قوانين وقواعد

في الرياضيات

لطلاب وطالبات الصف الثالث الثانوي(القسم العلمي)

إعداد الأستاذ / حسن برك بامقاء

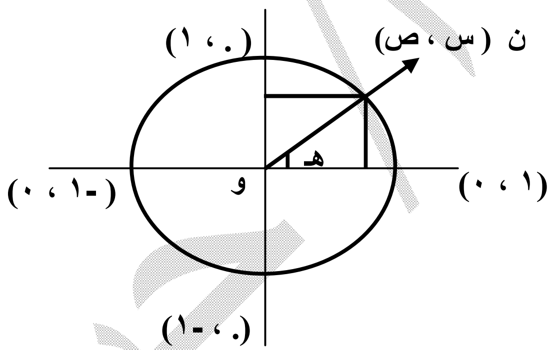
بسم الله الرحمن الرحيم

أولاً: بعض العلاقات الخاصة بالنسب المثلثية

النسب المثلثية

الجيب : جاهـ = ص

الجيب تمام : جتاهـ = س

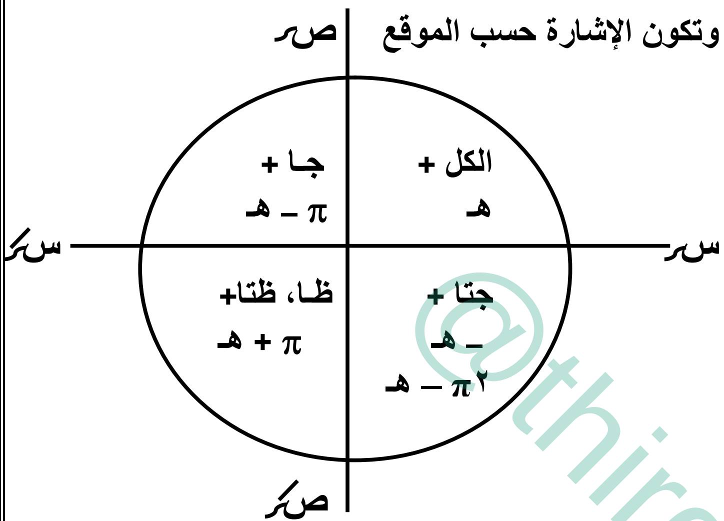


قاعدة الإشارات

١) إشارة جتا تتبع إشارة الاحداثي السيني

٢) اشارة جا تتبع اشارة الاحداثي الصادي

وتكون الإشارة حسب الموقع



١):قيم النسب المثلثية للزوايا الشهيرة

الزوايا / النسب المثلثية	٠ ، ٠°	٣٠° ، $\frac{\pi}{6}$	٤٥° ، $\frac{\pi}{4}$	٦٠° ، $\frac{\pi}{3}$	٩٠° ، $\frac{\pi}{2}$	١٨٠° ، π	٢٧٠° ، $\frac{3\pi}{2}$	٣٦٠° ، 2π
جتا	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	٠	-١	٠	١
جا	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	٠	-١	٠
ظا	٠	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرفة	٠	غير معرفة	٠
ظتا	غير معرفة	$\sqrt{3}$	١	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	٠	غير معرفة	٠	غير معرفة

٢):قوانـــين الـــــنسب المثـــلثـــية

الربـــــــــع الأول

جـاس = جـا(٢π + س)

ظاس = ظا(٢π + س)

جتاس = جتا(٢π + س)

ظتاس = ظتا(٢π + س)

الربـــــــــــع الثاني

جـاس = جـا(π − س)

ظاس = − ظـا(π − س)

جتاس = − جتا(π − س)

ظتاس = − ظتا(π − س)

الربـــــــــــع الثالث

جاس = − جـا(π + س)

ظاس = ظـا(π + س)

جتاهـ = − جتا(π + س)

ظتاس = ظتا(π + س)

الربـــــــــــع الرابع

(عندما يكون الدوران نفس اتجاه دوران عقارب الساعة)

جتا(−س) = جتاس

جـا(−س) = − جـاس

ظـا(−س) = − ظـاس

ظتـا(−س) = − ظتـاس

(عندما يكون الدوران عكس اتجاه دوران عقارب الساعة)

جتا(٢π − س) = جتاس

جـا(٢π − س) = − جـاس

ظـا(٢π − س) = − ظـاس

ظتـا(٢π − س) = − ظتـاس

٣): قوانـــــين التـــحويـــــلات

الربع الأول

جـاس = جتـا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)

ظـاس = ظتـا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)

جتـاس = جـا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)

ظتـاس = ظـا ($\frac{\pi}{٢}$ − س)

الربع الثانى

جـاس = − جتـا ($\frac{\pi}{٢}$ + س)

ظـاس = − ظتـا ($\frac{\pi}{٢}$ + س)

جتـاس = جـا ($\frac{\pi}{٢}$ + س)

ظتـاس = − ظـا ($\frac{\pi}{٢}$ + س)

الربع الثالث

جـاس = − جتـا ($\frac{٣\pi}{٢}$ − س)

ظـاس = ظتـا ($\frac{٣\pi}{٢}$ − س)

جتـاس = − جـا ($\frac{٣\pi}{٢}$ − س)

ظتـاس = ظـا ($\frac{٣\pi}{٢}$ − س)

الربع الرابع

جـاس = جتـا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + س)

ظـاس = − ظتـا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + س)

جتـاس = − جـا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + س)

ظتـاس = − ظـا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + س)

٤) : قوانــــــــــين المجــموع والفـــرق

١) جتا (س ـ ص) = جتاس جتاص + جـاس جـاص

٢) جتا (س + ص) = جتاس جتاص ـ جـاس جـاص

٣) جـا (س + ص) = جـا س جتاص + جتاس جـاص

٤) جـا (س ـ ص) = جـاس جتاص ـ جتاس جـاص

---

٥): تحويل مجموع نسبتين أو الفرق بينهما الى حاصل ضرب نسبتين

١) جـاس + جـاص = ٢جـا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$

٢) جـاس ـ جـاص = ٢جـتا $\frac{س + ص}{٢}$ جـا $\frac{س - ص}{٢}$

٣) جتاس + جتاص = ٢جتا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$

٤) جتاس ـ جتاص = ـ٢جـا $\frac{س + ص}{٢}$ جـا $\frac{س - ص}{٢}$

---

٦) : تحويل حاصل ضرب نسبتين الى مجموع أو فرق نسبتين

١) جـاس جتـاص = $\frac{١}{٢}$ [جـا (س + ص) + جـا (س – ص)]

٢) جتاس جـاص = $\frac{١}{٢}$ [جـا (س + ص) ـ جـا (س – ص)]

٣) جـاس جـاص = ـ $\frac{١}{٢}$ [جتا (س + ص) ـ جتا (س – ص)]

٤) جتاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ [جتا (س + ص) + جتا (س – ص)]

٧) : قوانيـــــــن ضعــف الزاوية

١) جـا٢س = ٢جـاس جتـاس

٢) جـتا٢س = جـتا^{٢}س ـ جـا^{٢}س

٣) جـتا٢س = ٢جتا^{٢}س ـ ١

٤) جـتا٢ س = ١ ـ ٢جا^{٢}س

---

٨) : قوانيـــــــن عامـــــــــــــــــة:

١) $\text{قـاس} = \frac{١}{\text{جتـاس}}$

٢) $\text{قتاس} = \frac{١}{\text{جـاس}}$

٣) $\text{ظـاس} = \frac{\text{جـاس}}{\text{جتاس}}$

٤) $\text{ظتاس} = \frac{\text{جتـاس}}{\text{جـاس}}$

٥) جـتا^{٢}س + جـا^{٢}س = ١

٦) جـتا^{٢}س = ١ ـ جـا^{٢}س

٧) جـا^{٢}س = ١ ـ جتـا^{٢}س

٨) ١ + ظـا^{٢}س = قـا^{٢}س

٩) ظـا^{٢}س = قـا^{٢}س ـ ١

١٠) ١ + ظـتا^{٢}س = قـتا^{٢}س

١١) ظـتا^{٢}س = قـتا^{٢}س ـ ١

١٢) ١ ـ جتا٢س = ٢جـا^{٢}س

١٣) ١ ـ جتـاس = ٢ جـا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ (مهم)

١٤) ١ + جتا٢س = ٢جتا^{٢}س

١٥) جـتـا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جـتـا٢س

١٦) جـا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ ـ $\frac{١}{٢}$ جـتـا٢س

١٧) جـاس = ٢جـا $\frac{\text{س}}{٢}$ جتـا $\frac{\text{س}}{٢}$

١٨) جـتـا^{٢} ٢س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جـتـا٤س

ثانياً: الأعـــداد المركـــــبة

١): الصورة القطبية (المثلثية) العامة للعدد المركب:

إذا كان ع = س + ت ص فأن الصورة القطبية له هي : ع = ν (جتاهـ + ت جاهـ)

وتكتب اختصاراً ع = [ν ، هـ] حيث :

ν = |ع| = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ (مقياس او طول العدد المركب)

هـ : سعة او زاوية العدد المركب ، جتاهـ = $\frac{س}{\nu}$ ، جاهـ = $\frac{ص}{\nu}$

---

٢): للعدد المركب الصرف في الصورة القطبية:

العدد المركب	مثال	طوله (ν)	سعته (هـ)	صورته القطبية
حقيقي صرف موجب	٤	٤	$٠^{٠}$ ، ٢π	[٤ ، $٠^{٠}$]
حقيقي صرف سالب	ـ٤	٤	π	[٤ ، π]
تخيلي صرف موجب	٦ت	٦	$\frac{\pi}{٢}$	[٦ ، $\frac{\pi}{٢}$]
تخيلي صرف سالب	ـ٦ت	٦	$\frac{٣\pi}{٢}$	[٦ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

❖ تمرين محلول : اوجد الصورة القطبية للعدد المركب ع = $-\frac{٣}{٢} - \frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$ ت ؟

الحل:

$|ع| = \nu = \sqrt{(-\frac{٣}{٢})^{٢} + (-\frac{٣}{٢}\sqrt{٣})^{٢}} = \sqrt{\frac{٩}{٤} + \frac{٢٧}{٤}} = \sqrt{\frac{٣٦}{٤}} = \sqrt{٩} = ٣$

جتاهـ = $\frac{س}{\nu} = \frac{-\frac{٣}{٢}}{٣} = -\frac{\cancel{٣}}{\cancel{٣}٢} = -\frac{١}{٢}$

جاهـ = $\frac{ص}{\nu} = \frac{-\frac{٣}{٢}\sqrt{٣}}{٣} = \frac{-\cancel{٣}\sqrt{٣}}{\cancel{٣}٢} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∵ جاهـ < ٠ ، جتاهـ < ٠ ∴ هـ تقع في الربع الثالث ⟸ هـ = $\pi + \frac{\pi}{٣} = \frac{٤\pi}{٣}$

∴ ع = ٣ (جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٤\pi}{٣}$) = [٣ ، $\frac{٤\pi}{٣}$] = [٣ ، $٢٤٠^{٠}$] .

٣): الأشكال الغير قياسية للعدد المركب في الصورة القطبية:

هناك حالتان:

عند الاختلاف في الإشارة فإننا نحدد موقع الزاوية من قوانين الأرباع للزوايا حسب أشارة جتا ، جا .	عند الاختلاف في النسبة المثلثية فإننا نحدد موقع الزاوية من قوانين التحويلات للنسب حسب اشارة جتا ، جا

❖ قواعد تحويل العدد المركب إلى الصورة المثلثية العامة :

الصورة العامة للعدد المركب ع هي : ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ) = [ر ، هـ]

حيث ر > ٠ ، هـ ∈ [٠°، ٢π] ، جتا الجزء الحقيقي ، جا الجزء التخيلي

قوانين الأرباع للزوايا

أولاً : الاختلاف في الإشارة:

الربع الثاني

١) ع = ر(ـ جتاهـ + ت جاهـ) = ر [جتا (π ـ هـ) + ت جا(π ـ هـ)]

مثال (١) : ع = ٣ (ـ جتا٣٠° + ت جا٣٠°) = ٣ [جتا(١٨٠° ـ ٣٠°) + ت جا(١٨٠° ـ ٣٠°)]

= ٣ (جتا١٥٠° + ت جا١٥٠°) = [٣ ، ١٥٠°]

الربع الثالث

٢) ع = ر(ـ جتاهـ ـ ت جاهـ) = ر[جتا (π + هـ) + ت جا(π + هـ)]

مثال (٢) : ع = ـ٤(جتا $\frac{\pi}{4}$ + ت جا $\frac{\pi}{4}$) = ٤ (ـ جتا $\frac{\pi}{4}$ ـ ت جا $\frac{\pi}{4}$)

=٤ [جتا(π + $\frac{\pi}{4}$) + ت جا(π + $\frac{\pi}{4}$)] =٤(جتا $\frac{5\pi}{4}$ + ت جا $\frac{5\pi}{4}$) = [٤ ، $\frac{5\pi}{4}$]

الربع الرابع

٣) ع = ر (جتاهـ ـ ت جاهـ) = ر [جتا (ـ هـ) + ت جا(ـ هـ)]

= ر [جتا (٢π ـ هـ) + ت جا(٢π ـ هـ)]

مثال (٣) : ع = ٢(جتا٣٠° ـ ت جا٣٠°) = ٢ [جتا (ـ ٣٠°) + ت جا(ـ٣٠°)] = [٢ ، ـ ٣٠°]

او = ٢ [جتا (٣٦٠° ـ ٣٠°) + ت جا(٣٦٠° ـ ٣٠°)] = ٢ (جتا٣٠٠° + ت جا٣٠٠°)

= [٢ ، ٣٠٠°]

قوانين التحويلات للنسب

ثانيا" : الاختلاف في النسبة المثلثية:

الربع الأول

١) ع = ر (جاهـ + ت جتاهـ) = ر [جتا $(\frac{\pi}{2} - $ هـ$)$ + ت جا $(\frac{\pi}{2} - $ هـ$)$]

مثال (١) : ع = ٦ (جا $\frac{\pi}{6}$ + ت جتا $\frac{\pi}{6}$) = ٦ [جتا $(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$ + ت جا $(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$]

= ٦ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$) = [٦ ، $\frac{\pi}{3}$]

الربع الثاني

٢) ع = ر (ـ جاهـ + ت جتاهـ) = ر [جتا $(\frac{\pi}{2} + $ هـ$)$ + ت جا $(\frac{\pi}{2} + $ هـ$)$]

مثال (٢) : ع = ـ٢ (جا ٦٠° ـ ت جتا ٦٠°) = ٢ (ـ جا ٦٠° + ت جتا ٦٠°)

= ٢ [جتا (٩٠° + ٦٠°) + ت جا (٩٠° + ٦٠°)]

= ٢ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°) = [٢ ، ١٥٠°]

الربع الثالث

٣) ع = ر (ـ جاهـ ـ ت جتاهـ) = ر [جتا $(\frac{3\pi}{2} - $ هـ$)$ + ت جا $(\frac{3\pi}{2} - $ هـ$)$]

مثال (٣) : ع = ـ $\sqrt{3}$ (جا $\frac{\pi}{2}$ + ت جتا $\frac{\pi}{2}$) = $\sqrt{3}$ (ـ جا $\frac{\pi}{2}$ ـ ت جتا $\frac{\pi}{2}$)

= $\sqrt{3}$ [جتا $(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$ + ت جا $(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$] = $\sqrt{3}$ (جتا $\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}$ + ت جا $\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}$)

= $\sqrt{3}$ (جتا π + ت جا π) = [$\sqrt{3}$ ، π]

الربع الرابع

٤) ع = ر (جاهـ ـ ت جتاهـ) = ر [جتا $(\frac{3\pi}{2} + $ هـ$)$ + ت جا $(\frac{3\pi}{2} + $ هـ$)$]

مثال (٤) : ع = ٣(جا ٩٠° ـ ت جتا ٩٠°) = ٣ [جتا (٢٧٠° + ٩٠°) + ت جا (٢٧٠° + ٩٠°)]

= ٣(جتا ٣٦٠° + ت جا ٣٦٠°) = [٣ ، ٣٦٠°] = [٣ ، ٠°] = [٣ ، ٢π]

❖ **تمرين محلول :** اوجد الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٤ (ـ جا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جتا $\frac{\pi}{٣}$) ؟

الحل:

∵ ع = ٤ (ـ جا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جتا $\frac{\pi}{٣}$) = ٤ (ـ $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت) = ـ٢ + ٢ت

∴ ع = ـ٢ + ٢ت (نوجد الصورة القطبية)

∵ $|ع|$ = ر = $\sqrt{(-٢)^{٢} + ٢^{٢}}$ = $\sqrt{٤ + ٤}$ = $\sqrt{٨}$ = ٢ $\sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{\cancel{-٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢}}$ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∵ جاهـ > ٠ ، جتاهـ < ٠ هـ تقع في الربع الثاني ⟸ هـ = π - $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٣\pi}{٤}$

∴ ع = ٤ (جا $\frac{\pi}{٦}$ ـ ت جتا $\frac{\pi}{٣}$) = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$) = [٢ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$] .

