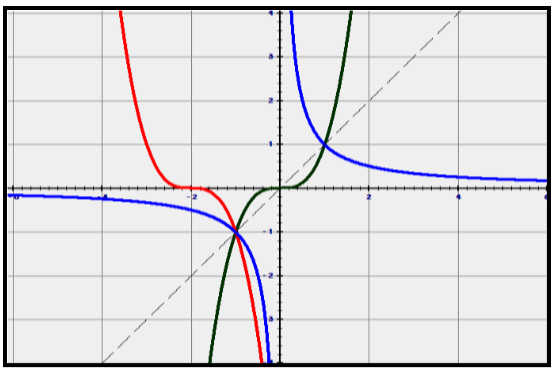
(55) <u>تمثيلات متعددة</u>:



a) لا تحقق هذه الدوال إختبار الخط الأفقي.

---

b) يمكن التوصيل الي قاعدة تقول أن الدوال الزوجية ليس لها دوال عكسية. حيث إذا كانت الدالة زوجية فإن $f(x)=f(-x)$ وعلية فإن قيمتين من x ترتبطان بقيمة واحدة من y، مما يؤدي إلى ان الدالة لا تحقق اختبار الخط الافقي اي انه لا يوجد للدالة الزوجية دالة عكسية.



c) بيانيا:

تحقق هذه الدالة اختبار الخط الافقي.

$d)$ تحليليا:

يوضح الرسم ان للدوال الثلاث دوال عكسية. ولكن هذا لا ينطبق على كل الدوال الفردية. فمثلا $f(x)=\frac{2}{15}x^3-\frac{47}{15}x$ فردية لان $-f(x)=f(x)$ ومنحنى هذه الدالة لا يحقق الخط الافقي، اي انه لا يوجد دالة عكسية لها.

مسائل مهارات التفكير العليا:

(56) تبرير:

المقطع y للدالة $f^{-1}(x)$ هو $(0,6)$

(57) اكتب:

مجال الدالة التربيعية بحاجة إلى تحديد، بحيث يظهر المنحنى فقط ليكون لها معكوس، وفي هذه الحالة يكون المجال $\left(\frac{-b}{2a},\infty\right)$ أو $\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right)$

---

(58) تبرير:

خطأ، الدوال الثابية خطية لكنها لا تحقق اختبار الخط الافقي لذا، فالدوال الثابتة ليست واحداً لواحد، وعليه لا يوجد لها معكوس.

(59) تحد:

$$f^{-1}(23)=3$$
$$f(3)=23$$
$$f(3)=3^3-a$$
$$23=27-a$$
$$\therefore a=4$$

(60) تبرير:

نعم، وواحدة من هذه الدوال هي $f(x)=\frac{1}{x}$. على الرغم من ان كلتا النهايتين تؤول إلى 0 ، الا أنه لا يوجد قيمتان او أكثر من المجال ترتبطان بقيمة واحدة y ، وعليه فالدالة تحقق اختبار الخط الأفقي.

مراجعة تراكمية:

أوجد لكل زوج من الدوال الآتية، $g \circ f$ ، $f \circ g$ ثم أوجد مجال الدالة التركيب:

(61)

$[f \circ g](x) = x^2 + 8x + 7$ المجال $\{x | x \in R\}$

$[g \circ f](x) = x^2 - 5$ المجال $\{x | x \in R\}$

---

(62)

$[f \circ g](x) = \frac{x}{2} - 4$ المجال $\{x | x \in R\}$

$[g \circ f](x) = \frac{x}{2} - 1$ المجال $\{x | x \in R\}$

استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الام) المعطاة لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكل مما يأتي:

(63)

a) توسع افقي.

b) إنسحاب خمس وحدات لليمين ووحدتين للأسفل.

c) توسع رأسي معاملة 3 ، وإنسحاب ست وحدات للأعلى.

---

(64)

a) إنسحاب ثلاث وحدات للأعلى، وإنعكاس حول المحور x ، للجزء من المنحنى الموجود تحت المحور x .

b) إنعكاس حول محور x ، وتضييق أفقي.

c) إنسحاب وحدة واحدة لليسار، وتضييق رأسي.

