

مادة الرياضيات P2 نماذج امتحانات نصفية في

لمختلف المحافظات

للعام الدراسي 2022\_2023

أ. أحمد طرقي

رياضيات بكالوريا

حلب - سوريا

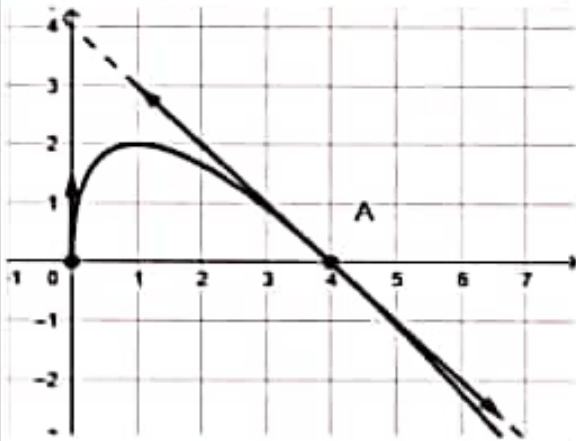
By: Shahed\_Sahreg



القناة على تليغرام: أحمد طرقي رياضيات

<https://t.me/Ahmadtarakji>

مديرة تربية مدينة دمشق	الامتحان الفصلي الأول للعام ٢٠٢٢-٢٠٢٣	المدة : ثلاث ساعات
ثالث	الثالث الثانوي العلمي (( الرياضيات ))	اسم الطالبة :
أولاً : اجب عن الأسئلة التالية		40 درجة لكل سؤال



**السؤال الأول:** الشكل المرسوم جانباً يمثل  $C$  خط بياني لتابع  $f$

معرف على  $D = ]0. +\infty[$

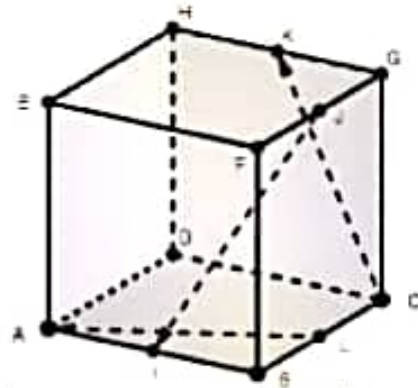
١- عين  $f(D)$  عين حلول المعادلة  $f(x) = 0$

٢- احسب  $f(4) \cdot f'(4)$

٣- علل هل توجد للتابع  $f$  قيم حدية صفري.

٤- هل التابع  $f$  اشتقائي عند  $x = 0$  ؟

٥- أثبت أن  $f(0) = 0$  قيمة حدية صفري محلياً للتابع  $f$  ؟



**السؤال الثاني:** في الشكل المرسوم  $ABCDEFGH$  مكعب فيه النقطة  $I$

منتصف  $[AB]$  النقطة  $K$  منتصف  $[GH]$  و النقطة  $L$  منتصف  $[CB]$  و

النقطة  $J$  منتصف  $[FG]$ .

١- عين العددين الحقيقيين  $\alpha, \beta$  كي يكون:  $\vec{IJ} = \alpha \vec{CK} + \beta \vec{AL}$

٢- عين موضع النقطة  $M$  التي تحقق العلاقة:

$$\vec{JM} = \vec{CL} - \vec{CK} - \vec{AL} + \vec{DG} + \frac{1}{2} \vec{FG}$$

50 درجة لكل سؤال

ثانياً : اجب عن اثنين فقط من التعاريف الثلاثة الاتية :

**التمرين الأول:** بفرض  $A(3,1)$  مركز تناظر للخط البياني للتابع  $f(x) = \frac{ax+2}{x+b}$  والمطلوب :

١- عين كلاً من الثوابت  $a, b$

٢- بفرض  $a = 3, b = -1$  عين مجموعة تعريف التابع  $g(x) = f(x) + f^{-1}(x)$

**التمرين الثاني:** ليكن  $g(x)$  التابع المعرف على  $\mathcal{R}$  و مشتقه  $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

نعرف التابع  $h(x) = g(\tan x)$  على  $]0, \frac{\pi}{2}[$  اثبت ان  $h(x) = 1$

**التمرين الثالث:** ليكن التابع  $f(x) = \sqrt{|16 - 4x^2|} + x$  المعرف على  $\mathcal{R}$  خطه البياني  $\mathcal{C}_f$  و المطلوب

١- أوجد  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

٢- أثبت ان  $y = 3x$  مقارب مائل لـ  $\mathcal{C}_f$  عند  $+\infty$  وادرس الوضع النسبي

50 درجة لكل سؤال

ثالثاً : اجب عن اثنين فقط من التعاريف الثلاثة الاتية :

**التمرين الأول:** في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا كرة معادلتها :

$$S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = R^2$$

والمطلوب

١- جد معادلة المستوى الذي يمس الكرة في مبدأ الاحداثيات  $O$

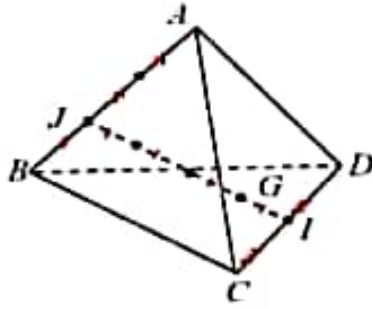
**التمرين الثاني:** تأمل رباعي الوجوه المجاور والنقطة  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة

للقاط المنقلة  $(A. \alpha). (B. \beta). (C. \gamma). (D. \delta)$

(1) عين الأعداد  $\alpha. \beta. \gamma. \delta$

(2) عين مجموعة النقاط  $M$  المعرفة بالعلاقة:

$$\|2 \overline{MA} + 4\overline{MB} + 9\overline{MC} + 9\overline{MD}\| = 24 \|\overline{MA}\|$$



**التمرين الثالث:** في معلم متجانس  $(O. \vec{i}. \vec{j}. \vec{k})$  لدينا النقطتان  $A(0.1.1). B(a. b. -1)$  و مستقيم  $d$  معطى

بتقاطع المستويين:  $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$  جد كلا من  $a. b$  كي يتقاطع المستقيمان  $(AB)$  و  $d$  بنقطة تقع

على المستوي  $XOY$  ثم بين هل المستقيمان  $(AB)$  و  $d$  متعامدين؟؟

(60 درجة)

اجب عن أحد السؤالين التاليين :

**السؤال الأول:** ليكن العدد العقدي  $Z = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$  و المطلوب :

اكتب  $Z^2$  بالشكل الجبري ثم بالشكل المثلثي و استنتج  $|Z^2|$  و  $arg(Z^2)$  ثم احسب  $|Z|$  و  $arg(Z)$

ثم اكتب  $Z$  بالشكل المثلثي ثم استنتج  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$

**السؤال الثاني:** اوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي  $\Delta = -32i$  ثم حل المعادلة :

$$(1 - i)Z^2 + 4iZ - 2(3 - i) = 0$$

(60 درجة)

اجب عن أحد السؤالين التاليين :

السؤال الأول : تأمل المتتالية  $(u)_{n \geq 0}$  المعرفة تدريجياً وفق  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n}$

(1) أثبت بالتدرج أن  $u_n > 0$  أياً كان العدد الطبيعي  $n$

(2) استنتج أن المتتالية  $(u)_{n \geq 0}$  متناقصة تماماً، واستنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها

السؤال الثاني : ليكن لدينا المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بالشكل  $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$  و المعطى

لأوب:

٢- أثبت بالتدرج صحة الخاصة  $n \leq 2^n$  من أجل أي عدد طبيعي  $n$ .

١- احسب  $u_1; u_2; u_3$ .

٤- أثبت أن المتتالية متزايدة تماماً ثم استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  متقاربة.

٣- استنتج عنصر راجح على المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$

(100 درجة)

حل المسألتين التاليين

سأناً

المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، المستقيمين  $D_1$  و  $D_2$  الممثلين بالشكل الوسيط

$$D_1: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases} \text{ و } D_2: \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 5 \\ z = 2s + 2 \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

١- اثبت ان ، المستقيمين  $D_1$  و  $D_2$  متقاطعين في النقطة  $H(5, -2, 8)$

٢- اثبت ان معادلة المستوى  $P$  الحاوي على المستقيمين  $D_1$  و  $D_2$  هي :  $PP: 4x - 2y - 3z = 0$

٣- نفترض ان  $H(5, -2, 8)$  هي المسقط القائم للنقطتين  $M_1$  و  $M_2$  على المستوى  $P$  عين احداثيات  $M_1$  و  $M_2$  اذا علمت ان

$$M_1H = \sqrt{29} \text{ و } M_2H = \sqrt{29}$$

المسألة الثانية : ليكن  $f$  التابع المعرف على  $\mathbb{R}$  وفق  $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  خطه البياني  $C$

١. ادرس تغيرات التابع  $f$  ونظم جدولاً بها ، استنتج كل مقارب للخط  $C$  يوازي أحد المحورين الإحداثيين ثم ادرس وضع  $C$  بالنسبة إلى كل منهما .
٢. ادرس جهة تقعر الخط  $C$  ، أثبت ان للخط  $C$  نقطة انعطاف ، اكتب معادلة المماس  $\Delta$  للخط  $C$  فيها.
٣. بين ان للمعادلة  $f(x) = x$  جذراً وحيداً  $\alpha$  بحيث  $\alpha \in ]1, 2[$  .
٤. ارسم كل مقارب وجنته ثم ارسم  $C$  .

٤- ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط  $\lambda$  عند حلول المعادلة  $f(x) = \beta$

انتهت الامتلة

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن  $C$  الخط البياني المرسوم جانباً للتابع  $f$  والمطلوب:

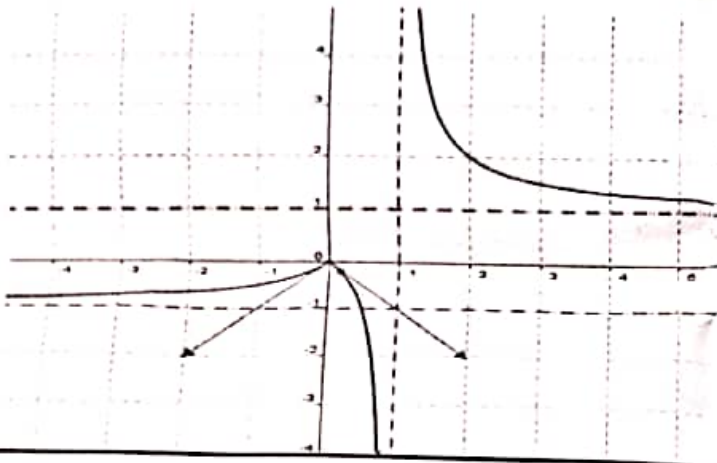
(1) احسب ما يلي:

$$D_f, D_{f'}, f(D_f), f(]-\infty, 0]) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(f(x)))$$

(2) اكتب معادلة نصف المماس من اليمين.

(3) أوجد حلول المتراجحة:  $f'(x) \geq 0$ .

(4) أوجد مجموعة تعريف التابع  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .



السؤال الثاني: رابعي  $ABCD$  وجوه منتظم طول حرفه 4 فيه  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $J$  منتصف  $[BC]$  و  $K$  منتصف  $[CD]$  و  $G$  مركز ثقل رابعي الوجوه  $ABCD$  والمطلوب:

(1) احسب  $\vec{IJ} \cdot \vec{JB}$  و  $\vec{IJ} \cdot \vec{AC}$  و  $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$  و  $\vec{IB} \cdot \vec{BJ}$ .

(2) أثبت أن  $G$  و  $I$  و  $K$  تقع على استقامة واحدة.

السؤال الثالث: ليكن  $f$  التابع المعرف على  $]0, +\infty[$  وفق  $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{x}$  حيث  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين غير مخدومين:

(1) عين قيمة  $a$  و  $b$  لتكون  $3x - 2y = 3$  معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها  $x = 1$ .

(2) من أجل  $a = 2$  و  $b = 1$  أثبت أن:  $2x^3 f''(x) + x^2 f'(x) = 3$ .

السؤال الرابع: لتكن  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية معرفة كما يلي:  $u_0 = -1$  و  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n}$  عند كل عدد طبيعي  $n \in \mathbb{N}$ .

(1) أثبت بالتدرج أن  $u_n < 0$  أيأ كان العدد الطبيعي  $n$ .

(2) أثبت أن المتتالية  $(v_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق  $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$  حسابية وأوجد أساسها وحدها الأول.

(3) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن  $C$  الخط البياني المرسوم جانباً للتابع  $f$  المعرف وفق:

$$f(x) = (ax - bE(x))^2$$

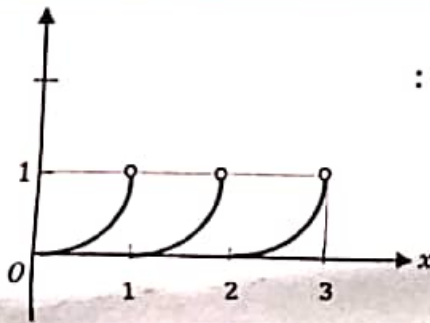
(1) استند من الخط البياني في تعيين  $a$  و  $b$ .

من أجل  $a = 1$  و  $b = 1$ :

(2) أوجد ما يلي:  $D_f$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + E(x)$

(3) اكتب  $f$  بعارة مستقلة عن  $E(x)$  على  $D_f$ .

(4) هل  $f$  اشتقاقي عند  $x = 2$ ? علل اجابتك?



التمرين الثالث: لتكن لدينا المتتاليتين لأجل  $n \geq 0$ :

$$u_n = 2^{2n+1}, \quad v_n = u_n - 5, \quad w_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}, \quad t_n = \ln(u_n)$$

(1) أثبت أن  $u_n$  هندسية عين أساسها واحسب قيم المعامير:

$$S_n = u_7 + u_8 + \dots + u_{n-4} \quad , \quad S'_n = v_7 + v_8 + \dots + v_{n-4}$$

(2) عبر عن  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم ادرس اطرافها.

(3) أثبت أن  $t_n$  حسابية واحسب المجموع:  $S = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$

التكرين الثاني:

أولاً: جد كل عدد عقدي  $J$  يحقق  $J^3 = 8I$  واكتبه بالشكل الجبري.

ثانياً: إذا كان  $\beta$  عدد حقيقي وكان العدد العقدي  $w = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta} e^{i\frac{\pi}{2}}$  والمطلوب:

(1) ثبت أن  $|w| = 1$  واستنتج أن المقدار  $\frac{w^z - z}{w - 1}$  تخيلي بحت.

(2) من أجل  $\beta = 1$  اكتب  $w$  بالشكل الأسي واستنتج  $w^{12}$  حقيقي.

(3) حدد طبيعة مجموعة النقاط  $M(z)$  التي يكون عندها المقدار  $\frac{z+i}{z-i}$  تخيلي بحت حيث  $z = i$

التمرين الرابع: في معلم متجانس  $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  لدينا النقاط:  $A(1, 0, 0)$  و  $B(0, 1, 2)$  و  $C(0, 0, 1)$  و  $D(3, 1, -1)$

ولتكن  $G$  مركز أبعاد متناسبة للنقاط  $(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, -1)$  و  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $J$  منتصف  $[BC]$ :

(1) جد إحداثيات  $G$  و  $I$  و  $J$ .

(2) حدد طبيعة  $(S)$  مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق:  $\| \overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{MC} - \overline{MD} \| = 5 \| \overline{MI} - \overline{MJ} \|$  واكتب معادلتها.

(3) بين أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  تقع في مستو واحد.

(4) استنتج أن النقطة  $D$  هي مركز أبعاد للنقاط المتئلة  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  أثقل بطلب تعيينها.

(5) جد على محور الترتيب نقطة  $K$  متساوية البعد عن  $A$  و  $B$  واحسب مساحة المثلث  $KAB$ .

ثالثاً: حل المسائلين الآتيتين:

المسألة الأولى: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  وفق:

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

(1) اكتب  $f$  بصيغة لا تحوي على قيمة مطلقة ثم ادرس تغيرات التابع وعين مائه من مقاربات.

(2) أثبت أن  $\Delta_1: y = x + 1$  و  $\Delta_2: y = -x - 1$  مقاربان مائلين في جوار  $+\infty$  و  $-\infty$  على الترتيب.

(3) أثبت أن  $A(0, 1)$  مركز تناظر للخط  $C$  على المجال  $]-1, 1[$ .

(4) اكتب معادلة المماس  $T$  للخط  $C$  في النقطة التي فصلتها صفر منه.

(5) ارسم  $T$  ومقاربي  $C$  ثم ارسم  $C$ .

المسألة الثانية: ليكن  $ABC$  مثلثاً متساوي الساقين، رأسه  $A$ . ننشئ خارجه

مثلثين قائمين ومتساوي الساقين  $ABJ$  و  $ACF$ . لتكن الأعداد العقدية

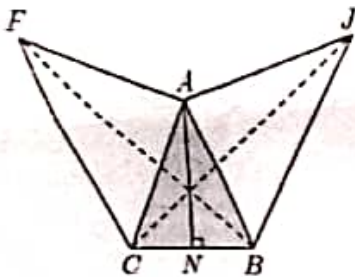
$a, b, c, z, f$  الممثلة للنقاط  $A, B, C, J, F$  بالترتيب.

1. جد بدلالة  $b$  و  $c$  العددين  $z$  و  $f$ .

2. اكتب العدد  $\frac{f-b}{c-j}$  بالشكل الجبري.

3. أثبت أن  $JC = BF$ ، وأن المستقيمين  $(CJ)$  و  $(BF)$  متعامدان.

4. نفترض أن  $A$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المتئلة  $(B, 1), (C, 1), (F, 3), (J, 2)$  احسب  $\frac{c}{b}$ .



السؤال الأول: حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة الآتية بالمجهول  $Z$ :

(40 درجة)

$$iZ + \bar{Z} - 2(Z + \bar{Z}) = 2 - i$$

السؤال الثاني: بسط كتابة العدد العقدي  $Z = \frac{1+e^{i2\theta}}{e^{i\theta}}$

(40 درجة)

التمرين الأول: ليكن لدينا العدد العقدي  $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$

(60 درجة)

(1) أثبت أن  $|Z| = 1$ .

(2) أثبت أن العدد العقدي  $w = \frac{u-z\bar{u}}{1-z}$  حقيقي.

التمرين الثاني: ليكن لدينا  $P(z) = (\bar{z} - 1 + i)(z^2 - 2z + 4)$

(60 درجة)

أولاً: حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(z) = 0$ .

