الأوراق الذهبية

بحث الاشتقاق

الثالث الثانوي

$$\sum f(a+b)=c$$

$$A=\frac{ab+c}{d}$$

MATH PLUS+

إعداد المدرسين:

رام عبدو:
0931647631

يوسف حرستاني:
0993177182

محمد البتور:
0932325694

تحتوي هذه الأوراق على
شرح كافي لجميع افكار البحث
وحل مع شرح طرق الحل لأهم التمارين
الإمتحانية و النموذجية

الاشتقاق

ادرس قابلية الاشتقاق لكل من التوابع الآتية عند الصفر:

$\boxed{1}$ $f(x) = x^2\sqrt{x} \quad ; x \in [0,+\infty[$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = f'(0)$$

يوجد نهاية حقيقية فالتابع قابل للاشتقاق عند الصفر.

$\boxed{2}$ $f(x) = x.|x| \quad ; x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x.|x|}{x} = |x|$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = f'(0)$$

يوجد نهاية حقيقية فالتابع قابل للاشتقاق عند الصفر.

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2+1} \quad ; x \in \mathbb{Q}$

١] ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر.

٢] استنتج معادلة نصف المماس عند الصفر من اليمين.

الحل:

$\boxed{1}$ $$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}}{x} = \frac{x^2+|x|}{x^2+x}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = 1 = f'(0^+)$$

فالتابع اشتقاقي من اليمين.

$$g(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+x} = \frac{x(x-1)}{x(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) = -1 = f'(0^-)$$

فالتابع اشتقاقي من اليسار.

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) \neq \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x)$$

ومنه:

التابع غير قابل للاشتقاق عند الصفر.

$\boxed{2}$ معادلة نصف المماس:

نقطة التماس: $(0,0)$

ميل المماس: $m = 1$

نعوض:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 0 = 1(x - 0)$$

معادلة المماس.

$\boxed{4}$ $$f(x) = \begin{cases} x^2.\cos\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2.\cos\frac{1}{x}}{x}$$
$$= x.\cos\frac{1}{x} \quad ; \quad -1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$$

نضرب بـ x ونميز حالتين:

$0 < x$	$0 > x$
$-x \le x.\cos\frac{1}{x} \le x$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}(x) = 0$ $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}(-x) = 0$ $\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = 0$	$\boldsymbol{-x \ge x.\cos\frac{1}{x} \ge x}$ $\boldsymbol{\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}}(x) = 0}$ $\boldsymbol{\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}}(-x) = 0}$ $\boldsymbol{\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) = 0}$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) = 0$$

فالتابع اشتقاقي عند الصفر.

رام عبدو 0931647631 يوسف حرستاني 0993177182 محمد البنور 0932325694

مماس الخط البياني

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

١] اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

٢] هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته: $y = -4x$.

٣] هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته: $3x - 2y = 0$.

الحل:

١] المماس:

نقطة التماس فاصلتها $x = 1$:

$$y = f(1) = \frac{1 - 3 + 1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

ميل المماس: $m = f'(1)$:

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1) - 1(x^2 - 3x + 1)}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2}$$

$$m = f'(1) = \frac{1 + 2 - 4}{(1 + 1)^2} = -\frac{1}{4}$$

معادلة المماس:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ونعوض.

٢] بما أن المماس:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

يوازي المستقيم الذي معادلته:

$$y = -4x$$

فلهما نفس ميل: $m = -4$

$$f'(x) = m$$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x + 1)^2} = -\frac{4}{1}$$

$$-4(x^2 + 2x + 1) = x^2 + 2x - 4$$

$$5x^2 + 10x = 0 \Longrightarrow x(5x + 10) = 0$$

إما: $x = -2$

أو: $x = 0$

ومنه:

C يقبل مماسين يوازيان المستقيم: $y = -4x$.

٣] بما أن المماس:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

يوازي المستقيم الذي معادلته:

$$3x - 2y = 0$$

فلهما نفس ميل: $m = \frac{3}{2}$

$$f'(x) = m$$

$$\frac{x^2 + 4x - 4}{(x + 1)^2} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + 2x + 11 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(11) = -40$$

فالمعادلة مستحيلة الحل [لأن $\Delta < 0$].

