مسألة مركّبة شاملة لأفكار الجزء الأوّل

في المستوي المزوّد بمعلمٍ متجانس $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, C_f هو الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{4x}{x+1}$

المطلوب :

A- قسم النهايات و الاشتقاق :

أ-

1) احسب نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه , و اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي .
2) ادرس الوضع النسبي بين C_f و مقاربه الأفقي .
3) جِد العدد الحقيقي A الذي يحقق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]3.99\,;\,4.01[$.

ب-

1) ادرس تغيّرات التابع f و نظّم جدولاً بها .
2) عيّن صورة المجال $I=[0\,,+\infty[$ وفق f .
3) احسب $f'(0)$ بالاعتماد على تعريف العدد المشتق .
4) اكتب معادلة المماس T_1 للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$.
5) احسب قيمة تقريبيّة ل $f(0.1)$.
6) أثبت أنّ النقطة $I(-1\,,4)$ هي مركز تناظر ل C_f .
7) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم T_1 و ارسم C_f على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
8) أثبت من أجل $n\geq 1$ أنّ المشتق من الرتبة n للتابع f يُعطى بالشكل $f^{(n)}(x)=4n!\left(\frac{-1}{x+1}\right)^{n+1}$.

B- قسم المتتاليات , نهاية متتالية :

ليكن g مقصور التابع f على المجال $I=[0\,,+\infty[$, C_g خطّه البياني , و نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=g(u_n)\end{cases}$$ و **المطلوب :**

أ-

1) بالاستفادة مما سبق , أثبت أنّ التابع g متزايد تماماً على I , و أنّ $g(x)\in I$ من أجل كل x من I .
2) حل المعادلة $g(x)=x$.
3) أثبت بالتدريج صحّة القضيّة $0<u_n\leq u_{n+1}\leq 3$ أيّاً كان العدد الطبيعي $n\geq 0$.
4) استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو نهاية يُطلَب تعيينها .
5) ارسم في معلم متجانس C_g و المستقيم Δ ذو المعادلة $y=x$.
6) عيّن على الرسم السابق الحدود $u_0\,,\ u_1\,,\ u_2$ و نهاية المتتالية u_n .

ب-

1) لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرّفة وفق $v_n=\frac{3}{u_n}-1$ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة , عيّن أساسها و حدّها الأوّل .
2) اكتب عبارة v_n بدلالة n , و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3) استنتج عبارة u_n بدلالة n , واحسب مجدّداً $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4) احسب بدلالة n المجموع $s_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$ ثم أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

ج- لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ التي تحقّق $x_n=u_n-3$. أثبت أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

C- قسم التابع اللوغاريتمي :

أ-

1) نتأمل المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $w_n = \ln(v_n)$, أثبت أنّ المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابيّة , واكتب عبارة w_n بدلالة n .

2) احسب المجموع $S = w_0 + w_1 + \cdots + w_{19}$ و استنتج الجداء $P = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_{19}$.

ب- ليكن h التابع المعرّف وفق : $h\,(x) = \ln f\,(x)$ و **المطلوب :**

1) أوجد مجموعة تعريف التابع , ثم أوجد نهاياته عند أطراف مجموعة تعريفه .

2) بالاستفادة من عبارة $f\,'(x)$ استنتج عبارة $h'(x)$ ثمّ نظّم جدولاً بتغيّرات التابع h .

3) أثبت أنّ C_h متناظر بالنسبة للنقطة $J\,(\frac{-1}{2}\,, 2\ln 2)$.

4) في معلم متجانس ارسم C_h .

ج-

1) $(t_n)_{n\geq 1}$ هي المتتالية التي تحقق : $t_n = h\,(n)$: أثبت أنّ : $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = n\ln 4 - \ln(n+1)$.

2) حل المتراجحة $h\,(x) \geq \ln(2x-12) - \ln(2x-7)$.