ثانياً: ليكن لدينا الأعداد العقدية:

$$Z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

(1) اكتب  $Z_1$  بالشكل المثلثي، ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد العقدي  $Z_2$ .

(2) أثبت أن  $w = Z_1^5 - Z_2^5$  تخيلي بحت.

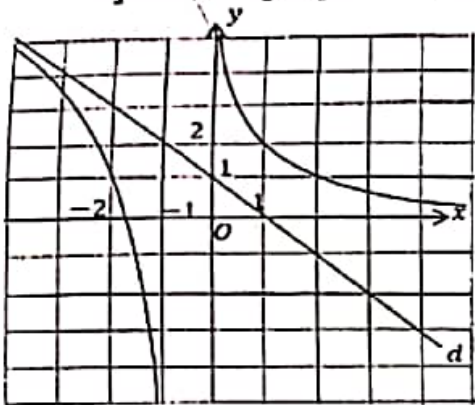
(انتهت الأسئلة)

مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح

(40 درجة لكل تمرين)

أولاً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول: ليكن  $C_f$  الخط البياني الممثل جانباً للتابع  $f$  المعرف على  $]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$ :



① جد  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

② اكتب معادلة كل مقارب لـ  $C_f$  أفقي وشاقولي

③ اكتب معادلة المقارب المائل  $d$

④ كم جذراً للمعادلة  $f(x) = 0$

⑤ جد حلول المتراجحة  $f'(x) < 0$

التمرين الثاني: اكتب بالشكل الأسّي العدد العقدي:  $Z = 1 - e^{i2\theta}$  حيث  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

التمرين الثالث: أثبت أنه أياً كان  $x \in [0, +\infty[$  فإن:  $x \geq 2\sqrt{x} - 1$

التمرين الرابع: بفرض  $A, B, C, D$  أربع نقاط في المستوي أثبت أن:

$$2\overline{AC} \cdot \overline{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (60 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن التابع  $g(x)$  المعرف على  $D$  وفق:  $g(x) = \frac{-1 + \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x}}$  عين مجموعة التعريف  $D$

ليكن التابع  $f$  المعرف على  $R$  وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{x+1}}{x + \sqrt{x}} & : x > 0 \\ 2m - 1 & : x \leq 0 \end{cases}$$

عين  $m$  حتى يكون  $f$  مستمر على  $R$

السؤال الثاني: لتكن المعادلة (1):  $Z^3 - (3 + 2i)Z^2 - (4 - 6i)Z + 8i = 0$

① علل سبب وجود كثير حدود من الدرجة الثانية  $Q(Z)$  يحقق:

$$Z^3 - (3 + 2i)Z^2 - (4 - 6i)Z + 8i = (Z - 2i)Q(z)$$

② جد  $Q(Z)$  ثم حل المعادلة  $Q(Z) = 0$

③ بفرض حلول المعادلة (1) تمثل النقاط  $A, B, C$  حيث  $a$  تمثل العدد التخيلي البحت والمطلوب:

احسب العدد  $\frac{a-b}{a-c}$  واستنتج نوع المثلث  $ABC$



السؤال الثالث: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على المجال  $I = [0, +\infty[$  وفق:

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x}$$

- ① هل  $f$  اشتقاقي عند الصفر؟ علّل اجابتك. ثم اكتب معادلة لنصف المماس للخط  $C$  عند النقطة  $O(0,0)$
- ② ادرس تغيرات  $f$  على المجال ونظم جدولاً بها ثم دل على كل قيمة حدية وعين نوعها ثم ارسم  $C$
- ③ اكتب معادلة المماس للخط  $C$  في النقطة التي فاصلتها  $x = 1$
- ④ استنتج مشتق التابع  $g(x) = f(\sin x)$  على  $]0, \pi[$
- ⑤ اوجد القيمة التقريبية  $f(4,1)$

السؤال الرابع: لتكن النقطتان  $A$  و  $B$  اللتان تمثلهما الأعداد العقدية:

$$Z_B = 2(1 - i\sqrt{3}) \quad , \quad Z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$$

- ① أثبت أن  $A$  و  $B$  تنتميان إلى الدائرة التي مركزها  $O$  احسب نصف قطرها
  - ② جد العدد العقدي الممثل للنقطة  $C$  التي تجعل  $O$  مركز ثقل المثلث  $ABC$
  - ③ احسب اطوال اضلاع المثلث  $ABC$  واستنتج نوعه.
- ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: "أولاً": لتكن المتتاليتين:  $(u_n)_{n \geq 0}$  ,  $(v_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

- ① برهن أن  $u_n$  متتالية متناقصة تماماً
- ② بفرض  $w_n = u_n - v_n$  متتالية برهن أنها هندسية عين أساسها
- ③ اكتب عبارة  $w_n$  بدلالة  $n$  احسب:  $w_0 + w_1 + w_2 + w_3$

ثانياً: "① ليكن التابع  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  المعرف على  $I = [0, +\infty[$  برهن أن  $f$  تابع متزايد تماماً"

- ② لتكن المتتالية  $(t_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق:  $\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \frac{t_n}{t_{n+1}} \end{cases}$  برهن أنها متناقصة تماماً

المسألة الثانية:  $E-ABCD$  هرم رأسه  $E$  وقاعدته المربع  $ABCD$  ، طول ضلعه يساوي 4

وفيه  $EA$  عمودي على المستوي  $ABCD$  و  $EA = 4$

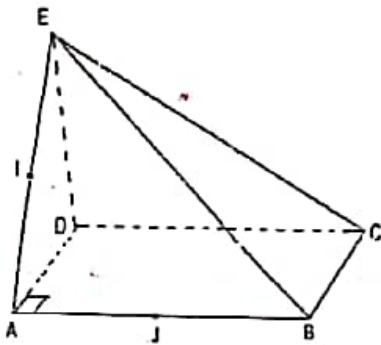
و  $I$  منتصف  $[AE]$  و  $J$  منتصف  $[AB]$

لنتأمل المعلم المتجانس  $(A; \frac{1}{4}\overline{AB}, \frac{1}{4}\overline{AD}, \frac{1}{4}\overline{AE})$  والمطلوب:

- ① عين احداثيات الرؤوس  $A, B, C, D, E$  وكل من احداثيات  $I, J$ .
- ② أثبت أن الأشعة  $\overline{EB}, \overline{IJ}, \overline{CD}$  مرتبطة خطياً.
- ③ اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[CI]$ .

④ اوجد حجم الهرم  $E-ABD$

⑤ بفرض  $\widehat{CIJ} = \alpha$  احسب:  $\cos(\alpha)$



انتهت الأسئلة



الاسم:  
العدد: ثلاث ساعات  
الدرجة: مئتان وأربعون درجة  
و المطلوب:

التعريف الثاني: ABCD رباعي وجوه، و G مركز ثقل المثلث DBC.  
(1) جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\|$$

(2) و إذا كانت M نقطة محققة للعلاقة:  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

و المطلوب:

عبر عن الشعاع  $\overrightarrow{AM}$  بدلالة كل من الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{BC}$  ثم استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستوي (ABC)

التعريف الثالث: في معلم متجانس  $C(0, \vec{i}, \vec{j})$  هو الخط البياني للتابع f المعرفة على  $R \setminus \{1\}$  وفق:  $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 3}{(x-1)^2}$  و المطلوب:

(1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c التي تحقق:  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

(2) أثبت أن المستقيم  $\Delta$  الذي معادته  $y = ax + b$  مقارب مائل للخط c و ادرس وضعه النسبي.

ثالثاً- حل المسالتين الآتيتين: (40 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في الشكل المرسوم جانبياً: تتألف في معلم متجانس  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  المكعب ABCDEFGH

و المطلوب:

(1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A, C, H, F, D

(2) اكتب معادلة المستوي (ACH)

(3) أثبت أن المستوي P الذي معادلته تعطى:  $2x - 2y - 2z + 1 = 0$  يوازي المستوي (ACH)

(4) بفرض أن النقطة I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن النقاط F, I, D تقع على استقامة واحدة

(5) اكتب معادلة للكرة S التي مركزها  $\Omega(1, -1, 1)$  ونصف قطرها  $R = \sqrt{3}$  و بين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

المسألة الثانية: في معلم متجانس  $C(0, \vec{i}, \vec{j})$  هو الخط البياني للتابع f المعرفة على  $[1, +\infty[$  وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$$

و المطلوب:

(1) ادرس قابلية الاشتقاق عند  $x = 1$  وفسر النتيجة هندسياً

(2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم دل على القيم الحدية مبيناً نوعها.

(3) أوجد معادلة المماس T للخط البياني C للتابع f في النقطة A التي فاصلتها 2

(4) أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $]2, 3[$

(5) احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

(6) ارسم المماس T ثم ارسم الخط البياني C للتابع f.

(٣٠ درجة لكل سؤال)

التمرين الأول: أجب عن أربع أسئلة فقط من الأسئلة الآتية :

السؤال الأول: تأمل جائناً جدول تغيرات التابع  $f$  المعرفة على  $R \setminus \{4\}$ 

X	$-\infty$	4	5	$+\infty$
$f'(x)$	—		0	—
$f(x)$	3		$+\infty$	$+\infty$

(١) اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شقولي للخط  $c$ (٢) هل يقبل  $c$  مقارب مائل(٣) ما عند حلول المعادلة  $f(x) = 0$  والمترابحة  $f'(x) < 0$ (٤) أوجد معادلة المماس في نقطة فاصلتها  $x = 5$ 

السؤال الثاني : أوجد نهاية التتابع التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$$

السؤال الثالث: لدينا التابع المعرفة على  $R$  وفق  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$ اثبت أنه يقبل مقارب مائل بحدود  $+\infty$  , أوجد معادلة المقارب المائلالسؤال الرابع: اكتب العدد العقدي بالشكل الأسّي :  $z = -2i(1-i)^4$ 

السؤال الخامس : أوجد حل المعادلة والمترابحة:

$$2\ln(x) = \ln(x-3) + \ln(2x) \quad , \quad \ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$$

(٦٠ درجة)

التمرين الثاني : نعرف المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  كما يلي :  $u_0 = 0, u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ (١) اثبت أن  $0 \leq u_n \leq 1$  أياً كان العدد الطبيعي  $n$ (٢) أثبت تزايد المتتالية  $u_n$  , علل تغارب المتتالية , واحسب نهايتها

(٦٠ درجة)

التمرين الثالث: في فضاء منسوب إلى معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط  $E(2,1,0), D(1,-1,2), A(2,0,1), B(1,-2,-1), C(3,1,1)$ (١) أوجد معادلة المستوي  $(ABC)$ .(٢) أوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم المار من  $E$  ويعامد المستوي  $(ABC)$  وأوجد نقطة التقاطع.(٣) أوجد معادلة الكرة التي مركزها  $O$  وتمس المستوي  $(ABC)$  .  
انتهت الأسئلة

تأمل جدول التغيرات للتابع  $f$  المعرف والمستمر على  $R$

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

$$y_n = x_n - 8$$

والمطلوب :

- اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي إن وجد .
- هل يوجد للتابع مقارب مائل .
- أوجد معادلة المماس في النقطة  $x = 3$  .
- كم حلا للمعادلة  $f(x) = 0$  .

السؤال الثاني : (30 درجة) : ABCD رباعي وحوه مركز ثقله G منتصف AD ، ومنتصف BC .  
- أثبت أن A ، J ، G تقع على استقامة واحدة .

السؤال الثالث : (70 درجة)

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2 \text{ و } x_0 = \frac{1}{4}$$

(1) أثبت تزايد المتتالية  $(x_n)_{n \geq 0}$  المتكاثفة المتقاربة وفق  $x_0 = \frac{1}{4}$  و  $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$

(2) تعرف  $(y_n)_{n \geq 0}$  بالعلاقة  $y_n = x_n - 8$  أثبت  $(y_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية ، ثم اكتب  $y_n$  بدلالة  $n$

(3) احسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)$

السؤال الرابع : (60 درجة)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\tan \frac{\pi}{4} - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right) = (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}) = (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x^2 - x} \right) = (1)$$

السؤال الخامس (40 درجة)

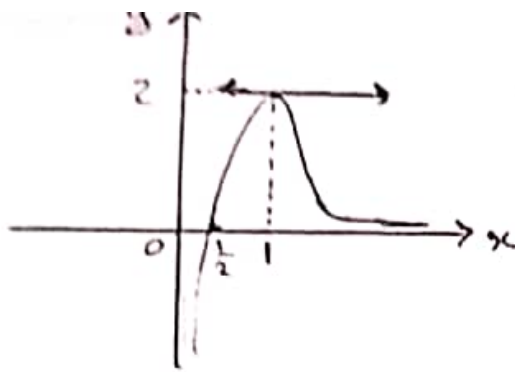
- اكتب بالشكل الأسّي :  $Z = 3i \cdot (-1 + i)^3$
- أوجد حل المعادلة :  $Z^2 - (2 \cos \theta)Z + 1 = 0$

السؤال السادس (60 درجة)

في معلم متحاورين  $(O, i, j, k)$  النقاط :  $A(2,1,3)$  ،  $B(1,0,-1)$  ،  $C(2,0,0)$  ،  $D(0,2,0)$  ،  $E(1,-1,1)$  والمطلوب :  
أوجد معادلة المستوى (EDC) .  
أوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم المار من النقطة A العمودي على المستوى (EDC) وأوجد نقطة التقاطع .  
أوجد معادلة الكرة التي مركزها النقطة A وتمس المستوى (EDC) .

اولا احب عن الاسئلة التالية :

السؤال الأول: راقب جانبا الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $R$  والمطلوب



(1) جد حل المعادلة  $f(x) = 0$

(2) احسب  $f(R_+)$

(3) حد مجموعة حلول المتراجحة:  $f'(x) < 0$

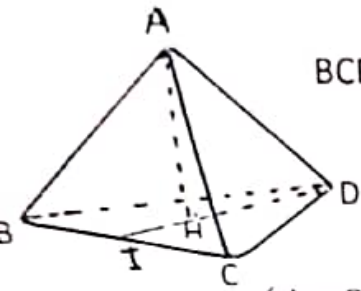
(4) احسب قيمة مشتق التابع عند (1) واكتب معادلة المماس عند نقطة من خطه البياني فاصلتها (1)

السؤال الثاني: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $R$  وفق:  $f(x) = \frac{ax+3x^3+b}{1+x^2}$  عين  $a$  و  $b$  ليكون

المستقيم  $\Delta: y = 4x + 3$  مماس لـ  $C$  في نقطة منه  $A$  فاصلتها (0)

السؤال الثالث: ليكن  $ABCD$  رباعي وجوه منتظم طول ضلعه 4 والنقطة  $H$  مركز ثقل المثلث  $BCD$

والمستقيم  $(AH)$  عمودي على المستوي  $(BCD)$  والنقطة  $I$  منتصف  $BC$



(1) احسب الجداء السلمي  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI}$

(2) عين موضع النقطة  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة  $(A, -3), (B, 2), (C, 2), (D, 2)$

(3) عين مجموعة نقاط الفراغ  $M$  التي تحقق:  $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\|$

ثانيا: حل التمارين الآتية :

التمرين الأول: لتكن المتتالية  $(U_n): n \geq 0$  المعرفة بالعلاقة

$$U_0 = 1 \text{ و } U_{n+1} = \frac{2+3U_n}{6+2U_n}$$

(1) أثبت أن التابع الموافق للمتتالية متزايد تماما ؛  $f(x) = \frac{2+3x}{6+2x}$

(2) أثبت أن  $1 < U_n \leq U_{n+1} < \frac{1}{2}$  أيا كانت  $n$  من  $N$

(3) استنتج أن المتتالية متقاربة ثم احسب نهايتها

التمرين الثاني: لتكن النقطتين  $A(2, -1, 0), B(-1, 3, 5)$  والمستوي  $p: 2x - 3y + z - 5 = 0$

(1) أثبت أن المستقيم  $(AB)$  يقطع المستوي  $P$  في نقطة  $C$  يطلب تعيين إحداثياتها

(2) أكتب معادلة المستوي  $Q$  العمودي على  $P$  ويمر بالنقطتين  $A$  و  $B$

التمرين الثالث: اكتب بالشكل الاسي العدد العقدي  $Z = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5$

حل المسائلين الآتيين

المسألة الأولى :

ليكن  $C$  الخط البياني للتابع المعرف على  $R/\{2\}$  وفق  $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-2}$  والمطلوب :

- أثبت أن المستقيم  $\Delta: y = x - 1$  مقارب للخط  $C$  ثم ادرس الوضع النسبي بين  $C$  و  $\Delta$ .
- ادرس تغيرات التابع المعطى ونظم جدولا بها واستنتج كل مقارب يوازي محوري الاحداثيات
- ارسم كل مقارب وجدته وارسم  $C$  ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع  $g(x) = 1 - x - \frac{1}{x-2}$
- ناقش بيانيا وبحسب قيم الوسيط  $\beta$  عدد حلول المعادلة  $x^2 - (\beta + 3)x + 2\beta + 3 = 0$

المسألة الثانية :

في معلم متجانس  $S$  كرة مركزها النقطة  $k(1,-1,1)$  وتمر من النقطة  $A(3,-1,1)$  وليكن المستوي  $P: 2x - y + 2z + 1 = 0$

- جد معادلة الكرة  $S$  وأثبت أن المستوي  $P$  مماس للكرة
- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $d$  العمود على المستوي  $P$  ويمر بالنقطة  $(k)$
- استنتج احداثيات نقطة التماس للمستوي  $P$  مع الكرة  $S$
- أثبت أن المستوي  $Q: x + y + z + 2 = 0$  قاطع للكرة  $S$  ثم احسب نصف قطر الدائرة  $C$  الناتجة من تقاطع  $Q$  مع الكرة  $S$
- احسب حجم المخروط الذي رأسه النقطة  $k$  وقاعدته الدائرة  $C$ .