ومنه:

C لا يقبل مماس يوازي المستقيم:

$$3x - 2y = 0$$

مثال:

ليكن التابع:

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$$

عين a, b إذا علمت أن المستقيم Δ الذي معادلته:

$$y = x$$

مماس لـ C في النقطة $A(2,1)$.

الحل:

المماس:

نقطة التماس: $A(2,1)$.

ميل المماس: $m_0 = 1$

نقطة التماس تقع على C وتحقق معادلته:

$$f(2) = 1$$

$$\frac{2a+b}{4+1} = 1 \Rightarrow 2a+b = 5 \ \dots(1)$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(2) = m_0 \Rightarrow f'(2) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-4a - 4b + a}{4+1} = 1$$

$$\Rightarrow 3a + 4b = -25 \dots(2)$$

بالحل المشترك بين $(1)\&(2)$:

$$a = 9\,, b = -13$$

ومنه:

$$f(x) = \frac{9x-13}{x^2+1}$$

مثال:

ليكن التابع:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1 \ ; \quad x \in \mathbb{R}$$

عين a, b **ليقبل** C **مماس أفقي في النقطة** $A(1,2)$.

الحل:

المماس:

نقطة التماس: $A(1,2)$.

ميل المماس: $m_0 = 0$ [لأنه أفقي].

نقطة التماس تقع على C وتحقق معادلته:

$$f(1) = 2$$

$$a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1 \ \dots(1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f'(1) = m_0 \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$\Rightarrow 3a + 2b = 0 \dots(2)$$

بالحل المشترك بين $(1)\&(2)$:

$$a = -2\,, b = 3$$

ومنه:

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$$

النقطة الحدية

يكون المشتق يساوي الصفر عند النقطة الحدية.

ملاحظة:

تقع على الخط البياني C وتحقق معادلته وفاصلتها تعدم المشتق الأول.

مثال:

ليكن التابع:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1}$$

عين a, b **إذا علمت أن للتابع قيمة حدية قيمتها** 0 **عند:** $x = -1$.

الحل:

النقطة الحدية: $(-1,0)$.

النقطة الحدية تقع على C وتحقق معادلته:

$$f(-1) = 0$$

$$\frac{a - b + 1}{-1-1} = 0 \Rightarrow a - b + 1 = 0 \dots(1)$$

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x-1) - (ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{ax^2 - 2ax - b - 1}{(x-1)^2}$$

النقطة الحادية فاصلتها تعدم المشتق الأول ومنه:

$$f'(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+2a-b-1}{(-1-1)^2}=0$$

$$\Rightarrow 3a-b-1=0 \dots (2)$$

بالحل المشترك بين $(1)\&(2)$:

$$a=1\,,b=2$$

ومنه:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

مثال:

ليكن التابع:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

اثبت بالاستقراء الرياضي صحة:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

الحل:

١] برهن صحة العلاقة من أجل $n=1$:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1!}{(1-x)^{1+1}}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=f^{(1)}(x)$$

٢] نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

٣] نبرهن صحة العلاقة من أجل n + 1:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

$$l_1=f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'$$

$$=\left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right]'$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{0+n!\,(n+1)(1-x)^n}{[(1-x)^{n+1}]^2}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{-n}(1-x)^{2n+2}}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}=l_2$$

فالعلاقة محققة من أجل n + 1.

إيجاد نهاية حسب تعريف العدد المشتق

أوجد نهاية كل من التوابع التالية حسب تعريف العدد المشتق

$$\boxed{1}\ f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\quad ;\ x\to 0$$

نفرض:

$$g(x)=\sqrt{x+4}\Rightarrow g(0)=2$$

والتابع g اشتقاقي عند الصفر:

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\Rightarrow g'(0)=\frac{1}{4}$$

نطبق تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{2}\ f(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\quad ;\ x\to\frac{\pi}{2}$$

نفرض:

$$g(x)=\cos x\Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

والتابع g اشتقاقي عند الـ $\frac{\pi}{2}$:

$$g'(x)=-\sin x\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

نطبق تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = g'(x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x-\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$\boxed{3}\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\quad ;\ x\to 1$$

نفرض:

$$g(x)=\sqrt{x^2+1} \Longrightarrow g(1)=\sqrt{2}$$

والتابع g اشتقاقي عند ال 1:

$$g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Longrightarrow g'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

نطبق تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

دراسة تغيرات

ليكن التابع:

$$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

١] اثبت أن: $\Delta:\ y=2x-1$

مقارب لـ C في جوار $+\infty$.