D- قسم التابع الأسّي :

أ- k هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $k\,(x) = f\,(e^x)$, تمثيله البياني C_k , **المطلوب :**

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$.

2) انطلاقاً من عبارة $f\,'\,(x)$ استنتج عبارة $k'\,(x)$ ثمّ نظّم جدولاً بتغيرات التابع k .

3) اكتب معادلة المماس ل C_k في نقطة منه فاصلتها $x=0$ وليكن T_2 .

4) في معلم متجانس ارسم T_2 و مقاربات C_k ثم ارسم C_k .

5) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $x: \to \frac{4}{1+e^x}$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{4}\right)^x$.

E- قسم التكامل و التوابع الأصليّة :

أ-

1) عيّن تابعاً أصليّاً للتابع f على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

2) احسب مساحة السطح المستوي المحصور بين C_f و المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$.

3) احسب حجم المجسّم الدوراني الناتج عن دوران C_f دورة كاملة حول محور الفواصل و ذلك على المجال $[0,3]$.

ب-

1) باستخدام التكامل بالتجزئة احسب $\int_1^e \ln x\,dx$ و استنتج $\int_1^e \ln(x+1)\,dx$.

2) استنتج $\int_1^e h(x)dx$.

ج-

1) عيّن تابعاً أصليّاً للتابع k على $\mathbb{R}$.

2) عين $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين C_k و محور الفواصل و المستقيمين $x = \alpha$ و $x = 0$ حيث $\alpha < 0$.

3) احسب $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} A(\alpha)$.

– انتهت المسألة –

حل المسألة المركّبة (الجزء الأوّل)

A قسم النهايات والاشتقاق:

أ-

1) $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4 \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

$y = 4$ مقارب أفقي لـ C_f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \dfrac{-4}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي لـ C_f في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

---

2) $f(x) - 4 = \dfrac{4x}{x+1} - 4$

$= \dfrac{4x - 4x - 4}{x+1} = \dfrac{-4}{x+1}$

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$f(x)-4$	$+$	$-$
C_f	فوق المقارب	تحت المقارب

---

3) $|f(x) - l| < \varepsilon$

حيث $l = 4$, $\varepsilon = 0.01$

$|f(x) - 4| < 0.01$

$\left|\dfrac{-4}{x+1}\right| < 0.01$

من أجل $x > 0$:

$\dfrac{4}{x+1} < 0.01$

$\Rightarrow \quad 400 < x+1$

$399 < x$

$A = 399$ أو أي عدد حقيقي أكبر منه .

ب-

1) f معرّف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{4(x+1) - (1)(4x)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$4 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 4$

2) التابع f متزايد تماماً وعليه فإنّ :

$f(I) = [f(0) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

$\Rightarrow \quad \boxed{f(I) = [0, 4[}$

---

3) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{4x}{x+1} - 0}{x - 0}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{4x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{x+1}$

$\Rightarrow \quad \boxed{f'(0) = 4}$

④ معادلة المماس من الشكل :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

حيث $a=0$:

$$f'(0)=4 \;,\; f(0)=0$$

$$\Rightarrow \quad y = 4x$$

---

⑤ نطبق دستور التقريب التآلفي :

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\cdot h$$

نضع $a=0$ و $h=0.1$:

$$f(0.1) \simeq f(0)+f'(0)(0.1)$$

$$= 0 + 4\times 0.1 = 0.4$$

---

⑥ يجب تحقق العلاقة

$$f(a+h)+f(a-h) = 2b$$

حيث $(a,b)=(-1,4)$

$$l_1 = f(-1+h)+f(-1-h)$$

$$= \frac{4(-1+h)}{-1+h+1} + \frac{4(-1-h)}{-1-h+1}$$

$$= \frac{4}{h}\left[-1+h+1+h\right] = \frac{4}{h}[2h]$$

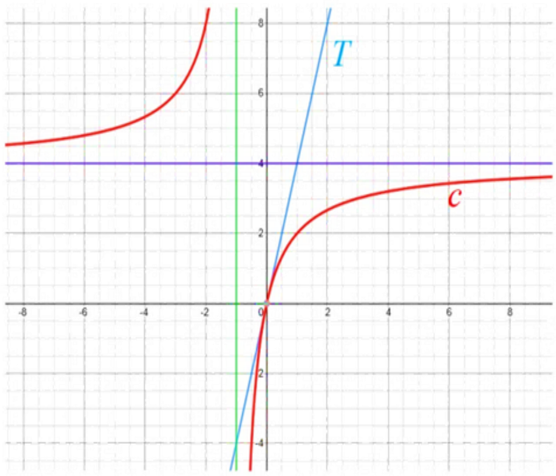
$$= 8$$

$$l_2 = 2b = 2(4) = 8$$

$$l_1 = l_2$$

فالنقطة $I(-1,4)$ مركز تناظر لـ c .

⑦



⑧

$$E(n): \quad f^{(n)}_{(x)} = 4n!\left(\frac{-1}{x+1}\right)^{n+1}$$

$E(1)$ محققة لأن :

$$f^{(1)}_{(x)} = 4\times 1\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)^2 = \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$$

نفرض صحة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$:

$$f^{(n)}_{(x)} = 4n!\left(\frac{-1}{x+1}\right)^{n+1}$$

$$\left(f^{(n)}_{(x)}\right)' = 4n!(n+1)\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{-1}{x+1}\right)^n$$

حسب القاعدة $\left[(u)^n\right]' = n\cdot u'\cdot u^{n-1}$

$$f^{(n+1)}_{(x)} = 4(n+1)!\,\frac{(-1)^2(-1)^n}{(x+1)^{n+2}}$$

$$f^{(n+1)}_{(x)} = 4(n+1)!\left(\frac{-1}{x+1}\right)^{n+2}$$

B- قسم المتتاليات - نهاية متتالية:

1) بما أنّ f متزايد تماماً على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ فهو متزايد تماماً على I.

ومنه g متزايد تماماً على I.

كما أنّ: $f(I)=[0,4[$

$$\Rightarrow g(x)\in[0,4[$$

ومنه $g(x)\in I$ أيّاً تكن $x\in I$

---

2) $g(x)=x \Longleftrightarrow \dfrac{4x}{x+1}=x$

$$\Longleftrightarrow 4x = x^2+x$$

$$\Longleftrightarrow x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

إمّا $x_1=0$ أو $x_2=3$.

---

3) $E(n):\ 0<u_n\leq u_{n+1}\leq 3$

$E(0)$ محقّقة لأنّ:

$$0<u_0\leq u_1\leq 3$$

$$0<1\leq 2\leq 3$$

حيث $u_1=g(u_0)=g(1)=2$

نفرض صحّة $E(n)$ ونبرهن صحّة $E(n+1)$

من الفرض: $0<u_n\leq u_{n+1}\leq 3$

تماماً على I:

$$g(0)<g(u_n)\leq g(u_{n+1})\leq g(3)$$

$$0<u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 3$$

فالقضيّة صحيحة.

---

4) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة.

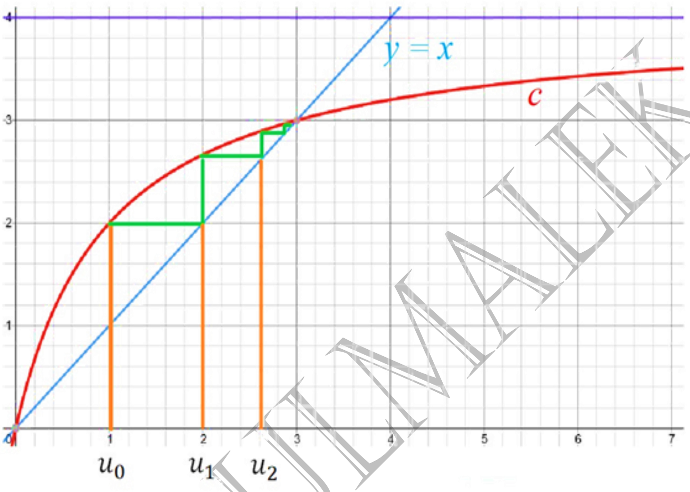
نهايتها تحقّق المعادلة $g(x)=x$

إمّا $L=0$ (مرفوض)