انتهت الأسئلة

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$7$
$\tilde{f}(x)$	++++	0	---	---	0+++
$f(x)$	$-\infty$	$\rightarrow 2$	$\rightarrow -\infty$	$+\infty$	$\rightarrow -1$

اولا : اجب عن الاسئلة الاتية : ( اربعون درجة لكل سؤال )

المسألة الأولى: ليكن  $c$  الخط البياني للتابع  $f$  المعروف وفق حدود المقدمات الاتية :

- 1- اوجد  $D_f$  وحدد مجالات اشتقاق التابع
- 2- عن ما تنفص من معلمات ومقاربات أفقية و شاقولية
- 3- ثبت ان  $f(3) = -1$  قيمة حدية صفري
- 4- ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$  ؟
- 5- ارسم الخط البياني ثم احسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$

المسألة الثانية: ليكن التابع  $f$  المعروف على  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  بالشكل  $f(x) = \frac{x^2+1-\cos(x)}{x}$

- 1- اوجد نهاية التابع  $f$  عند  $(0)$
- 2- اثبت ان  $y = x$  مقارب مائل للخط  $c$  في جوار  $-\infty$

ثانيا : حل كل من التعاريف الاتية : ( ستون درجة لكل تعريف )

التعريف الأول :

ليكن التابع  $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$  المعروف على  $\mathbb{R}$

- 1- اثبت ان التابع  $f$  زوجي و ان العدد  $2\pi$  دوراً له ، ثم استنتج امكانية دراسة  $f$  على المجال  $[0, \pi]$
- 2- ادرس قابلية اشتقاق التابع  $f$  عند الصفر . ثم ادرس تغيرات التابع  $f$  على المجال  $[0, \pi]$
- 3- اثبت ان للمعادلة  $f(x) = 1$  حل وحيد في المجال  $[0, \pi]$  ثم ارسم الخط البياني للتابع  $f$  على المجال  $[-2\pi, 2\pi]$

التعريف الثاني : لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالشكل :  $u_0 = \frac{1}{2}$  و  $u_n = \frac{u_n}{2u_{n+1}}$

- 1- اثبت ان  $u_n > 0$  اياً كانت  $n$  .
- 2- لتكن المتتالية  $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$  ، اثبت ان المتتالية  $v_n$  حسابية وعين اساسها وحدها الأول .
- 3- اكتب عبارة  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .
- 4- احسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

الثالث: حل المسألة الاتية ( 100 درجة )

كن لدينا التابع  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$  المعروف على  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- 1- اثبت ان  $f$  يكتب بالشكل :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$  حيث  $a, b, c$  اعداد حقيقية يطلب تعيينها .
- 2- اوجد معادلة كل مقارب أفقي و شاقولي للخط  $c$  ثم اكتب معادلة المقارب المائل للخط البياني و ادرس الوضع النسبي للخط  $c$  مقارنة بالمائل .
- 3- ادرس تغيرات التابع ونظم جدولا بها ، عين القيم الحدية للتابع ثم احسب قيمة تقريبية لـ  $f(1.8)$  .
- 4- ارسم المقاربات ثم ارسم الخط  $c$  وناقش بحسب قيم  $m \in \mathbb{R}$  عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$  .
- 5- لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة وفق :  $u_{n+1} = u_n - 2 + \frac{1}{u_{n+1}}$  اثبت ان هذه المتتالية متناقصة .

يتبع في الصفحة الثانية

$U_1 = 2$



## الحزب الثاني:

**أولاً: حل المسائل الآتية (80 درجة، 40 درجة كل منهما):**

السؤال الأول: ليكن  $P$  مستوياً معادلته:  $2x + y - z + 1 = 0$ ، أوجد إحداثيات النقطة  $A$  المسقط القائم

لنقطة  $A(0, 1, -1)$  على المستوى  $P$ .

السؤال الثاني: ليكن العدد العقدي  $\omega = -3 + 4i$ ، وليكن كثير الحدود  $P(z) = z^2 + 3z + 3 - i$ ،

والمطلوب:

1- أوجد  $U_1$  و  $U_2$  الجذرين التربيعين للعدد  $\omega$ .

2- حل المعادلة  $P(z) = 0$ .

**ثانياً: حل التمرينين الآتيين (120 درجة، 60 درجة كل منهما):**

التمرين الأول: المستقيمان  $d$  و  $d'$  معرفان وسيطياً وفق:

$$d' : \begin{cases} x = 4 - 5k \\ y = 3 - 2k \\ z = 2k - 1 \end{cases} : k \in \mathbb{R} \quad d : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

والمطلوب:

1- أثبت أن المستقيمين  $d$  و  $d'$  متقاطعان بنقطة  $I$  يطلب تعيين إحداثياتها:

2- أكتب معادلة المستوى  $P$  المعين بالمستقيمين  $d$  و  $d'$ .

التمرين الثاني: ليكن  $Z$  عدداً عقدياً يحقق  $Z \neq 1$ ، وليكن  $\omega = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$ ، والمطلوب:

(1) تحقق أن  $\omega, \bar{\omega} = 1$  ثم استنتج قيمة  $|\omega|$ .

(2) أثبت أن العدد  $v = \frac{\omega+1}{z-1}$  تخيلي بحت.

**ثالثاً: حل المسألة الآتية (100 درجة):**

لتكن النقاط  $A(0, 1, 2)$ ،  $B(2, 1, 0)$ ،  $C(0, -1, 1)$ ،  $D(4, 1, 1)$ ، والمطلوب:

1- أكتب معادلة  $P_1$  المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$ .

2- تحقق أن المعادلة  $2x + y - 4 = 0$  هي معادلة  $P_2$  المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[CD]$ .

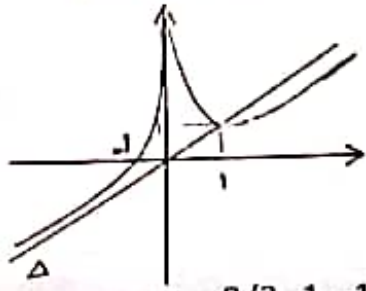
3- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d$  الفصل المشترك لـ  $P_1$  و  $P_2$  وسيطه الحقيقي  $t$ .

4- استنتج أن النقطة  $\Omega$  مركز الكرة  $S$  المارة برؤوس رباعي الوجوه  $ABCD$  هي نقطة من  $d$ .

5- احسب الأطوال  $[\Omega A]$  و  $[\Omega C]$  بدلالة  $t$ ، واستنتج إحداثيات  $\Omega$ .

6- أكتب معادلة الكرة  $S$ .

انتهت الأسئلة



السؤال الأول: الشكل المجاور هو C الخط البياني للتابع f احب عن:

1 - دل على القيمة الحدية وبين نوعها .

2 - اكتب معادلة القارب الشاقولي .

3 - اكتب معادلة المستقيم  $\Delta$  ثم حل المتراجحة  $f(x) \leq x$

4 - حل مجموعة تعريف التابع  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

السؤال الثاني: اكتب معادلة الكرة التي [AB] تقبل قطراً فيها حيث  $A(0, 2, 4)$  ,  $B(3, 1, -1)$

السؤال الثالث: حل في C المعادلة  $z^2 - 2(1+i)z + 3 + 6i = 0$

السؤال الرابع: لتكن  $(U_n)_{n \geq 1}$

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

ادرس اطراد  $U_n$

السؤال الخامس: احسب  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cos x}{x+1}$  ثم استنتج نهاية f الذي يحقق:  $\frac{x \cos x}{x+1} \leq |f(x)+1|$  عند  $+\infty$

السؤال السادس: ليكن f المعرف على  $[0, +\infty[$  وفق  $f(x) = \cos \sqrt{x}$

ادرس قابلية الاشتقاق عند (0) واحسب  $f'(x)$  على  $]0, +\infty[$

ثانياً: حل التمرين الثالث الآتية:

(60 درجة للأول و 70 درجة للثاني والثالث)

التمرين الاول: تعرف المتتالية  $(U_n)$

$$u_0 = 6$$

$$u_{n+1} = 3u_n - 8 \quad n \geq 0$$

1 - تعرف  $(v_n)$  وفق  $v_n = u_n - 4$

$n \geq 0$  أثبت أن  $v_n$  هندسية وحد أسسها وحدها الاول واكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$

2 - أثبت أن  $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 - 1$

3 - أثبت بالتدرج أن S مضاعف للعدد 2 أيا كانت  $n \geq 0$

التمرين الثاني: لتكن في C المعادلة  $z^3 + 4z^2 + 6z - 4 = 0$

1 - علل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية  $Q(z)$  بحيث

ثم أوجد Q وحل المعادلة  $Q(z) = 0$

2 - الأعداد  $a = 2$  ,  $b = 1+i$  ,  $c = b$

أ - اكتب  $c, b$  بالشكل الأسّي

ب - اكتب بالشكل الجبري  $\frac{ZAC}{ZAB}$  واستنتج طبيعة المثلث (ABC)

التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f على R وفق  $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$

1 - ادرس نهاية f عند  $\pm \infty$  احسب

2 - ادرس الوضع النسبي للخط C مع  $\Delta$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ABCDEFGH متوازي مستطيلات نفرض  $(A, 1/2 \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1 - جد إحداثيات الرؤوس وإحداثيات I منتصف [AB]

2 - اكتب معادلة الأسطوانة التي مركزها القاعنتين A, B ونصف قطرها AD

3 - اكتب معادلة المستوي (EAG)

4 - احسب الجداء  $\vec{EI} \cdot \vec{IG}$  واستنتج طبيعة المثلث EIG واحسب مساحته

5 - أثبت أن  $D'$  المسقط القائم لـ D على  $(EIG)$  يقع على  $(EI)$

6 - استنتج بعد D عن السنوي  $(EIG)$  واحسب حجم رباعي الوجوه  $(DEIG)$

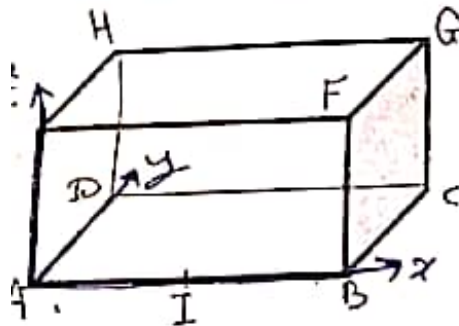
المسألة الثانية: ليكن المعرف على  $R^*$  وفق  $f(x) = ax + \frac{b}{x} - 1$

1 - عين  $a, b$  ليكون f قيمة حدية عند  $A(1, 2)$  - إذا كان

2 - أثبت أن  $d: y = 2x - 1$  مقارب مائل وادرس الوضع النسبي لـ C معه

3 - ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

4 - ناقش هندسياً وبحسب قيم m عدد حلول المعادلة  $2x^3 - (m+1)x^2 + 1 = 0$



(20) درجة

أولاً: أجب عن السؤاليين التاليين  
1. في الشكل المرسوم جانباً جدول تغيرات تابع  $f(x)$  والمطلوب:

	$-\infty$	$-1$	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$3 \rightarrow$	$3 \rightarrow$	$3 \rightarrow$	$3 \rightarrow$

- أ. عين مجموعة تعريف  $f$   
ب. أكتب معادلة كل عقارب طاؤولي أو أفقي للخط  $C$   
ج. هل يوجد للخط  $C$  مقامات أفقية  
د. هل يوجد مقامات مائلة

(25) درجة

- هـ. أثبت أن للمعادلة  $f(x) = 0$  حل وحيد في المجال  $]-1, 1[$   
2- ليكن  $f$  تابع معرف على  $R$  وخصه  $x \neq 0: f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$   
 $f(0) = 0$

- أ. احس نهاية  $f(x)$  عندما  $x \rightarrow 0$  واستنتج هل  $f$  مستمر عند  $x=0$   
ب. ادرس قابلية اشتقاق  $f(x)$  عند الصفر

(20) درجة

ج. احس  $f'(x)$  على  $R \setminus \{0\}$

ثانياً: ليكن  $f$  التابع المصروف على  $]-2, 2[$  بالعلاقة:  
 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$

- 1- أوجد الأعداد  $a, b, c$  التي تحقق:  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$   
2- أثبت أن المقسم  $y = ax + b$  عقارب مائل للخط  $C$  محاور  $x=0, y=0$   
و ادرس الوضع النسبي للخط  $C$  مع العقارب المائل

(25) درجة

ثالثاً: لتكن المتتاليات  $(X_n)_{n \geq 0}$  و  $(Y_n)_{n \geq 0}$  المعرفتان بالشكل:

$$X_{n+1} = \frac{1}{3} X_n - 2 \quad Y_n = X_n + 3$$

$$X_0 = 3$$

المطلوب: أثبت أن  $Y_n$  لهندية و احس  $Y_n$  بدلالة  $X_n$  بدلالة  $n$

ليكن  $S_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$  احس  $S_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج رياضياً

(30) درجة

رابعاً: ليكن  $f$  تابع معرف على  $R$  وخصه  
1- ادرس تغيرات  $f$  ونظم هبوطياً  
2- مع ادرام الخط  $C_f$   
3- عين صورة مجموعة التعريف  $f(R)$   
4- ناقش حسب قيم  $m \in R$  عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$   
5- احس  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

الاصحة الاولى  
ينبع



السؤال الأول: (15 درجة)

ليكن  $C$  الخط البياني لـ  $f$  المعرفة على  $[1, +\infty[$ 1- هل  $f$  اشتقاقي عند (1)؟ عطي؟2- احسبي كلاً من  $f'(2)$ ،  $f'(4)$ 3- اكتب معادلة كل من المماسات الثلاثة  $d_1$ ،  $d_2$ ،  $d_3$ 4- ما هي حلول المعادلة  $f(x)=0$ 5- ما هي مجموعة تعريف التابع  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ 

السؤال الثاني: (15 درجة)

حلي في  $C$  المعادلة:  $\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-1} = -i$ 

السؤال الثالث: (15 درجة)

ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  وفق:  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - x$ 1- أثبتني أن المستقيم  $\Delta: y = x$  مقارب لـ  $C$  في جوار  $+\infty$ 2- ادرسي وضع  $C$  مع  $\Delta$ 3- ما نهاية التابع:  $g(x) = \frac{f(x)}{2x-1}$  عند  $+\infty$ 

السؤال الرابع: (20 درجة)

أعطي تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d'$  وبيئي إذا كان  $d' \parallel d$  أو كان  $d$  منطبقاً على  $d'$ 

$$d' : \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad d : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

السؤال الخامس: (15 درجة)

ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  حيث  $f(x) = \frac{ax+b}{2x-4}$ ، عيني  $a$ ،  $b$  ليكون(1)  $y = \frac{-3}{2}x + 1$  مماساً لـ  $C$  في النقطة التي فاصلتها (1)

السؤال السادس : (10 درجة )

ليكن التابع المعرف على  $\mathbb{R}$  بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-4 \cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ 2m - 1 & x = 0 \end{cases}$$

أوجد نهاية التابع عند (0) واستنتج  $m$  التي تجعل  $f$  مستمراً على  $\mathbb{R}$

السؤال السابع : (35 درجة )

$ABCD$  رباعي وجوه منتظم طول حرفه (4) ،  $I$  منتصف  $[CD]$

1- وضعي النقطة  $M$  التي تحقق :  $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AC} - \vec{BI}$

2- احسبي الجداء السلمي لـ  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  ثم  $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$

السؤال الثامن : (25 درجة )

لتكن المتتالية  $(U_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بالشكل :  $U_n = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{n}{4^n}$

1- أثبت بالتدريج أن :  $n \leq 2^n$  مهما كان العدد الطبيعي  $n \geq 1$

2- استنتج عنصراً واحداً على المتتالية  $(U_n)_{n \geq 1}$

3- أثبت أن المتتالية  $(U_n)_{n \geq 1}$  متقاربة

السؤال التاسع : (40 درجة )

ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $I = ]3, +\infty[$  بالشكل :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

1- أوجد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة تعريفه ، ثم استنتج معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي لـ  $C$

2- ادرسي تغيرات  $f$  على المجال  $]3, +\infty[$  ، ونظمي جدولاً بيانياً .

3- أثبت أن للمعادلة :  $f(x) = 5$  حلاً وحيداً في  $I$

4- اكتبي معادلة المماس لـ  $C$  في النقطة التي فاصلتها (5)

5- أوجد القيمة التقريبية لـ  $f(5.1)$

6- ارسمي كل مقارب وجدته ، وارسمي  $C$

السؤال العاشر : (50 درجة )

في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا النقاط :

$A(2, -2, 3)$  ،  $B(4, -3, -1)$  ،  $C(0, -\frac{1}{2}, -3)$  ، والمستوي  $P$  الذي معادلته :

$2x - y + 3z - 4 = 0$  والمطلوب :

1- تحقق أن المستقيم  $(AB)$  ليس عمودياً على  $P$  ، ثم أعطي معادلة المستوي  $Q$  العمودي على  $P$  والمار

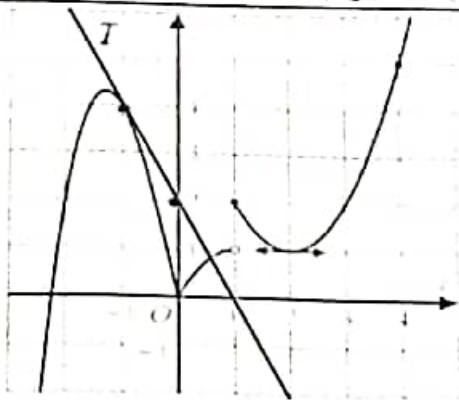
بالنقطتين  $A, B$

2- اكتبي معادلة الكرة التي مركزها النقطة  $B$  وتمس المستوي  $P$

3- أعطي تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم  $(AB)$

4- أوجد إحداثيات النقطة  $C'$  المسقط القائم للنقطة  $C$  على المستوي  $P$  ثم استنتج بُعد  $C$  عن  $P$

انتهت الأسئلة



أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : في الشكل المجاور  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  والمطلوب :

(1) أوجد  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

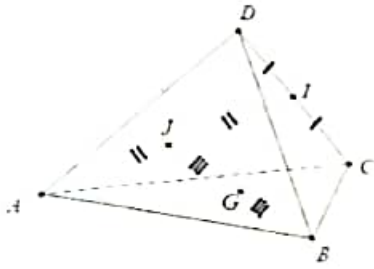
(2) ما عدد القيم الحدية

(3) ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 1$

(4) احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$

السؤال الثاني : لدينا في  $C$  المعادلة الآتية :  $Z^2 + (m+1)Z + (2m-1) = 0$  والمطلوب :

- (1) عين قيم العدد الحقيقي  $m$  التي من أجلها تقل المعادلة حذرين عقديين مترافقين  
(2) من أجل  $m = 3$  حل في  $C$  المعادلة السابقة



السؤال الثالث : في الشكل المجاور أوجد الأعداد  $d, b, c, a$  ليكون

مركز  $G$  أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة :  $(D, d), (C, c), (B, b), (A, a)$

السؤال الرابع : ليكن التابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  وفق :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

- (1) اكتب  $x^2 + 2x + 5$  بالصيغة القانونية  
(2) استنتج معادلة المقارب المائل في جوار  $+\infty$  وادرس الوضع النسبي

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل سؤال)