---

(65)

a) تضييق أفقي.

b) إنسحاب خمس وحدات لليمين.

c) تضييق افقي، وانسحاب اربع وحدات للاسفل، ثم انسحاب إلى اليسار بمقدار $\frac{1}{3}$ وحدة.

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة:

(66) $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=8$

---

(67) $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=-106$

تدرب على اختبار:

(68) $A \leftarrow g(x)=\frac{2x+5}{3}$

---

(69) $D \leftarrow$ (I و III فقط صحيحان)

الفصل (1) دليل الدراسة والمراجعة:

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتى صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل المفردة التى تحتها خط حتى تصبح صحيحة:

(1) صحيحة.
(2) صحيحة.
(3) صحيحة.
(4) صحيحة.
(5) خاطئة، الزوجية.
(6) صحيحة.
(7) صحيحة.
(8) خاطئة، إنعكاس.
(9) صحيحة.
(10) خاطئة، الدالة العكسية.

في كل علاقة مما يأتى، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة فى x:

(11) دالة.
(12) دالة.
(13) دالة.
(14) ليست دالة.

إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x + 4$ أوجد كلاً من القيمتين الآتيتين:

(15) $f(5) = (5)^2 - 3 \times 5 + 4 = 14$

(16) $f(-3x) = 9x^2 + 9x + 4$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية:

(17) المجال: $\{x \mid x \in R\}$

(18) المجال: $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\right\}$

(19) المجال: $\{a \mid a \neq -5, a \in R\}$

(20) المجال: $\{x \mid x \neq \pm 2, x \in R\}$

استعمل التمثيل البياني لإيجاد مجال كل دالة ومداها في كل مما يأتي:

(21) المجال: $[-8, 8]$

المدى: $[0, 8]$

(22) المجال: $\{x \mid x \in R\}$

المدى $(-\infty, -3\}$

أوجد المقطع y ، والاصفار لكل دالة مما يأتي:

(23) $\frac{9}{4}$ ، -9

(24) -3.9 ، -27

(25) -4 ، 0.4 ، 0

(26) -1 ، $\sqrt{2}-1$

حدد ما اذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيم x المعطاة وبرر اجابتك بأستعمال اختبار الاتصال واذا كانت الدالة غير متصلة فبين نوع عدم الاتصال.

(27) متصلة عند $x = 4$ ، الدالة معرّفة عند $x = 4$ ، تؤول الدالة إلى 4 عندما تؤول $x \rightarrow 4$ من الجهتين $f(4) = 4$

(28) غير متصلة عند $x=10$ والدالة غير معرفة عند $x=10$ ، وعدم الاتصال لا نهائي.

$$f(10)=\sqrt{2\times10-4}=\sqrt{16}$$

$$f(10)=4$$

10.001	10	9.999
4.00		3.999

يبين الجدول أنه عندما تقترب x من 10 من اليسار ومن اليمين فإنها تقترب من 4 وبما أن $f(10)=4$ إذن الدالة متصلة عند $x=10$

(29) متصلة عند $x=0$ ، الدالة معرّفة عند $x=0$ ، تؤول الدالة إلى 0 عندما تؤول $x\to0$ من الجهتين $f(0)=0$

متصلة عند $x=7$ ، الدالة معرّفة عند $x=7$ ، تؤول الدالة إلى 0.5 عندما تؤول $x\to7$ من الجهتين $f(7)=0.5$

(30) غير متصلة عند $x=2$ والدالة غير معرفة عند $x=2$ ، وعدم الاتصال لا نهائي،

الدالة متصلة عند $x=4$ والدالة معرفة عند $x=4$ ، الدالة تؤول إلى $\frac{1}{3}$ عندما تؤول $x\to4$

من الجهتين $f(4)=\frac{1}{3}$

(31) متصلة عند $x=1$ ، الدالة معرّفة عند $x=1$ ، تؤول الدالة إلى 2 عندما تؤول $x\to1$ من الجهتين $f(1)=2$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني:

(32) يوضح التمثبل البياني انه عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to -\infty$ ، وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to \infty$

(33) يوضح التمثبل البياني انه عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 0$ ، وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 0$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الاتيتين لتقدير الفترات إلى اقرب 0.5 وحده التى تكون فيها الدالة متزايدة او متناقصة او ثابتة. ثم قدر إلى اقرب 0.5 وحده القيم القصوى للدالة وبين نوعها.