٢] ادرس تغيرات التابع ونظم جدول به.

٣] اثبت أن $I(-1,-3)$ هو مركز تناظر لـ C.

٤] ارسم المقاربات ثم ارسم C.

الحل:

١] ليكون Δ مقارب لـ C يجب أن يتحقق أن:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{2x^2+x+7}{x+1}-(2x-1)$$

$$=\frac{2x^2+x+7-(2x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$=\frac{2x^2+x+7-2x^2-2x+x+1}{x+1}$$

$$=\frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{x+1}\right)=0$$

محققة.

٢] التابع معرف ومستمر واشتقاقي على:

$$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\frac{8}{0^-}=-\infty \Longrightarrow \boxed{x=-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\frac{8}{0^+}=+\infty \Longrightarrow \boxed{x=-1}$$

$$f'(x)=\frac{(4x+1)(x+1)-(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+4x+x+1-2x^2-x-7}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}=\frac{2(x^2+2x-3)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

ومنه:

إما: $x=-3\in D_f$

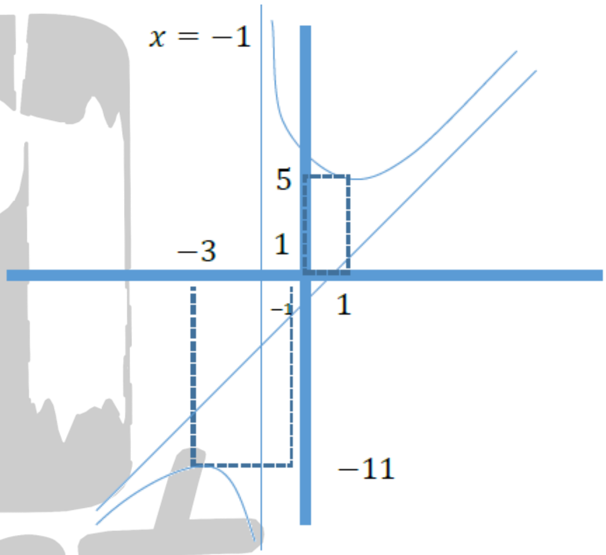
أو: $x=1\in D_f$

$$f(-3)=\frac{18-3+7}{-3+1}=-11$$
$$f(1)=\frac{2+1+7}{1+1}=5$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

$\Delta:\quad y=2x-1$

x	0	1
y	-1	1
النقطة	$(0,-1)$	$(1,1)$



مثال:

ليكن التابع:

$$f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$$

١] تحقق أن التابع معرف على $[0,2]$.

٢] ادرس قابلية الاشتقاق عند $0,2$.

٣] أوجد معادلة المماس في النقطتين التين فاصلتهما صفر و 2.

٤] ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً به.

٥] ارسم الخط البياني C.

الحل:

١] التابع معرف عندما:

$$2x-x^2\ge 0$$
$$x(2-x)\ge 0$$

ومنه:

إما: $x=0$ أو: $x=2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2x-x$		$-$	0	$+$	0		
متراجحة	××××××		|	محققة	|	××××××	

٢] دراسة قابلية الاشتقاق عند 2:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x-2}$$
$$g(x)=\frac{x(2x-x^2)}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}}$$
$$=\frac{x^2(2-x)}{(x-2)\sqrt{2x+x^2}}=-\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$
$$\lim_{x\to 2}g(x)=-\frac{4}{0}=\infty=f'(2)$$

لا يوجد نهاية حقيقية فالتابع ليس اشتقاقي عند الـ2.

دراسة قابلية الاشتقاق عند الصفر:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x}$$
$$\Rightarrow g(x)=\sqrt{2x-x^2}$$
$$\lim_{x\to 0}g(x)=0=f'(0)$$

يوجد نهاية حقيقية فالتابع اشتقاقي عند الصفر.

