5.1 Inverse Functions

أ. عواطف الصيخ

الدوال العكسية

One to one Functions (1-1)

الدالة المتباينة

تعريف :-

f is one to one if :-

نقول عن f أنها متباينة اذا كان :

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$$

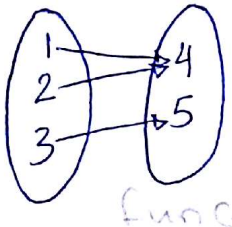
التعريف بالكافئ

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

هذا التعريف نستخدم بكثرة فافهموه جيداً

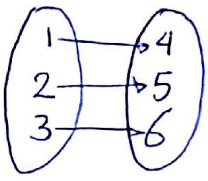
ملاحظات على دالة (1-1) :.

① نقول عن الدالة f أنها (1-1) اذا ارتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط من المدى .



Function

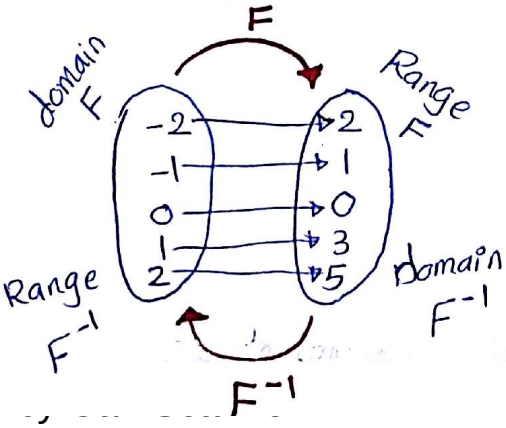
Not one to one.



one to one.

(1-1)

$$F = \{(-2,2), (-1,1), (0,0), (1,3), (2,5)\}$$



$$F^{-1} = \{(2,-2), (1,-1), (0,0), (3,1), (5,2)\}$$

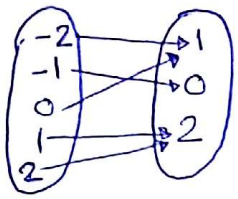
الدالة العكسية للدالة F

شرط مهم لإيجاد العكس :- لابد أن تكون الدالة (one to one)

HW: Find the inverse of each function:

أوجدي الدالة العكسية :-

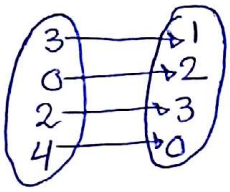
ⓐ $F = \{(-2,1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,2)\}$



Not one-to one.

No inverse. لا يوجد دالة عكسية لأنها ليست 1-1

ⓑ $G = \{(3,1),(0,2),(2,3),(4,0)\}$ domain of G^{-1}



one to one.

$\Rightarrow G^{-1} = \{(1,3),(2,0),(3,2),(0,4)\}$

Example 1:- Decide whether each function is one to one. حددي أي من الدوال هي 1-1

ⓐ $f(x) = -4x + 12$ ⟶ نستخدم التعريف $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$f(a) = f(b)$

$-4a + 12 = -4b + 12$

$-4a = -4b + 12 - 12$

$-4a = -4b$

$a = \frac{-4}{-4} b$

$a = b$

$\therefore$ 1-1

Scanned by CamScanner

(b) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

اذا عندي تربيع ← ليست 1-1

$f(a) = f(b)$

$\sqrt{25-a^2} = \sqrt{25-b^2}$ ⟶ تربيع لطرفين

$25-a^2 = 25-b^2$

$-a^2 = -b^2$

باستخدام خاصية الجذر التربيعي ⟵ $a^2 = b^2$

$a = \pm\sqrt{b^2}$

$a = \pm b$

Not one to one.

سؤال اختبار

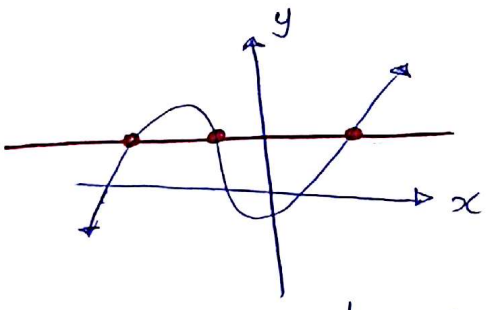
A function is one-to-one if every horizontal line intersects the graph of the function at most once.