التمرين الأول : في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا النقاط  $A(0,0,0), B(0,2,0), C(2,0,2), K(2,2,2)$

- (1) أثبت أن النقاط  $A, B, C$  تعين مستوي  
(2) أثبت أن النقاط  $A, B, C, K$  تقع في مستوي واحد و استنتج أن مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$  حيث  $\alpha, \beta, \gamma$  انتقال يطلب تعيينها  
(3) أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ  $M$  التي تحقق :  $\|\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\|$  هي كرة عين مركزها ونصف قطرها ثم اكتب معادلتها

التمرين الثاني : ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $[1, +\infty[$  وفق :  $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$

- (1) ادرس قابلية الاشتقاق عند الواحد من اليمين  
(2) أوجد معادلة المماس  $T$  للخط  $C$  الموازي للمستقيم  $d : -3x + 2y = 0$   
(3) استخدم التقريب التالفي لحساب قيمة تقريبية للعدد  $f(2.1)$   
(4) استنتج مشتق التابع  $g$  المعرفة وفق :  $g(x) = \sin x + \sqrt{\sin x - 1} - 4$

التمرين الثالث : لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق :  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

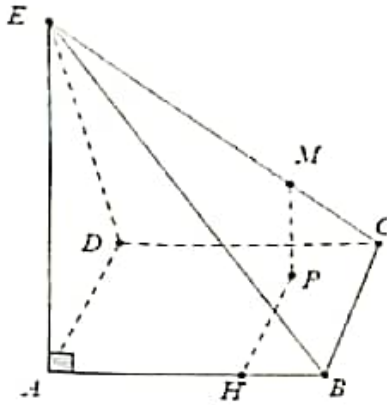
(1) أثبت ان  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  ثم أوجد نهاية المتتالية وبين فيما إذا كانت متقاربة

(2) أثبت ان المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  محدودة

(3) بالاستفادة من عبارتي  $u_n$  استنتج  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3+2}} + \frac{1}{\sqrt{4+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

و احسب نهاية  $S_n$

التمرين الرابع : هرم  $E-ABCD$  قاعدته مربع طول ضلعه 3 ،  $AE$  عمودي على  $ABCD$  حيث  $AE = 5$



(1) عين موضع النقطة  $Q$  المحققة للعلاقة :  $2\overline{AQ} = \overline{AC} + \overline{DB}$

(2) نختار المعلم المتجانس  $(A, \frac{1}{3}\overline{AB}, \frac{1}{3}\overline{AD}, \frac{1}{5}\overline{AE})$

أوجد إحداثيات النقطة التي تحقق  $2\overline{EM} = \overline{EC}$

و إحداثيات النقطة  $P$  مسقط  $M$  على  $(ABCD)$

و إحداثيات النقطة  $H$  مسقط  $P$  على  $(AB)$

ثم اكتب معادلة المستوي  $R$  المار من  $H$  و العمودي على  $(AB)$

(3) احسب حجم الهرم  $E-ABCD$

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : ( 100 درجة لكل مسألة ) :

المسألة الأولى : لدينا في  $C$  المعادلة الآتية :  $Z^3 - 2(2+i)Z^2 + (5+8i)Z - 10i = 0$

(1) حل في  $C$  المعادلة السابقة علماً أنها تقبل حلاً تخيلياً بختاً

(2) لتكن النقاط  $A, B, C$  التي تمثل حلول المعادلة السابقة حيث :  $a = 2i$  ,  $b = 2+i$  ,  $c = 2-i$  :

(a) احسب النسبة  $\frac{a-o}{b-c}$  و استنتج طبيعة الرباعي  $OABC$

(b) احسب العدد العقدي الممثل للنقطة  $I$  مركز متوازي الأضلاع  $OABC$

(3) إذا علمت أن  $\arg(h) = \alpha$  ,  $\arg(c) = \beta$  :

(c) اكتب  $b \times c$  بالشكلين الأسّي و الجبري

(d) استنتج المجموع  $\alpha + \beta$

المسألة الثانية : ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعروف على  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  وفق :  $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$  والمطلوب :

(1) عين عددين حقيقيين  $a$  ,  $b$  يحققان :  $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

(2) أثبت أن التابع  $f$  فردي واستنتج الصفة التناظرية لخطه البياني  $C$

(3) ادرس تغيرات التابع  $f$  ونظم جدولاً بها وعين معادلة كل مقارب وجدته

(4) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم  $C$

(5) أثبت أنه في حالة  $n \geq 1$  أن المشتق من المرتبة  $n$  يعطى بالعلاقة :  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \left[ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]$

- انتهت الأسئلة -



- الصفحة الأولى -

أولاً : اجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : ( 16 درجة لكل سؤال )

السؤال الأول :

ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $D_f$  وليكن الجدول التالي جدول تغيرات التابع  $f$

$x$	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0	-
$f(x)$		-3		4	

1 - عين كل من  $D_f$  و  $f(D_f)$

2 - دل على كل قيمة حدية وبين نوعها

3 - دل على كل مقارب أفقي للخط  $C$

4 - ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$

السؤال الثاني :

في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لتكن النقاط  $A(1,3,-1)$  و  $B(3,6,-2)$  و  $C(0,4,0)$  والمطلوب :

جد إحداثيات النقطة  $D$  نظيرة  $A$  بالنسبة للنقطة  $B$  ثم بين إن كان المثلث  $ABC$  قائم أو متساوي الساقين أو متساوي الأضلاع

السؤال الثالث :

ليكن  $f$  التابع المعرفة بالعلاقة :  $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

عين مجموعة تعريف التابع  $f$  ثم أوجد كل من النهايتين  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$

السؤال الرابع :

1 - بسط العبارة :  $= \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

2 - حل في  $C$  المعادلة :  $3z^2 + z = 2 - i$

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : ( 24 درجة لكل تمرين )

التمرين الأول :

في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $R \setminus \{1\}$  وفق :  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$

حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان والمطلوب :

1 - عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  كي يقبل الخط  $C$  مماساً عند  $O$  معادلته :  $y = -2x + 1$

2 - من أجل  $f(x) = x + 4 + \frac{3}{x-1}$  جد نهايات التابع  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفه وبين إن كان ثمة مستقيمتان مقاربة للخط البياني  $C$  ( أفقية أو شاقولية أو مائلة )

التمرين الثاني : في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا نقطتين  $A(2,-1,0)$  و  $B(-1,3,5)$  والمستوي  $P$  الذي يقبل معادلة  $P: 2x - 3y + z - 5 = 0$  والمطلوب :

1 - عين شعاعاً موجهاً للمستقيم  $(AB)$  وشعاعاً ناظماً على المستوي  $P$  ثم استنتج أن المستقيم  $(AB)$  لا يوازي المستوي  $P$

2 - جد معادلة للمستوي  $Q$  العمود على المستوي  $P$  والماز من النقطتين  $A$  و  $B$

يتبع في الصفحة الثانية

- الصفحة الثانية -

التعريف الثالث :

$ABCD$  رباعي وجوه فيه  $l$  منتصف  $[BC]$  و  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$

ولكن  $H$  و  $K$  نقطتين معرفتين وفق  $DH = \frac{3}{7}DG$  و  $DK = \frac{2}{6}DI$

عين  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  لتكون  $H$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المتقلة

$(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$  و  $(D, \delta)$

ثم استنتج أن النقاط  $A$  و  $H$  و  $K$  تقع على استقامة واحدة

التعريف الرابع :

لنكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$  حيث  $n \geq 0$

ولنكن التابع  $f$  المعروف على  $]-\infty, 6[$  وفق:  $f(x) = \frac{9}{6-x}$  والمطلوب :

1- أثبت أن التابع  $f$  متزايد تماماً على  $]-\infty, 6[$  ثم أثبت بالتدرج أن:  $u_n < 3$  مهما كان العدد الطبيعي  $n$

2- لنكن المتتالية  $(v_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق:  $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$  بين أن  $(v_n)_{n \geq 0}$  متتالية حسابية ، عين أساسها وحدها الأول

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (40 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لنكن النقاط  $A(1, 4, 3)$  و  $B(0, 2, 2)$  و  $C(1, -1, 1)$  وليكن المستوي  $P$  الذي يقبل

$x - 3y - 2z + 3 = 0$  معادلة له و ليكن  $t \in \mathbb{R}$  تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(AB)$  والمطلوب :

1- أثبت أن  $(AB)$  يقطع المستوي  $P$  ثم عين  $H$  إحداثيات نقطة التقاطع

2- أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  لاتقع على استقامة واحدة وأن  $\vec{n}(1, 2, -5)$  شعاعاً ناظماً على المستوي  $(ABC)$

3- جد معادلة للمستوي  $(ABC)$  ثم بين أن المستويان  $P$  و  $(ABC)$  متقاطعان

4- لنكن كرة تقبل  $0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 1$  معادلة لها

$a$  جد  $\Omega$  مركز الكرة  $(S)$  ووعين نصف قطرها  $R$

$b$  احسب بعد  $\Omega$  عن المستوي  $P$  ثم استنتج أن الكرة  $(S)$  والمستوي  $P$  متقاطعان بدائرة  $\Gamma$  عين نصف قطرها  $r$

المسألة الثانية :

أولاً : ليكن التابع  $g$  المعروف على  $\mathbb{R}$  وفق:  $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

$a$  - أثبت أن التابع  $g$  متزايد تماماً على  $\mathbb{R}$

$b$  - حل جبرياً المعادلة  $g(x) = 0$

$c$  - نظم جدولاً باطراد التابع  $g$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

ثانياً : ليكن التابع  $f$  المعروف على  $\mathbb{R}$  وفق:  $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$  و ليكن خطه التبياني  $(C_f)$

(1) أوجد نهايتي التابع  $f$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .

(2) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن:  $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$  ، ثم استنتج جدول تغيرات التابع  $f$ .

(3) ليكن المستقيم  $d: y = -3x$  احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x]$  ماذا تستنتج ؟

(4) ارسم كل مقارب وجنته ثم ارسم  $C_f$

• انتهت الأسئلة •

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيرات التابع  $f$  والمطلوب:

(1) ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$

(2) ما عدد القيم الحدية محلياً

(3) اكتب معادلة مماس منحنى التابع في

النقطة التي فاصلتها  $x = 1$ 

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$f(x)$		$+$	$0$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1$
$f(x)$			$\searrow$
$f(x)$			$0$

السؤال الثاني: في معلم متجانس  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لتكن النقطة  $A(1, -2, 0)$  والمستوي  $P: x + 2y + z - 1 = 0$ احسب بعد النقطة  $A$  عن المستوي  $P$ ، ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها  $A$  وتمس المستوي  $P$ .السؤال الثالث: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  وفق:  $f(x) = \frac{x-4}{|x-1|+1}$ (1) ادرس قابلية التابع  $f$  للاشتقاق عند  $x = 1$  من اليمين، واكتب معادلة نصف المماس للخط  $C$  من اليمين في النقطة  $(1, -3)$ .(2) أوجد معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني  $C$ .السؤال الرابع: في معلم متجانس للفراغ  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعطي معادلتى المستويين: $P: x + y - 2z = 3$  و  $Q: x - y - 2z = 5$  بين أن المستويين متقاطعان، وأعط تمثيلاً وسطيّاً لفصلهما المشترك.السؤال الخامس: نتأمل المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$  أيأ يكن العدد الطبيعي  $n$ نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$  برهن أن  $(v_n)_{n \geq 0}$  متتالية حسابية، أوجد عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .السؤال السادس: المستقيمان  $d$  و  $d'$  معرفان وسطيّاً وفق:

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad d': \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \\ z = 3s - 2 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

أثبت أن  $d$  و  $d'$  متقاطعان، ثم عين إحداثيات نقطة التقاطع.

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية: (70 لأول و 60 لثاني و 70 لثالث)

السؤال السابع: التمرين الأول: نتأمل في معلم متجانس للفراغ  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط

$A(1, 0, 1) \quad B(1, 0, -2) \quad C(2, -1, -1)$

(1) تحقق أن الشعاعين  $\overline{BA}$  و  $\overline{BC}$  غير مرتبطين خطياً، ماذا تستنتج؟(2) اكتب تمثيلاً وسطيّاً للمستقيم  $(BC)$ .(3) أوجد إحداثيات النقطة  $H$  المسقط الفاقم للنقطة  $A$  على المستقيم  $(BC)$ ، واحسب بعد  $A$  عن هذا المستقيم؟

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{5u_n - 1 - u_n - 3}{u_n + 3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n - 4}{u_n + 3}}$$

$$= \frac{u_n + 3}{4u_n - 4}$$

نفس

$$\frac{u_{n+3}}{5(4u_n - 4)}$$

$$\frac{u_{n+3}}{5(4u_n - 4)}$$

السؤال الثامن: التعرین الثاني: لیکن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على المجال  $I = ]0, +\infty[$  وفق:

$$f(x) = ax + \frac{b}{\sqrt{x+1}}$$

حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.

(1) عين العددين  $a$  و  $b$  إذا علمت أن المستقيم  $d$  الذي معادلته  $y = 2x - 2$  مماس لخطه البياني  $C$  في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب.

(2) إذا علمت أن  $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$  فأوجد معادلة المقارب المائل لخطه البياني  $C$ .

السؤال التاسع: التعرین الثالث: لیکن  $f$  التابع المعرفة على  $[0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  وفق:  $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

(1) أوجد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$ .

(2) ثم أعط عدداً حقيقياً  $A$  يحقق الشرط إذا كان  $x > A$  كان  $f(x) \in ]1, 9, 2, 1[$ .

(3) أوجد  $f'(x)$ ، واستنتج مشتق التابع  $g(x) = f(\sin x)$ .

تألف: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

السؤال العاشر: المسألة الأولى: نتأمل في معلم متجانس  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط:  $A(2, 1, 3)$  ،  $B(-3, -1, 7)$  ،  $C(3, 2, 4)$

(1) بين أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  تعين مستوياً

(2) لیکن  $d$  المستقيم الممثل وسيطياً بالجملة:

$$\begin{cases} x = 2t - 7 \\ y = -3t \\ z = t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a. أثبت أن المستقيم  $d$  عمودي على المستوي  $(ABC)$

b. أوجد معادلة للمستوي  $(ABC)$

(3) أوجد إحداثيات النقطة  $H$  نقطة تقاطع المستقيم  $d$  مع المستوي  $(ABC)$

(4) أثبت أن:  $-2\overline{HA} - \overline{HB} + 2\overline{HC} = \vec{0}$

ثم عين المجموعة  $\Gamma$  المؤلفة من النقاط  $M$  التي تحقق  $\| -2\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC} \| = \sqrt{29}$

السؤال الحادي عشر: المسألة الثانية: لیکن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $R \setminus \{-1, 1\}$  وفق  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$

(1) ادرس نهايات التابع  $f$  عند أطراف مجالات تعريفه، واستنتج معادلة كل مقارب شاقولي لخطه البياني.

(2) أثبت أن المستقيم  $d$  الذي معادلته  $y = x + 1$  مقارب مائل لخطه البياني، وادرس الوضع النسبي للخط  $C$  ومقاربه  $d$ .

(3) ادرس تغيرات التابع  $f$  ونظم جدولاً بها. وعين ماله من قيم حدية محلياً.

(4) أثبت أن النقطة  $I(0, 1)$  مركز تناظر لخطه البياني  $C$ .

(5) ارسم مقاربات  $C$  ثم ارسم  $C$ .

(6) ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة:  $x^3 + (1-m)x^2 + m - 1 = 0$ .

انتهت الأسئلة



أولاً: اجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$0$
$f'(x)$		-	+	0
$f(x)$	0	-2	0	4

السؤال الأول: الجدول المجاور هو جدول تغيرات للتابع  $f$  المعرف على  $]-\infty, 0]$  والمطلوب:

(1) أوجد مالمخطة البياني من مقاربات أفقية أو شاقولية.

(2) ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$

(3) دل على القيم الحدية محلياً للتابع مبيناً نوعها.

(4) هل يقبل الخط  $cy$  معاس أفقى اكتب معادلته ان وجد.

السؤال الثاني:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقاط  $A(1, 5, 4)$ ،

و  $B(10, 4, 3)$  و  $C(4, 3, 5)$  و  $D(0, 4, 5)$ .

• بين أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة.

• بين أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  تقع في مستوي واحد.

• استنتج أن النقطة  $D$  هي مركز الأبعاد المتساوية للنقاط المتصلة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

السؤال الثالث: ليكن التابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R}$  وفق:  $f: x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

1- احسب  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

2- ليكن  $g$  مقصور  $f$  على المجال  $I = [0, 2]$

a. اكتب  $g$  بعبارة مستقلة عن  $E(x)$  (لا تحوي  $E(x)$ )

b. أثبت أن  $g$  مستمر على  $I$

السؤال الرابع: لتكن المتتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالعلاقة:  $U_0 = 5$ ،  $U_{n+1} = \frac{4U_n - 1}{U_n + 2}$ ، والمتتالية  $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$

(1) أثبت أن المتتالية  $V_n$  حسابية أساسها  $r = \frac{1}{3}$

(2) اكتب  $V_n$  ثم  $U_n$  بدلالة  $n$

ثانياً: حل 3 فقط من التمارين الأربعة الآتية

التحريين الأول:

لتكن الأعداد العقدية  $Z_1 = 1 - i$  و  $Z_2 = 2\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$  و  $Z_3 = -3e^{i\frac{\pi}{3}}$

1- اكتب  $Z_1$  و  $Z_2$  و  $Z_3$  بالشكل الأسّي.

2- اكتب  $Z_1 \times Z_2$  بالشكل الجبري.

3- اكتب  $Z_1 \times Z_2$  بالشكل المثلثي واستنتج  $\cos \frac{5\pi}{12}$ .