٣] معادلة المماس:

نقطة التماس: $(2,0)$

معادلة المماس:

$$m=f'(2)=\infty\to T_1\ ;x=2$$

نقطة التماس: $(0,0)$

معادلة المماس:

$$m = f'(0) = 0 \rightarrow T_2 \;\; ; y = 0$$

٤] التابع معرف ومستمر على$[0,2]$ واشتقاقي

على $]0,2[$:

$$f(0) = 0 \;\; , f(2) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 3x = 0$$

$$x(-2x + 3) = 0$$

إما: $x = 0 \in D$ أو $x = \frac{3}{2} \in D$.

$$f(0) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

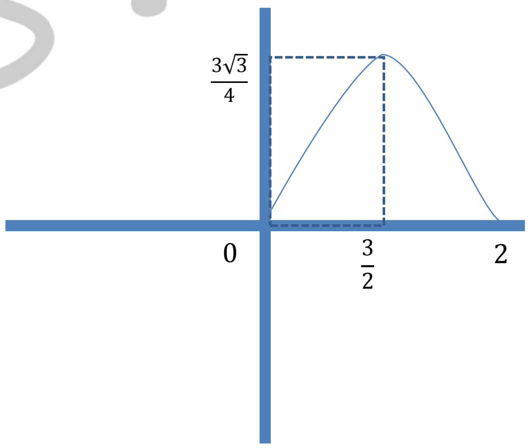
x	0		-3		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

للتابع قيمة حدية كبرى:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

للتابع قيمة حدية صغرى:

$$f(0) = 0, \;\; f(2) = 0$$



مثال:

ليكن التابع:

$$f(x) = x + \sqrt{x - 1} - 4$$

المعرف على: $[1, +\infty[$.

١] ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها.

٢] اثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

٣] ارسم الخط البياني C للتابع f.

الحل:

١] التابع معرف ومستمر على: $[1, +\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \qquad f(1) = -3$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x - 1}} > 0$$

واشتقاقي على: $]1, +\infty[$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

٢] المعادلة: $f(x) = 0$

التابع مستمر ومتزايد: $[1, +\infty[$.

$$f(1) = -3 < 0$$

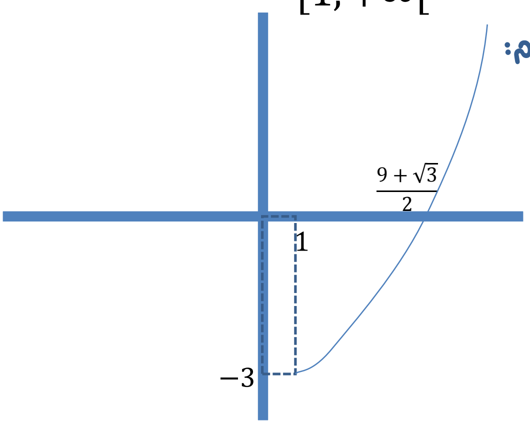
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$$

$$f(1) - \lim_{x \to +\infty} f(x) < 0$$

للمعادلة: $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال:

$$[1, +\infty[$$

٣] الرسم:



التابع الجذري

أوجد نهاية كل من التوابع الآتية:

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ $\quad x\to 0$

الحل:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{\left[\sqrt{x+1}-1\right]\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}=\frac{x+1-1}{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ $\quad x\to +\infty$

الحل:

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\dfrac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x\left[1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}{x\left[1+\frac{1}{x}\right]}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1+0}{1+0}=1$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ $\quad x\to +\infty$

الحل:

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=+\infty-\infty$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{\left[\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right]\left[\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right]}{\left[\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right]}$$

$$f(x)=\frac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=\frac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{-1}{+\infty+\infty}=0$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\sqrt{4x^2+2x}+2x$ $\quad x\to -\infty$

الحل:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty-\infty$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{\left[\sqrt{4x^2+2x}+2x\right]\left[\sqrt{4x^2+2x}-2x\right]}{\sqrt{4x^2+2x}-2x}$$

$$f(x)=\frac{4x^2+2x-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x}-2x}$$