Horizontal Line Test : اختبار الخط الأفقي

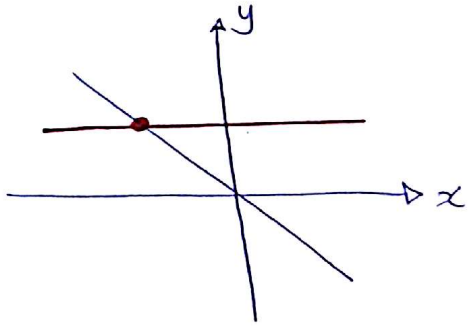
نستخدم الخط الافقي لمعرفة هل الدالة 1-1 أم لا .

اذا قطع الخط الأفقي المنحنى في نقطة واحدة ⟵ الدالة 1-1

أكثر من نقطة واحدة ⟵ الدالة ليست 1-1



Not one-to-one



one to one.

اذا كانت الدالة تزايدية على كل مجالها أو تناقصية على مجالها ⟵ 1-1

واذا كانت تزايدية وتناقصية على مجالها ⟵ ليست 1-1

Scanned by CamScanner

Inverse Function :: الدالة العكسية

$(fog)(x) = x$ and $(gof)(x) = x$

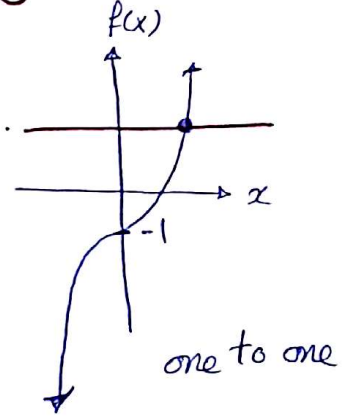
اذا أعطانا دالتين و مطلوب نعرف هل هي عكسية لبعض أم لا فإننا سنستخدم القانون
ولابد ان تكون الدالة f (1-1)

Example 2 :-

$f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

Is g the inverse function of f ?

— هل g دالة عكسية لـ f ؟



① f is one to one function

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{x+1}\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1$$

$$= x + 1 - 1 = x$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^3 - 1)$$

$$= \sqrt[3]{x^3 - 1 + 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

∴ g is inverse function of f .

Scanned by CamScanner

- في المثال السابق أعطانا دالتين ومطلوب التأكد أنها دوال عكسية لبعض

- الآن يعطينا دالة واحدة فقط ومطلوب إيجاد الدالة العكسية لها.

Example 3:- Find the equation of inverse:

أوجد دالة العكسية

(a) $f(x) = 2x+5$

- أولاً: لابد أن تكون one to one
الدالة الخطية دائماً هي 1-1

$\therefore$ f is one to one.

- ثانياً: نستبدل $f(x)$ بـ y

$y = 2x+5$

- ثالثاً: نبدل بين y و x

$x = 2y+5$

- رابعاً: نحل بالنسبة لـ y.

$2y = x-5$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

- خامساً: نستبدل y بـ $f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

(b) $y = x^2+2$ ⟿ عندنا تربيع ⇐ ليست 1-1 ⇐ لا يوجد معكوس

أي قاعدة دوال ليس لها.

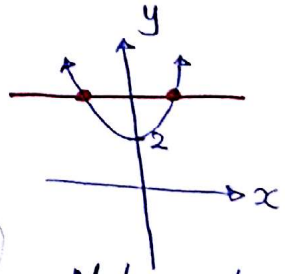
$x = y^2+2$

$y^2 = x-2$

$y = \pm\sqrt{x-2}$

No inverse

لا يوجد معكوس



Not one to one

الدالة التربيعية يمتلك قطع مكافئ
إذا استخدمنا خط أفقي فإنه يقطع المنحنى في نقطتين

Scanned by CamScanner

© $f(x) = (x-2)^3$

f is one to one

$$y = (x-2)^3$$

$$x = (y-2)^3$$

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(y-2)^3}$$

نأخذ الجذر الثالث للطرفين

$$y - 2 = \sqrt[3]{x}$$

$$y = \sqrt[3]{x} + 2$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 2$$

HW3 P. (146) :- $f(x) = \frac{2x+3}{x-4}$, $x \neq 4$ يا

Find the inverse.