التمرين الثاني ادرس وضع المستقيمين  $d$  و  $d'$  وبين اذا كانا متقاطعين أو متوازيين أو متوازيين :

$$d': \begin{cases} x = -9S + 4 \\ y = -12S + 4 \\ z = 3S \end{cases} \quad S \in \mathbb{R} \quad d: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

التمرين الثالث  $c$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R}$  وفق:  $f(x) = 2 \cos(x) - \cos 2x$

1. أثبت أن  $f$  زوجي وقبل  $2\pi$  دوراً له
2. أثبت أن  $f'(x) = 2 \sin x (2 \cos x - 1)$
3. ادرس تغيرات  $f$  على  $[0, \pi]$
4. ارسم خطه  $c$  على المجال  $[-2\pi, 2\pi]$

التمرين الرابع: ليكن التابع  $f(x) = \frac{\sqrt{2} + 2 \sin x}{x + \frac{\pi}{4}}$

- 1) أوجد التابع المشتق للتابع  $g(x) = \sqrt{2} + 2 \sin x$
  - 2) احسب  $g'(-\frac{\pi}{4})$ ،  $g(-\frac{\pi}{4})$  ثم استنتج نهاية التابع  $f$  عند  $-\frac{\pi}{4}$
- ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين
- المسألة الأولى:

ليكن  $c$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R} \setminus (-1)$  وفق:  $f: x \mapsto \frac{x^2 + ax + b}{x + 1}$  أولاً- جد  $a, b$  إذا علمت أن الخط  $c$  يقبل معالته:  $y = 4x + 8$  في نقطة فاصلتها  $-2$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1} \text{ ثانياً - بفرض}$$

1. جد نهاية  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفه ودل على المقارب الشاقولي
2. أثبت أن المستقيم  $d$  الذي معالته  $d: y = x - 1$  مستقيم مقارب للخط  $c$
3. أثبت أن النقطة  $I(-1, -2)$  مركز تناظر للخط  $c$
4. ادرس تغيرات  $f$  ونظام جدولاً وارسم كل مقارب للخط  $c$  ثم ارسم  $c$

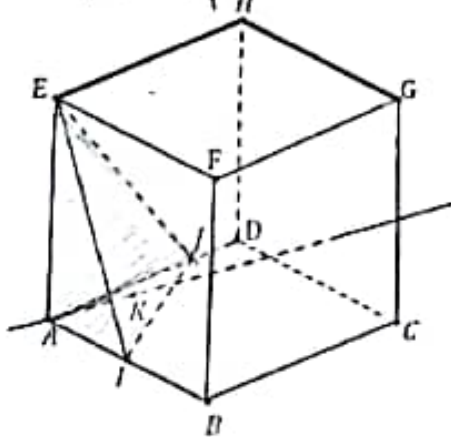
المسألة الثانية:

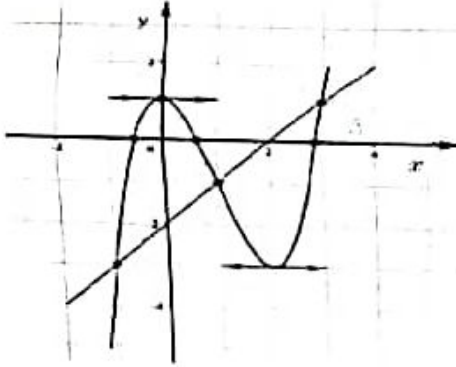
ليكن  $ABCDEFGH$  مكعباً طول حرفه يساوي 4، ولنكن النقطة  $I$  منتصف  $[AB]$  والنقطة  $J$  تحقق العلاقة  $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD}$

$3AD$  تتأمل المعلم المتجانس  $(A; \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}, \frac{1}{4} \overrightarrow{AE})$  والمطلوب:

1. جد إحداثيات رؤوس المكعب والنقطتين  $I$  و  $J$
2. أثبت أن معادلة المستوي  $(EIJ)$  هي  $6x + 4y + 3z - 12 = 0$
3. اكتب التمثيل الوسيط للمستقيم  $d$  المار من  $A$  وعمودياً على المستوي  $(EIJ)$
4. ثم جد إحداثيات النقطة  $K$  نقطة تقاطع  $d$  مع  $(EIJ)$
5. احسب مساحة المثلث  $AEJ$  ثم استنتج حجم رباعي الوجوه  $I - AEJ$
6. احسب بُعد  $A$  عن المستوي  $(EIJ)$  واستنتج مساحة المثلث  $EIJ$

انتهت الأسئلة





لويحة: أجب عن الأسئلة الأربعة التالية (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول:

تأمل الشكل المرسوم جانبا، الذي يمثل الخط البياني للتابع المعرف على  $R$

١- ما هو عدد القيم الحدية للتابع  $f(x)$  وبين نوعها

٢- لحسب  $f(2)$  و  $f'(2)$

٣- أوجد حلول المعادلة  $f(x) = y_0$

السؤال الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على  $[0, +\infty[$  وفق  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$  والمطلوب:

١- تحقق أن  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$  أي كان  $x \geq 0$  ثم اثبت أن  $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$  من أجل  $x > 0$

٢- استنتج نهاية التابع عند  $+\infty$

السؤال الثالث:

حل في  $\mathbb{C}$  جملة المعادلتين الآتيتين بالمجهولين  $z$  و  $z'$

$$2iz + z' = 2i$$

$$3z - iz' = 1$$

السؤال الرابع: تأمل في معلم متجانس  $(0; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  المستقيمين  $d, d'$  المعرفين مسطياً كما يلي:

$$d \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s - 3 \\ z = -s + 2 \end{cases} \quad d' \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$$

(١) أثبت أن  $d$  و  $d'$  متقاطعان وعين إحداثيات  $C$  نقطة تقاطعها

(٢) أوجد معادلة المستوي  $P$  الذي يحوي  $d$  و  $d'$

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (٦٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن التابع  $f$  المعطى بالعلاقة:  $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

(١) أوجد نهاية  $f$  عند  $+\infty$ .

(٢) جد عدداً حقيقياً  $A$  يحقق إذا كان  $x > A$  كان  $f(x)$  في المجال  $[2.9, 3.1]$

التمرين الثاني: لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالشكل:

$$(u_n)_{n \geq 0} ; \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$$

والمتتالية  $(v_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالشكل:  $v_n = u_n + 2$

(١) أوجد  $u_1$  و  $u_2$  ثم  $v_0$  و  $v_1$  و  $v_2$ .

(٢) اثبت أن  $(v_n)_{n \geq 0}$  هندسية ثم عين أساسها.

(٣) استنتج عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ .

التعريف الثالث: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعروف على  $R$  وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

(1) اكتب التابع  $f(x)$  بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

(2) أوجد نهاية  $f$  عند  $-\infty$

(3) ادرس قابلية اشتقاق  $f$  عند العدد 0 من اليمين، ثم اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للخط البياني  $C$  في النقطة  $(0, 0)$ .

التعريف الرابع:

نتأمل رباعي وجوه  $ABCD$  ونقطتين  $I$  و  $J$  تحققان  $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AD}$  و  $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

والنقطة  $G$  مركز أبعاد متناسبة للنقاط  $(A, 2)$  و  $(B, 3)$  و  $(C, 1)$  و  $(D, 1)$ .

(1) أثبت أن  $G$  تقع على  $IJ$ ، ثم عين موضع  $G$ .

(2) عين مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق العلاقة

$$\|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = \|5\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\|$$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا لنقاط  $A(1, 2, 1)$  و  $B(2, 4, 2)$  و  $C(2, 2, 0)$

(1) أثبت أن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة واستنتج أنها تعين مستويًا  $P$

$$\text{معادلته: } x - y + z = 0.$$

(2) أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم واحسب مساحته.

(3) أوجد إحداثيات النقطة  $D$  المسقط القائم للنقطة  $D(-1, 3, -2)$  على المستوي  $P$ .

(4) أوجد بعد النقطة  $D$  عن المستوي  $P$ .

(5) اكتب معادلة الكرة التي مركزها  $D$  وتمس المستوي  $P$ .

(6) احسب حجم المجسم  $DABC$ .

المسألة الثانية: ليكن  $C_f$  الخط البياني للتابع  $f$  المعروف على  $R \setminus \{1\}$  وفق:  $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$

(1) أوجد نهايات التابع  $f$  عند أطراف مجالات مجموعة تعريفه واكتب معادلات المقاربات الشاقولية أو الأفقية إن وجدت.

(2) أثبت أن المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته  $y = x - 2$  مقارباً مائلاً للخط البياني  $C_f$ . ثم ادرس الوضع النسبي لـ  $C_f$  و  $\Delta$ .

(3) ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولاً بها. وعين القيم الحدية مبيناً نوعها.

(4) ارسم المستقيم  $\Delta$  وما وجدته من مقاربات أفقية أو شاقولية ثم ارسم  $C_f$ .

- انتهت الأسئلة -



أولاً: أجب عن خمسة أسئلة فقط.

$x$	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	
$f'(x)$		↗	↘	↗	

- 1- أوجد مجموعة تعريف التابع والمستقر العكس
- 2- ما عدد القيم الحدية لهذا المعادلة  $f'(x) \geq 0$
- 3- أوجد صادلة التماس عند  $x=4$  وعند  $x=2$
- 4- صف المقاربات الذئبية والتأولية
- 5- أوجد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

السؤال الثاني:  $P(x) = f(x) + (x - f(x))^2$  معرف مع  $[0, 2]$

1. أكتب  $P$  بصارة مستقلة عن  $f(x)$
- 2- هل  $f$  مستر عند  $x=2$  على
- 3- ادرس قابلية المشتقات للتابع  $f$  عند  $x=1$  واستقر صادلة نصف التماس العياري

السؤال الثالث:  $f(x) = 3x^2 + \cos^3 x$  المعرف مع  $R^*$

أثبت ان  $y = 3x$  مقارب مائل للخط  $C$  بجوار  $+\infty$  و ادرس لوضوئها السيني

السؤال الرابع:  $P(x) = \sin x$  معرف مع  $R$  و بفرض  $f$  اشتقائي  $h$  معرف مع  $R$

- 1- اكتب  $f'(x)$
- 2- أثبت بالشر سيج  $f(x) = \sin(n \frac{x}{2} + x)$  وذلك ان  $n \in N^*$

السؤال الخامس:  $u_n = e^2 + \frac{e^2}{1!} + \frac{e^2}{2!} + \frac{e^2}{3!} + \dots + \frac{e^2}{n!}$

1- أثبت ان  $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$

2- استقر عصفراً راجحاً لتتالية  $u_n$  و ادرس تقاربها

السؤال السادس:  $AB, CD, EF, GH$  مكعب طول ضلعه واحد ورسومها

معلم مقياس  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  في  $J$  منتصف  $AE$

1- أثبت ان  $M$  من مستوي  $JDG$  على  $AI$   $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{GD} + \vec{AJ}$

2- اكتب  $\vec{JB} \cdot \vec{JF}$  واستقر  $\cos B \hat{J} F$

ثانياً : السؤال الأول : لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بالعلاقة التكرارية

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n} \quad u_1 = \frac{1}{2}$$

- 1- أثبت ان  $0 < u_n < 1$  ان كان  $n \in \mathbb{N}$
- 2- لنفرض  $(u_n)$  ، اثبت ان  $u_n = \frac{1}{u_n} - 1$  ، اكتبها بدلالة  $n$
- 3- اكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  واحد لا يتعدى

السؤال الثاني : ليكن العدد العقدي  $w = \frac{\sqrt{2}i}{1+i}$

- 2- اثبت ان  $|w| = 1$  ثم اكتب  $w$  بالشكل الأسّي
- 3- ليكن  $z$  عدد عقدي اثبت ان  $z = \frac{z - \bar{z}w}{1 - w}$  عدد حقيقي

ثالثاً : حل التالي

السؤال الأول : ليكن التابع  $f$  المبرن مع  $R$  بالعلاقة  $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$

- 1- ادر مسد تغيرات  $f$  ونظم جدولاً لها (مع مقارنة ان وجدت)
- 2- ادر مسد الوحد السري بين  $C$  ومقاربه الزئقن
- 3- اكتب معادلة المماس عند النقطة التي ماصلة  $x = -1$
- 4- ارسم  $C$  واسم  $C$  كل الباي للتابع والمعرف وقت

$$g(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

السؤال الثاني :  $A(1, 1, 1)$   $B(3, 2, 0)$   $R: x - y + 2z + 4 = 0$

- 1- ادر معادلة المستوى  $P$  المار بالنقطة  $B$  ويقبل  $\overline{AB}$  كخطأله
- 2- اكتب معادلة الكرة  $S$  التي مركزها  $A$  وترها بالنقطة  $B$
- 3- اثبت ان الكرة  $S$  عمداً المستوى  $R$
- 4- استبين ان  $N(0, 2, -1)$  متعامداً مع المستوى  $R$
- 5- اثبت ان  $P$  و  $R$  متعامدان بفعل مركز  $S$  كخطأله
- 6- اكتب معادلة المستوى العمودي للقطعة  $[BN]$  واثبت ان  $S$  عمود على معادلة المستوى العمودي لـ  $BN$

— المنة الأول —

أولاً : اجب الاسئلة الآتية (15 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: لتكن المتتالية المعرفة تدريجياً وفق  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$  حيث  $u_0 = 1$  والمطلوب

١- أثبت أن  $u_n > 0$

٢- احسب  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  ثم استنتج أن المتتالية متزايدة

السؤال الثاني : في معلم متجانس لتكن النقاط  $A(3, -2, 2), B(6, 1, 5), C(6, -2, -1), D(0, 4, -1)$

١- أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم واحسب مساحته ٢- أثبت ان  $AD$  عمودي على المستوي  $ABC$

٣- اكتب معادلة المستوي  $ABC$

٤- احسب حجم رباعي الوجوه  $DAEC$

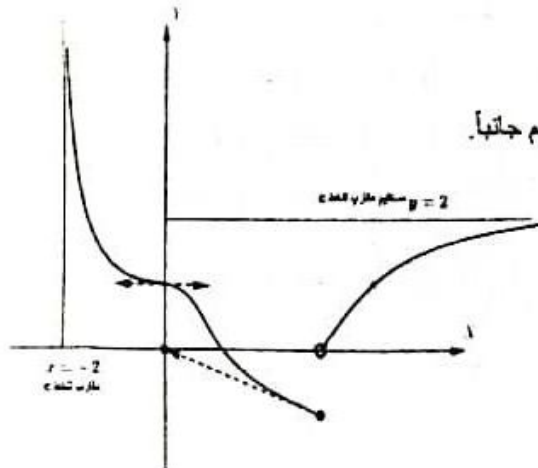
السؤال الثالث : في مجموعة الأعداد العقدية  $C$  أوجد حلول المعادلة  $z^2 - (2 \sin \theta)z + 1 = 0$  و اكتبها بالشكل المتخيلى

السؤال الرابع : : ليكن التابع  $f$  المعرف على  $I = [1, \infty[$  وفق:  $f(x) = ax - b\sqrt{x-1}$  والمطلوب:

١- عين  $a, b$  علماً أن  $\frac{3}{4}$  قيمة حدية لتابع عند  $\frac{5}{4}$

٢- من أجل  $a = b = 1$  ادرس قابلية الاشتقاق للتابع عند العدد (1) وفسر النتيجة هندسياً.

ثانياً : حل التمرين الاربعة الآتية: (25 درجة لكل تمرين)



التمرين الأول ليكن التابع  $f$  على  $D = ]-2, \infty[$  بالاستفادة من خطه البياني  $C$  المرسوم جانباً.

١- استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

٢- استنتج  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  واحسب  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(f(x))$

٣- اوجد  $f(3)$  و  $f'(3^-)$  واستنتج:  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)+1}{x-3}$

٤- ماهي حلول المترابحة:  $f'(x) < 0$

٥- هل  $C'$  الخط البياني للتابع  $f'$  يمر من مبدأ الأحداثيات /عل ذلك/.

$$p_1 : 2x - y + 3z = 2$$

التمرين الثاني : لتكن المستويات :  $p_2 : x + 2y + z = 1$  والمطلوب:

$$p_3 : 3x - 4y + 5z = 3$$

بين ان المستويات تتقاطع بفصل مشترك  $\Delta$  يطلب تعيين التمثيل الوسيطى له.

التمرين الثالث : ليكن التابع المعرف على  $R$  وفق  $f(x) = \sin(x)$

1- اوجد  $f'(x), f''(x)$

1- اثبت ان  $f^{(n)}(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right)$  مهما كان  $n \geq 1$

التمرين الرابع : اوجد مجموعة النقط  $M(x, y)$  لكي يكون العدد  $z \neq 1$  ;  $w = \frac{z+2i}{z-1}$  حقيقى بحث

ثم حل المعادلة  $w = i$

ثانياً: حل المسالتين التاليتين (40 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى نامل المتتاليان المعرفتان وفق  $u_0 = 12, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, v_0 = 1, v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$  والمطلوب

1- اثبت ان المتتالية  $x_n = u_n - v_n$  هندسية ، اكتب  $x_n$  بدلالة  $n$  واحسب نهايتها

2- احسب كلاً من  $v_{n+1} - v_n, u_{n+1} - u_n$  بدلالة  $x_n$

3- اثبت ان المتتاليان  $u_n, v_n$  متجاورتان

4- اثبت ان المتتالية  $x'_n = 3u_n + 8v_n$  ثابتة واستنتج قيمتها ثم استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين  $u_n, v_n$

المسألة الثانية : ليكن المكعب  $ABCDEFGH$  طول حرفه يساوي 4

$K$  تحقق:  $\overline{DK} = \frac{1}{4}\overline{DC}$  و  $L$  تحقق:  $\overline{CL} = \frac{1}{4}\overline{CB}$

في المعلم  $(A, \frac{1}{4}\overline{AB}, \frac{1}{4}\overline{AD}, \frac{1}{4}\overline{AE})$

1- جد الشعاعين  $\overline{LE}, \overline{LG}$  ثم بين ان  $\vec{n}(4, -4, 1)$  ناظماً للمستوي  $LEG$ .

2- اثبت ان المستقيم  $(HK)$  يوازي المستوي  $(LEG)$ .

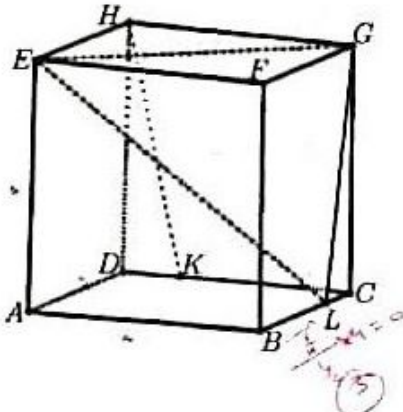
3- اكتب معادلة للمستوي  $(LEG)$  ثم احسب بعد  $D$  عنه.