f (34) متزايدة على $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة على $(-0.5, 5)$، ثم متزايدة على $(0.5, \infty)$ يوجد قيم عظمى محلية عند $(-0.5, 3.5)$، قيمة صغرى محلية عند $(0.5, 2.5)$.

f (35) متناقصة على $(-\infty, -3)$، ومتزايدة على $(-3, -1.5)$، ومتناقصة على $(-1.5, 0.5)$ ومتزايدة على $(0.5, \infty)$، ويوجد قيمة صغري محلية عند $(-3, 3)$ وقيمة عظمى محلية عند $(-1.5, 6)$، وايضا قيمة صغري محلية عند $(0.5, -7)$

أوجد متوسط معدل التغير لكل من الداتين الآتيتين فى الفترة المعطاة:

(36)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$
$$= \frac{-1-1}{2} = -1$$

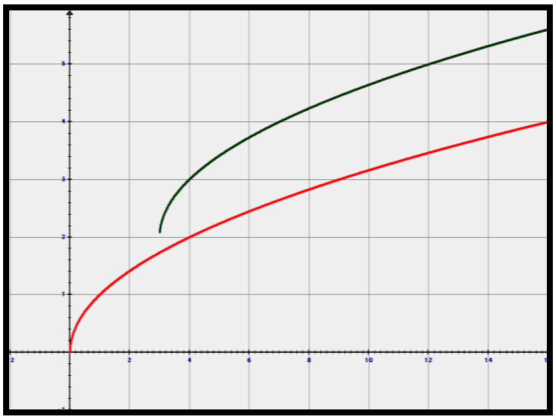
---

(37)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(-5)}{3+5}$$
$$=\frac{20-20}{8}=0$$

أوجد الدالة الرئيسية (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثلهما في مستوى إحداثي واحد.

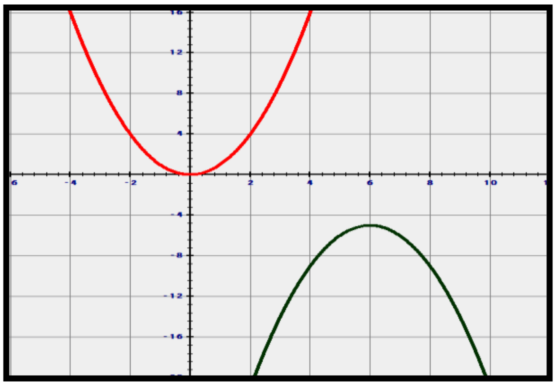
(38) $g(x)=\sqrt{x-3}+2$



$f(x)=\sqrt{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بإنسحاب 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى الأعلى.

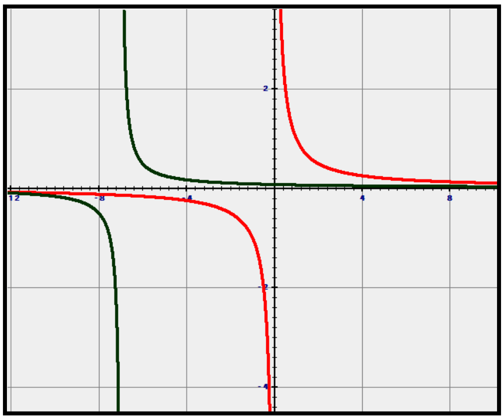
---

(39) $g(x)=-(x-6)^2-5$



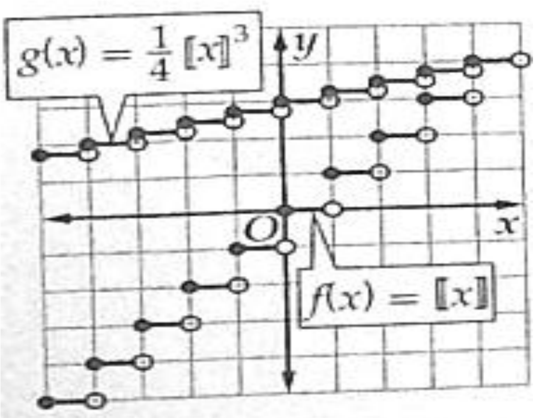
$f(x)=x^2$ ، منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانعكاس في المحور x وإنسحاب 6 وحدات إلى اليمين و 5 وحدات إلى الأسفل.

$$g(x)=\frac{1}{2(x+7)} \quad (40)$$



$f(x)=\frac{1}{x}$ ، منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بإنسحاب 7 وحدات إلى اليسار وتضيق رأسي بمعامل مقدارة $\frac{1}{2}$.

$$g(x)=\frac{1}{4}[\![x]\!]+3 \quad (41)$$



$f(x)=[\![x]\!]$ ، منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ بمعامل $\frac{1}{4}$ وإنسحاب 3 وحدات إلى الأعلى.