❖ **مــــلاحـــــظة:**

١) لتحويل العدد المركب إلى الصورة القطبية القياسية بالقوانين السابقة يجب أن تكون زاوية الجزء الحقيقي تساوي زاوية الجزء التخيلي .

٢) اذا كانت زاوية الجزء الحقيقي لا تساوي زاوية الجزء التخيلي في هذه الحالة لا نستخدم القوانين السابقة ، ولإيجاد الصورة القطبية القياسية يجب أولا" تحويل العدد المركب إلى صورته الجبرية (س+ ت ص) ثم تحويل هذه الصورة الجبرية إلى الصورة القطبية (تمرين محلول) .

٣) اذا كان المقياس للعدد المركب سالبا" فلإيجاد الصورة القطبية القياسية يجب أولا" إدخال إشارة السالب على الجزء الحقيقي والجزء التخيلي ويبقى المقياس موجب ثم نستخدم القوانين حسب إشارة الجزأين اذا كان لهما نفس السعة (مثال ٢ في أولا") و (مثال ٢ ، ٣ في ثانيا") .

٤):خواص الأعداد المركبة بالصورة القطبية [ر ، هـ]

إذا كان ع١ = [ر١ ، هـ١] ، ع٢ = [ر٢ ، هـ٢] ، ع = [ر ، هـ] أعداد مركبة فإن :

١) ع١ · ع٢ = [ر١ ، هـ١] · [ر٢ ، هـ٢] = [ر١ ر٢ ، هـ١ + هـ١] (تضرب المقاييس وتجمع السعات)

٢) ع١ / ع٢ = [ر١ ، هـ١] / [ر٢ ، هـ٢] = [ر١ / ر٢ ، هـ١ − هـ١] (تقسم المقاييس وتطرح السعات)

٣) ع̄ = [ر ، −هـ] (مرافق العدد المركب ع)

٤) ع · ع̄ = [ر ، هـ] · [ر ، −هـ] = [ر٢ ، ٠] = س٢ + ص٢ = |ع|٢

٥) −ع = [ر ، π + هـ] (النظير الجمعي للعدد المركب ع)

٦) ١ / ع = ع^(−١) = [١ / ر ، −هـ] (النظير الضربي او مقلوب العدد المركب ع)

❖ **تمرين محلول:** إذا كان ع١ = [٢ ، π/٣] ، وكان ع١ · ع٢ = ٣ت فأوجد بالصورة [ر ، هـ]

كلاً من : ١) ع̄٢ ٢) ١ / ع١ ٣) ع٢ / ع١ ٤) −ع̄١

(الحل:)

١) ∵ ع١ · ع٢ = ٣ت ، ٣ت = [٣ ، π/٢] (عدد تخيلي صرف موجب)

∴ ع١ · ع٢ = [٣ ، π/٢] ⟸ ع٢ = [٣ ، π/٢] / ع١ نعوض عن قيمة ع١

∴ ع٢ = [٣ ، π/٢] / [٢ ، π/٣] = [٣/٢ ، π/٢ − π/٣] = [٣/٢ ، π/٦] ، ∴ ع̄٢ = [٣/٢ ، −π/٦] (الخاصتين ٢، ٣)

٢) ١ / ع١ = ع١^(−١) = ١ / [٢ ، π/٣] = [١/٢ ، −π/٣] (الخاصية ٦)

٣) ع٢ / ع١ = [٣/٢ ، π/٦] / [٢ ، π/٣] = [٣/٢ ÷ ٢ ، π/٦ − π/٣] = [٣/٤ ، −π/٦] (الخاصية ٢)

٤) ∵ ع١ = [٢ ، π/٣] ⟸ ع̄١ = [٢ ، −π/٣] (الخاصية ٣)

∴ −ع̄١ = [٢ ، π − π/٣] = [٢ ، ٢π/٣] (الخاصية ٥)

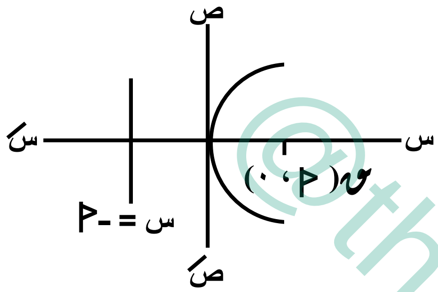
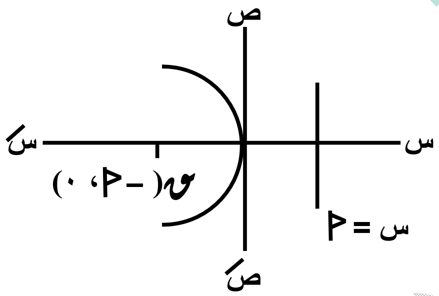
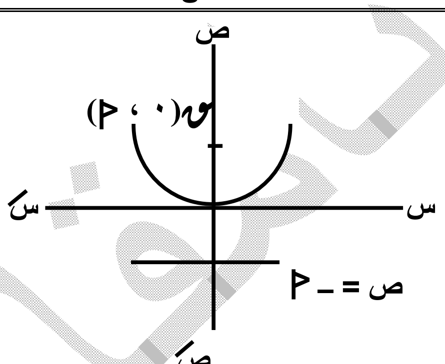
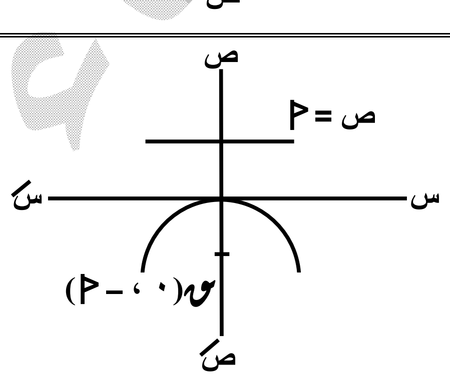
ثالثاً: القـــطوع المخروطـــــية:

١) القـطع المكـافئ:

تعريفة: هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي بعدها عن نقطة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم ثابت .

تسمى النقطة الثابتة بؤرة القطع المكافئ .
ويسمى المستقيم الثابت دليل القطع المكافئ .

❖ **الصور القياسية الأربع لمعادلات القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و (٠ ، ٠):**

المعادلة	البؤرة	الدليل	محور القطع	اتجاه فتحة القطع	الرسم
ص^٢ = ٤ أ س	(أ ، ٠)	س = -أ	المحور السيني	تتجه نحو اليمين (المحور السيني الموجب)	
ص^٢ = -٤ أ س	(-أ ، ٠)	س = أ	المحور السيني	تتجه نحو اليسار (المحور السيني السالب)	
س^٢ = ٤ أ ص	(٠ ، أ)	ص = -أ	المحور الصادي	تتجه نحو الأعلى (المحور الصادي الموجب)	
س^٢ = -٤ أ ص	(٠ ، -أ)	ص = أ	المحور الصادي	تتجه نحو الأسفل (المحور الصادي السالب)	

❖ **تسـميـات:**

١) المستقيم الذي يمر بالبؤرة وعمودي على الدليل يسمى محور القطع او محور تناظر القطع او محور تماثل القطع .

٢) نقطة تقاطع القطع مع محوره تسمى رأس القطع وهي نقطة الأصل و(٠ ، ٠) .

٣) رأس القطع ينصف المسافة بين البؤرة والدليل .

❖ **ملاحظة (١):**

١) بعد البؤرة عن الدليل = ٢م حيث م > ٠ .

٢) إشارة البؤرة توافق إشارة المعادلة بينما إشارة الدليل تخالفهما .

٣) كل نقطة واقعة على القطع المكافئ تحقق معادلة القطع لان بعدها عن البؤرة = بعدها عن الدليل .

٤) تكون النقطة داخل القطع اذاكان بعدها عن البؤرة اقل من بعدها عن الدليل وتكون النقطة خارج القطع اذاكان بعدها عن البؤرة اكبر من بعدها عن الدليل .

٥) التخالف المركزي للقطع المكافئ هو : ى = ١ .

❖ **ملاحظة (٢):**

نقول أن القطع المكافئ في وضع قياسي نموذجي في الحالات التالية :

١) إذا كانت معادلة القطع على احد أشكال القطع الأربع السابقة .

٢) رأس القطع و(٠ ، ٠) وبؤرته على احد أشكال القطع الأربع السابقة .

٣) رأس القطع و(٠ ، ٠) ودليلة على احد أشكال القطع الأربع السابقة .

٤) بؤرة القطع ودليلة على احد أشكال القطع الأربع السابقة .

٥) رأس القطع و(٠ ، ٠) ومحوره احد المحورين الاحداثيين .

● **تنبيه هام:** إذا كان القطع المكافئ في وضع غير قياسي فإننا نستخدم التعريف لإيجاد معادلة القطع وذلك بفرض النقطة ن (س ، ص) واقعة على القطع ونطبق قانوني البعد بين نقطتين وبعد نقطة عن مستقيم ونذكر فقط في الحالتين التاليتين :

١) عندما تكون بؤرة القطع ومعادلة الدليل(او احدهما) ليس على احد أشكال القطع الأربع السابقة .
٢) عندما تكون النقطة و(٠ ، ٠) لا تنصف المسافة بين البؤرة والدليل (أي ليست رأس القطع) .

تمرين: ١) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٢ ، ٣) ومعادلة دليله: س + ص + ١ = ٠ ؟
٢) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٥ ، ٣) ومعادلة دليله: ص = ١ ؟ (وزاري ٢٠٠٧/٢٠٠٨م)
٣) اوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (ـ٣ ، ٠) ومعادلة دليله: س = ١ ؟ (وزاري ٢٠١٢/٢٠١٣م)

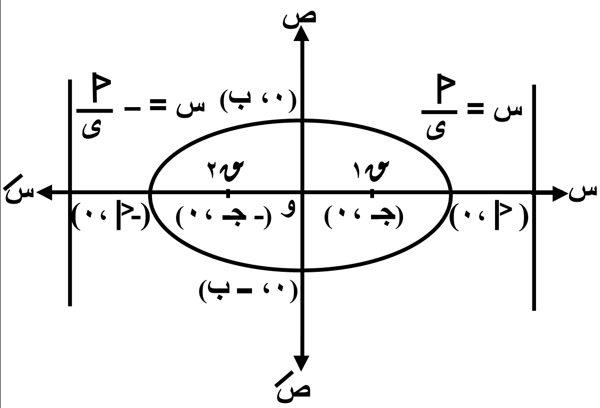
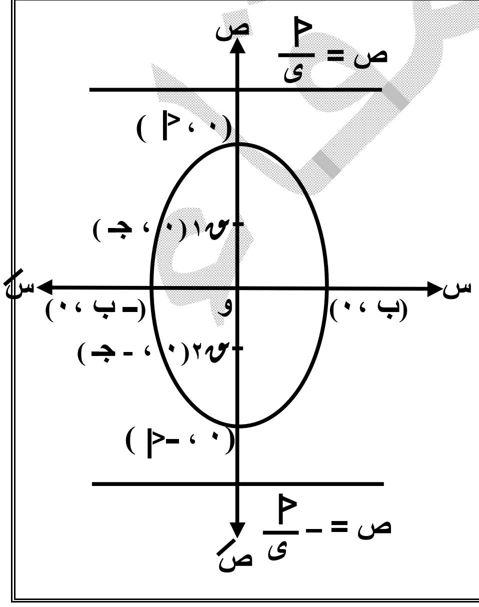
٢) القطع النـــاقص:

تعريفة: هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى يساوي طولاً "ثابتاً" .

تسمى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الناقص .

ويسمى الطول الثابت (٢ أ) طول المحور الأكبر .

❖ **صفات الصورتان القياسيتان لمعادلتى القطع الناقص الذى مركزة نقطة الأصل و (٠، ٠):**

الصــفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$	$\frac{س^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} = ١$
الرأسان	(± أ ، ٠)	(٠ ، ± أ)
البؤرتان	(± جـ ، ٠)	(٠ ، ± جـ)
الدليـلان	$س = \pm \frac{أ}{ى} = \pm \frac{أ^{٢}}{جـ}$	$ص = \pm \frac{أ}{ى} = \pm \frac{أ^{٢}}{جـ}$
التخالف المركزي	$ى = \frac{جـ}{أ}$	$ى = \frac{جـ}{أ}$
طول المحور الأكبر	٢أ	٢أ
طول المحور الأصغر	٢ب	٢ب
البعد البؤري	٢جـ	٢جـ
محورا القطع	الأكبر هو المحور السيني الأصغر هو المحور الصادي	الأكبر هو المحور الصادي الأصغر هو المحور السيني
البعد بين الدليلين	٢س	٢ص
الرســــــم		

تسميات:

١) يسمى المحور الاحداثي الذي تقع علية البؤرتين بالمحور الأكبر او (المحور البؤري)

وطوله يساوي ٢ م ، والمحورالاخر يسمى المحور الأصغر وطوله يساوي ٢ب .

٢) تسمى النقطة و (٠ ، ٠) نقطة الأصل (نقطة تقاطع محوري القطع) بمركز القطع الناقص .

❖ ملاحظة (١):

١) يمكن التعرف على القطع الناقص من معادلته نموذج أول او نموذج ثاني من

خلال المقام الأكبر ، فإذا كان المقام الأكبر هو مقام $س^٢$ فان القطع نموذج أول ، أما

إذا كان المقام الأكبر هو مقام $ص^٢$ فان القطع نموذج ثاني .

٢) في القطع الناقص $م^٢$ دائما" وأبدا" هو مقام المحور الأكبر للقطع .

٣) العلاقة بين الأطوال م ، ب ، جـ في القطع الناقص هي :

$ب^٢ = م^٢ - جـ^٢$ ، م > جـ ، م $\gneq$ ب

٤) إذا كان م = ب فإن القطع يمثل دائرة .

٥) التخالف المركزي للقطع الناقص اصغر من الواحد أي أن : $ى = \frac{جـ}{م} < ١$ (لأن جـ < م) .

❖ ملاحظة (٢):

يكون القطع الناقص في وضع قياسي نموذجي إذا توفرت فيه الحالات التالية :

١) إذا كانت معادلة القطع على إحدى الصورتين السابقتين .

٢) بؤرتاه على الصورة (± جـ ، ٠) أو (٠ ، ± جـ) .

٣) رأساه على الصورة (± م ، ٠) أو (٠ ، ± م) .

٤) معادلتي دليلاه : $س = ± \frac{م}{ى} = ± \frac{م^٢}{جـ}$ او $ص = ± \frac{م}{ى} = ± \frac{م^٢}{جـ}$.

٥) محوراه هما محوري الإحداثيات .

❖ **ملاحظة (٣):**

يمكن إيجاد معادلة القطع الناقص نموذج أول او ثاني إذا توفرت إحدى المعلومات التالية:

١) إحداثي الرأسان وإحداثي البؤرتان .

٢) إحداثي الرأسان والتخالف المركزي (ى) .

٣) إحداثي البؤرتان والتخالف المركزي (ى) .

٤) إحداثي الرأسان ومعادلتي دليلاه (او إحدى معادلتي دليلاه) .

٥) إحداثي البؤرتان ومعادلتي دليلاه (او إحدى معادلتي دليلاه) .

٦) إحداثي الرأسان ونقطة يمر بها القطع .

٧) إحداثي البؤرتان ونقطة يمر بها القطع .

٨) إحداثي الرأسان وطول المحور الأصغر(او نصفه) .

٩) إحداثي البؤرتان وطول المحور الأكبر (او نصفه) .

١٠) إحداثي البؤرتان وطول المحور الأصغر(او نصفه) .