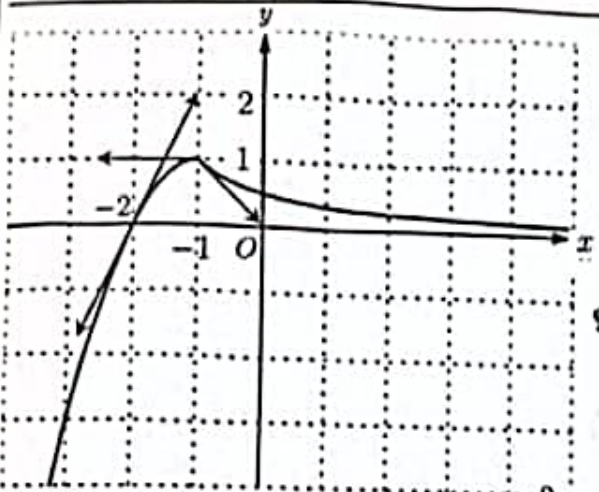
4- اثبت ان المستقيم  $(GE)$  يقبل  $\vec{u}(1, 1, 0)$  موجه له ثم اكتب تمثيل وسيطي له

5- صف مجموعة النقط  $M$  من الفراغ الناتجة عن دوران  $[GH]$  حول محور الفواصل، واكتب المعادلة الديكارتية لها.

6- لتكن النقطة  $p$  المحققة للعلاقة  $\overline{BP} = \frac{3}{4}\overline{BG}$  عين كمركز ابعاد متناسبة لـ  $(B, \alpha), (C, \beta), (F, \gamma)$

حيث  $\alpha, \beta, \gamma$  ثوابت يطلب تعيينها





أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانباً  $C$ , الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R}$

① جد نهاية  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفه .

ثم استنتج معادلة مستقيم المقارب الأفقى لخطه البياني  $C_f$ .

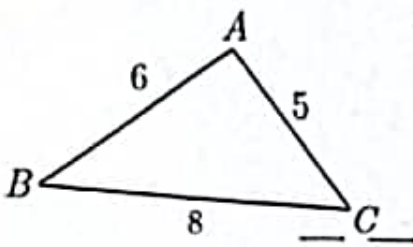
② احسب  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$  وهل  $f$  اشتقاقي عند  $-1$  من اليمين؟

③ اكتب معادلة نصف المماس من اليسار للخط  $C_f$  في نقطة منه

فاصلتها  $-1$  . وهل  $f$  اشتقاقي عند  $x = -1$  ؟ علل إجابتك .

④ جذ  $f'(-2)$  . ولنعرف التابع  $g$  بالعلاقة  $g(x) = f(-3x)$  : استنتج  $g'(\frac{2}{3})$  .

⑤ ما مجموعة تعريف التابع  $h: \frac{1}{\ln(f(x))}$  ؟ وما حلول المتراجحة  $f(x) < 0$  ؟



السؤال الثاني: ① أثبت أن  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

ثم استنتج أن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

②  $ABC$  مثلث مرسوم في الشكل المجاور : بالاستفادة من القانون السابق احسب  $AB \cdot AC$

السؤال الثالث: ليكن  $f$  التابع المعرف على  $\mathbb{R}$  وفق العلاقة  $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$

① أثبت أن  $f$  متناقص تماماً على  $\mathbb{R}$  . ثم انرس تغيرات التابع  $f$  ونظم جدولاً بها

② جذ  $f(0)$  واستنتج مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x^2 + 1) \leq x$

السؤال الرابع: لتكن المعادلة  $(E)$  الآتية:  $z^2 + bz + c = 0$  حيث  $b$  و  $c$  عدنان حقيقيان .

عين العدد  $c$  إذا علمت أن الشكل الأسى لأحد جذري المعادلة  $(E)$  هو  $(c-1)e^{\frac{\pi}{4}}$  .

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: في الشكل المجاور:  $ABCD$  متوازي أضلاع ننشئ خارجه النقاط  $H$  و  $G$  و  $F$  و  $E$  بحيث يكون

المثلث  $BCH$  قائماً في  $H$  ومتساوي الساقين و  $AGD$  قائماً في  $G$  ومتساوي الساقين ويكون المثلثان  $CDF$  و  $AEB$

متساوي الأضلاع . ونرمز للأعداد العقدية  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  و  $e$  و  $f$  و  $g$  و  $h$

التي تمثل النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  و  $F$  و  $G$  و  $H$  بالترتيب .

① إن  $D$  هي صورة  $A$  وفق دوران مركزه  $G$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

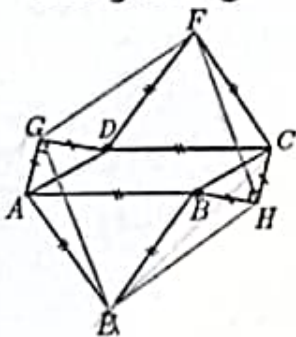
استخدم الصيغة العقدية للدوران لتثبت أن  $g = \frac{d - ai}{1 - i}$  ثم استنتج بالمثل أن  $h = \frac{b - ci}{1 - i}$  .

② ماهي صورة  $B$  وفق دوران مركزه  $E$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  ؟ و ماهي صورة  $D$  وفق دوران مركزه  $F$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  ؟

و بفرض  $w = e^{\frac{\pi}{3}}$  : أثبت أن  $e = \frac{a - bw}{1 - w}$  و  $f = \frac{c - dw}{1 - w}$  .

③ اشرح لماذا  $b + d = a + c$  ؟ استند من ذلك في إثبات أن:  $e + f = a + c$  و  $g + h = a + c$  .

ثم استنتج نوع الرباعي  $EHFG$  . يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة



**التصمين الثاني:** ليكن  $f$  التابع المعرف على  $[0, +\infty[$  وفق العلاقة:  $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

- احسب  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  ثم أعط عدداً حقيقياً  $A$  يحقق الشرط: إذا كان  $x > A$  كان  $f(x) \in ]0.9, 1.1[$
- احسب  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x))$

**التصمين الثالث:** لتكن النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي تمثلها الأعداد العقدية  $z_A = 2$  و  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$  و  $z_C = \bar{z}_B$

- اكتب بالشكل الأسّي العددين  $z_C$  و  $z_B$
  - عين المجموعة  $D$  مجموعة النقاط  $M(z)$  التي تحقق المساواة:  $|z| = |z - 2|$  ثم تحقق أن النقطتين  $B$  و  $C$  تنتميان إلى  $D$
  - نقرون بكل نقطة  $M(z)$  من المستوي حيث  $z \neq z_A$  النقطة  $M'$  التي يمثلها العدد العقدي  $z' = \frac{-4}{z-2}$
- أثبت أن  $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$
- أثبت أنه إذا انتمت  $M$  إلى  $D$  انتمت  $M'$  إلى دائرة  $\Gamma$  عين مركزها واحسب نصف قطرها.
- ثم تحقق أن النقطتين  $B$  و  $C$  تنتميان إلى  $\Gamma$

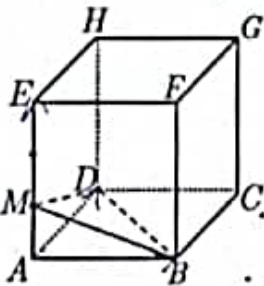
**التصمين الرابع:** ليكن  $C_f$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على المجال  $[0, +\infty[$  وفق العلاقة:  $f(x) = -4\sqrt{x}$

$C_g$  الخط البياني للتابع  $g$  المعرف على المجال  $[\frac{1}{2}, +\infty[$  وفق العلاقة:  $g(x) = \sqrt{\left(\frac{2x-1}{6}\right)^3}$

- ادرس قابلية اشتقاق التابع  $g$  عند  $x = \frac{1}{2}$
- ليكن  $m \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$ . أثبت أن مماس  $C_f$  في نقطة منه فاصلتها  $m$  يعامد مماس  $C_g$  في نقطة منه فاصلتها  $3m + \frac{1}{2}$

**ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)**

**المسألة الأولى:** مكعب طول حرفه يساوي 1. فيه النقطة  $M$  تحقق  $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AE}$



والنقطة  $K$  تحقق  $\overline{BK} = \frac{9}{11}\overline{BM} + \frac{1}{11}\overline{BD}$

- احسب حجم الهرم  $ABDM$ . علّل لماذا النقطة  $K$  تنتمي إلى المستوي  $(BMD)$  ؟
- لنختار معلماً متجانساً  $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$  جذ إحداثيات النقاط  $A$  و  $B$  و  $D$  و  $C$  و  $M$  و  $K$ .
- احسب  $\overline{MK} \cdot \overline{BD}$  و  $\overline{BK} \cdot \overline{MD}$  ثم استنتج أن  $K$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $BMD$ .
- أثبت أن المستقيم  $(AK)$  عمودي على المستوي  $(BMD)$  ثم اكتب معادلة المستوي  $(BMD)$ .
- لتكن النقطة  $I(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$  احسب قياس الزاوية  $\widehat{IAD}$ .

**المسألة الثانية:** ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $[0, +\infty[$  وفق:  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} + x - 1$

- أثبت أن المستقيم  $d$  الذي معادلته  $y = x - 1$  مقارب مائل للخط  $C$  ثم ادرس وضع  $C$  بالنسبة إلى  $d$ .
- ليكن  $h$  التابع المعرف على  $[0, +\infty[$  وفق العلاقة:  $h(x) = x^2 - \ln x$  ادرس اطراد التابع  $h$  واستنتج أن  $h(x) > 0$  أيأ تكن  $x \in ]0, +\infty[$
- تحقق أن  $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$  واستنتج أن  $f$  متزايدة تماماً ثم ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولاً بها واستنتج معادلة مقاربه الشاقولي.
- لتكن  $A$  نقطة من الخط  $C$  التي فاصلتها تساوي 1 أثبت أن المستقيم  $D$  مماس الخط  $C$  في  $A$  يوازي  $d$  واكتب معادلته.
- ارسم  $d$  و  $D$  ثم ارسم  $C$ .

.....انتهت الأسئلة.....

(40 درجة لكل سؤال)

أولاً: اجب عن خمسة فقط من الأسئلة الستة الآتية:  
السؤال الأول: نجد جانباً جدول دراسة تغيرات التابع  $f$  المعروف على  $\mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$1$	$6$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow -5$	$\nearrow -1$	$\searrow 1$

(1) حد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)]$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) دل على القيم الحدية وبين نوعها

(3) اكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها  $x =$

(4) ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$

السؤال الثاني:  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية حسابية فيها:  $u_4 = -7$  و  $u_9 = -22$  والمطلوب:

- (1) أوجد الحد العام للمتتالية  $u_n$ .
- (2) أوجد  $u_0 + u_1 + \dots + u_9$

السؤال الثالث: ليكن التابع  $f$  المعروف على  $\mathbb{R}$  وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x \sin x} & , x \neq 0 \\ m & , x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة العدد الحقيقي  $m$  التي تجعل التابع  $f$  مستمراً على  $\mathbb{R}$

السؤال الرابع: عين مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق العلاقة:

$$\|MA + MB + MC\| = \|3MD - 2MA - MB - MC\|$$

السؤال الخامس: ليكن التابع  $f$  المعروف على  $\mathbb{R}^*$  وفق:

$$f(x) = ax + b + \frac{2}{x}$$

عين  $a, b$  حتى يكون  $f(-1) = -5$  قيمة حدية للتابع  $f$ .

السؤال السادس: نتأمل النقطتين:  $B(-3,0,2)$ ,  $A(1,2,-2)$

- (1) أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $AB$ .
- (2) اكتب معادلة الكرة  $S$  التي تقبل  $[AB]$  قطراً لها.

(70 لأول - 70 لثاني - 60 لثالث)

ثانياً: حل التمارين الثلاث التالية:  
التمرين الأول:

نعرف المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

(1) نعرف المتتالية  $(v_n)_{n \geq 0}$  بالعلاقة:  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$  أثبت أن  $v_n$  هندسية ثم عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(2) نعرف المتتالية  $(w_n)_{n \geq 0}$  بالعلاقة:  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$  أثبت أن  $w_n$  حسابية أساسها  $2/1$  ثم عبر عن  $w_n$  بدلالة  $n$ .

(3) استنتج الحد العام للمتتالية  $u_n$ .

تمرين الثاني:

ليكن التابع  $f$  المعروف على  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  وفق:  $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$  والمطلوب:

(أ) أوجد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم عين العدد  $A$  الذي يحقق الشرط: إذا كان  $x > A$  كان  $f(x)$  في المجال  $[2.9, 3.1]$ .

(ب) استنتج مشتق كل من التابعين:  $g(x) = f[\sin(x)]$  و  $h(x) = f(\sqrt{x})$ .

أوجد  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  ثم استنتج كل من  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)]$  و  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f[f(x)]$ .

في معام متجانس  $(O; i, j, k)$  لنكن النقاط  $A(1, 0, 0), B(4, 3, -3), C(-1, 1, 2), D(0, 0, 1)$

- (1) أثبت أن  $\vec{AC}$  و  $\vec{AB}$  غير مرتبطين خطياً.
- (2) أثبت أن الأشعة  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  مرتبطة خطياً.
- (3) استنتج أن النقطة  $D$  مركز أبعاد متناسبة للنقاط  $(A, a), (B, b), (C, c)$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

حل المسألة الأولى:

$$2x^2 + 3x - 1 = 0$$

(100 درجة لكل مسألة)

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

نمكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعروف على  $R \setminus \{-1\}$  وفق:  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

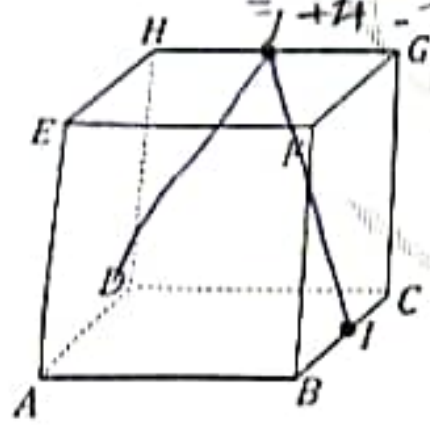
- (1) أوجد نهاية التابع  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفه ثم عين كل مقارب وحدته.
- (2) أثبت أن المستقيم  $d$  الذي معادلته  $d: y = x + 1$  مقارب مائل للخط  $C$  في جوار  $\pm\infty$  ثم ادرس الوضع النسبي للخط البياني للتابع مع المقارب  $d$ .
- (3) ادرس تغيرات التابع  $f$  وناقلم جدولاً بها.
- (4) أثبت أن النقطة  $A(-1, 2)$  مركز تناظر للخط البياني  $C$ .
- (5) اكتب معادلة المماس  $T$  للخط  $C$  في نقطة فاصلتها  $x=0$ .
- (6) ارسم كل مقارب وحدته ثم ارسم  $T$  والخط  $C$ .

حل المسألة الثانية:

$$f(x) = 2x^2 - 7x + 1$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

$-x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$



مكعب  $ABCDEFGH$  طول حرفه 2 فيه  $I$  منتصف  $BC$  و  $J$  منتصف  $HG$

مل المعلم المتجانس  $(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$  و المطلوب:

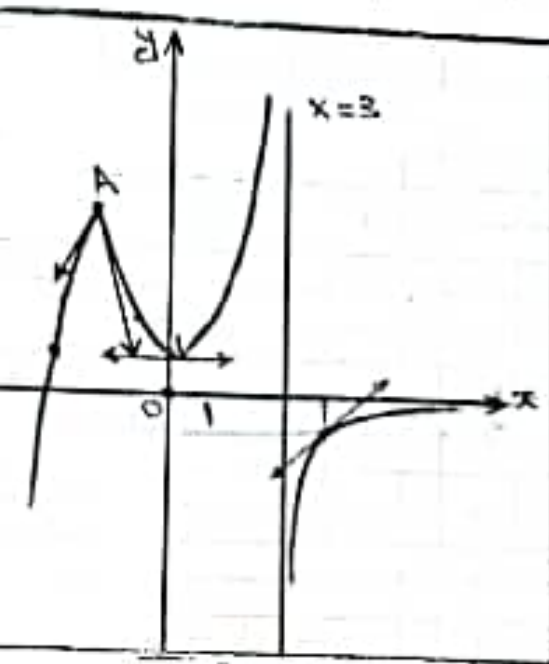
- (1) أوجد احداثيات النقاط  $D, B, E, I, J$ .
- (2) أوجد معادلة المستوي  $DEI$ .
- (3) أوجد احداثيات النقطة  $K$  المسقط القائم للنقطة  $J$  على المستوي  $DEI$ .
- (4) أوجد  $\cos(\vec{JD}, \vec{JI})$ .

(\*) عين احداثيات النقطة  $N$  التي تحقق العلاقة:  $\vec{BN} = 2\vec{EI}$  ثم أثبت أن  $N$  مركز أبعاد متناسبة للنقاط  $(I, i), (E, e), (B, b)$  حيث  $i, c, b$  أعداد حقيقية يطلب إيجادها.

انتهت الأسئلة



السؤال الثالث:  $f$  قطبيته لتابع  $f$  معرفته  $[3, 19]$



- 1- عت  $f(m)$ .
- 2- هل  $f$  استوائية عند  $(-2)$  معلة الإجابة.
- 3- أكتب معادلات منحنى المماسين ل  $f$  عند نقطتي  $A$ .
- 4- عت نقاط  $f$  عند الطرفين  $Q$  ثم نظم جدولا لنقطة  $f$ .
- 5- ناقش بياناً  $m$  به قيم  $m$  عدد حلول المعادلة  $m = f(x)$   $m \in \mathbb{R}$  عنه

السؤال الرابع:

$(u_n)$  متلة متتلة ومنه  $u_0 = \frac{1}{2}$   
 $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$

- 1- اشته أنه التابع  $f: x \rightarrow \frac{x}{2-x}$  متزايدة تماماً ثم أكتب  $f(x)$  ثم أوجد عدداً حقيقياً  $A$  يحده شرط: إذا كان  $x > A$  كان  $f(x)$  في المجال  $]-A, +\infty[$ .
- 2- اشته بالقرع  $0 < u_n < 1$  أي يكون العدد الطبيعي  $n$ .
- 3- اشته أنه المتتلة  $(u_n)$  المتتلة ومنه  $u_n = \frac{1}{n}$  هندسية  
 وكتابة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

السؤال الثالث: نعرف  $I = ]-\infty, 0[$  تابعاً ومنه  $f(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x}{x}$

البتة ان  $x = y = 0$  مقارب مائل ل  $f$  ثم ادرس الوضع النسبي ل  $f$  مع  $0$ .

السؤال الرابع:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} - x$

- 1- تابع معرفته على  $\mathbb{R}^*$  ومنه:
- 1- اكتب نقاط  $f$  عند الطرفين  $D$ .
- 2- ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدول لها.
- 3- اكتب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \frac{1}{x}$  ثم نشر النتيجة هندسياً.

- 4- ابرهن أن المستقيم الذي معادلتها  $-x = 0$  مقارب ل  $f$  في  $+\infty$ .
- 5- حدد وضعية  $f$  بالنسبة للمقاربين المائلين  $0$  و  $0$ .
- 6- ارسم المقاربات ثم ارسم  $f$ .