صف العلاقة بين الدالتين $g(x)$ ، $f(x)=\sqrt{x}$ في كل مما يأتي، ثم أكتب معادلة الدالة $g(x)$:

(42)

منحني الدالة $g(x)$ هو منحني الدالة $f(x)$ بإنسحاب مقدارة وحدتان لليسار، $g(x)=\sqrt{x+2}$

---

(43)

منحني الدالة $g(x)$ هو منحني الدالة $f(x)$ بإنعكاس حول المحور x ، وإنسحاب مقدارة 4 وحدات لليمين، وإنسحاب وحدة واحدة إلى أعلى، $g(x)=-\sqrt{x-4}+1$

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ لكل من الدالتين $g(x)$ ، $f(x)$ فيما يأتي. ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

(44)

$(f+g)(x) = 2x^2+5x-3$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = -2x^2-3x+9$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 2x^3+10x^2+6x-18$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2(x-1)}$ ، مجـــالها $\{x \mid x \neq -3 , 1 , x \in R\}$

---

(45)

$(f+g)(x) = 4x^2+5x-2$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = 4x^2-5x$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 20x^3-4x^2-5x+1$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x^2-1}{5x-1}$ ، مجـــالها $\left\{x \,\middle|\, x \neq \frac{1}{5} , x \in R\right\}$

(46)

$(f+g)(x) = x^3+2x^2+2$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = x^3-6x^2+8$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 4x^5-8x^4-3x^3+26x^2-15$ ، مجـــالها $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^3-2x^2+5}{4x^2-3}$ ، مجـــــــــــــــالها $\left\{x \,\middle|\, x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \ \ ,x\in R\right\}$

---

(47)

$(f+g)(x)=\frac{x+1}{x^2}$ ، مجـــــــــــــــالها $\{x\,|x\neq 0\ ,\ x\in R\}$

$(f-g)(x)=\frac{x-1}{x^2}$ ، مجـــــــــــــــالها $\{x\,|x\neq 0\ ,\ x\in R\}$

$(f\cdot g)(x)=\frac{1}{x^3}$ ، مجـــــــــــــــالها $\{x\,|x\neq 0\ ,\ x\in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x$ ، مجـــــــــــــــالها $\{x\,|x\neq 0\ ,\ x\in R\}$

أوجد $[f\circ g](2)$ ، $[g\circ f](x)$ ، $[f\circ g](x)$ لكل دالتين من الدوال الآتية:

(48)

$[f\circ g](x)=8x^2-43$

$[g\circ f](x)=32x^2-176x+234$

$[f\circ g](2)=8(2)^2-43=-11$

---

(49)

$[f\circ g](x)=x^2-8x+23$

$[g\circ f](x)=x^2+2x+3$

$[f\circ g](2)=(2)^2-16+23=11$

---

(50)

$$[f\circ g](x)=x^4-3x^2+4$$

$$[g\circ f](x)=x^4-6x^3+17x^2-24x+16$$

$$[f\circ g](2)=(2)^4-12+4=8$$

اكتب مجال $[f\circ g]$ متضمنا اية قيود إذا لزم، ثم اوجد $[f\circ g]$:

(51)

$[f\circ g](x)=\dfrac{1}{2x-9}$، المجال $\left\{x \mid x\neq 3,\dfrac{9}{2},x\in R\right\}$

(52)

$[f\circ g](x)=\sqrt{6x-9}$، المجال $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$

أوجد الدالة العكسية في كل مما يأتي، إن أمكن، ثم مثل f,f^{-1} في مستوى إحداثي واحد:

(53)

$$y=2x$$

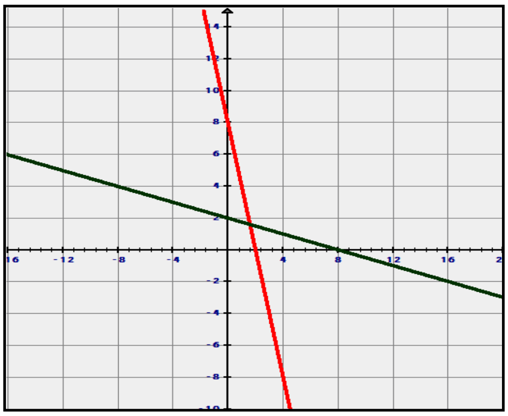
$$x=2y$$

$$x^2=4y^2$$

$$y^2=\frac{x^2}{4}$$

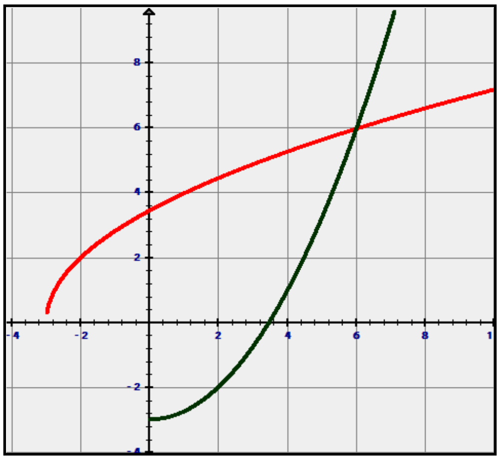
$$y=\sqrt{\frac{x^2}{4}}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$$



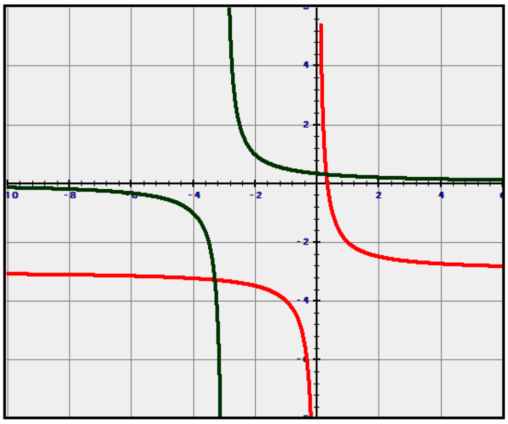
(54)

$$y = -\frac{1}{4}x + 2$$



(55)

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 3$$

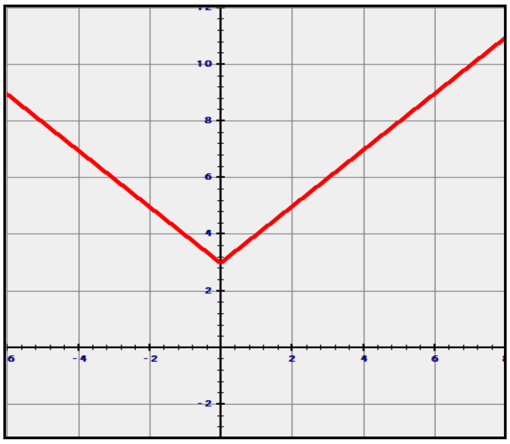


(56)

$$y = \frac{1}{x+3}$$

مثّل كل دالة من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، واختبر ما إذا كان المعكوس يمثل دالة أم لا:

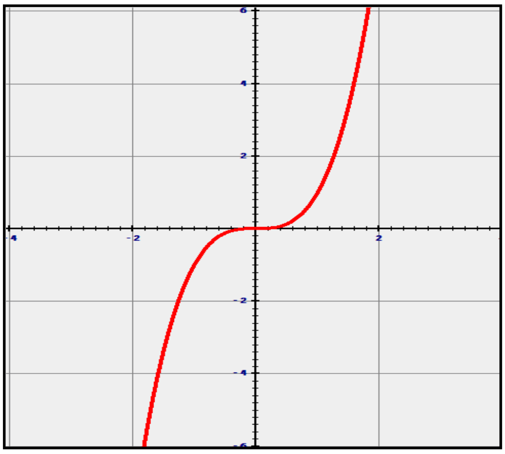
(57)