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+2x}-2x}$$

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left[4+\frac{2}{x}\right]}-2x}$$

$$f(x)=\frac{2x}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}}-2x}$$

$$f(x)=\frac{2x}{x\left[-\sqrt{4+\frac{2}{x}}-2\right]}$$

$$f(x)=\frac{2}{-\sqrt{4+\frac{2}{x}}-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2}{-\sqrt{4+0}-2}=\frac{2}{-4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad x\to +\infty$, $x\to -1$

الحل:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\dfrac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x\left[1+\frac{1}{x}\right]}{\sqrt{x^2\left[1-\frac{1}{x^2}\right]}}=-\frac{\left[1+\frac{1}{x}\right]}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

بجوار ال $-\infty$ فإن: $|x|=-x$.

$$\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نضرب البسط والمقام:

$$f(x)=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{(x+1)(x-1)}=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\frac{0}{-2}=0$$

$\boxed{6}$ $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ $\qquad x\to 2$

الحل:

$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نضرب ونقسم بمرافق البسط:

$$f(x)=\frac{\left(2-\sqrt{3x-2}\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$f(x)=\frac{(4-3x+2)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

نضرب ونقسم بمرافق المقام:

$$f(x)=\frac{(-3x+6)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x+5-9)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$f(x)=\frac{-3(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$f(x)=\frac{-3\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{-3(3+3)}{2(2+2)}=\frac{-18}{8}$$

$$\lim_{x\to2} f(x)=-\frac{9}{4}$$

التابع المثلثي

ملاحظات:

- $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$
- $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$
- $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$
- $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

أوجد نهاية كل من التوابع التالية:

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\sin x}$ $\qquad x\to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=1(0-1)=-1$$

$\boxed{2}$ $f(x)=x\,.\sin\dfrac{1}{x}$ $\qquad x\to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.0$$ عدم تعيين

نفرض:

$$X=\frac{1}{x}\Longrightarrow x=\frac{1}{X}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$f(x)=\frac{1}{X}\sin X=\frac{\sin X}{X}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $\qquad x\to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{f(x)}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}.\sin x}{x}=\sqrt{x}\,.\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0(1)=0$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\qquad x\to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{f(x)}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\,.\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{0}{1}=0$$

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{x\,.\sin x}{1-\cos x}$ $\qquad x\to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{f(x)}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right).2\sin\frac{x}{2}\,.\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$f(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right).\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

ولكن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=2(1)(1)=2$$

$\boxed{6}$ $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ $\qquad x\to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{f(x)}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\frac{1}{2}(1)^2=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{\cos(3x)-\cos x}{x\,.\sin x}$ $\qquad x\to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{f(x)}=\frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{4\cos^3 x-3\cos x-\cos x}{x\,.\sin x}$$

$$f(x)=\frac{4\cos^3 x-4\cos x}{x\,.\sin x}$$

$$f(x)=\frac{4\cos x\,(\cos^2 x-1)}{x\,.\sin x}$$

$$f(x)=\frac{-4\cos x\sin^2 x}{x\,.\sin x}$$

$$f(x)=\frac{-4\cos x\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-4(1)(1)=-4$$

الإحاطة

$\boxed{1}$ $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad x\to+\infty$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\sin\infty}{\infty}$$

$$-1\le \sin x\le 1$$

نقسم على $0<x$

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة [١]

$\boxed{2}$ $f(x)=x+\cos x$ $\quad x\to+\infty$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty+\cos\infty$$

$$-1\le \cos x\le 1$$

نضيف x

$$x-1\le x+\cos x\le x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}(x+\cos x)=+\infty$$

حسب مبرهنة الإحاطة [2]

$\boxed{1}$ $f(x)=x\,.\sin\frac{1}{x}$ $\quad x\to 0;\, x\le 0$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0\sin\infty$$

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$$

نضرب بـ $0>x$

$$-x\ge\sin\frac{1}{x}\ge x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0}(x)=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\left(x\,.\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة [١]

ليكن التابع

$f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ $\quad [0,\infty[$

١- تحقق أن

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

٢- استنتج أن

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\le f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