١١) التخالف المركزي والبؤرتان على احد المحورين الاحداثيين ونقطة يمر بها القطع .

١٢) نقطتين يمر بهما القطع ومحورا القطع هما محورا الإحداثيات .

١٣) التخالف المركزي ومعادلتي دليلاه (او إحدى معادلتي دليلاه) .

١٤) طول المحور الأكبر (او نصفه) وينطبق على احد المحورين وطول المحور الأصغر (او نصفه) ومركز القطع نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

١٥) طول المحور الأكبر(او نصفه) وينطبق على احد المحورين والبعد البؤري ومركزه (٠، ٠) .

١٦) طول المحور الأصغر(او نصفه)وينطبق على احد المحورين والبعد البؤري ومركزه(٠، ٠) .

١٧) طول المحور الأكبر(او نصفه) وينطبق على احد المحورين والبعد بين دليليه ومركزه(٠، ٠) (تمرين محلول)

وغيرها ....

- **تنبيه هام:**

إذا كانت بؤرتي القطع الناقص ليست على الصورة (± جـ ، ٠)و (٠ ، ± جـ)فيصبح القطع في وضع غير قياسي نموذجي ولإيجاد معادلته نستخدم التعريف وذلك بفرض النقطة ن (س ، ص) واقعة على القطع و بمعلومية طول المحور الأكبر (الطول الثابت) ، او طول المحور الأصغر ونطبق قانون البعد بين نقطتين .

تمرين: ١) اوجد معادلة المنحني الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٠) يساوي ١٠ ؟

٢) اوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٢ ، ٥) ، (ـ٤ ، ٥) وطول محوره الأصغر ٨ وحدات طول ؟

❖ **تمرين محلول(١) (وزاري ٢٠١٢/٢٠١٣ م):**

اوجد معادلة القطع الناقص الذي طول نصف محوره الأكبر = ٤ ، والبعد بين دليليه = ١٦ ، ومركزه (٠ ، ٠) ومحور تناظره المحور السيني ثم ارسمه ؟

الحل:

∵محور تناظر القطع (المحور الأكبر) هو المحور السيني فالقطع من النموذج الأول

ومعادلته على الصورة : $\frac{س^٢}{ا^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ ،

∵طول نصف محوره الأكبر = ٤ ∴ $\boxed{ا = ٤}$ ⟸ $ا^٢ = ١٦$ ،

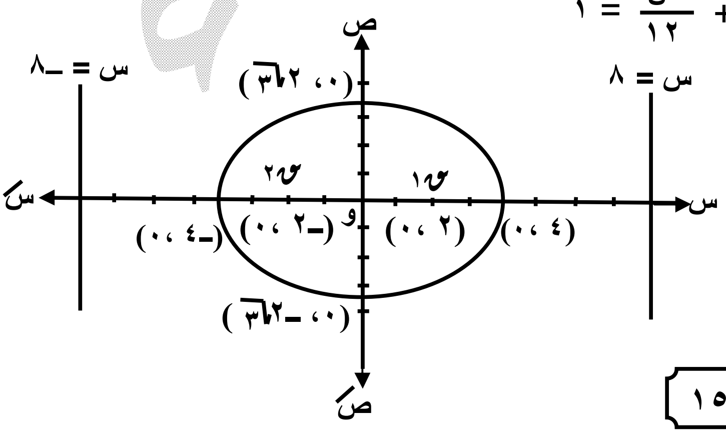
∵ البعد بين دليليه = ١٦ ∴ ٢س = ١٦ ⟸ س = ± ٨ (معادلة الدليلين)

∵ معادلة الدليلين هي : س = ± $\frac{ا^٢}{جـ}$ ∴ $\cancel{±}$ ٨ = $\cancel{±}$ $\frac{ا^٢}{جـ}$ (نعوض بقيمة $ا^٢ = ١٦$)

∴ ٨ = $\frac{١٦}{جـ}$ ⟸ ٨ جـ = ١٦ ∴ $\boxed{جـ = ٢}$

∵ $ب^٢ = ا^٢ - جـ^٢$ ⟸ $ب^٢ = ١٦ - ٤$ $\boxed{ب^٢ = ١٢}$ ⟸ ب = $\sqrt{١٢}$ = ٢$\sqrt{٣}$

∴ معادلة القطع الناقص المطلوبة هي : $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{١٢} = ١$



❖ **ملاحظة (٤):**

اذا كانت المعادلة القياسية للقطع الناقص معلومة نستطيع أن نوجد جميع الصفات لهذا القطع .

❖ **تمرين محلول(٢) (وزاري ٢٠١١/٢٠١٢ م):**

إذا كان البعد البؤري لقطع ناقص يساوي نصف البعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر ، فأوجد التخالف المركزي للقطع ؟

الحل:

∵ البعد البؤري $|\text{ب}_1\text{ب}_2| = 2\text{جـ}$ وليكن طرفي المحورين هما النقطتان (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

(أي نفرض أن القطع من النموذج الأول)

∵ $2\text{جـ} = \frac{1}{2}$ (البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب))

∴ $2\text{جـ} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{أ} - 0)^2 + (0 - \text{ب})^2} \Leftarrow 2\text{جـ} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$ (بتربيع الطرفين)

∴ $4\text{جـ}^2 = \frac{1}{4}(\text{أ}^2 + \text{ب}^2) \Leftarrow 16\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$ .... (١)

∴ $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$ (نعلم مسبقا") .... (٢) بجمع المعادلتين:

∴ $17\text{جـ}^2 = 2\text{أ}^2 \Leftarrow \text{أ}^2 = \frac{17}{2}\text{جـ}^2 \Leftarrow \text{أ} = \sqrt{\frac{17}{2}}\,\text{جـ}$

∴ التخالف المركزي $(e) = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\cancel{\text{جـ}}}{\sqrt{\frac{17}{2}}\,\cancel{\text{جـ}}} = \sqrt{\frac{2}{17}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$ #

❖ **ملاحظة:** يمكن حل التمرين والحصول على النتيجة نفسها إذا اعتبرنا أن القطع من النموذج الثاني أي أن طرفي المحورين هما النقطتان : (٠ ، أ) ، (ب ، ٠) .

تمرين: (وزاري ٢٠١١/٢٠١٢ م):

قطع ناقص بؤرتاه (٠ ، ±٣) ، وطول محوره الأكبر يساوي ضعف طول محوره الأصغر ، اوجد معادلته ؟

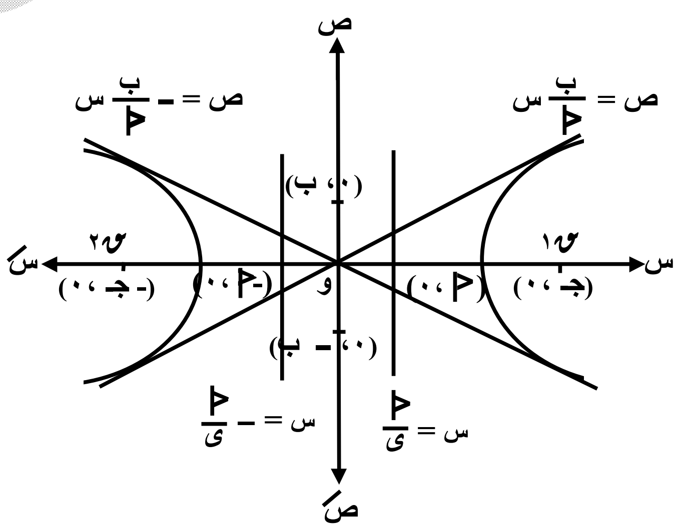
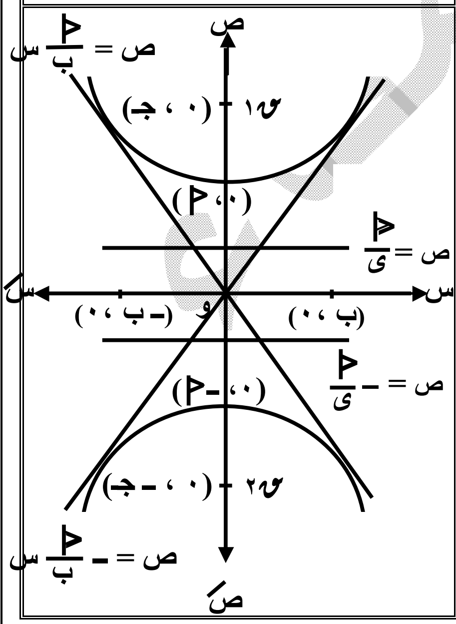
٣) القطع الـزائـــــــــد:

تعريفة: هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى يساوي طولاً" ثابتاً" .

تسمى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع الزائـد .

ويسمى الطول الثابت (٢ أ) طول المحور الأكبر .

❖ **صفات الصورتان القياسيتان لمعادلتي القطع الزائـد الذي مركزة نقطة الأصل و (٠ ، ٠):**

الصـفات	النموذج الأول	النموذج الثاني
المعادلة	$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$	$\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$
الرأسان	(± أ ، ٠)	(٠ ، ± أ)
البؤرتان	(± جـ ، ٠)	(٠ ، ± جـ)
الدليـلان	$س = \pm \frac{أ}{ى} = \pm \frac{أ^{٢}}{جـ}$	$ص = \pm \frac{أ}{ى} = \pm \frac{أ^{٢}}{جـ}$
التخالف المركزي	$ى = \frac{جـ}{أ}$	$ى = \frac{جـ}{أ}$
طول المحور القاطع	٢أ	٢أ
طول المحور المرافق	٢ب	٢ب
البعد البؤري	٢جـ	٢جـ
محورا القطع	القاطع(البؤري) هو المحور السيني المرافق(غير القاطع) هو المحور الصادي	القاطع(البؤري) هو المحور الصادي المرافق(غير القاطع)هو المحور السيني
البعد بين الدليلين	٢س	٢ص
المستقيمان المقاربان	$ص = \pm \frac{ب}{أ} س$	$ص = \pm \frac{أ}{ب} س$
الرسـم		

❖ تسميات:

١) يسمى المحور الاحداثي الذي تقع علية البؤرتين بالمحور القاطع او(المحور البؤري) وطوله يساوي ٢أ ، والمحورالاخر يسمى المحور المرافق (غير القاطع) وطوله يساوي ٢ب .

٢) تسمى النقطة و (٠ ، ٠) نقطة الأصل (نقطة تقاطع محوري القطع) بمركز القطع الزائـــد .

❖ ملاحظة (١):

١) يمكن التعرف على القطع الزائـــد من معادلته نموذج أول او نموذج ثاني من خلال إشارة $س^{٢}$ ، فإذا كانت الإشارة موجبة فان القطع نموذج أول ، أما إذا كانت الإشارة سالبة فان القطع نموذج ثاني .

٢) في القطع الزائـــد أدائما" وأبدا" مقام الحد الأول الموجب سواء كبرت أم صغرت .

٣) العلاقة بين الأطوال أ ، ب ، جـ في القطع الزائـــد هي :

$ب^{٢} = جـ^{٢} - أ^{٢}$ ، جـ > أ .

٤) إذا كان أ= ب فإن القطع يسمى قطع زائـد متساوي الساقين وتخالف المركزي = $\sqrt{٢}$.

٥) التخالف المركزي للقطع الزائـــد اكبر من الواحد أي أن : $ى = \frac{جـ}{أ} > ١$ (لأن جـ > أ) .

٦) يتميز القطع الزائـــد عن القطع الناقص بوجود مستقيمين يسميان المستقيمان المقاربان حيث يتقاطعان في مركز القطع و (٠ ، ٠) .

❖ ملاحظة (٢):

إذا كانت المعادلة القياسية للقطع الزائـــد معلومة نستطيع أن نوجد جميع الصفات لهذا القطع .

ملاحظة (٣):

يمكن إيجاد معادلة القطع الزائـــد نموذج أول او ثاني إذا توفرت إحدى المعلومات التالية:

١) إحداثي الرأسان وإحداثي البؤرتان .

٢) إحداثي الرأسان والتخالف المركزي (ى) .

٣) إحداثي البؤرتان والتخالف المركزي (ى) .

٤) إحداثي الرأسان ومعادلتي دليلاه (او إحدى معادلتي دليلاه) .

٥) إحداثي البؤرتان ومعادلتي دليلاه (او إحدى معادلتي دليلاه) .

٦) إحداثي الرأسان ومعادلتي مستقيمة المقاربان .

٧) إحداثي البؤرتان ومعادلتي مستقيمة المقاربان .

٨) معادلتي دليلاه (او إحدى معادلتي دليلاه) ومعادلتي مستقيمة المقاربان .

٩) إحداثي الرأسان ونقطة يمر بها القطع .

١٠) إحداثي البؤرتان ونقطة يمر بها القطع .

١١) إحداثي الرأسان وطول المحور المرافق (او نصفه) .

١٢) إحداثي البؤرتان وطول المحور القاطع (او نصفه) .

١٣) إحداثي البؤرتان وطول المحور المرافق (او نصفه) .

١٤) التخالف المركزي والبؤرتان على احد المحورين الاحداثيين ونقطة يمر بها القطع .

١٥) نقطتين يمر بهما القطع ومحورا القطع هما محورا الإحداثيات .

١٦) التخالف المركزي ومعادلتي دليلاه (او إحدى معادلتي دليلاه) .

١٧) طول المحور القاطع (او نصفه) وينطبق على احد المحورين وطول المحور المرافق (او نصفه) ومركز القطع نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

١٨) طول المحور القاطع(او نصفه) وينطبق على احد المحورين والبعد البؤري ومركزه (٠، ٠) .

١٩) طول المحور المرافق(او نصفه)وينطبق على احد المحورين والبعد البؤري ومركزه(٠، ٠) .

٢٠) طول المحور القاطع(او نصفه)وينطبق على احد المحورين والبعد بين دليليه ومركزه(٠، ٠)

وغيرها ....

- **<u>تنبيه هام:</u>**

إذا كانت بؤرتي القطع الزائـــد ليست على الصورة (± جـ ، ٠) او (٠ ، ± جـ) فيصبح القطع في وضع غير قياسي نموذجي ولإيجاد معادلته نستخدم التعريف وذلك بفرض النقطة ن (س ، ص) واقعة على القطع و بمعلومية طول المحور القاطع (الطول الثابت) ونطبق قانون البعد بين نقطتين .

<u>تمرين:</u> اوجد معادلة المنحني الذي ترسمه النقطة ن التي تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها عن النقطتين (٠ ، ٠) ، (ـ١٠ ، ٠) يساوي ٨ وحدات طول ؟

❖ **<u>تمرين محلول (وزاري ٢٠١١/٢٠١٢ م):</u>**

قطع مخروطي بؤرتاه (± ١٥، ٠) ، وتخالفه المركزي ى = $\frac{٥}{٤}$ ، اوجد معادلة القطع ثم ارسمه ؟

<u>الحل:</u>

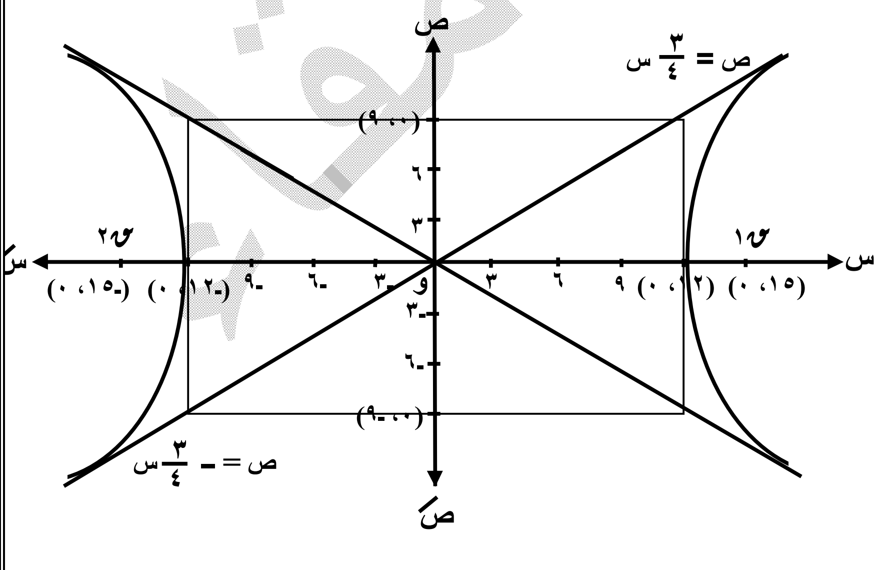
∵ بؤ(± ١٥، ٠) = (± جـ ، ٠) ⟸ جـ = ١٥ ⟸ $\boxed{\text{جـ}^2 = ٢٢٥}$

∵ ى = $\frac{٥}{٤}$ > ١ فالقطع المخروطي قطع زائد من النموذج الأول ومعادلته على الصورة : $\frac{\text{س}^2}{\text{ﺃ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$

∵ ى = $\frac{\text{جـ}}{\text{ﺃ}}$ = $\frac{٥}{٤}$ ⟸ $\frac{١٥}{\text{ﺃ}}$ = $\frac{٥}{٤}$ ⟸ $\cancel{٥}$ ﺃ = $\cancel{١٥}^{٣}$ × ٤ ⟸ ﺃ = ١٢ ⟸ $\boxed{\text{ﺃ}^2 = ١٤٤}$

∵ ب² = جـ² ـ ﺃ² ⟸ ب² = ٢٢٥ ـ ١٤٤ = ٨١ ⟸ $\boxed{\text{ب}^2 = ٨١}$ ⟸ ب = ٩

∴ معادلة القطع المطلوبة هي : $\frac{\text{س}^2}{١٤٤} - \frac{\text{ص}^2}{٨١} = ١$



❖ **<u>ملاحظة على الرسم:</u>**

لكي يكون الرسم صحيح وبدقة عالية وتحديد مدى فتحة القطع الزائد يفضل رسم مربع او مستطيل يقطع طرفي محوري القطع في منتصفات أضلاعه أي في النقاط (±ﺃ ، ٠) ، (٠، ± ب) ثم نرسم المستقيمان المقاربان المتقاطعان في مركز القطع و(٠ ، ٠) وهما عبارة عن أقطار لهذا المستطيل ثم نرسم القطع ، وبنفس الطريقة في النموذج الثاني .