لا يوجد لها معكوس

---

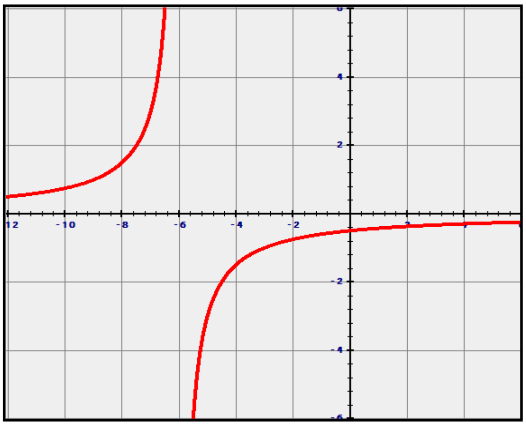
(58)



نعم لها معكوس

---

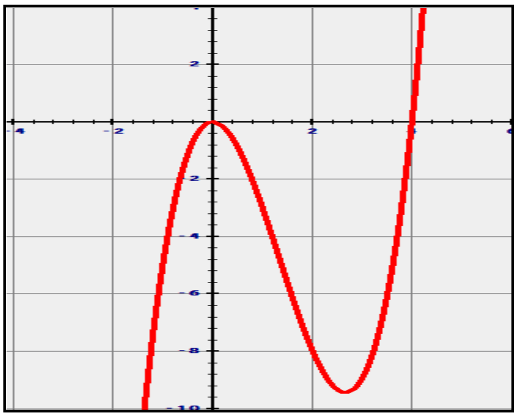
(59)



نعم لها معكوس

---

(60)



ليس لها معكوس

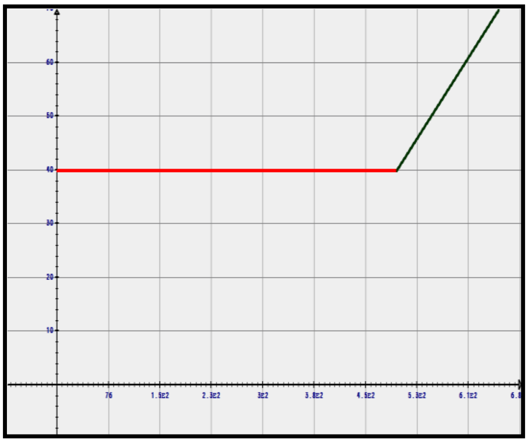
---

(61) الهواتف المحمولة:

(a
$$p(x)=\begin{cases}40 & ,0\le x\le 500\\ 40+0.2(x-500) & ,x>500\end{cases}$$

(b
$$40$$
$$40+0.2(550-500)$$
$$40+0.2(50)=50$$

(c



---

(62) أعمال:

(a) 150 الف ريال تقريباً

(b) 1427 هجرياً

(63) لا، في اللحظة التى ازداد فيه راتبه هناك انفصال قفزي في الدالة التى تمثل راتب وليد.

(64) كرة قدم:

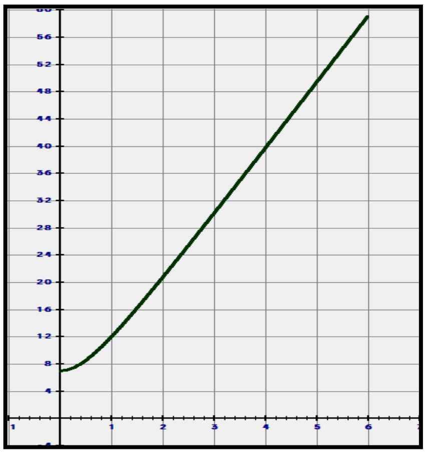
(a) لأن عدد الأهداف يتناقص قبل عام 1426 ثم يتزايد مرة أخرى.

(b)

$$\frac{f(1431)-f(1428)}{1431-1428}=5$$

$$\therefore \frac{f(1431)-42}{3}=5$$

$$\therefore f(1431)=15+42=57$$



(65) فيزياء:

(66) ثقافة مالية:

$$f(x)=x-10+0.05(x-10)$$
$$=1.05x-10.5$$
$$f(90)=1.05(90)-10.5=84$$

84 ريـــــــــــــــــال.