٣- أحسب نهاية f عند $+\infty$

الحل:

$\boxed{1}$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}$$

$$f(x)=\frac{1+x-x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}$$

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}$$

$\boxed{2}$ نعلم أن $\sqrt{1+x}\ge\sqrt{x}$ نضيف $\sqrt{x}$

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\ge 2\sqrt{x}$$

نقلب:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x)\le\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad(1)$$

نعلم أن $\sqrt{1+x}\ge\sqrt{x}$ نضيف $\sqrt{1+x}$

$$2\sqrt{1+x}\ge\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$$

0931647631 رام عبدو 0993177182 يوسف حرساني 0932325694 محمد البنور

نقلب:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \quad (2)$$

فيكون:

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\boxed{3}$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة [1]

ليكن التابع

$$|f(x)-3| = \frac{\sin x}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x+1} = \frac{\sin\infty}{\infty}$$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على $x+1$

$$-\frac{1}{x+1} \le \frac{\sin x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x+1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة [3]

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

التابع المركب

ليكن التابع

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5} \quad]-5,+\infty[$$

١- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

٢- أعد حساب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to1} \frac{x-3}{x+5}$$

$$= \frac{1-3}{1+5} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$f(f(x)) = \frac{\left(\frac{x-3}{x+5}\right)-3}{\left(\frac{x-3}{x+5}\right)+5} = \frac{-2x-18}{6x+22}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

المقارب المائل

أثبت أن المستقيم Δ مقارب لـ C وادرس وضعه النسبي

$$f(x) = 2x+3+\frac{10}{x+1}$$

$$\Delta: y = 2x+3$$

الحل:

ليكون $\Delta: y = 2x+3$ مقارب لـ C يجب أن يكون:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{10}{x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\frac{10}{\infty}=0$$

$\Delta: y = 2x + 3$ مقارب لـ C في جوار $+\infty$

- **الوضع النسبي:**

ندرس إشارة

$$f(x)-y_\Delta=\frac{10}{x+1}$$

نعدم البسط $10 \neq 0$ موجب دوما

نعدم المقام $x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	$\Vert$	$+$	
الوضع		تحت C	$\Vert$	فوق C	

ليكن:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

١- ادرس نهاية f عند $-\infty$ واشرح التأويل الهندسي.

٢- أثبت أن $\Delta: y = 2x$ مقارب في جوار $+\infty$

٣- ادرس الوضع النسبي.

الحل:

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty+\infty$$

$$f(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{x^2-x^2-1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{-1}{-\infty}=0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب أفقي منطبق على xx'

$\boxed{2}$ ليكون $\Delta: y = 2x$ مقارب لـ C يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=+\infty-\infty$ عدم تعيين

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\frac{1}{\infty}=0$ محققة

$\Delta: y = 2x$ مقارب لـ C في جوار $+\infty$

$\boxed{3}$ الوضع النسبي:

ندرس إشارة

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x$$

$$f(x)-y_\Delta \Longleftarrow \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\text{كبير}}-\underbrace{x}_{\text{صغير}}>0$$

C فوق Δ

أو بطريقة الجدول.

ليكن التابع

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

١- أثبت أن $\Delta: y = x + 1$ مقارب في جوار $+\infty$

٢- ادرس الوضع النسبي

٣- هل يوجد $\Delta': y = x - 1$ مقارب في جوار $-\infty$ $[\lim_{x\to+\infty}(f(x)-a_x)=b\,]$

الحل:

١- ليكون $\Delta: y = x + 1$ مقارب لـ C يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$$

عدم تعيين $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1$$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1$$

محققة $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\frac{1}{\sqrt{1+0}}-1=0$

٢- الوضع النسبي:

ندرس إشارة

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$$

نعلم أن $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}<1$ لأن $x<\sqrt{x^2+9}$

$$f(x)-y_\Delta<0$$

C تحت Δ

٣- $\Delta': y=x-1$ يجب أن يتحقق

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_{\Delta'})=0$$

$$f(x)-y_{\Delta'}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1$$

عدم تعيين $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_{\Delta'})=\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)-y_{\Delta'}=\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

$$f(x)-y_{\Delta'}=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1$$

محققة $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_{\Delta'})=\frac{-1}{\sqrt{1+0}}+1=0$