① f is one to one.

$$y = \frac{2x+3}{x-4}$$

$$x = \frac{2y+3}{y-4}$$

$$x(y-4) = 2y+3$$

$$xy - 4x = 2y+3$$

$$xy - 2y = 4x+3$$

$$y(x-2) = 4x+3$$

$$y = \frac{4x+3}{x-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{x-2}$$

Scanned by CamScanner

Graphing f^{-1}

رسم الدالة العكسية

$f(x)=\sqrt{x}$

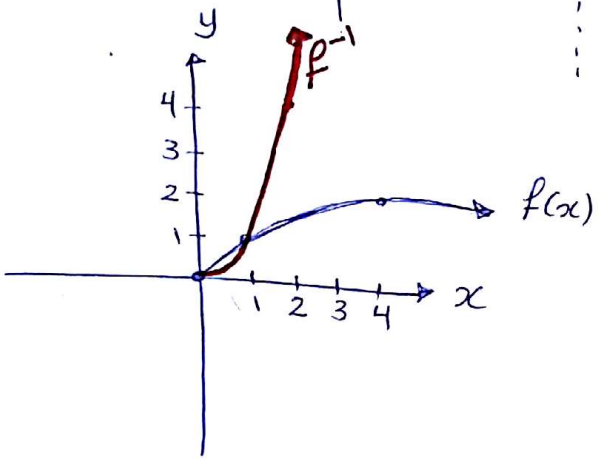
$x \geq 0$

f is 1-1

x	$f(x)$
0	0
1	1
4	2
⋮	⋮

f بقاط: $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,2)$, ⋮

f^{-1} بقاط: $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, ⋮



HW4 p. (146) : $f(x)=\sqrt{x+5}$, $x \geq -5$ بحال

f is one to one.

$$y=\sqrt{x+5}$$

$$x=\sqrt{y+5}$$

$$x^2=\left(\sqrt{y+5}\right)^2$$

$$y+5=x^2$$

$$y=x^2-5$$

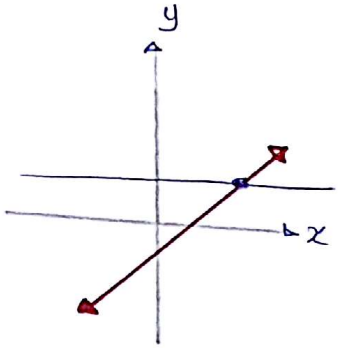
$$f^{-1}(x)=x^2-5$$

Scanned by CamScanner

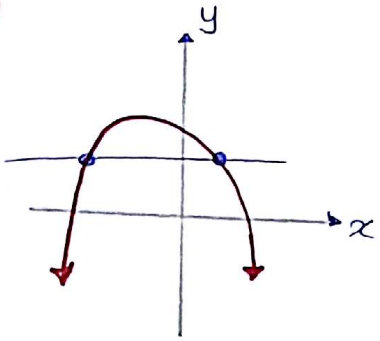
Exercises 5.1 p.(147)

Decide whether each function is one to one.

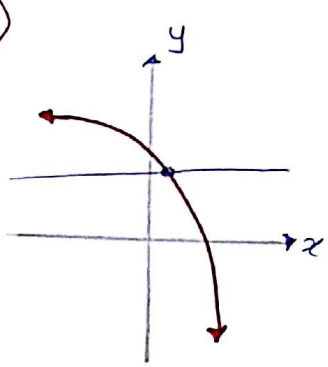
حددي أي من الدوال هي 1-1 ؟

① 

1-1

② 

Not 1-1

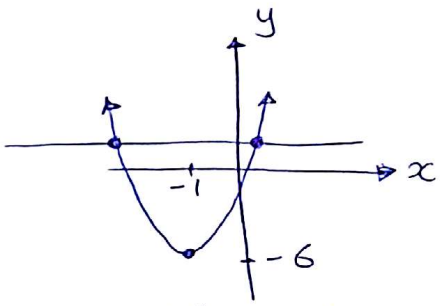
③ 

1-1

⑧ $y = 2(x+1)^2 - 6$ ⟶ معادلة تربيعية ليست 1-1

Vertex $(h,k) = (-1,-6)$

الأفضل نستخدم الرسم في الدالة التربيعية .



Not 1-1

Use the definition of inverse :

⑳ $f(x) = 2x+4$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x-2\right) = 2\left(\frac{1}{2}x-2\right) + 4$

$= \frac{2}{2}x - 4 + 4 = x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+4) = \frac{1}{2}(2x+4) - 2$

$= \frac{2}{2}x + \frac{4}{2} - 2 = x$

$\therefore$ g is inverse of f(x).

㉓ $f(x) = \frac{2}{x+6}$, $g(x) = \frac{6x+2}{x}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{6x+2}{x}\right) = \frac{2}{\frac{6x+2}{x} + 6}$

$= \frac{2}{\frac{6x+2}{x} + \frac{6x}{x}} = \frac{2x}{12x+2}$? g is not inverse of f(x)

Scanned by CamScanner