7- لكي  $f$  تابع معرفته على  $\mathbb{R}^*$  ومنه:  $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|} - |x|$

- أ- اكتب  $g$  ودرجه من القيمة المطلقة.
- ب- استيع رسماً و انظروا نتائج  $f$ .

1. المماس المماس  $(K, \vec{r}, \vec{a}, 0)$  لدينا  $A(1, 1, 1)$  و  $B(3, 2, 0)$

والمستوى  $Q: x - y + 2z + 4 = 0$

- 1- عين المعادلة الديكارتية للمستوى  $Q$  المار بالنقطة  $B$  ويكون  $\vec{AB}$  نائماً عليه.
- 2- اوجد معادلة الكرة  $S$  التي تظنها  $(2AB)$  ومركزها  $A$ .
- 3- اثبت أنه المستوى  $Q$  مماس للكرة  $S$ .
- 4- اثبت أنه  $(0, 2, 1)$   $C$  تقع على  $A$  على المستوى  $Q$ .
- 5- اثبت أنه المستقيم  $d$  المعطى بالملاقات الوسطية

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

هو الفضل المشترك للتولين  $P$  و  $Q$ .

المماس السارسا :

$ABCDEFGH$  متوازي مستطيلات فيه

$BC = CG = 1, AB = 2$

ولكن  $I$  منتصف  $[AB]$ .

- 1- اعط معامها كما نراها مع  $A$  ثم اوجد اصلياتها من رؤوس متوازي مستطيلات واصلياتها الففحة  $I$ .

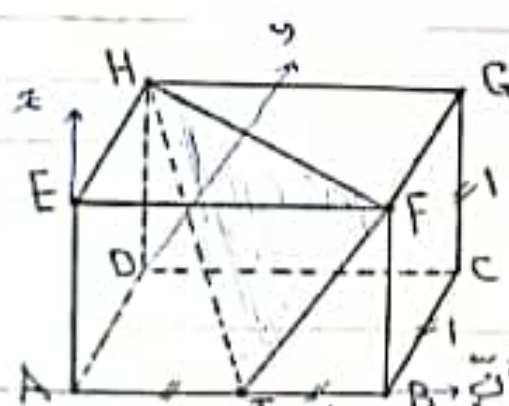
2- اثبت أنه معادلة المستوى  $(IFH)$  :  $x + 2y - z - 1 = 0$

$x + 2y - z - 1 = 0$

3- اعط متل وسيله لتقيم  $(E)$  ثم اثبت أنه  $(E)$  المستقيم  $(E)$  يقطع المستوى  $(IFH)$  بنقطة يطلب ايجاد اصلياتها.

4- اصب بعد  $G$  عند المستوى  $(IFH)$

5- اثبت أنه المثلث  $IFH$  قائم واصله  $I$  مع زاوية  $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$   $GIFH$



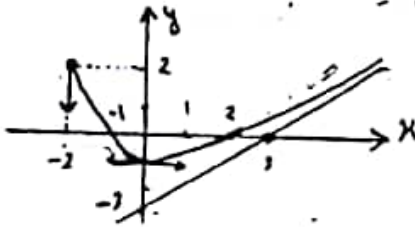
انتهت المسئلة

2

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية (لكل سؤال 40 درجة)

السؤال الأول:

في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعروف على المجال  $[-2, +\infty[$  والمستقيم  $\Delta$  مقارياً للخط C والمطلوب:



(1) نظم جدولاً بتغيرات التابع f

(2) جد معادلة المقارب المائل  $\Delta$

(3) جد  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x)-2}{x+2}$

(4) حل المتراجحة  $f'(x) \leq 0$  واستنتج مجموعة تعريف التابع  $g(x) = \sqrt{f(x)}$

السؤال الثاني:

في معلم متجانس للفراغ  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{k})$  لتكن النقاط  $A(2,1,-2)$  ,  $B(-1,2,1)$

والمستوي  $P: 3x-y-3z-8=0$

(1) أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P .

(2) عيّن إحداثيات المسقط القائم لـ A على P .

السؤال الثالث:

اكتب العددين العقديين بالصيغة الأسية :

$$1) Z_1 = (1 - \sqrt{2}) \left( \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \right)$$

$$2) Z_2 = 1 + e^{i2\theta} \quad , \quad \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

السؤال الرابع:

ليكن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  أوجد  $|f(x)+1| \leq 2 + \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$

ثانياً: حل التمارين التالية (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول:

ليكن f تابعاً معرفاً اشتقاقياً على  $\mathbb{R}$  و يحقق  $f(0)=0$  ،  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

وليكن h تابعاً معرفاً على المجال  $I = ]0, +\infty[$  وفق  $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

(1) أثبت أن h اشتقاقي على I و أوجد  $h'(x)$

(2) أثبت أن  $h(x) = 2f(1)$  و استنتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2f(1)$  و فسر النتيجة هندسياً

التمرين الثاني:

لتكن  $(U_n)_{n \geq 0}$  متتالية معرفة بحد البدء  $U_0 = 1$  و العلاقة التدرجية  $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$  والمطلوب:

(1) أثبت أن المتتالية  $V_n = U_n - 3$  هندسية .

(2) عبر عن  $U_n$  بدلالة n و أوجد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(3) لتكن  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  أوجد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### التمرين الثالث :

في الفراغ المحدث بمعلم متجانس  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لتكن مجموعة من النقاط تحقق :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 7 = 0$$

(1) أثبت أن المجموعة السابقة هي كرة و عين مركزها و نصف قطرها r

(2) أثبت أن الكرة السابقة تمس المستوي P الذي معادلته :

$$P: x+y+z-1=0 \text{ و عين إحداثيات نقطة التماس}$$

### التمرين الرابع :

ليكن  $z, w$  عدنان عقديان غير معدومين يحققان :

$$|z - w| = |z + w| \text{ أثبت أن } \frac{z}{w} \text{ تخيلي بحت}$$

ثالثاً : حل التمرينين التاليين (لكل تمرين 100 درجة )

### التمرين الأول :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على  $\mathbb{R}^*$  وفق  $f(x) = ax - 1 + \frac{b}{x^2}$

(1) عين العددين الحقيقيين a, b لتكون  $f(1) = 2$  قيمة حدية

(2) بغرض  $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2}$  ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بذلك .

(3) أثبت أن المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته  $y = 2x - 1$  مقارب مائل لـ c وادرس وضع c مع  $\Delta$  و ارسـم c و  $\Delta$  في معلم واحد .

(4) ناقش بيانياً بحسب قيم m حلول المعادلة  $2x^3 - (1+m)x^2 + 1 = 0$

### التمرين الثاني :

تأمل معلماً متجانساً  $(o, O\vec{A}, O\vec{B}, O\vec{C})$  وليكن G مركز ثقل المثلث ABC

(1) احسب إحداثيات G و تحقق أن (OG) يعامد المستوي (ABC) .

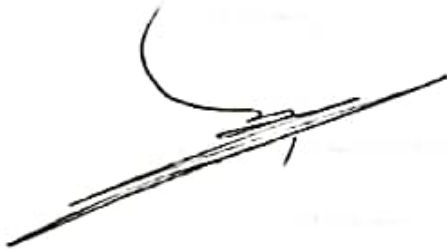
(2) لتكن النقاط  $A(2,0,0)$   $B(0,2,0)$   $C(0,0,3)$  اكتب معادلة المستوي  $(A'B'C')$

(3) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AC) و اوجد إحداثيات K النقطة المشتركة بين (AC) و المستوي  $(A'B'C')$

(4) عين المستقيم d الفصل المشترك للمستويين  $(ABC), (A'B'C')$

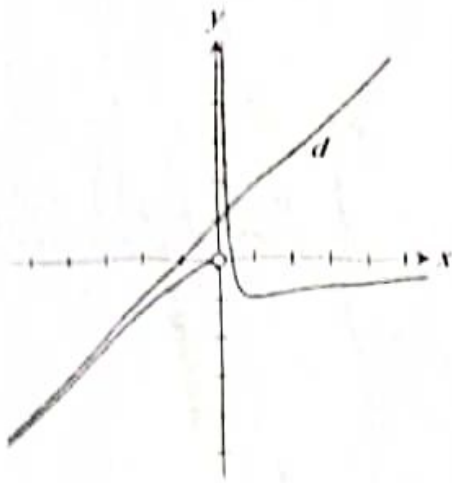
(5) احسب حجم رباعي الوجوه الذي رأسه المبدأ o و قاعدته ABC

انتهت الأسئلة



اجب عن الأسئلة الأربعة الآتية :

السؤال الأول : نجد جانبا الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  والمستقيم  $d$  مقارب مائل عند  $-\infty$  والمطلوب :



(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .

(3) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

(4) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

السؤال الثاني : في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  بفرض النقطتان  $A(-1, -2, -3)$  و  $B(0, 0, 1)$  والمستوي  $P$  الذي معادلته  $P: 2x + 4y + 8z + 13 = 0$  والمطلوب :

(1) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(AB)$  .

(2) أثبت أن المستقيم  $(AB)$  يعامد المستوي  $P$  ثم استنتج إحداثيات  $C$  المسقط القائم للنقطة  $A$  على المستوي  $P$  .

السؤال الثالث : ليكن  $f$  التابع المعرفة على  $]-\infty, 1[$  وفق  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$  والمطلوب :

(1) ادرس قابلية  $f$  للاشتقاق عند الصفر من اليسار .

(2) اكتب معادلة نصف المماس من اليسار عند الصفر .

السؤال الرابع : في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  بفرض النقطتان  $A(2, 1, 1)$  و  $B(0, 1, 3)$  والمطلوب :

(1) اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$  .

(2) اكتب معادلة الكرة التي قطرها  $[AB]$  .

حل التمارين الأربعة الآتية :

التمرين الأول : لتكن  $(u_n)_{n \geq 0}$  المتتالية المعرفة وفق  $u_0 = \frac{1}{2}$  و  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$  ولتكن  $(w_n)_{n \geq 0}$  المتتالية المعرفة وفق  $w_n = \frac{1}{u_n} + 1$  والمطلوب :

(1) أثبت أن  $0 < u_{n+1} < u_n$  أيًا كانت  $n$  .

(2) أثبت أن المتتالية  $w_n$  حسابية وعين أساسها وحدها الأول ثم اكتب عبارة  $w_n$  بدلالة  $n$  .

(3) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

(4) احسب المجموع  $S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_8$

الصفحة الثانية

التمرين الثاني : المستقيمان  $L$  و  $L'$  معرفان وسيطيا وفق  $L: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t + 1 \\ z = -6t + 2 \end{cases} t \in \mathbb{R}$  و  $L': \begin{cases} x = -2k + 1 \\ y = k + 1 \\ z = 5k \end{cases} k \in \mathbb{R}$  والمطلوب :

- (1) أثبت أن المستقيمان متقاطعان في نقطة  $I$  يطلب تعيين إحداثياتها .
- (2) اكتب معادلة المستوي المحدد بالمستقيمان  $L$  و  $L'$  .

التمرين الثالث : ليكن  $f$  التابع المعرف على  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  وفق  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x-1}$  والمطلوب :

- (1) عين  $a$  و  $b$  إذا علمت أن للتابع قيمة حدية محليا عند  $x = -1$  قيمتها  $-1$  .
- (2) من أجل  $a = 2$  و  $b = 3$  أثبت أن المستقيم  $y = 2x + 5$  مقارب مائل في جوار  $+\infty$  و  $-\infty$  .

التمرين الرابع :  $ABCD$  رباعي وجوه ولنعرف النقطتان  $E$  و  $F$  بالعلاقان  $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AD}$  و  $\overline{CF} = \frac{2}{3}\overline{CB}$  ولتكن منتصف  $AB$  و  $J$  منتصف  $CD$  و  $G$  منتصف  $EF$  والمطلوب : أثبت أن النقاط  $I$  و  $J$  و  $G$  على استقامة واحدة . حل المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى : ليكن  $f$  التابع المعرف على  $]0, +\infty[$  وفق  $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$  والمطلوب :

- (1) احسب نهاية  $f$  عند  $0$  و  $+\infty$  واستنتج معادلة المقارب الشاقولي لخطه البياني .
- (2) اكتب معادلة مماس الخط عند  $a = 4$  .
- (3) باستخدام عبارة التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية للعند  $f(4.1)$  .
- (4) ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولا يها دل على القيمة الحدية محليا للتابع  $f$  .
- (5) ليكن  $g(x)$  التابع المعرف على  $I = ]0, \pi[$  وفق  $g(x) = f(\sin x)$  أثبت أن  $g$  اشتقاقي على  $I$  واحسب  $g'(x)$  .

المسألة الثانية :

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$

نتأمل في المعلم المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطة  $A(1, 2, 0)$  والمستويات  $Q: x + y + z - 1 = 0$  والمطلوب :

$$R: x - z - 1 = 0$$

- (1) أثبت أن المستويان  $P$  و  $Q$  متقاطعان بفصل مشترك  $d$  اكتب تمثيلا وسيطيا له .
- (2) تحقق أن المستوي  $R$  يعامد  $d$  ويمر بالنقطة  $A$  .
- (3) أثبت أن المستويات  $P$  و  $Q$  و  $R$  تتقاطع في نقطة  $I$  يطلب تعيين إحداثياتها .
- (4) استنتج بعد النقطة  $A$  عن المستقيم  $d$  .

انتهت الأسئلة

اولا - اجب عن سوالين من لاسئلة الثلاث الآتية: (45 درجة بس 15)

السؤال الأول - ليكن  $c$  الحد البياني لتابع  $f$  معرف على  $R \setminus \{1\}$  جدول تغيراته هو الآتي :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$2$	$1$	$2$	$1$

1. ما نهاية التابع  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مستقيم مقارب لخطه البياني
2. أثبت أن للمعادلة  $f(x) = 0$  حلا وحيدا
3. استنتج حلول امتزاحة  $f(x) \leq 1$

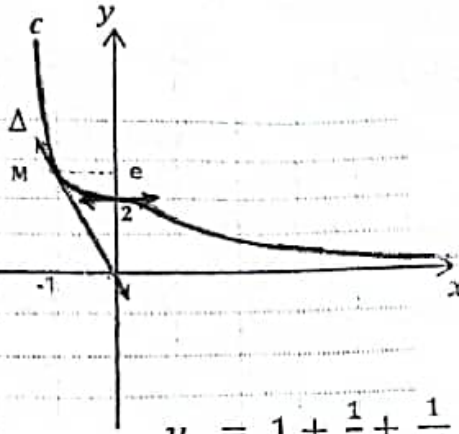
السؤال الثاني - الخط البياني المجاور هو خط بياني  $C$  لتابع  $f$

معرف واشتقاقي على  $IR$  و  $\Delta$  هو مماس  $C$  عند  $M$

1. أوجد :  $f'(-1)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$

واكتب معادلة المماس  $\Delta$

2. للخط  $C$  مماس أفقي ومقارب أفقي أوجد معادلة كل منهما



السؤال الثالث - لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق:  $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$

1. ادرس اطراف المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$

2. احسب المجموع السابق واكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  بصيغة مكافئة

ثانياً - اجب عن السؤالين (45 درجة لكل سؤال):

السؤال الأول - في معلم سحائس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا النقطتان :  $A(1, 3, -1)$ ,  $B(2, -1, 4)$  والمطلوب:

1. أوجد نقطة  $M$  من سحور الترتيب بحيث تكون متساوية البعد عن النقطتين  $A, B$

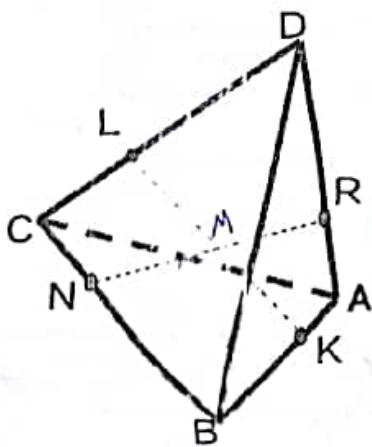
2. أوجد معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$ .

السؤال الثاني - ABCD زبعي وجوه وبفرض  $M$  مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(A, 2), (B, 1), (C, 2), (D, 1)$  وبفرض نقاط تحقق:

$\vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{CB}$ ,  $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ ,  $\vec{DR} = \frac{2}{3}\vec{DA}$ ,  $\vec{CL} = \frac{1}{3}\vec{CD}$

أثبت أن المستقيمين  $(KL)$ ,  $(RN)$  متقاطعان في  $M$ .



ثالثاً \_ حل التمارين الثلاثة الآتية: (80 للأول - 70 للثاني - 70 للثالث)

التمرين الأول: ليكن التابع  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  وفق  $f(x) = \frac{5x-4}{x}$

1. ادرس اطراد التابع  $f$  على مجموعة تعريفه

2. نعرف المتتالية  $(u)_{n \geq 0}$  وفق:  $u_{n+1} = f(u_n)$  ,  $u_0 = \frac{3}{2}$

a. أثبت بالتدرج صحة العلاقة:  $1 \leq u_n \leq 4$  وذلك أيما كان العدد الطبيعي  $n$

b. أثبت أن:  $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n-4)}{u_n}$  ثم استنتج جهة اطراد المتتالية  $(u)_{n \geq 0}$

c. هل المتتالية  $(u)_{n \geq 0}$  متقاربة؟

التمرين الثاني: تتأمل النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي تمثلها الأعداد العقدية

$a = -1$  و  $b = 2 + i\sqrt{3}$  و  $c = 2 - i\sqrt{3}$  و  $d = 3$  بالترتيب و المطلوب:

① ارسم النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  ثم احسب  $AB$  و  $BC$  و  $AC$  و استنتج طبيعة المثلث  $ABC$

② عيّن  $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$  و استنتج طبيعة المثلث  $DAC$

③ أثبت أن  $D$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, -1)$  و  $(B, 2)$  و  $(C, 2)$

التمرين الثالث: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  وفق:  $f(x) = \frac{x-4}{|x-1|+1}$

1. ادرس قابلية الاشتقاق للتابع  $f$  عند  $x=1$  من اليمين

2. اكتب معادلة لنصف المماس لـ  $C$  من اليمين عند النقطة  $A(1, -3)$

ثالثاً \_ حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى: في مستوي منسوب إلى معلم متجانس  $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}; O)$  لتكن النقاط:  $A(-1, 0, 3)$  ,  $B(3, 0, 0)$  ,  $C(7, 1, 3)$  ,  $D(7, 2, 0)$  والمطلوب:

1. أثبت ان النقاط  $A, B, C$  تعين مستويًا  $P$  وتحقق أن:  $P: 3x - 24y + 4z - 9 = 0$

2. يوجد معادلة ديكارتيّة للمستوي  $Q$  المار بالنقطتين  $A, B$  موازياً للمستقيم  $(CD)$

3. بفرض:  $Q: 3x + 12y + 4z - 9 = 0$  أوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين  $P, Q$

4. بين فيما إذا كانت الكرة  $S$  التي معادلتها:  $x^2 + y^2 - z^2 - 5x - 4y - 6z + 20 = 0$  تمس المستوي  $Q$  , أوجد إحداثيات نقطة التماس .