رابعا": قوانيـــــــن في الإحتمــــــــــالات

١) :العمليات علـــى الحـــوادث

اذا كانت أ ، ب حوادث في فضاء العينة ع فان من أهم العمليات التي تجري على الحوادث العشوائية هي الموضحة في الجدول التالي والذي يمثل الحادثة وما ترمز (تـدل) علية الحادثة :

الرقم	الـــحـــادثـــــــة	ما ترمز (تـدل) علية الحادثة
١	$\overline{\text{أ}}$ (مكملة أ) حيث : حا ($\overline{\text{أ}}$) = ١ ــ حا (أ)	حادثة عدم وقوع أ حيث : أ ∩ $\overline{\text{أ}}$ = φ ، حا (أ) = ١ ــ حا ($\overline{\text{أ}}$)
٢	أ ∪ ب (اتحاد الحوادث)	حادثة وقوع احدى الحادثتين أ ، ب على الأقل او: حادثة وقوع احدهما على الأقل او: حادثة وقوع أ او ب او كليهما
٣	أ ∩ ب (تقاطع الحوادث)	حادثة وقوع أ و ب معا" او: حادثة وقوع أ ، ب معا" او: حادثة وقوعهما معا"
٤	أ ـ ب = أ ∩ $\overline{\text{ب}}$ = أ $\overline{\text{ب}}$ (الفرق بين الحادثتين)	حادثة وقوع أ وعدم وقوع ب او: حادثة وقوع أ فقط
٥	ب ـ أ = ب ∩ $\overline{\text{أ}}$ = ب $\overline{\text{أ}}$	حادثة وقوع ب وعدم وقوع أ او: حادثة وقوع ب فقط
٦	(أ ∪ ب)′	حادثة عدم وقوع أ او ب او: حادثة عدم وقوع احدهما على الأقل
	(أ ∪ ب)′ = $\overline{\text{أ}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$ = $\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$	حادثة عدم وقوع أ وعدم وقوع ب او: حادثة عدم وقوع أيا" منهما
٧	(أ ∩ ب)′	حادثة عدم وقوع أ ، ب او: حادثة عدم وقوعهما معا"
	(أ ∩ ب)′ = $\overline{\text{أ}}$ ∪ $\overline{\text{ب}}$	حادثة عدم وقوع أ او عدم وقوع ب او: حادثة وقوع احدهما على الأكثر
٨	(أ ـ ب) ∪ (ب ـ أ) = أ $\overline{\text{ب}}$ ∪ ب $\overline{\text{أ}}$	حادثة وقوع إحدى الحادثتين فقط معنى آخر: (حادثة وقوع أ وعدم وقوع ب او حادثة وقوع ب وعدم وقوع أ)
	(أ ـ ب) ∪ (ب ـ أ)= (أ ∪ ب) ـ (أ ∩ ب)	حادثة وقوع أ او ب وليس كليهما
	(أ ـ ب) ∪ (ب ـ أ)= (أ ∪ ب) ∩ (أ ب)′	حادثة وقوع احدهما على الأقل وعدم وقوعهما معا"

٢): مفاهـــيم أوليــة في الإحتـــــــــمال:

١) حا (ع) = ١ (إحتمال الحادثة الأكيدة = إحتمال فضاء العينة = ١)

٢) حا (ϕ) = ٠ (احتمال الحادثة المستحيلة = صفر)

٣) حا (أ) = ١ ـ حا(أ̅) ، حا (أ̅) = ١ ـ حا(أ)

٤) حا(أ ∩ ب) = ٠ (عندما الحادثتين أ ، ب متنافيتين ، لأن الحادثتين المتنافيتين تقاطعهم = ϕ)

٥) حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) ـ حا (أ ∩ ب) (قانـون الاحتـمال الكـلي)

ومنه هذه النتائج :

❖ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) (عندما الحادثتين أ ، ب متنافيتين ، رقم ٤)

❖ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) (عندما تكون ب ⊂ أ ، يعني أ∩ ب = ب)

❖ حا (أ ∪ ب) = حا (ب) (عندما تكون أ ⊂ ب ، يعني أ ∩ ب = أ)

٦) حا(أ ∪ ب)′ = حا (أ̅ ∩ ب̅)

٧) حا(أ ∩ ب)′ = حا (أ̅ ∪ ب̅)

٨) حا (أ ∩ ب̅) = حا (أ) ـ حا (أ ∩ ب) وتكتب أيضا" حا (أ ب̅) = حا (أ) ـ حا (أ ب)

ومنه هذه النتائج:

❖ حا (أ ب̅) = حا (أ) (عندما الحادثتين أ ، ب متنافيتين ، يعني أ∩ ب = ϕ ، رقم ٤)

❖ حا (أ ب̅) = حا (أ) ـ حا (ب) (عندما تكون ب ⊂ أ ، يعني أ∩ ب = ب)

❖ حا (أ ب̅) = ٠ (عندما تكون أ ⊂ ب ، يعني أ∩ ب = أ)

٩) حا (ب ∩ أ̅) = حا (ب) ـ حا (أ∩ ب) وتكتب أيضا" حا (ب أ̅) = حا (ب) ـ حا (أ ب)

ومنه هذه النتائج:

❖ حا (ب أ̅) = حا (ب) (عندما الحادثتين أ ، ب متنافيتين ، رقم ٤)

❖ حا (ب أ̅) = حا (ب) ـ حا (أ) (عندما تكون أ ⊂ ب ، يعني أ∩ ب = أ)

❖ حا (ب أ̅) = ٠ (عندما تكون ب ⊂ أ ، يعني أ∩ ب = ب)

❖ **تمرين محلول:**

اذا كانت أ ، ب حادثتين في فضاء العينة ع وكان : حا (أ) = ٠,٦ ، حا (ب) = ٠,٧٥ ، حا (أ ب) = ٠,٤ .

فاوجد احتمال :

١) عدم وقوع الحادثة أ .

٢) عدم وقوع الحادثتين أ ، ب معا" .

٣) عدم وقوع أ او ب .

٤) وقوع أ او ب وليس وقوع كليهما .

٥) عدم وقوع أيا" من الحادثتين أ او ب .

٦) وقوع الحادثة أ وعدم وقوع الحادثة ب .

٧) وقوع الحادثة ب وعدم وقوع الحادثة أ .

الحـــل:

١) حا ($\overline{\text{أ}}$) = ١ ـ حا (أ) = ١ ـ ٠,٦ = ٠,٤

٢) حا (أ ب)' = ١ ـ حا (أ ب) = ١ ـ ٠,٤ = ٠,٦

٣) حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) ـ حا (أ ب)

= ٠,٦ + ٠,٧٥ ـ ٠,٤ = $\frac{٦}{١٠} + \frac{٧٥}{١٠٠} - \frac{٤}{١٠} = \frac{٦٠ + ٧٥ - ٤٠}{١٠٠} = \frac{٩٥}{١٠٠}$ = ٠,٩٥

٤) احتمال حادثة وقوع أ او ب وليس وقوع كليهما = حا (أ $\overline{\text{ب}}$ ∪ ب $\overline{\text{أ}}$)

حا (أ $\overline{\text{ب}}$ ∪ ب $\overline{\text{أ}}$) = حا [(أ ∪ ب) ـ (أ ب)] = حا (أ ∪ ب) ـ حا (أ ب)

= ٠,٩٥ ـ ٠,٤ = ٠,٥٥

حل اخر:

حا (أ $\overline{\text{ب}}$ ∪ ب $\overline{\text{أ}}$) = حا (أ $\overline{\text{ب}}$) + حا (ب $\overline{\text{أ}}$) ـ حا (أ $\overline{\text{ب}}$ ∩ ب $\overline{\text{أ}}$) (قانون الاحتمال الكلي)

= حا (أ) ـ حا (أ ب) + حا (ب) ـ حا (أ ب) ـ ٠ (أ $\overline{\text{ب}}$ ∩ ب $\overline{\text{أ}}$ = ϕ)

= حا (أ) + حا (ب) ـ ٢حا (أ ب)

= ٠,٦ + ٠,٧٥ ـ ٢ × ٠,٤ = $\frac{٦}{١٠} + \frac{٧٥}{١٠٠} - \frac{٨}{١٠} = \frac{٦٠ + ٧٥ - ٨٠}{١٠٠}$

= $\frac{٥٥}{١٠٠}$ = ٠,٥٥

٥) حا (أ ∪ ب)' = ١ ـ حا (أ ∪ ب) = ١ ـ ٠,٩٥ = ١ ـ $\frac{٩٥}{١٠٠} = \frac{١٠٠ - ٩٥}{١٠٠} = \frac{٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٥

٦) حا (أ $\overline{\text{ب}}$) = حا (أ) ـ حا (أ ب) = ٠,٦ ـ ٠,٤ = ٠,٢

٧) حا (ب $\overline{\text{أ}}$) = حا (ب) ـ حا (أ ب) = ٠,٧٥ ـ ٠,٤ = ٠,٣٥

٣): دالـــــــة الاحتمـــــــال:

لتكن (ع) فضاء العينة لتجربة عشوائية ، ك مجموعة أحداث هذا الفضاء ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فأن الدالة : حـا : ك ⟵ ح تسمى دالة إحتمال إذا توفرت فيه المسلمات التالية :

١. حـا (أ) ≥ ٠ ∀ أ ∈ ك

٢. حـا (ع) = ١

٣. إذا كان أ ⊂ ع ، ب ⊂ ع وكانت أ ، ب حادثتين متنافيتين فـــأن :

حـا (أ ∪ ب) = حـا (أ) + حـا (ب)

---

٤): الاحتمـــال الشرطـــي:

لتكن أ ، ب حادثتين في ((ع)) فـأن رمز الاحتمال الشرطي هو : حا (أ | ب)

ويقرأ احتمال وقوع ((أ)) بشرط وقوع ((ب)) ، حيث أن :

١) حا (أ | ب) = $\frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (ب)}}$ ، حا (ب) ≠ ٠

٢) حا (ب | أ) = $\frac{\text{حا (أ ب)}}{\text{حا (أ)}}$ ، حا (أ) ≠ ٠

❖ **نتائـــج:**

١) اذا كانت أ ⊂ ب أي (أ∩ ب = أ) فان :

❖ حا (أ | ب) = $\frac{\text{حا (أ)}}{\text{حا (ب)}}$

❖ حا (ب | أ) = ١

٢) اذا كانت ب ⊂ أ أي (ب ∩ أ = ب) فان :

❖ حا (أ | ب) = ١

❖ حا (ب | أ) = $\frac{\text{حا (ب)}}{\text{حا (أ)}}$

٣) اذا كانت أ ، ب حادثتان متنافيتان أي (أ∩ ب = ϕ) فان :

❖ حا (أ | ب) = ٠

❖ حا (ب | أ) = ٠

٥): قانون حـــاصل الضرب الشرطي:

وهو ناتج من قانوني الاحتمال الشرطي من ضرب الطرفين في الوسطين وهـو :

١) حا (أ ب) = حا (ب) حا (أ | ب)

٢) حا (أ ب) = حا (ب) حا (ب | أ)

ويتوقف استخدامها حسب أي الحادثتين قد وقعت أولا"

---

٦): الحوادث المستقلة:

إذا كانت أ ، ب حادثتين مستقلتين فــأن : حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب)

وهو الشرط اللازم والكافي لاستقلال الحادثتين أ ، ب ، أي حدوث إحداهما لا يتأثر بحدوث (أو عدم) حدوث الأخرى .

❖ **نتـائــــج:**

اذا كانت أ ، ب مستقلتان فان :

١) $\overline{\text{أ}}$ ، ب مستقلتان أي أن : حـا ($\overline{\text{أ}}$ ب) = حا ($\overline{\text{أ}}$) × حا (ب) (تمرين محلول)

٢) أ ، $\overline{\text{ب}}$ مستقلتان أي أن : حـا (أ $\overline{\text{ب}}$) = حا (أ) × حا ($\overline{\text{ب}}$)

٣) $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ مستقلتان أي أن : حـا ($\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$) = حا ($\overline{\text{أ}}$) × حا ($\overline{\text{ب}}$)

❖ **تمرين محلول:**

اذا كانت أ ، ب مستقلتان ، فاثبت أن: $\overline{\text{أ}}$ ، ب مستقلتان ؟

الحـل: لكي تكون : $\overline{\text{أ}}$ ، ب مستقلتان يجب أن يتحقق شرط الاستقلال : حـا ($\overline{\text{أ}}$ ب) = حا ($\overline{\text{أ}}$) × حا (ب)

∵ حـا ($\overline{\text{أ}}$ ب) = حا (أ) ــ حا (أ ب) (مفاهيم أوليـة في الإحتمال رقم ٨)

∵ أ ، ب مستقلتان (معطى) أي أن: حا (أ ب) = حا (أ) × حا (ب)

∴ حـا ($\overline{\text{أ}}$ ب) = حا (أ) ــ حا (أ) × حا (ب)

= حا (أ) [١ ــ حا (ب)]

= حا (أ) × حا ($\overline{\text{ب}}$) حا ($\overline{\text{ب}}$) = ١ ــ حا (ب)

∴ حـا ($\overline{\text{أ}}$ ب) = حا ($\overline{\text{أ}}$) × حا (ب)

∴ $\overline{\text{أ}}$ ، ب مستقلتان

٧): قانون الاحتــمال الثنائى (توزيع ذي الحدين):

وهو احتمال وقوع الحادثة ((أ)) من النجاحات ((س)) في ((ن)) من المحاولات المكررة

وهو كالتالي:

$$\text{ح}(\text{أ}) = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times \text{ف}^{\text{ن}-\text{س}}$$

أو $$\text{ح}(\{\text{س}\}) = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times \text{ف}^{\text{ن}-\text{س}}$$

أو $$\text{ح}(\{\text{س}\}) = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times (1-\text{ح})^{\text{ن}-\text{س}}$$ (لأن : ف = ١ ــ ح)

حـــيث : ن : عدد المحاولات (عدد المرات المستقلة لإجراء التجربة)

س : عدد مرات النجاح

ح : احتمال النجاح

ف : احتمال الفشل

ملاحظة : ١) احتمال نجاح واحد على الأقل هو : $1 - \text{ف}^{\text{ن}}$

٢) احتمال الفشل في جميع المحاولات هو: $\text{ف}^{\text{ن}}$

---

٨) : قانون السحب بدون الإعادة:

نفرض أن لدينا صندوق يحتوي على ((ن)) شيئا" منها ن_1 من النوع الأول ، ن_2 من النوع الثاني

بحيث أن: $\text{ن}_1 + \text{ن}_2 = \text{ن}$ ، وإذا سحبنا ــ عشوائيا" ــ وبدون إعادة ((ر)) شيئا" .