Δ' مقارب لـ C

ليكن التابع

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ $\mathbb{R}$

١- أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

٢- استنتج كل مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الحل:

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

بما أن $\Delta: y=ax+b$ $\boxed{2}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

نحسب a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=a$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\sqrt{1+0+0}=1$$

$$\boxed{a=1}$$

نحسب a

$$f(x)-ax=\sqrt{x^2+4x+5}-x$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)}$$

$$f(x)-ax=\frac{x^2+4x+5-x^2}{\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)}$$

$$f(x)-ax=\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=2$$

$$\boxed{b=2}$$

$$\Delta: y=x+2$$

ليكن التابع

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$, $\mathbb{R}$

١- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٢- اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية

٣- استنتج كل مقارب مائل في جوار $+\infty$

الحل:

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$\boxed{2}$ $$f(x)=\sqrt{x^2+4x+4-4+5}$$

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$$

$\boxed{3}$ $\Delta_1: y=x+2$

نفرض أن المستقيم $\Delta_1: y=x+2$ ونبرهن أنه مائل في جوار ال $+\infty$

$$f(x)-y_{\Delta_1}=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)\right)\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)}{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)}$$

$$=\frac{(x+2)^2+1-(x+2)^2}{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)\right)}$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta_1})=\frac{1}{\infty}=0$ محققة

Δ_1 مقارب لـ C في جوار $+\infty$

بنفس الطريقة نبرهن أن $\Delta_2: y=-(x+2)$ مقارب لـ C في جوار $-\infty$

عدد حلول المعادلة

ليكن التابع $f(x)=x^3-x^2+x-2$ أثبت أن $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]1,2[$

ندرس تغيرات التابع على المجال $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=3x^2-2x+1$$

$$f'(x)=0\Longrightarrow\Delta=b^2-4ac$$

$\Delta=-8$ مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

التابع مستمر ومتزايد على المجال $]1,2[$

$$f(1)=1-1+1-2=-1<0$$

$$f(2)=8-4+2-2=4>0$$

$$f(1).f(2)<0$$

$f(x)=0$ حل وحيد للمعادلة

ليكن التابع

$f(x)=x^3-3x^2+1$ $\mathbb{R}$

ما عدد حلول المعادلة $f(x)+1=0$

ندرس تغيرات التابع على المجال $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=3x^2-6x$$

$$f'(x)=0\Longrightarrow 3x(x-2)=0$$

إما $x=2$ أو $x=0$

$$f(2)=8-12+1=-3$$

$$f(0)=1$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

عدد حلول المعادلة $f(x)=-1$.

0932325694 محمد البنور   0993177182 يوسف حرسائي   0931647631 رام عبدو

التابع مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty,0[$

$$f(]-\infty,0[) =]-\infty,1[$$
$$-1 \in]-\infty,1[$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = -1$ في $]-\infty,0[$

التابع مستمر ومتناقص على المجال $]0,2[$

$$f(]0,2[) = [-3,0[$$
$$-1 \in [-3,0[$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = -1$ في $]0,2[$

التابع مستمر ومتزايد على المجال $]2,+\infty[$

$$f(]2,+\infty[) =]-3,+\infty[$$
$$-1 \in]-3,+\infty[$$

يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = -1$ في $]2,+\infty[$

للمعادلة $f(x) = -1$ ثلاث حلول في $\mathbb{R}$

الاستمرار

ليكن التابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2.\cos\frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

١- أحسب نهاية f عند الصفر.

٢- هل f مستمر عند الصفر.

٣- هل f مستمر على $\mathbb{R}$.

الحل:

$\boxed{1}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.\cos\infty$$

$$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$$

نضرب بـ x^2

$$-x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \\ \lim_{x\to 0}(x^2) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة [١]

$\boxed{2}$ ليكن التابع f مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$
$$f(0) = 0$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ من الطلب الأول

ومنه $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ فالتابع مستمر عند الصفر.