المسألة الثانية: ليكن  $c$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  وفق:  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{4}{2x}$

1. ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط  $C$  من مقاربات موازية للمحورين لإحداثيين. وعين قيمته الحدية مبيناً نوعها. 2. أثبت أن المسقط  $d$  الذي معادلته  $y = \frac{1}{2}x$  متطابق مائلاً وادرك وضعه النسبي

3/13 الفلاسيف للتابع مع المقارب



أولاً - اجب عن السؤالين الآتيين : (40 درجة)

السؤال الأول : ليكن  $d$  عدداً من المجال  $\left| \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right|$  اعط الشكل الأسي للعدد العقدي  $z = 1 + e^{2id}$

السؤال الثاني : ABCDEFGH مكعب ، أثبت أن النقطة  $K$  المعرفة بالعلاقة  $2AK = \vec{CB} + \vec{CA} = 3AG$  تقع في المستوى (BCG)

ثانياً - حل التمارين الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : لتكن النقطتان  $A$  و  $B$  اللتان يمثلهما العددان العقديان  $Z_A = -\sqrt{3} + i$  و  $Z_B = -2i$

(1) اكتب  $Z_A$  بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي  $Z_C$  الممثل للنقطة  $C$  التي تجعل المبدأ مركز ثقل للمثلث  $ABC$

(2) أثبت أن  $Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B - Z_A)$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$

التمرين الثاني : تأمل المستقيمين :  $d \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases} ; t \in R$  ،  $d' \begin{cases} x = -9t + 4 \\ y = -12t + 4 \\ z = 3t \end{cases} ; t \in R$  ان  $d, d'$  منطبقان .

الثالثاً - حل المسألة الآتية : (100 درجة)

تأمل في معلم  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطتين  $A(1, -1, 2)$  ،  $B(2, 0, 4)$  والمستوي  $P$  الذي معادلته  $z - 4 = 0$  والمطلوب :

جد معادلة المستوي  $Q$  العمودي على المستوي  $P$  ويمر بالنقطتين  $A, B$

جد التمثيل الوسيط للمستقيم  $d$  المار من النقطة  $A$  ويعامد المستوي  $P$

عين إحداثيات  $A'$  المسقط القائم للنقطة  $A$  على المستوي  $P$

أعط معادلة المجموعة  $E$  المكونة من النقاط  $M(x, y, z)$  التي تجعل  $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$  طبيعة المجموعة  $E$  ؟

(60 درجات)

رابعاً - اثبت ان  $\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$  ايا كان  $x > -1$

(8 درجات)

خامساً - التابع  $f$  معرف على  $]0, \infty[$   $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$   
ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولاً بها - ارسم خطه البياني  $C$

(60 درجات)

سادساً -  $f$  معرف على  $]0, \infty[$   $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$

أثبت ان المستقيم  $d: (y = x)$  مقارب مائل للخط  $C$  لـ  $x \rightarrow +\infty$  وادرس المقارب النسبي للخط

(10)

سابعاً -  $f$  معرف على  $R: f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان من  $R$

عز  $a$  و  $b$  ليقتبل خطه البياني  $C$  مقارب افقي في النقطة  $A(1,2)$  منه .

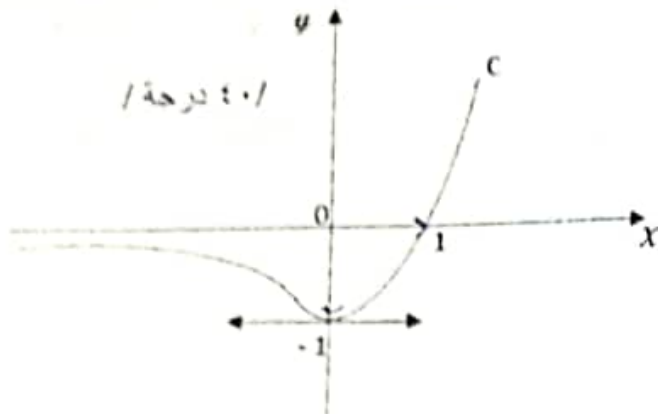
(60 درجات)

ثامناً - ما نهاية التابع  $f$  عند  $a:$

$$a = \frac{\pi}{4} : f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$a = +\infty \text{ و } a = 0 : g(x) = \frac{\sin x}{-x - x^2}$$

-انتهت الأسئلة -



السؤال الأول : C خط بياني للتابع f المعرفة على R

1- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- احسب  $f(0)$  و  $f'(0)$

3- جد حلول المتراجحة  $f''(0) \geq 0$

السؤال الثاني :  $(U_n)_{n \geq 0}$  معرف وفق :

$$U_{n+1} = \sqrt{12 + U_n} \quad U_0 = 1$$

1- أثبت  $0 \leq U_n \leq 4$  أيًا كان العدد الطبيعي n

2- أثبت أن المتتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$  متزايدة

40/ درجة /

السؤال الثالث :  $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  :  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

1- احسب  $f''(x)$

2- استنتج مشتق التابع  $g(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$

3- اكتب معادلة المماس للخط  $C_f$  عند نقطة فاصلتها  $x = 0$

30/ درجة /

السؤال الرابع : لتكن النقطة  $A(1, -1, 2)$  والمستوي  $P: x - y + 2z + 3 = 0$

اكتب معادلة مستقيم d المار من A و العمودي على المستوي p ثم اكتب معادلة كرة S مركزها A وتمس المستوي P

40/ درجة /

السؤال الخامس :  $M(x, y, z)$  ,  $B(-1, 1, 2)$  ,  $A(1, 2, 0)$

1- اكتب معادلة p المكونة من النقاط M التي تحقق  $AM = BM$

2- ما طبيعة المجموعة p

50/ درجة /

السؤال السادس : لتكن النقاط :

$$A(0, 1, 1), \quad B(1, 2, -1), \quad C(-1, 1, -2)$$

1- أثبت A, B, C ليست على استقامة واحدة

2- اكتب معادلة المستوي (ABC)

3- جد احداثيات M التي تحقق  $\vec{AM} = \vec{AB} - 2\vec{BC}$

4- اكتب معادلة كرة S مركزها A و تمر من النقطة  $N(1, 3, -1)$

----- انتهت الأسئلة -----

مدرسة الشهيد سيف الدين عازار

امتحان الفصل الأول 2023/2022

الاسم:

المدة:

الثالث الثانوي العلمي

المادة: الرياضيات

أولاً: أجب عن السؤالين الآتيين: (30 درجة لكل سؤال)  
السؤال الأول: لتكن  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية معرفة:  $u_{n+1} = 2u_n - 1$  حيث  $u_0 = -2$ ، ولتكن  $(v_n)_{n \geq 0}$  متتالية:  $v_n = u_n - 1$ . أثبت أن المتتالية  $v_n$  هندسية واحسب أساسها و عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم احسب المجموع:  
 $S_n = v_2 + v_3 + \dots + v_n$  بدلالة  $n$  واحسب نهاية  $S_n$ .

السؤال الثاني: لدينا المستقيمان اللذان تمثيلاهما الوسيطيان:  $d: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = -1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  و  $d': \begin{cases} x = 2s + 3 \\ y = 3s - 2 \\ z = -s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

هل المستقيمان  $d$  و  $d'$  يقعان في مستوٍ واحد.

ثانياً: اجب عن التمرينين الآتيين: (50 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  وفق العلاقة:  $f(x) = ax + \frac{b}{x^3}$  والمطلوب:

1. عين  $a$  و  $b$  إذا علمت أن  $f(1) = 4$  قيمة حدية.

2. اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 1.

3. استنتج اشتقاق التابع:  $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{b}{x\sqrt{x}}$

التمرين الثاني: نتأمل في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط:  $A(1,1,0)$ ,  $B(4,0,0)$ ,  $C(0,2,-1)$  والمستوي  $P$  الذي معادلته:  $x + y - 2z + 4 = 0$  والمطلوب:

1. اكتب معادلة المستوي  $Q$  الذي يمر من  $A$  و  $B$  ويعامد المستوي  $P$ .

2. احسب بعد النقطة  $C$  عن  $P$  و اكتب معادلة الكرة التي مركزها  $C$  و تماس المستوي  $P$ .

ثالثاً: حل المسألة الآتية: (80 درجة)

ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}$  والمطلوب:

1. أوجد نهايات التابع  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$  و استنتج المقارب الأفقي:

2. أثبت أن  $y = 2x$  مقارب لـ  $C$  في جوار  $+\infty$ .

3. ادرس تغيرات التابع  $f$  و نظم جدولاً له.

4. ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم  $C$ .

اجب عن الأسئلة الآتية:

1- حد نهاية كل من التواليع الآتية:  $\{f(x) = \sqrt{x^2 + 8} - x\}$  عند  $+\infty$  ،  $\{f(x) = 1 + \frac{\cos x}{x^2 + 1}\}$  عند  $+\infty$

عند  $+\infty$  ،  $|2f(x) - 3| \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

2- ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على  $R \setminus \{1\}$  وفق  $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x-1}$

أ- اثبت أن المستقيم  $\Delta: y = x + 1$  مقارب للخط C ، بيّن انتمس الوضع النسبي له مع  $\Delta$

3- ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على R وفق  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}{x-1} & : x \neq 1 \\ m + \frac{1}{\sqrt{2}} & : x = 1 \end{cases}$

أ- حد نهاية عند (1)  
 ب- ما قيمة m التي تجعل f مستمر عند (1)

1- لتكن المتتالية:  $(u_n)_{n \geq 0}$  ،  $u_0 = 3$  ،  $u_{n+1} = \sqrt{7u_n - 10}$

أ- برهن بالتفريغ:  $2 \leq u_n \leq 5$  ،  $E(n)$ :  
 ب- برهن أنها متزايدة.

2- برهن بالتفريغ أن:  $E(n): n \leq 2^n$  ، استنتج أن للمتتالية:  $u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n}$  حدًا واحدًا يمثلب تعينه.

حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى:  $Z_A = 2 + i$  ،  $Z_B = 3 + 4i$  ،  $Z_C = -1 + 2i$  ،  $Z_D = 5$

1- احسب  $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$  ثم استنتج طبيعة المثلث ABC ، برهن أن  $\left(\frac{Z_{AB}}{Z_{CB}}\right)^{60}$  حقيقي.

2- برهن أن النقاط B, C, D تنتمي لدائرة مركزها A و احسب نصف قطرها.

3- برهن أن  $Z_A$  أحد الجذور التربيعية لعدد  $Z_B$  ثم استنتج الجذر الأخر.

المسألة الثانية: 1- حل في C  $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$  ، 2- عن مجموعة النقاط:  $\frac{|z-1|}{|z+1-i|} = 1$  و حد المعادلة التبيكارونية

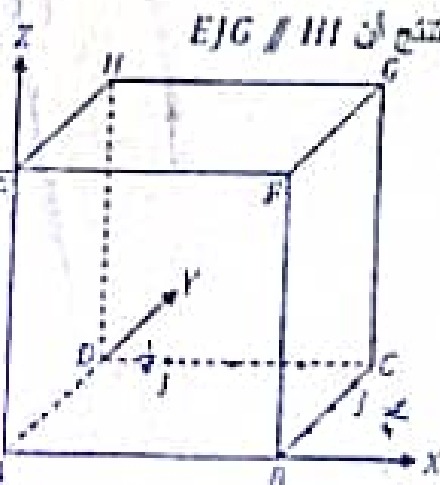
المسألة الثالثة: مكعب طول حرفه 4  $(A, \frac{1}{4}\overline{AB}, \frac{1}{4}\overline{AD}, \frac{1}{4}\overline{AE}) \cdot \overline{DI} = \frac{1}{4}\overline{DC} \cdot \overline{BI} = \frac{3}{4}\overline{BC}$

1- حد إحداثيات النقاط: H, G, J, I, E ، برهن أن  $\overline{HI} = a\overline{EJ} + b\overline{EG}$  ثم استنتج أن  $EJG \parallel HI$

2- اكتب معادلة كرة قطرها (HI) ، برهن أن IJG مثلث قائم و احسب مساحته.

3- عن موقع M التي تحقق  $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AD} + \overline{AE}$  التي تحقق

4- اكتب معادلة أسطوانة دورانية قائمة محورها CG و مولدها AE





اجب عن الاسئلة الأربعة الآتية : 40 درجة لكل سؤال

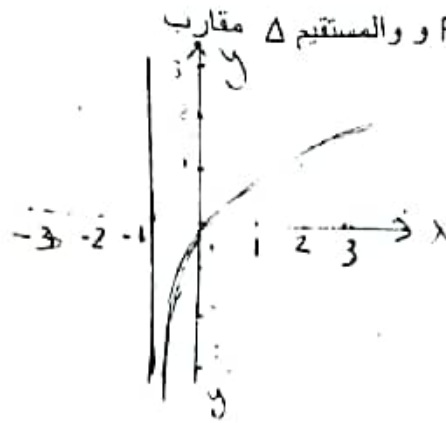
السؤال الأول : تتأمل جانبا الخط البياني C للتابع f المعرف على R والمستقيم Δ مقارب شاقولي والمطلوب :

$$1. \text{جد } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

2. اكتب معادلة المقارب الشاقولي .

$$3. \text{جد } f(0) \text{ و صورة المجال } ]-1, \infty[$$

$$4. \text{جد طول المتراجحة } f(x) > 0$$



السؤال الثاني :

تتأمل النقطتين  $A(2, 1, -2)$  و  $B(-1, 2, 1)$  والمستوي

$$P : 2X - Y + Z - 2 = 0$$

احداثياتها .

السؤال الثالث :

$$(U_n)_{n \geq 0} \text{ متتالية معرفة وفق } U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}, U_0 = 1 \text{ عند كل } n \geq 0$$

$$1. \text{ اثبت أن } 0 \leq U_n \leq 2 \text{ ايا كان العدد الطبيعي } n$$

$$2. \text{ اثبت أن المتتالية } (U_n)_{n \geq 0} \text{ متزايدة تماما .}$$

السؤال الرابع :

ABCD رباعي وجوه ، G مركز ثقل المثلث DBC جد مجموعة نقط الفراغ التي تحقق

$$\|\overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}\| = \|\overline{3MA} - \overline{MB} - \overline{MC} - \overline{MD}\|$$

ثانياً ; حل التمارين الثلاثة الآتية ; 80 درجة لكل سؤال

السؤال الخامس : التمرين الأول :

ليكن C الخط البياني للتابع f للمعرف بالعلاقة f المعرف بالعلاقة

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$$

جد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أن الخواص الآتية محققة :

- المستقيم الشاقولي الذي معادلته  $X = 3$  مقارب للخط C .
- المستقيم المائل الذي معادلته  $y = 2X - 5$  مقارب للخط C عند  $+\infty$  وعند  $-\infty$  .
- تنتمي النقطة  $A(1, 2)$  الى الخط C .

التمرين الثاني :

في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لدينا النقطة  $A(2, 1, 2)$  والمستويان p و Q :

$$Q : 3X + Y + Z = 0$$

$$p : X - y - 2Z - 1 = 0$$

١. أثبت أن المستويين  $p$  و  $Q$  متعامدان .
٢. احسب بعد  $A$  عن كل من المستويين  $p$  و  $Q$  .
- استنتج بُعد  $A$  عن الفصل المشترك للمستويين  $p$  و  $Q$  .

التمرين الثالث : ليكن التابع  $f$  المعطى بالعلاقة :  $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$  والمطلوب :

١. احسب نهاية التابع  $F$  عند  $3^-$  وعند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني
٢. في جوار  $+\infty$  أعط عددا  $A$  يحقق الشرط: إذا كان  $x > A$  ، كان  $f(x)$  في المجال  $]0.95, 1.05[$
٣. استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$  .

السؤال السادس : حل المسألتين التاليتين ( 100 ) درجة لكل مسألة

المسألة الأولى :  
في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  هو الخط البياني للتابع  $f$  المعروف على  $R$  وفق :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8}$$

١. ادرس تغيرات التابع  $f$  ونظم جدولا بها.
٢. تحقق أن المستقيم  $d$  الذي معادلته  $y = 2x$  يقارب للخط  $C$  .
٣. أوجد معادلة المماس للخط  $C$  في نقطة فاصلتها  $x = 1$
٤. ارسم مقاربات  $C$  ثم ارسم  $C$  .

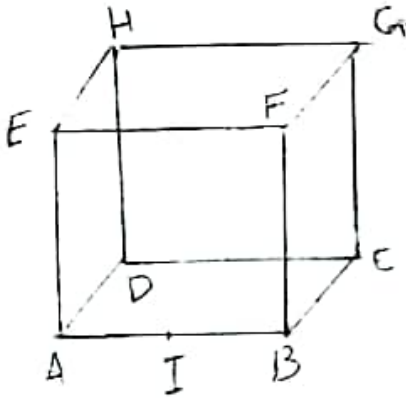
المسألة الثانية : متوازي مستطيلات  $ABCDEFGH$

فيه  $AB = 2$  و  $BC = GC = 1$  لتكن النقطة  $I$  منتصف  $[AB]$

لتفرض المعلم المتجانس  $(A, \frac{1}{2}\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$

عين إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات

١. عين إحداثيات  $Q$  مركز ثقل المثلث  $EGB$  .
٢. اكتب معادلة الكرة التي مركزها  $A(0,0,0)$  ونصف قطرها  $R=2$
٣. اكتب معادلة المستوي  $(IFH)$  .
٤. اكتب تمثيلات وسيطية للمستقيم  $(AG)$  .
٥. بفرض معادلة المستوي  $(IFH)$   $x + 2y - z - 1 = 0$  ، احسب بعد  $G$  عن المستوي  $(IFH)$  .



انتهت الاسئلة

مادة الرياضيات P2 نماذج امتحانات نصفية في

لمختلف المحافظات

للعام الدراسي 2022\_2023

أ. أحمد طريقي

رياضيات بكالوريا

حلب - سوريا

By: Shahed\_Sahreg

القناة على تليغرام: أحمد طريقي رياضيات

<https://t.me/Ahmadtarakji>