فأن احتمال الحصول على ((س)) شيئا" من النوع الأول ((ن_1)) هــو:

$$\text{ح}(\text{س}) = \frac{\text{ق}^{\text{ن}_1}_{\text{س}} \times \text{ق}^{\text{ن}_2}_{\text{ر}-\text{س}}}{\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}$$

ملاحظة : عندما يكون السحب مع الإعادة يستخدم قانون الاحتمال الثنائي .

العلاقات بين النسب المثلثية

و

الأعداد المركبة

و

القطوع المخروطية

و

قوانين في الاحتمالات

و

قواعد الاشتقاق

و

قواعد في التكامل

لطلاب وطالبات الصف الثالث الثانوي (القسم العلمي)

جمع وإعداد الأستاذ: حسن برك بامقاء

خامساً: قواعـــــد الإشـــتـــقاق:ـ

م	نوع الدالة	الدالة	المشتقة
١	الدالة الثابتة	د(س) = جـ ، جـ عدد ثابت	دَ(س) = صفر
٢	دالة التطابق	د(س) = س	دَ(س) = ١
٣	الدالة الخطية	د(س) = أ س + ب ، أ ، ب ثابتين	دَ(س) = أ
٤	مجموع دالتين	(د + ر)َ (س)	دَ(س) + رَ(س)
٥	دوال القوى	د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$	دَ(س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-1}$
		د(س) = $[\text{ق(س)}]^{\text{ن}}$	دَ(س) = ن $[\text{ق(س)}]^{\text{ن}-1}$ × قَ(س)
٦	حاصل ضرب دالتين	د(س) = ق × ر	دَ(س) = قَ × ر + ق × رَ
٧	حاصل قسمة دالتين	د(س) = $\frac{\text{ق}}{\text{ر}}$ ، ر ≠ ٠	دَ(س) = $\frac{\text{قَ} \times \text{ر} - \text{ق} \times \text{رَ}}{\text{ر}^2}$
٨	دالة الجذر التربيعي	د(س) = $\sqrt{\text{ر(س)}}$	دَ(س) = $\frac{\text{رَ(س)}}{2\sqrt{\text{ر(س)}}}$
٩	تركيب دالتين	(ق ∘ د)َ(س)	قَ[د(س)] × دَ(س)
		(د ∘ ق)َ(س)	دَ[ق(س)] × قَ(س)
		ص = ق(ع) ، ع = د(س)	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ (قاعدة التسلسل)
١٠	الدالة الضمنية	بشرط أن جميع الحدود في طرف واحد .	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{(مشتقة الدالة على أساس أن ص ثابت)}}{\text{(مشتقة الدالة على أساس أن س ثابت)}}$
١١	الدالة اللوغاريتمية	ص = لـو د(س)	صَ = $\frac{\text{دَ(س)}}{\text{د(س)}}$
		ص = لـو س	صَ = $\frac{1}{\text{س}}$
١٢	الدالة الأسية	ص = $\text{أ}^{\text{د(س)}}$	صَ = $\text{أ}^{\text{د(س)}}$ × دَ(س) × لو أ
		ص = $\text{هـ}^{\text{د(س)}}$	صَ = $\text{هـ}^{\text{د(س)}}$ × دَ(س)
		ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$	صَ = $\text{هـ}^{\text{س}}$

❖ تـــابع قواعـــــــد الإشــتــــقاق:ـ

م	الدوال	الدالة	المشتقة
١٣	الــــدوال المثلثية	ص = جـــا س	صَ = جـتـا س
		ص = جـتـا س	صَ = ــ جـــا س
		ص = ظـــا س	صَ = قـــا^{٢}س
		ص = ظـتـا س	صَ = ــ قـتـا^{٢}س
		ص = قـــا س	صَ = قـــا س × ظـــا س
		ص = قـتـا س	صَ = ــ قـتـا س × ظـتـا س
		ص = جـــا أ س	صَ = أ جـتـا أ س (وهي صحيحة لكل النسب المثلثية)
		ص = أ جـــا س	صَ = أ جـتـا س (وهي صحيحة لكل النسب المثلثية)
		ص = جـــا [د(س)]	صَ = جـتـا [د(س)] × دَ (س) (موضحة بالمثال رقم ١) (وهي صحيحة لكل النسب المثلثية)
		ص = جـــا^{ن} س	صَ = ن جـــا$^{ن-١}$ س × جـتـا س (موضحة بالمثال رقم ٢) (وهي صحيحة لكل النسب المثلثية)
		ص = جـــا^{ن} د(س)	صَ = ن جـــا$^{ن-١}$ د(س) × جـتـا د(س) × دَ(س) (وهي صحيحة لكل النسب المثلثية) (موضحة بالمثال رقم ٣)
١٤	الصور المختلفة لدوال القوى	ص = س^{أ} (الأساس متغير والأس ثـابت)	صَ = أ س$^{أ-١}$ ، حيث أ ثـابت
		ص = أ^{س} (الأساس ثـابت والأس متغير)	صَ = أ^{س} ، حيث أ ثـابت
		ص = هـ^{أ} (الأساس ثـابت والأس متغير)	صَ = صفر ، حيث أ ، هـ ثـابتين
		ص = س^{س} (الأساس متغير والأس متغير)	لحساب (صَ) نقوم بإدخال اللوغاريتم على الطرفين . (موضحة بالمثال رقم ٤)

أمثـــلة:

١) ص = جـــا (٢س^{٣}) ⟸ صَ = جـتـا (٢س^{٣}) × ٦س^{٢} = ٦س^{٢} جـتـا (٢س^{٣}) .

٢) ص = جـــا^{٤}س ⟸ صَ = ٤ جـــا^{٣}س × جـتـا س = ٤ جـتـا س جـــا^{٣}س .

٣) ص = جـــا^{٦}(٣س^{٥} +٩س) ⟸ صَ = ٦جـــا^{٥} (٣س^{٥} +٩س) × جـتـا (٣س^{٥} +٩س) × (١٥س^{٤} + ٩) .

٤) ص = س^{س} ⟸ لوص = لو س^{س} ⟸ لوص = س لو س ⟸ $\frac{صَ}{ص}$ = لو س + س × $\frac{١}{س}$

∴ $\frac{صَ}{ص}$ = لو س + ١ ⟸ صَ = ص (١ + لوس) ⟸ صَ = س^{س} (١ + لوس) .

❖ معادلتي المماس والناظم (المستقيم العمودي على المماس):

معادلتي المماس والناظم (العمودي عليه) لمنحنى الدالة د عند النقطة (أ ، د (أ)) هما:

١) معادلة المماس هي:

$$\boxed{ص - د(أ) = دَ(أ)(س - أ)}$$

حيث دَ (أ) : هو ميل المماس عند س = أ (مشتقة الدالة عند نقطة التماس تساوي ميل المماس)

٢) معادلة الناظم هي:

$$\boxed{ص - د(أ) = \frac{-1}{دَ(أ)}(س - أ)}$$

حيث $\frac{-1}{دَ(أ)}$: هو ميل الناظم عند س = أ

ملاحظات:

١) ميل الناظم = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$ ، ميل المماس = $\frac{-1}{\text{ميل الناظم}}$.

٢) إذا كان ميل المماس يساوي صفر ،أي أن (دَ (أ) = ٠) فيكون ميل الناظم غير معرف ويساوي $\frac{-1}{صفر}$

في هذه الحالة يكون المماس يوازي محور السينات(مماس أفقي) ومعادلته هي : ص = د (أ) ،

ويكون الناظم يوازي محور الصادات ومعادلته هي : س = أ .

٣) إذا كان ميل المماس غير معرف ، أي أن (دَ (أ) غير معرفه) فيكون ميل الناظم يساوي صفر

في هذه الحالة يكون المماس يوازي محور الصادات(مماس رأسي) ومعادلته هي : س = أ ،

ويكون الناظم يوازي محور السينات ومعادلته هي : ص = د (أ) .

❖ قوانين اللوغاريتمات:

١) $لو_ج ج = ١$ ٢) $لو ١ = ٠$ ٣) $لو هـ = ١$

٤) $لو_ص س = \frac{لو س}{لو ص}$ ٥) $لو_ج ج^م = م$ ٦) $لو_ج \frac{1}{ب} = - لو_ج ب$

٧) $لو_هـ هـ^س = س$ ٨) $هـ^{لو س} = س$ (مهم) ٩) $هـ^{س لو ب} = ب^س$

١٠) $لو_ج أ^م = م لو_ج أ$ ١١) $لو_ج (أ × ب) = لو_ج أ + لو_ج ب$

١٢) $لو_ج \left(\frac{أ}{ب}\right) = لو_ج أ - لو_ج ب$ ١٣) $س = ص \Longleftrightarrow لو س = لو ص$

❖قاعدة في النهايات والمستقيمات المقاربة:

عند ايجاد النهاية لدالة كسرية عندما س ← $\pm\infty$ أي لإيجاد النهاية التالية:

$$\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{م}} \pm \text{س}^{\text{م}-1} \pm \text{س}^{\text{م}-2} \pm \ldots\ldots \pm \text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}} \pm \text{س}^{\text{ن}-1} \pm \text{س}^{\text{ن}-2} \pm \ldots\ldots \pm \text{ب}}$$

نميز بين ثلاث حالات :

١) إذا كان م > ن (أي درجة البسط اكبر من درجة المقام) فـان النهـاية تساوي $\pm\infty$.

مثال ١ :
$$\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^2+\text{س}-3}{\text{س}+5}=\pm\infty$$
(لهذه الدالة مستقيم مقارب راسي معادلته: س = ـ٥
ومستقيم مقارب مائل معادلته: ص= أس + ب)

مثال ٢ :
$$\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^3+2\text{س}^2-4\text{س}+8}{\text{س}^2+4}=\pm\infty$$
(لهذه الدالة مستقيم مقارب مائل فقط)

٢) إذا كان م = ن (أي درجة البسط تساوي درجة المقام) فـان النهـاية تساوي معامل أعلى أس في البسط على معامل أعلى أس في المقام:

مثال ١ :
$$\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{6\text{س}-7}{3\text{س}+2}=\frac{6}{3}=2$$
(لهذه الدالة مستقيم مقارب راسي معادلته: س = $-\frac{2}{3}$
ومستقيم مقارب أفقي معادلته: ص = ٢)

مثال ٢ :
$$\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{9\text{س}^2+5\text{س}-8}{\text{س}^2-3\text{س}+10}=9$$
(لهذه الدالة مستقيمان راسيان معادلتهما: س= ٥ ، س = ـ٢
ومستقيم مقارب أفقي معادلته: ص = ٩)

مثال ٣ :
$$\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}+1}{2\text{س}-4}=\frac{1}{2}$$
(لهذه الدالة مستقيم مقارب راسي معادلته: س = ٢
ومستقيم مقارب أفقي معادلته: ص = $\frac{1}{2}$)

٣) إذا كان م < ن (أي درجة البسط اصغر من درجة المقام) فـان النهـاية تساوي صفر :

مثال ١ :
$$\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{8\text{س}}{1-\text{س}^2}=\text{صفر}$$
(لهذه الدالة مستقيمان راسيان معادلتهما: س= ١ ، س = ـ١
ومستقيم مقارب أفقي معادلته: ص = ٠)

مثال ٢ :
$$\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{1}{\text{س}+3}=\text{صفر}$$
(لهذه الدالة مستقيم مقارب راسي معادلته: س = ـ٣
ومستقيم مقارب أفقي معادلته: ص = ٠)

مـــلاحـظـات:

١) المستقيمان المقاربان الأفقي والمائل لايجتمعان في دالـــة واحدة .
٢) يوجد المستقيم المقارب الرأسي في الدالة التي مجموعة تعريفها على الشكل ح / {جـ} ومعادلته هي: س= جـ .
٣) معادلة المستقيم المقارب الأفقي هي ص= ل وهو ناتج النهاية من الحالتين ٢ و ٣ (أي عندما م ≤ ن) .
٤) يوجد المستقيم المقارب المائل في الدالة التي تزيد درجة بسطها عن درجة مقامها بدرجة واحدة فقط .
٥) معادلة المستقيم المقارب المائل هي عبارة عن الناتج من قسمة البسط على المقام في الدالة الكسرية .
٦) لا توجد مستقيمات مقاربه في الدالة كثيرة الحدود .

سادسا": قواعـــــــد في التـــــكامــل:

١) قوانـيـن المجـمـوع:

١) $\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{أ} = \text{أ ن}$

٢) $\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{أ}\,\text{ر} = \text{أ}\ \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{ر}$

٣) $\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}} \left(\text{س}_{\text{ر}} + \text{ص}_{\text{ر}} \right) = \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{س}_{\text{ر}} + \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{ص}_{\text{ر}}$

٤) $\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{ر} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} + ١)}{٢}$

٥) $\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{ر}^{٢} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} + ١)(٢\text{ن} + ١)}{٦}$

٦) $\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{ر}^{٣} = \frac{\text{ن}^{٢}\,(\text{ن} + ١)^{٢}}{٤}$

---

٢) التـــكامل باستخدام التعريف(التــــكامل المحدد) او حساب المساحة التقريبية:

لحساب التكامل المحدد باستخدام التعريف (سـطـر : المساحة التقريبية) نستخدم القانون التالي:

$$\underset{\text{أ}}{\overset{\text{ب}}{\text{سـطـ}}} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س} = \lim_{\text{ن} \to \infty}\ \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر} = ١}{\text{مجـ}}}\ \text{د}\left(\text{س}^{*}_{\text{ر}} \right) \Delta\, \text{س}_{\text{ر}}$$

حيث: $\Delta\, \text{س}_{\text{ر}} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$ ، $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر}$

تمرين محلول:

باستخدام تعريف التكامل المحدد احسب $\int_{١}^{٣} (٣س^{٢} + ٢س - ٤)\ \text{ءس}$

الحل:

نجزئ الفترة [١ ، ٣] إلى ن فترة جزئية متساوية في الطول بحيث يكون $\Delta س_{ر} = \frac{ب - أ}{ن} = \frac{٣ - ١}{ن} = \frac{٢}{ن}$

نختار $س^{*}_{ر} = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر = ١ + \frac{٢}{ن} ر$

فيكون $د(س^{*}_{ر}) = ٣(١ + \frac{٢}{ن} ر)^{٢} + ٢(١ + \frac{٢}{ن} ر) - ٤$

$$= ٣(١ + \frac{٤}{ن} ر + \frac{٤}{ن^{٢}} ر^{٢}) + ٢ + \frac{٤}{ن} ر - ٤ = ٣ + \frac{١٢}{ن} ر + \frac{١٢}{ن^{٢}} ر^{٢} + \frac{٤}{ن} ر - ٢$$

$$= \frac{١٢}{ن^{٢}} ر^{٢} + \frac{١٦}{ن} ر + ١$$

$$\therefore \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} د(س^{*}_{ر}) \Delta س_{ر} = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} (\frac{١٢}{ن^{٢}} ر^{٢} + \frac{١٦}{ن} ر + ١) \frac{٢}{ن}$$

$$= \frac{٢}{ن} (\frac{١٢}{ن^{٢}} \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ر^{٢} + \frac{١٦}{ن} \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ر + ن)$$

$$= \frac{٢}{ن} [\frac{\cancel{١٢}^{٢}}{\cancel{ن^{٢}}_{ن}} \times \frac{\cancel{ن}(ن + ١)(٢ن + ١)}{\cancel{٦}} + \frac{\cancel{١٦}^{٨}}{\cancel{ن}} \times \frac{\cancel{ن}(ن + ١)}{\cancel{٢}} + ن]$$

$$= \frac{٢}{ن} [\frac{٢}{ن} (ن + ١)(٢ن + ١) + ٨(ن + ١) + ن]$$

$$= \frac{٢}{ن} [\frac{٢}{ن} (٢ن^{٢} + ٣ن + ١) + ٨ن + ٨ + ن] = \frac{٢}{ن} (\frac{٤ن^{٢} + ٦ن + ٢}{ن} + ٩ن + ٨)$$

$$= \frac{٢}{ن} (\frac{٤ن^{٢} + ٦ن + ٢ + ٩ن^{٢} + ٨ن}{ن}) = \frac{٢}{ن} (\frac{١٣ن^{٢} + ١٤ن + ٢}{ن})$$

$$\therefore \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} د(س^{*}_{ر}) \Delta س_{ر} = \frac{٢٦ن^{٢} + ٢٨ن + ٤}{ن^{٢}}$$

$$\because \int_{١}^{٣} (٣س^{٢} + ٢س - ٤)\ \text{ءس} = \text{نهـا}_{ن \to \infty} \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} د(س^{*}_{ر}) \Delta س_{ر}$$

$$= \text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{٢٦ن^{٢} + ٢٨ن + ٤}{ن^{٢}} = ٢٦ \text{ وحده مربعة}$$