$\boxed{3}$ التابع $f(x) = x^2.\cos\frac{1}{x}$

x^2 مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $\mathbb{R}\setminus[0]$

$\cos\frac{1}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}\setminus[0]$

ومنه التابع f مستمر على $\mathbb{R}\setminus[0]$ ومستمر على الصفر برهاناً فهو مستمر على $\mathbb{R}$

ليكن التابع

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة m ليكون التابع مستمر على $\mathbb{R}$

الحل:

بما أن التابع مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$
$$f(0) = m$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$f(x) = \frac{1-x^2-1}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$f(x) = \frac{-x}{(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{\sqrt{0+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = m \Rightarrow m = 0$$

تابع الجزء الصحيح $E(X)$

ليكن x عدد حقيقي، يوجد عدد صحيح وحيد n يحقق $n \le$

$$x \le n+1$$

أو $n-1 < x \le n$

ليكن التابع f معرف على المجال $[0,2]$

$$f(x)=E(X)+\left(x-E(X)\right)^2$$

١- اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(X)$

٢- أثبت أن التابع f مستمر على $[0,2]$

الحل:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in[0,1[\\ 1+(x-1)^2 & x\in[1,2[\\ 2 & x=2 \end{cases}$$

ندرس استمرار التابع عند الواحد

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=1 \\ \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)&=1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$ التابع مستمر عند 1

ندرس استمرار التابع عند ٢

$$\left.\begin{aligned} f(2)&=2 \\ \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)&=2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$ التابع مستمر عند 2

الحصر

نموذج أول:

ليكن التابع:

$$f(x)=\frac{5x-1}{x-1}\ \mathbb{R}\setminus[1]$$

١- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٢- أوجد عدداً A اذا كان $f(x)\in\,]4.9,5.1[$

الحل:

$\boxed{1}$ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$$

$\boxed{2}$ $$l=\frac{a+b}{2}=\frac{4.9+5.1}{2}=5$$

$$\epsilon=\frac{b-a}{2}=\frac{5.1-4.9}{2}=0.1$$

$$|f(x)-c|<r$$

$$\left|\frac{5x-1}{x-1}-5\right|<0.1$$

$$\left|\frac{4}{x-1}\right|<0.1 \Longrightarrow x-1>40$$

لأن $x\to+\infty$

$$x>41 \Longrightarrow A=41$$

نموذج ثاني:

ليكن التابع:

$$f(x)=\sqrt{4x+1}$$

١- أوجد $\lim_{x\to+2} f(x)$

٢- عين المجال L مركزه 2 يحقق الشرط

$$f(x)\in\,]2.99,3.01[$$

الحل:

$$2.99<f(x)<3.01$$

$$2.99<\sqrt{4x+1}<3.01$$

نربع

$$(2.99)^2<\left(\sqrt{4x+1}\right)^2<(3.01)^2$$

نضيف (-1)

$$(2.99)^2-1<4x+1-1<(3.01)^2-1$$

$$(2.99)^2-1<4x<(3.01)^2-1$$

نقسم على 4

$$\frac{(2.99)^2-1}{4}<x<\frac{(3.01)^2-1}{4}$$

$$1.99<x<2.01$$

ومنه $I=\,]1.99,2.01[$

نموذج ثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f معرف على

$$f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2} \quad , \quad \mathbb{R} \setminus [1]$$

عين مجال I مركزه 1 بشرط أن تكون x من I و $f(x) > 10^3$

الحل:

$$f(x) > 10^3$$
$$\frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3$$
$$\frac{5x-5+4}{(x-1)^2} > 10^3$$
$$\frac{5(x-1)+4}{(x-1)^2} > 10^3$$
$$5(x-1)+4 > 10^3.(x-1)^2$$
$$0 > 10^3.(x-1)^2 - 5(x-1) - 4$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 16025$$
$$\sqrt{\Delta} = 126.5$$
$$(x-1) = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0.06$$
$$(x-1) = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -0.06$$

ومنه

$$-0.06 < (x-1) < 0.06$$
$$0.94 < x < 1.06$$

ومنه

$$I =]0.94,1.06[$$

انتهت الأوراق

مع التمنيات لكم بالتوفيق