(67)

$$A(x) = 6.4516x \ cm^2 \quad (a)$$

$$A^{-1}(x) = \frac{1}{6.4516}x \ in^2 \quad (b)$$

اختبار الفصل (1)

في كل مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x:

(1) ليست دالـــــــــــــــة.
(2) دالـــــــــــــــة.
(3) دالـــــــــــــــة.

---

(4) موقف سيارات:

(a

$$c(x)=\begin{cases}3x & , x\le 3\\ 15 & , x>3\end{cases}$$

(b حوالي 7.5 ريال

(c المجال: $[0,24]$ يجب أن يكون عدد الساعات أكبر من 0 وأقل من 24 ساعة.

حدد مجال كل من الدالتين الممثلتين أدناه ومداهما:

(5)

المجال: ← $(-\infty , \infty)$ المدى: ← $[-2 , \infty)$

---

(6)

المجال: ← $(-\infty , 5]$ المدى: ← $[0 , \infty)$

أوجد المقطع y والأصفار لكل دالة من الدالتين الآتيتين:

(7)

المقطع y: $\leftarrow -12$ الأصفار: $\leftarrow -1 , 3$

---

(8)

المقطع y: $\leftarrow 0$ الأصفار: $\leftarrow -3 , -1, 0$

اختيار من متعدد:

(9)

$-y^2 = -4x \quad (D$

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 3$، وإذا كانت غير متصلة فحدد نوع عدم الإتصال، لانهائى، قفزي، قابل للإزالة:

(10) متصلة

---

(11) غير متصلة، عدم إتصال قابل للإزالة.

أوجد متوسط معد ل التغير لكل دالة من الدالتين فى الفترة $[-2, 6]$:

(12)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(-2)}{6+2}$$

$$= \frac{-1278+22}{8} - 157$$

---

(13)

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(6)-f(-2)}{6+2}$$

$$=\frac{3-1}{8}=\frac{1}{4}$$

استعمل منحنى كل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة إلى أقرب 0.5 وحدة:

(14)

الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, 2.5)$ ومتناقصة على الفترة $(2.5, \infty)$

(15)

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, -1.5)$

الدالة متزايدة على الفترة $(-1.5, 0)$

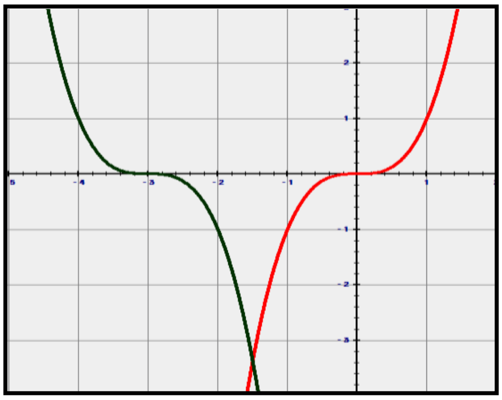
الدالة متناقصة على الفترة $(0, 1.5)$

الدالة متزايدة على الفترة $(1.5, \infty)$

---

(16) اختيار من متعدد:

c) $f(x)=|x+4|-3$



(17)

الدالة الرئيسية (الأم): $f\left(x\right)=x^{3}$

إذا كانت $f\left(x\right)=x-6$ ، $g\left(x\right)=x^{2}-36$ فأوجد كل دالة من الدالتين، ثم أوجد مجالها.

(18)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{x+6}$$

المجـــــــــــــــــــــــــــال: $\left\{x\,|\,x\neq-6,x\neq 6,x\in R\right\}$

---

(19)

$\left[f\circ g\right](x)=x^{2}-12x$ المجـــــــــــــــــــــــــــال: $\left\{x\,|\,x\in R\right\}$

---

(20) **درجة الحرارة:**

a) $C=\frac{5}{9}(F-32)$

b) $f\left(F\right)=\frac{5}{9}F$ ، $g\left(F\right)=F-32$

بين إذا كانت للدالة f معكوس أم لا في كل مما يأتي، وفي حالة وجودة أكتبة، حدد أية قيود على مجالة:

(21)

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}+2$$

---

(22)

$f^{-1}(x)=\dfrac{8x+3}{x-1}$ ، $x\neq 1$

---

(23)

$f^{-1}(x)=4-x^2$ ، $x\geq 4$

---

(24)

لا يوجد معكوس للدالة f