٣) مـــبرهـــنات فى التكامـــل:

	المبرهنـــــة	مثـــال
	أولاً: التـــكـــامـــل المحـــدد	
١	$\int_{أ}^{ب} جـ \, ء س = جـ(ب - أ)$ ، حيث جـ ثـابت	$\int_{١}^{٣} ٥ \, ء س = ٥(٣ - ١) = ١٠$
٢	$\int_{أ}^{أ} د(س) \, ء س = \text{صفر}$	$\int_{٢}^{٢} (س + ١) \, ء س = \text{صفر}$
٣	$\int_{أ}^{ب} د(س) \, ء س = -\int_{ب}^{أ} د(س) \, ء س$	$\int_{-١}^{٤} س^{٢} \, ء س = -\int_{٤}^{-١} س^{٢} \, ء س$
٤	$\int_{أ}^{ب} ك \, د(س) \, ء س = ك \int_{أ}^{ب} د(س) \, ء س$ حيث ك ثـابت	$\int_{٠}^{١} ٩ س \, ء س = ٩ \int_{٠}^{١} س \, ء س$
٥	$\int_{أ}^{ب} [د_{١}(س) \pm د_{٢}(س)] \, ء س = \int_{أ}^{ب} د_{١}(س) \, ء س \pm \int_{أ}^{ب} د_{٢}(س) \, ء س$ (يمكن تعميمه لأكثر من دالتين)	$\int_{-٣}^{٠} (٣س^{٢} + ٢س) \, ء س = \int_{-٣}^{٠} ٣س^{٢} \, ء س + \int_{-٣}^{٠} ٢س \, ء س$
٦	$\int_{أ}^{ب} د(س) \, ء س = \int_{أ}^{جـ} د(س) \, ء س + \int_{جـ}^{ب} د(س) \, ء س$ حيث: أ < جـ < ب	$\int_{٢}^{٥} (س - ٣) \, ء س = \int_{٢}^{٣} (س - ٣) \, ء س + \int_{٣}^{٥} (س - ٣) \, ء س$
٧	$\int_{أ}^{ب} د(س) \, ء س \geq ٠$ ، إذا كانت $د(س) \geq ٠$ ، $\forall$ س $\in$ [أ ، ب]	$\int_{١}^{٤} (س^{٣} - ١) \, ء س \geq ٠$ ، لأن $س^{٣} - ١ \geq ٠$ ، $\forall$ س $\in$ [١ ، ٤]
٨	$\int_{أ}^{ب} د_{١}(س) \, ء س \geq \int_{أ}^{ب} د_{٢}(س) \, ء س$ ، إذا كانت : $د_{١}(س) \geq د_{٢}(س)$ $\forall$ س $\in$ [أ ، ب]	$\int_{٠}^{١} \sqrt{س} \, ء س \geq \int_{٠}^{١} س^{٢} \, ء س$ لأن $\sqrt{س} \geq س^{٢}$ $\forall$ س $\in$ [٠ ، ١]
٩	(مبرهنة الحدين الأعلى والأدنى) $ك(ب - أ) \leq \int_{أ}^{ب} د(س) \, ء س \leq ل(ب - أ)$ إذا كانت : $ك \leq د(س) \leq ل$ $\forall$ س $\in$ [أ ، ب] ك ، ل عددين حقيقيين ، ك (ب ــ أ) الحد الأدنى للتكامل ل (ب ــ أ) الحد الأعلى للتكامل	اوجد الحدين الأعلى والأدنى لـ $\int_{٢}^{٤} (س^{٢} + ٢) \, ء س$ $\because ٢ \leq س \leq ٤ \Leftarrow ٤ \leq س^{٢} \leq ١٦$ $\Leftarrow ٦ \leq س^{٢} + ٢ \leq ١٨$ $\therefore ٦(٤ - ٢) \leq \int_{٢}^{٤} (س + ٢) \, ء س \leq ١٨(٤ - ٢)$ $\therefore$ الحد الأدنى $= ٦ \times ٢ = ١٢$ الحد الأعلى $= ١٨ \times ٢ = ٣٦$

❖ تـــابع مـــــبرهـــنات في التكامــــل:

	المبرهنة	مثال
	ثانيا": التـكـامـل غيرا لمحــدد	
١٠	ل (س) = $\int$ د (س) ء س ، إذا وجدت دالـة ل بحيث : لَ (س) = د (س) $\forall$ س $\in$] أ ، ب [، فان : ل دالة أصلية ((تكامل غير محدد)) للدالة د على] أ ، ب [.	لتكن ل (س) = $س^{٤}$ + ث ، ث $\in$ ح ، د(س) = ٤$س^{٣}$ فان : لَ (س) = ٤$س^{٣}$ = د (س) أي أن : $\int$ ٤$س^{٣}$ ء س = $س^{٤}$ + ث = ل (س) (ث ثابت التكامل)
١١	$\int$ $س^{ن}$ ء س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ث ، ن $\in$ ح ، ن $\neq$ -١ إذا كان ن = -١ فان : $\int \frac{ء س}{س}$ = لو | س | + ث (قـــاعدة في التكامل)	١) $\int$ $س^{٥}$ ء س = $\frac{س^{٦}}{٦}$ + ث ٢) $\int$ $س^{\frac{١}{٣}}$ ء س = $\frac{س^{\frac{١}{٣}+١}}{\frac{١}{٣}+١}$ + ث = $\frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}$ + ث = $\frac{٣}{٤}$ $س^{\frac{٤}{٣}}$ + ث .
١٢	$\frac{ء}{ء س}$ ($\int$ د (س) ء س) = د (س)	لتكن د (س) = ٢س ، $\int$ ٢س ء س = $س^{٢}$ + ث $\frac{ء}{ء س}$ ($س^{٢}$ + ث) = ٢س = دَ (س) .
١٣	$\int$ دَ (س) ء س = د (س) + ث	لتكن د (س) = $س^{٣}$ ، دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ $\int$ ٣ $س^{٢}$ ء س = $س^{٣}$ + ث = د (س) + ث
١٤	$\int$ أ د (س) ء س = أ $\int$ د (س) ء س ، أ عدد ثابت	$\int$ ٨ $س^{٧}$ ء س = ٨ $\int$ $س^{٧}$ ء س = $س^{٨}$ + ث
١٥	$\int$ أ ء س = أ $\int$ ء س = أ س + ث	$\int$ -٦ ء س = -٦ $\int$ ء س = -٦ س + ث
١٦	$\int$ [د١(س) $\pm$ د٢(س)] ء س = $\int$ د١(س) ء س $\pm$ $\int$ د٢(س) ء س	$\int$ (٩$س^{٢}$ - ٤س) ء س = ٩ $\int$ $س^{٢}$ ء س - $\int$ ٤س ء س = ٣ $س^{٣}$ - ٢ $س^{٢}$ + ث
	ثالثا": العلاقة بين التـكـامـل المحــدد و التـكـامـل غيرا لمحــدد (المبرهنة الأساسية للتكامل)	
١٧	أذا كانت ل دالة أصلية للدالة د على [أ ، ب] فان: $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س = ل (س) $\Big\|_{أ}^{ب}$ = ل (ب) - ل (أ)	$\int_{١}^{٢}$ (٦س + ٥) ء س = (٣ $س^{٢}$ + ٥س) $\Big\|_{١}^{٢}$ = [٣$(٢)^{٢}$ + ٥×٢] - (٣×١ + ٥×١) = ٣ × ٤ + ١٠ - ٨ = ٢٢ - ٨ = ١٤
	رابعا": مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل	
١٨	اذا كانت الدالة د متصلة على [أ ، ب] فانه يوجد على الاقـل عدد جـ $\in$] أ ، ب [بحيث أ $\leq$ جـ $\leq$ ب يحقق العـلاقة: $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ء س = د (جـ) (ب - أ) .	اوجد قيمة جـ التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة لـ : $\int_{١}^{٣}$ (٢س + ٢) ء س (الحل) $\int_{١}^{٣}$ (٢س + ٢) ء س = (٢ جـ + ٢) (٣ - ١) = ($س^{٢}$ + ٢س) $\Big\|_{١}^{٣}$ = (٢ جـ + ٢) × ٢ ($٣^{٢}$ + ٦) - (١+٢) = ٤ جـ + ٤ ⟸ ١٥ - ٣ = ٤جـ + ٤ ٤جـ + ٤ = ١٢ ⟸ ٤جـ = ٨ ⟸ جـ = ٢ $\in$ [١ ، ٣]

ملاحـــظة مهمة:

عند إيجاد الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل يجب مراعاة أطراف المتراجحة عند التربيع وذلك كالتالي:

١) إذا كانت المتراجحة على الصورة : ـ أ ≤ س ≤ أ عند التربيع تصبح المتراجحة :

٠ ≤ س^{٢} ≤ أ^{٢}

مثال: ـ٢ ≤ س ≤ ٢ ⟸ ٠ ≤ س^{٢} ≤ ٤

٢) إذا كانت المتراجحة على الصورة : ـ أ ≤ س ≤ ب (أ < ب) عند التربيع تصبح المتراجحة :

٠ ≤ س^{٢} ≤ ب^{٢}

مثال: ـ١ ≤ س ≤ ٣ ⟸ ٠ ≤ س^{٢} ≤ ٩ (١ < ٣)

٣) إذا كانت المتراجحة على الصورة : ـ أ ≤ س ≤ ب (أ > ب) عند التربيع تصبح المتراجحة :

٠ ≤ س^{٢} ≤ أ^{٢}

مثال: ـ٢ ≤ س ≤ ١ ⟸ ٠ ≤ س^{٢} ≤ ٤ (٢ > ١)

٤) إذا كانت المتراجحة على الصورة : ـ أ ≤ س ≤ ـ ب (أ > ب) عند التربيع تصبح المتراجحة :

ب^{٢} ≤ س^{٢} ≤ أ^{٢}

مثال: ـ٥ ≤ س ≤ ـ٣ ⟸ ٩ ≤ س^{٢} ≤ ١٦ (٥ > ٣)

تمرين محلول: اوجد الحدين الأعلى والأدنى للتكامل : $\int_{-٤}^{٣}$ (٢س^{٢} ـ ١) ء س

∵ ـ٤ ≤ س ≤ ٣ ⟸ ٠ ≤ س^{٢} ≤ ١٦ ⟸ ٠ ≤ ٢س^{٢} ≤ ٣٢ ⟸ ـ١ ≤ ٢س^{٢} ـ١ ≤ ٣١

∴ ـ١ (٧) ≤ $\int_{-٤}^{٣}$ (٢س^{٢} ـ١) ء س ≤ ٣١ (٧) ⟸ ـ٧ ≤ $\int_{-٤}^{٣}$ (٢س^{٢} ـ١) ء س ≤ ٢١٧

∴ الحد الأدنى = ـ٧ ، الحد الأعلى = ٢١٧

مـــلاحظة:

تنقلب إشارة المتراجحة في الحالات التالية :

1. **إذا ضربنا في عدد سالب .**
2. **إذا قسمنا على عدد سالب .**
3. **إذا قلبنا جميع أطراف المتراجحة .**

٤) صيغ تكاملات بعض الدوال الشهيرة :

	الدالة د (س)	التكامل $\int$ د (س) ءس
	أولاً: الدوال المثلثية	
١	د(س) = جاس	ـ جتاس + ث
٢	د(س) = جتاس	جاس + ث
٣	د(س) = قا^{٢}س	ظاس + ث
٤	د(س) = قتا^{٢}س	ـ ظتاس + ث
٥	د(س) = قاس ظاس	قاس + ث
٦	د(س) = ظاس	ـ لو |جتاس| + ث
٧	د(س) = ظتاس	لو |جاس| + ث
٨	د(س) = ظا^{٢}س = قا^{٢}س ـ ١	ظاس ـ س + ث
٩	د(س) = ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س ـ ١	ـ ظتاس ـ س + ث
١٠	د(س) = جتا أ س ، حيث أ ثابت	$\frac{١}{أ}$ جا أ س + ث (أي نقسم على مشتقة الزاوية)
	د(س) = قتا^{٢} أ س	ـ $\frac{١}{أ}$ ظتا أ س + ث (مثال١)
	د(س) = قا أ س ظا أ س	$\frac{١}{أ}$ قا أ س + ث
	د(س) = ظا أ س	ـ $\frac{١}{أ}$ لو |جتا أ س| + ث (مثال٢)
	د(س) = ظا^{٢} أ س = قا^{٢} أ س ـ ١	$\frac{١}{أ}$ ظا أ س ـ س + ث (وهكذا في جميع النسب المثلثية)
١١	د(س) = جا (أ س+ب) ، حيث أ ، ب ثابتين	ـ $\frac{١}{أ}$ جتا (أ س+ب) + ث (مثال٣)
	د(س) = قا^{٢} (أ س+ب)	$\frac{١}{أ}$ ظا (أ س+ب) + ث (وهكذا في جميع النسب المثلثية)
١٢	د(س) = جا^{ن} س جتاس	$\frac{جا^{ن+١} س}{ن+١}$ + ث (مثال٤)
	د(س) = جتا^{ن} س جاس	ـ $\frac{جتا^{ن+١} س}{ن+١}$ + ث (قاعدة ١ في التكامل بالتعويض)
	د(س) = ظا^{ن} س قا^{٢}س	$\frac{ظا^{ن+١} س}{ن+١}$ + ث
	د(س) = ظتا^{ن} س قتا^{٢}س	ـ $\frac{ظتا^{ن+١} س}{ن+١}$ + ث

❖ تابـــــع صيـــــغ تكامــلات بعض الــدوال الشهيرة :

	الـــــدالة د (س)	التكــــامـل $\int$ د (س) ءس
	ثانياً: الــدالة الآســية	
١٣	$\text{د(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$
١٤	$\text{د(س)} = \text{هـ}^{\text{أ س}}$	$\dfrac{\text{هـ}^{\text{أ س}}}{\text{أ}} + \text{ث}$ (أي نقسم على مشتقة الأس) (مثال٥)
١٥	$\text{د(س)} = \text{أ}^{\text{س}}$	$\dfrac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو أ}} + \text{ث}$ (أي نقسم على لــو الأساس) (مثال٦)
١٦	$\text{د(س)} = \text{أ}^{\text{ب س}}$	$\dfrac{\text{أ}^{\text{ب س}}}{\text{ب لو أ}} + \text{ث}$ (مثال٧) (أي نقسم على لــو الأساس ومشتقة الأس)

أمثـلة منـــوعة:

١) $\int \text{قتا}^{٢}\ ٣\text{س ءس} = \text{ظتا ٣س} + \text{ث}$

٢) $\int \text{ظا ٤س ءس} = \int \dfrac{\text{جا٤س}}{\text{جتا٤س}}\ \text{ءس} = -\dfrac{١}{٤}\ \text{لو}\ |\text{جتا ٤س}| + \text{ث}$ (قاعدة ٢ في التكامل بالتعويض)

٣) $\int \text{جا (٢س+ ٣) ءس} = -\dfrac{١}{٢}\ \text{جتا (٢س+ ٣)} + \text{ث}$

٤) $\int \text{جا}^{٤}\text{س جتاس ءس} = \dfrac{١}{٥}\ \text{جا}^{٥}\text{س} + \text{ث}$ (قاعدة ١ في التكامل بالتعويض)

٥) $\int \text{هـ}^{-٤\text{س}}\ \text{ءس} = -\dfrac{١}{٤}\ \text{هـ}^{-٤\text{س}} + \text{ث}$

٦) $\int ٩^{\text{س}}\ \text{ءس} = \dfrac{١}{\text{لو٩}}\ ٩^{\text{س}} + \text{ث}$

٧) $\int ٦^{٢\text{س}}\ \text{ءس} = \dfrac{١}{\text{٢لو٦}}\ ٦^{٢\text{س}} + \text{ث}$

٥) التـــــكامل بالتــــعويـض :

مثال تمهيدي: اوجد $\int (٥ + ٢س^{٣})\,س^{٢}\,ءس$

(الحل)

نضع ع = ٥ + ٢س^{٣} $\Leftarrow$ $\frac{ءع}{ءس} = ٦س^{٢}$ $\Leftarrow$ ٦س^{٢} ءس = ءع $\Leftarrow$ س^{٢} ءس = $\frac{١}{٦}$ ءع

$\therefore$ $\int (٥ + ٢س^{٣})\,س^{٢}\,ءس = \frac{١}{٦}\int ع\,ءع = \frac{١}{٦} \times \frac{ع^{٢}}{٢} + ث$

$= \frac{١}{١٢}ع^{٢} + ث$ (نعوض بقيمة ع) $= \frac{١}{١٢}(٥ + ٢س^{٣})^{٢} + ث$.

مـــــلاحظـات:

١) غالباً" ما يوضع (ع) بما تحت الجذر ، أو بما تحت قوة ، أو بزاوية النسبة المثلثية ، او بأس الدالة الآسية ، او بالمقام في الدالة الكسرية وغيرها .

٢) فكرة التكامل بالتعويض هو تجزئة الدالة د(س) إلى جزأين: __الأول__ منها نضعه بدلالة المتغير (ع) ، __والجزء الثاني__ نضعه بدلالة مشتقة (ع) = (ءع) .

٣) في المثال السابق نلاحظ أن: د(س) = (٥ + ٢س^{٣}) س^{٢} الجزء الأول (٥ + ٢س^{٣}) = ع (بدلالة ع) والجزء الثاني س^{٢} بدلالة ءع .

٤) يتعذر استخدام طريقة التكامل بالتعويض عندما نفرض (ع) بجزء من الدالة د (س) ولا نستطيع التعويض عن الجزء المتبقي من الدالة د (س) بدلالة مشتقة (ع) = (ءع) كما في المثال التالي .

__مثال احسب__ $\int س\sqrt{س^{٣} + ٥}\,ءس$

نضع ع = س^{٣} + ٥ $\Leftarrow$ $\frac{ءع}{ءس} = ٣س^{٢}$ $\Leftarrow$ ٣س^{٢} ءس = ءع (يتعذر التعويض لان الجزء المتبقي من الدالة هو س وليس س^{٢})

❖ **التعويض في التكامل المحدد:**

__مثال: احسب__ $\int_{\frac{١}{\pi}}^{\frac{٢}{\pi}} \frac{جا\frac{١}{س}}{س^{٢}}\,ءس$

(الحل)

نضع ع = $\frac{١}{س}$ $\Leftarrow$ $\frac{ءع}{ءس} = \frac{-١}{س^{٢}}$ $\Leftarrow$ $-ءس = س^{٢}\,ءع$ $\Leftarrow$ $\frac{ءس}{س^{٢}} = -ءع$

عندما س = $\frac{١}{\pi}$ $\Leftarrow$ ع = π ، وعندما س = $\frac{٢}{\pi}$ $\Leftarrow$ ع = $\frac{\pi}{٢}$

$\therefore \int_{\frac{١}{\pi}}^{\frac{٢}{\pi}} \frac{جا\frac{١}{س}}{س^{٢}}\,ءس = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{٢}} جا\,ع \times -ءع = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{٢}} جا\,ع\,ءع = جتا\,ع \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= جتا\frac{\pi}{٢} - جتا\,\pi = ٠ - (-١) = ١$

❖ قواعـــد خاصة في التـــكامل بالتـــعويـض:

قاعدة (١):

$$\int [\text{د(س)}]^{\text{ن}}\ \text{د}'\text{(س)}\ \text{ءس} = \frac{[\text{د(س)}]^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث} \qquad \text{ن} \in \text{ح}\ ،\ \text{ن} \neq -١$$

عند حساب تكامل لدالة مرفوعة للأس مضروبة في مشتقة الدالة او جزء منها نستخدم التعويض و نضع ع = (ما تحت الأس) = د(س) ويكون ناتج التكامل هو الدالة مرفوعة للأس ن + ١ مقسوما" على الأس الجديد ن + ١ + ث .

مثال(١): $\int (٢\text{س}^٢ + ٤)^٥\ ٤\text{س}\ \text{ءس} = \frac{(٢\text{س}^٢+٤)^٦}{٦} + \text{ث}$ لان $(٢\text{س}^٢+٤)' = ٤\text{س}$ وهي موجودة

توضيح: نضع $\text{ع} = ٢\text{س}^٢ + ٤ \Longleftarrow \text{ءع} = ٤\text{س}\ \text{ءس}$

$\therefore \int (٢\text{س}^٢+٤)^٥\ ٤\text{س}\ \text{ءس} = \int \text{ع}^٥\ \text{ءع} = \frac{\text{ع}^٦}{٦} + \text{ث}$ (نعوض بقيمة ع) $= \frac{(٢\text{س}^٢+٤)^٦}{٦} + \text{ث}$

مثال(٢): $\int \frac{(\text{لـــوس})^٣}{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{(\text{لـــوس})^٤}{٤} + \text{ث}$ (لان $(\text{لـــوس})' = \frac{١}{\text{س}}$ موجودة)

قاعدة (٢):

$$\int \frac{\text{د}'\text{(س)}}{\text{د(س)}}\ \text{ءس} = \text{لـــو}\,|\text{د(س)}| + \text{ث} \qquad ، \quad \text{أي عندما ن} = -١$$

عند حساب تكامل دالة في المقام موجودة مشتقتها في البسط او جزء منها فإننا نضع ع = المقام = د(س) ويكون ناتج التكامل هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام (للدالة) + ث .

مثال(١): $\int \frac{٣\text{س}^٢ + ١}{\text{س}^٣ + \text{س}}\ \text{ءس} = \text{لـــو}\,|\text{س}^٣ + \text{س}| + \text{ث}$ (لان $(\text{س}^٣ + \text{س})' = \text{المقام}$ ($٣\text{س}^٢ + ١$) البسط)

توضيح: نضع $\text{ع} = \text{س}^٣ + \text{س} \Longleftarrow \text{ءع} = (٣\text{س}^٢ + ١)\ \text{ءس}$

$\therefore \int \frac{٣\text{س}^٢+١}{\text{س}^٣+\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{ءع}}{\text{ع}} = \text{لـــو}\,|\text{ع}| + \text{ث}$ (نعوض بقيمة ع) $= \text{لـــو}\,|\text{س}^٣ + \text{س}| + \text{ث}$

مثال(٢): $\int \text{ظتاس}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جـــاس}}\ \text{ءس} = \text{لـــو}\,|\text{جـــاس}| + \text{ث}$ (لان $(\text{جـــاس})' = (\text{جتاس}) = \text{البسط}$)

مثال(٣): $\int \frac{\text{هـ}^{٤\text{س}}}{\text{هـ}^{٤\text{س}} + ٢}\ \text{ءس} = \frac{١}{٤}\int \frac{٤\,\text{هـ}^{٤\text{س}}\ \text{ءس}}{\text{هـ}^{٤\text{س}} + ٢} = \frac{١}{٤}\ \text{لـــو}\,|\text{هـ}^{٤\text{س}} + ٢| + \text{ث}$

قاعدة (٣):

١) $\int$ جـا [د(س)] دَ(س) ء س = ـ جـتـا [د(س)] + ث

٢) $\int$ جـتـا [د(س)] دَ(س) ء س = جـا [د(س)] + ث

٣) $\int$ قـا^{٢} [د(س)] دَ(س) ء س = ظـا [د(س)] + ث

٤) $\int$ قـتـا^{٢} [د(س)] دَ(س) ء س = ـ ظـتـا [د(س)] + ث

عند حساب تكامل لدالة مثلثية مضروبة في مشتقة الزاوية او جزء منها لهذه الدالة نستخدم التعويض و نضع ع = زاوية النسبة المثلية = د(س) ، ويكون ناتج التكامل هو تكامل النسبة المثلثية لهذه الزاوية وهكذا في جميع النسب المثلثية .

<u>مثال(١)</u>: $\int$ ٦س جـتـا(٣س^{٢}) ء س = جـا (٣س^{٢}) + ث (لان (٣س^{٢})َ = ٦س وهي موجودة)

<u>توضيح:</u> نضع ع = ٣س^{٢} ⟸ ء ع = ٦س^{٢} ء س

∴ $\int$ ٦س جـتـا(٣س^{٢}) ء س = $\int$ جـتـاع ء ع = جـاع + ث (نعوض بقيمة ع) = جـا (٣س^{٢}) + ث

<u>مثال(٢)</u>: $\int$ جتاس قـتـا^{٢}(جاس) ء س = ـ ظـتـا(جاس) + ث (لان (جاس)َ = جتاس وهي موجودة)

<u>مثال(٣)</u>: $\int$ س قـا (٧ ـ س^{٢}) ظـا (٧ ـ س^{٢}) ء س = $\frac{١}{-٢}$ $\int$ ـ٢س قـا (٧ ـ س^{٢}) ظـا (٧ ـ س^{٢}) ء س

= $\frac{-١}{٢}$ قـا (٧ ـ س^{٢}) + ث

قاعدة (٤):

$\int$ هـ$^{د(س)}$ دَ(س) ء س = هـ$^{د(س)}$ + ث

عند حساب تكامل الدالة الطبيعية (هـ) مرفوعة للأس (الدالة) د(س) مضروبة في مشتقة الأس او جزء منها نستخدم التعويض و نضع ع = الأس = د(س) ويكون ناتج التكامل هو الدالة الطبيعية (هـ) مرفوعة للأس د(س) + ث .

<u>مثال(١)</u>: $\int$ (٤س ـ ١) هـ$^{٢س^{٢} ـ س}$ ء س = هـ$^{٢س^{٢} ـ س}$ + ث (لان (٢س^{٢} ـ س)َ = ٤س ـ ١ وهي موجودة)

<u>توضيح:</u> نضع ع = ٢س^{٢} ـ س ⟸ ء ع = (٤س ـ ١) ء س

∴ $\int$ (٤س ـ ١) هـ$^{٢س^{٢} ـ س}$ ء س = $\int$ هـ^{ع} ء ع = هـ^{ع} + ث (نعوض بقيمة ع) = هـ$^{٢س^{٢} ـ س}$ + ث

<u>مثال(٢)</u>: $\int$ قـا^{٢}س هـ^{ظاس} ء س = هـ^{ظاس} + ث (لان (ظـاس)َ = قـا^{٢}س وهي موجودة)

قاعدة (٥):

عند حساب $\int \text{جتا}^{ن}\text{س}\ \text{ء س}$ و $\int \text{جا}^{ن}\text{س}\ \text{ء س}$ ، $ن \geq ٢$ نراعي الآتي:

١) أذا كان ن عدداً" زوجياً" نستخدم القانون التالي:

$$\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س} \quad ، \quad \text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س}$$

٢) أذا كان ن عدداً" فردياً" نقوم بالأتي:

أ) $$\int \text{جتا}^{ن}\text{س}\ \text{ء س} = \int \text{جتا}^{ن-١}\text{س} \times \text{جتا س}\ \text{ء س}$$

ثم نستخدم القانون: $\text{جتا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جا}^{٢}\text{س}$

ب) $$\int \text{جا}^{ن}\text{س}\ \text{ء س} = \int \text{جا}^{ن-١}\text{س} \times \text{جا س}\ \text{ء س}$$

ثم نستخدم القانون: $\text{جا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}$

مثال(١):

$$\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{ء س} = \int (\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}\ \text{ء س} = \int \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س}\right)^{٢} \text{ء س}$$

$$= \int \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س} + \frac{١}{٤}\,\text{جتا}^{٢}\text{٢س}\right) \text{ء س} = \frac{١}{٤}\text{س} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٤}\int \text{جتا}^{٢}\text{٢س}\ \text{ء س}$$

$$= \frac{١}{٤}\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٤}\int \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا٤س}\right) \text{ء س} \qquad \left(\text{جتا}^{٢}\text{٢س} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا٤س}\right)$$

$$= \frac{١}{٤}\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٤}\left(\frac{١}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤}\,\text{جا٤س}\right) + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٤}\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٨}\text{س} + \frac{١}{٣٢}\,\text{جا٤س} + \text{ث} = \frac{٣}{٨}\text{س} + \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٣٢}\,\text{جا٤س} + \text{ث}$$

مثال(٢):

$$\int \text{جا}^{٥}\text{س}\ \text{ء س} = \int \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{جاس}\ \text{ء س} = \int (\text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}\ \text{جاس}\ \text{ء س}$$

$$= \int (١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}\ \text{جاس}\ \text{ء س} = \int (١ - ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٤}\text{س})\ \text{جاس}\ \text{ء س}$$

$$= \int (\text{جاس} - ٢\ \text{جاس جتا}^{٢}\text{س} + \text{جاس جتا}^{٤}\text{س})\ \text{ء س}$$

$$= \int \text{جاس}\ \text{ء س} - ٢\int \text{جاس جتا}^{٢}\text{س}\ \text{ء س} + \int \text{جاس جتا}^{٤}\text{س}\ \text{ء س} \qquad \text{(نستخدم القاعدة ١)}$$

$$= -\text{جتاس} - ٢ \times \frac{-\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} - \frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{ث} = -\text{جتاس} + \frac{٢}{٣}\,\text{جتا}^{٣}\text{س} - \frac{١}{٥}\,\text{جتا}^{٥}\text{س} + \text{ث}$$

قاعدة (٦):

عند حساب $\int \text{ظا}^{ن}\text{س}\ \text{ء س}$ و $\int \text{ظتا}^{ن}\text{س}\ \text{ء س}$ ، $ن \geq ٢$ نقوم بالآتي:

١) $\int \text{ظا}^{ن}\text{س}\ \text{ء س} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا}^{ن-٢}\text{س}\ \text{ء س} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{ظا}^{ن-٢}\text{س}\ \text{ء س}$

أي نستخدم القانون: $\text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س} - ١$ وبفك القوسين ثم نستخدم القاعدة (١) .

<u>مثال:</u> احسب $\int \text{ظا}^{٤}\text{س}\ \text{ء س}$ ؟

<u>الحل:</u> $\int \text{ظا}^{٤}\text{س}\ \text{ء س} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ء س} = \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ء س}$

$= \int (\text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س})\ \text{ء س} = \int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ء س} - \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{ء س}$

$= \frac{١}{٣}\text{ظا}^{٣}\text{س} - (\text{ظاس} - \text{س}) + \text{ث} = \frac{١}{٣}\text{ظا}^{٣}\text{س} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{ث}$ (حسب القاعدة ١)

٢) $\int \text{ظتا}^{ن}\text{س}\ \text{ء س} = \int \text{ظتا}^{٢}\text{س}\ \text{ظتا}^{ن-٢}\text{س}\ \text{ء س} = \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{ظتا}^{ن-٢}\text{س}\ \text{ء س}$

أي نستخدم القانون: $\text{ظتا}^{٢}\text{س} = \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١$ وبفك القوسين ثم نستخدم القاعدة (١) .

<u>مثال:</u> احسب $\int \text{ظتا}^{٥}\text{س}\ \text{ء س}$ ؟

<u>الحل:</u> $\int \text{ظتا}^{٥}\text{س}\ \text{ء س} = \int \text{ظتا}^{٢}\text{س}\ \text{ظتا}^{٣}\text{س}\ \text{ء س} = \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{ظتا}^{٣}\text{س}\ \text{ء س}$

$= \int (\text{ظتا}^{٣}\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{ظتا}^{٣}\text{س})\ \text{ء س} = -\frac{١}{٤}\text{ظتا}^{٤}\text{س} - \int \text{ظتا}^{٢}\text{س}\ \text{ظتاس}\ \text{ء س}$

$= -\frac{١}{٤}\text{ظتا}^{٤}\text{س} - \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{ظتاس}\ \text{ء س} = -\frac{١}{٤}\text{ظتا}^{٤}\text{س} - \int (\text{ظتاس}\ \text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{ظتاس}\ \text{ء س})$

$= -\frac{١}{٤}\text{ظتا}^{٤}\text{س} - (-\frac{١}{٢}\text{ظتا}^{٢}\text{س} - \text{لو}|\text{جاس}|) + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٤}\text{ظتا}^{٤}\text{س} + \frac{١}{٢}\text{ظتا}^{٢}\text{س} + \text{لو}|\text{جاس}| + \text{ث}$

قاعدة (٧):

عند حساب تكامل محدد لدالة بالتعويض على الصورة: $\text{د(س)} = \sqrt{\text{أ} - \text{ب س}^{2}}$ نقوم بالتعويض التالي:

نضع $\text{س} = \sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}\ \text{جا ع}$ (تسمى الدالة المفروضة)

ثم نقوم باستبدال حدي التكامل بالنسبة لـ س إلى حدين جديدين بالنسبة لـ ع وذلك بالتعويض في الدالة المفروضة .

<u>مثال(١)</u>: احسب $\int_{0}^{3} \sqrt{9 - \text{س}^{2}}\ \text{ء س}$

(الحل)

نضع $\text{س} = \sqrt{\frac{9}{1}}\ \text{جا ع} \Leftarrow \text{س} = \sqrt{9}\ \text{جا ع} \Leftarrow \text{س} = 3\ \text{جا ع} \Leftarrow \text{ء س} = 3\ \text{جتا ع ء ع}$

عندما $\text{س} = 0 \Leftarrow \text{جا ع} = 0 \Leftarrow \text{ع} = 0$ ، عندما $\text{س} = 3 \Leftarrow \text{جا ع} = 1 \Leftarrow \text{ع} = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_{0}^{3} \sqrt{9 - \text{س}^{2}}\ \text{ء س} = 3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9\,\text{جا}^{2}\text{ع}}\ \text{جتا ع ء ع} = 3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(1 - \text{جا}^{2}\text{ع})}\ \text{جتا ع ء ع} \ .$$

$$= 9 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \text{جا}^{2}\text{ع})}\ \text{جتا ع ء ع} = 9 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتا}^{2}\text{ع}}\ \text{جتا ع ء ع} = 9 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^{2}\text{ع ء ع} \ .$$

$$= 9 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2\text{ع}\right) \text{ء ع} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\,\text{جتا}\,2\text{ع}\right) \text{ء ع} = \left(\frac{9}{2}\,\text{ع} + \frac{9}{4}\,\text{جا}\,2\text{ع}\right) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{9}{4}\,\text{جا}\,2 \times \frac{\pi}{2}\right) - (0 + 0) = \left(\frac{9\pi}{4} + \frac{9}{4}\,\text{جا}\,\pi\right) = \left(\frac{9\pi}{4} + \frac{9}{4} \times 0\right)$$

$$= \frac{9\pi}{4} + 0 = \frac{9\pi}{4} \ .$$

❖ ملاحظة مهمة :

١) عند حساب تكامل الدالة د(س) بالتعويض فإذا فرضنا ع = جزئ من الدالة د(س) وكانت مشتقة ع (ءع) = ء س فقط في هذه الحالة نعوض عن الجزء المتبقي من الدالة د(س) بدلالة ع أيضا" . (مثال ١)

٢) إذا فرضنا ع = جزئ من الدالة د(س) وكان الجزء المتبقي من الدالة د(س) اكبر درجة او يزيد عن مشتقة ع (ءع) في هذه الحالة نجزئ الجزء المتبقي من الدالة د(س) إلى جزأين يكون الجزء الأول منها بدلالة ع والجزء الآخر يكون بدلالة ءع . (مثال ٢)

مثال(١): احسب $\int \frac{\text{س}}{\text{س} + ٣}\,\text{ءس}$

(الحل)

نضع ع = س + ٣ ⟸ ءع = ءس ، س = ع ـ ٣

$$\therefore \int \frac{\text{س}}{\text{س}+٣}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{ع} - ٣}{\text{ع}}\,\text{ءع} = \int \left(\frac{\text{ع}}{\text{ع}} - \frac{٣}{\text{ع}}\right)\text{ءع}$$

$$= \int \left(١ - ٣\,\frac{١}{\text{ع}}\right)\text{ءع} = \text{ع} - ٣\,\text{لو}|\text{ع}| + \text{ث} \qquad \text{(نعوض بقيمة ع)}$$

$$= \text{س} + ٣ - ٣\,\text{لو}|\text{س} + ٣| + \text{ث} \quad .$$

مثال(٢): احسب $\int \text{س}^{٣}\,(\text{س}^{٢} - ٢)^{٤}\,\text{ءس}$

(الحل)

$$\int \text{س}^{٣}(\text{س}^{٢} - ٢)^{٤}\,\text{ءس} = \int \text{س}^{٢}(\text{س}^{٢} - ٢)^{٤}\,\text{س ءس}$$

نضع ع = س^{٢} ـ ٢ ⟸ ءع = ٢س ءس ⟸ $\frac{١}{٢}$ءع = س ءس ، س^{٢} = ع + ٢

$$\therefore \int \text{س}^{٣}(\text{س}^{٢} - ٢)^{٤}\,\text{ءس} = \int (\text{ع} + ٢)\,\text{ع}^{٤} \,.\, \frac{١}{٢}\text{ءع} = \frac{١}{٢}\int (\text{ع}^{٥} + ٢\,\text{ع}^{٤})\,\text{ءع}$$

$$= \frac{\text{ع}^{٦}}{٦} + \frac{٢\text{ع}^{٥}}{٥} + \text{ث} = \frac{١}{٦}\text{ع}^{٦} + \frac{٢}{٥}\text{ع}^{٥} + \text{ث} \qquad \text{(نعوض بقيمة ع)}$$

$$= \frac{١}{٦}(\text{س}^{٢} - ٢)^{٦} + \frac{٢}{٥}(\text{س}^{٢} - ٢)^{٥} + \text{ث} \quad .$$

٦) التــــكامل بالتـــجـزئـــة :

صيغة طريــقــة التكامــل بالتــجـزئــة هــي :

$$\int \text{ف ء ع} = \text{ف ع} - \int \text{ع ء ف}$$

تستخدم هذه الصيغة لإيجاد تكامل لدالة على صورة حاصل ضرب دالتين .

❖ **صور الـدوال التى تـكامـل بالتـجزئـة:**

١) حدودية في مثلثيه : مثل $\int$ (س^{٢}+٤) جاس ء س ، نضع ف = س^{٢}+٤ ، ء ع = جاس ء س

٢) حدودية في لوغاريتمية : مثل $\int$ (س +٥) لوس ء س ، نضع ف = لوس ، ء ع = (س +٥) ء س

٣) حدودية في دالة آسية طبيعية : مثل $\int$ (س ـ ١) هـ$^{\text{س}}$ ء س ، نضع ف = س ـ ١ ، ء ع = هـ$^{\text{س}}$ ء س

٤) مثلثيه في دالة آسية طبيعية : مثل $\int$ هـ$^{\text{س}}$ جتاس ء س ، نضع ف = هـ$^{\text{س}}$ ، ء ع = جتاس ء س

او نضع ف = جتاس ، ء ع = هـ$^{\text{س}}$ ء س

٥) لوغاريتمية : مثل $\int$ لو٢س ء س ، نضع ف = لو٢س ، ء ع = ء س

مـــــلاحـظــات:

١) عند التكامل بالتجزئة يجب أولا" أن يكون الفرض صحيح لكل من ف و ء ع .

٢) يتضح أن الفرض صحيح عندما يكون التكامل الناتج في الصيغة ابسط وأسهل من التكامل المعطى والمطلوب حسابه .

٣) تلاحظ أن في مثالي الصورة (١ ، ٣) وضعنا (ف) بالدالة الحدودية لان (ف) يتم اشتقاقها ولذلك تصغر درجة الحدودية وبعد التعويض يكون التكامل الناتج ابسط واقل درجه من التكامل المعطى والمطلوب حسابه ، لكن لو وضعنا الدالة الحدودية بـ (ء ع) وهذه يتم تكاملها وعند التكامل تكبر درجة الحدودية وبعد التعويض يكون التكامل الناتج أصعب وأعلى درجه من التكامل المعطى وهذا يعني أن الفرض خطأ .

٤) تلاحظ أن في مثال الصورة (٢) وضعنا (ف) بالدالة اللوغاريتمية و(ء ع) بالدالة الحدودية أي بعكس مثالي الصورة (١ ، ٣) لأن الدالة اللوغاريتمية لا نعرف تكاملها لو وضعناها بـ (ء ع) في مثل هذه الحالة نضطر إلى وضع الدالة الحدودية بـ (ء ع) وبعد التعويض والاختصار يكون التكامل الناتج ابسط وأسهل من التكامل المعطى .

٥) في مثال الصورة (١) نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة مرتين لان الدالة الحدودية ف = (س^{٢}+٤) من الدرجة الثانية ، ولو كانت من الدرجة الثالثة نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة ثلاث مرات وهكذا ، بمعنى إلى أن تصبح ء ف = ثابت .

٦) في مثال الصورة (٤) (مثلثيه في دالة آسية طبيعية) نلاحظ أن كل الفرضين المذكورين أعلاه صحيح لأنه بعد التعويض في الصيغة بالفرض الأول ينتج تكامل هو نفسه التكامل الناتج من تعويض الفرض الثاني في الصيغة .

تمرين محلول: احسب $\int$ (٢س^٢ ـ١) جتاس ء س

(الحل)

نضع ف = ٢س^٢ ـ١ ⟸ ء ف = ٤س ء س ،

ء ع = جتاس ء س ⟸ ع = $\int$ جتاس ء س = جـاس

∵ $\int$ ف ء ع = ف ع ـ $\int$ ع ء ف

∴ $\int$ (٢س^٢ ـ١) جتاس ء س = (٢س^٢ ـ١) جـاس ـ$\int$ ٤س جـاس ء س (*)

نوجد $\int$ ٤س جـاس ء س باستخدام بالتجزئة مرة أخرى

نضع ف = ٤س ⟸ ءف = ٤ ء س ،

ء ع = جـاس ء س ⟸ ع = $\int$ جـاس ء س = ـ جتاس

∴ $\int$ ٤س جـاس ء س = ـ٤س جتاس +$\int$ ٤جتاس ء س

= ـ٤س جتاس +٤ جـاس (بالتعويض في العلاقة (*) عن $\int$ ٤س جـاس ء س)

∴ $\int$(٢س^٢ ـ١) جتاس ء س = (٢س^٢ ـ١) جـاس ـ (ـ٤س جتاس +٤ جـاس) + ث

= ٢س^٢ جـاس ـ جـاس + ٤س جتاس ـ٤ جـاس + ث

= ٢س^٢ جـاس + ٤س جتاس ـ ٥ جـاس + ث

❖ **التجزئة في التكامل المحدد:**

صيغة طريـقـة التكامـل بالتــجـزئـة هـي :

$$\boxed{\int_{أ}^{ب} ف \, ء ع = ف ع \Big|_{أ}^{ب} - \int_{أ}^{ب} ع \, ء ف}$$

مثال احسب $\int_{.}^{١}$ س هـ^{س} ء س (الحل)

نضع ف = س ⟸ ء ف = ء س ، ء ع = هـ^{س} ء س ⟸ ع = $\int$ هـ^{س} ء س = هـ^{س}

∴ $\int_{.}^{١}$ س هـ^{س} ء س = (س هـ^{س}) $\Big|_{.}^{١}$ ـ $\int_{.}^{١}$ هـ^{س} ء س = (س هـ^{س} ـ هـ^{س}) $\Big|_{.}^{١}$ = هـ^{س}(س ـ ١) $\Big|_{.}^{١}$

= هـ^{١} (١ ـ ١) ـ هـ$^{.}$ (٠ ـ ١) = هـ × ٠ ـ ١ × (ـ ١) = ٠ + ١ = ١

(هـ$^{.}$= ١)

❖ صور بعض الدوال التي تكامل بالتعويض والتجزئة:

نستخدم طريقتي التكامل بالتعويض والتجزئة في الدوال التي ليست في الصورة القياسية او في الدالة التي على صورة حاصل ضرب دالتين أحداهما غير قياسية ومن هذه الصور :

١) مثلثيه غير قياسية : مثل $\int$ جا $\sqrt{س}$ ءس ، $\int$ جتا $\sqrt{س}$ ءس

٢) حدودية في دالة آسية طبيعية غير قياسية: مثل $\int س^{٣}$ هـ$^{س^{٢}}$ ءس

٣) حدودية في مثلثيه غير قياسية : مثل: (١) $\int س^{٥}$ قا^{٢} $س^{٣}$ ءس ، (٢) $\int س^{٣}$ ظا^{٢} $س^{٢}$ ءس

٤) مثلثيه في دالة آسية طبيعية غير قياسية: مثل $\int$ جا٢س هـ^{جتاس} ءس = $\int$ ٢ جاس جتاس هـ^{جتاس} ءس

٥) لوغاريتمية غير قياسية: مثل $\int$ (لوس)^{٢} ءس

ملاحظات:

١) في مثال الصورة (٢) عند التعويض نكتب أس الدالة الأسية بدلالة ع ، أي نضع (ع = $س^{٢}$) ، أما بالنسبة للدالة الحدودية ($س^{٣}$) نكتبها على الصورة: $س^{٢}$ × س وبذلك يكون الجزء الأول منها وهو($س^{٢}$) بدلالة ع والجزء الآخر وهو (س) يكون بدلالة ءع ، وبعد التعويض تتحول الدالة الأسية إلى قياسيه مضروبة في دالة حدودية وبذلك نستطيع أن نكامل بالتجزئة ثم نعوض بقيمة ع وبالمثل في مثال الصورة (٤) .

٢) في مثال (١) الصورة (٣) عند التعويض نكتب زاوية النسبة المثلثية (قا^{٢}) بدلالة ع ، أي نضع (ع = $س^{٣}$) ، أما بالنسبة للدالة الحدودية ($س^{٥}$) نكتبها على الصورة: $س^{٣}$ × $س^{٢}$ وبذلك يكون الجزء الأول منها وهو($س^{٣}$) بدلالة ع والجزء الآخر وهو ($س^{٢}$) يكون بدلالة ءع ، وبعد التعويض تتحول الدالة المثلثية إلى قياسيه مضروبة في دالة حدودية وبذلك نستطيع أن نكامل بالتجزئة ثم نعوض بقيمة ع وبالمثل في مثال (٢) .

وسوف نوضح ذلك من خلال حل المثال (٢) في الصورة (٣) .

مثال محلول: احسب $\int س^{3}\, ظا^{2} س^{2} \; ءس$

(الحل)

أولاً : التعويض:

$$\int س^{3}\, ظا^{2} س^{2} \; ءس = \int س^{2}\, ظا^{2} (س^{2}) \; س \, ءس$$

نضع $ع = س^{2} \Leftarrow ءع = ٢س \, ءس \Leftarrow \frac{١}{٢} ءع = س \, ءس$

$\therefore \int س^{3}\, ظا^{2} س^{2} \; ءس = \int ع \, ظا^{2} (ع) \, . \frac{١}{٢} ءع = \frac{١}{٢} \int ع \, ظا^{2} ع \; ءع$ (حدودية في مثلثيه)

ثانياً : التجزئة:

نضع $ف = ع \Leftarrow ءف = ءع$

$ء\upsilon = ظا^{2} ع \; ءع \Leftarrow ء\upsilon = (قا^{2} ع - ١) \, ءع \Leftarrow \upsilon = \int (قا^{2} ع - ١) \, ءع = ظاع - ع$

$\because \int ف \, ء\upsilon = ف \, \upsilon - \int \upsilon \, ءف$

$\therefore \frac{١}{٢} \int ع \, ظا^{2} ع \; ءع = \frac{١}{٢} \left[ع \, (ظاع - ع) - \int (ظاع - ع) \, ءع \right]$

$= \frac{١}{٢} \left[ع \, (ظاع - ع) - \int \left(\frac{جاع}{جتاع} - ع \right) ءع \right]$

$= \frac{١}{٢} \left[ع \, (ظاع - ع) + لو \, |جتاع| + \frac{ع^{2}}{٢} \right] + ث$ (نعوض بقيمة ع)

$= \frac{١}{٢} \left[س^{2} \, (ظا س^{2} - س^{2}) + لو \, |جتا س^{2}| + \frac{س^{4}}{٢} \right] + ث$