أو $L=3$ (مقبول)

---

5) + 6)



$\boxed{ج}$ 1)

$$v_{n+1}=\frac{3}{u_{n+1}}-1=\frac{3}{\frac{4u_n}{u_n+1}}-1$$

$$=\frac{3u_n+3}{4u_n}-1=\frac{3}{4}+\frac{3}{4u_n}-1$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{u_n}-1\right]=\frac{1}{4}v_n$$

وحدّها الأول:

$$v_0 = \frac{3}{u_0} - 1 = \frac{3}{1} - 1 = 2$$

2- $$v_n = v_0\, q^n$$

$$\boxed{v_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \quad ; \quad \left|q = \frac{1}{4}\right| < 1$$

3- $$\frac{3}{u_n} = v_n + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{1 + v_n}$$

$$\boxed{u_n = \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{1+0} = 3 .$$

4- $$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدّها الأول $a = 2$

وعدد الحدود: n

$$S_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q} = 2\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{S_n = \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{8}{3}(1-0) = \frac{8}{3}$$

جـ-

لندرس اطّراد المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(x_n)_{n\geq 0}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{4} < 1$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

$$x_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \frac{4u_n}{1+u_n}$$

$$x_{n+1} - x_n = u_{n+1} - 3 - (u_n - 3)$$

$$= u_{n+1} - 3 - u_n + 3$$

$$x_{n+1} - x_n = u_{n+1} - u_n \geq 0$$

وذلك حسب الخاصة $0 < u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 3 - 3 = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

د- قسم التابع اللوغاريتمي:

أ- 1)

$$w_{n+1} = \ln v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{4} v_n\right)$$

$$w_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln v_n$$

$$w_{n+1} = w_n - \ln 4$$

فالمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابيّة أساسها

$$r = -2\ln 2$$

وحدّها الأول:

$$w_0 = \ln(v_0) = \ln 2$$

$$w_n = w_0 + nr$$

$$w_n = \ln 2 - 2n\ln 2$$

$$\boxed{w_n = (-2n+1)\ln 2}$$

2)

$$S = \frac{n}{2}(a+l)$$

حيث:

$a = w_0 = \ln 2$, $L = w_{19} = -37\ln 2$

عدد الحدود: $n = 19 - 0 + 1 = 20$

$$\Rightarrow S = \frac{20}{2}(\ln 2 - 37\ln 2)$$

$$\boxed{S = -360\ln 2}$$

لدينا $w_n = \ln v_n$ إذاً $v_n = e^{w_n}$

ومنه $P = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \dots \times e^{w_{19}}$

$$P = e^{w_0 + w_1 + \dots + w_{19}} = e^{S}$$

ومنه $\boxed{P = e^{-360\ln 2} = 2^{-360}}$

ب)

1) h معرّف بشرط $f(x) > 0$

نحل المتراجحة $\frac{4x}{1+x} > 0$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$4x$	$-$		$-$	0	$+$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

ومنه $D_h =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

بالاستفادة من نهايات التابع f:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{t \to 4} \ln t = \ln 4 = 2\ln 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{t \to 4} \ln t = 2\ln 2$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} h(x) = \lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$$

2)

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{4x}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x^2 + x}$$

x	$-\infty$		-1	0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$\|\|$	$\|\|$	$+$	
$h(x)$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\ln 2$

3)

$$(a;b) = \left(\frac{-1}{2} ; 2\ln 2\right)$$

$$f(a+h) + f(a-h) \overset{?}{=} 2b$$

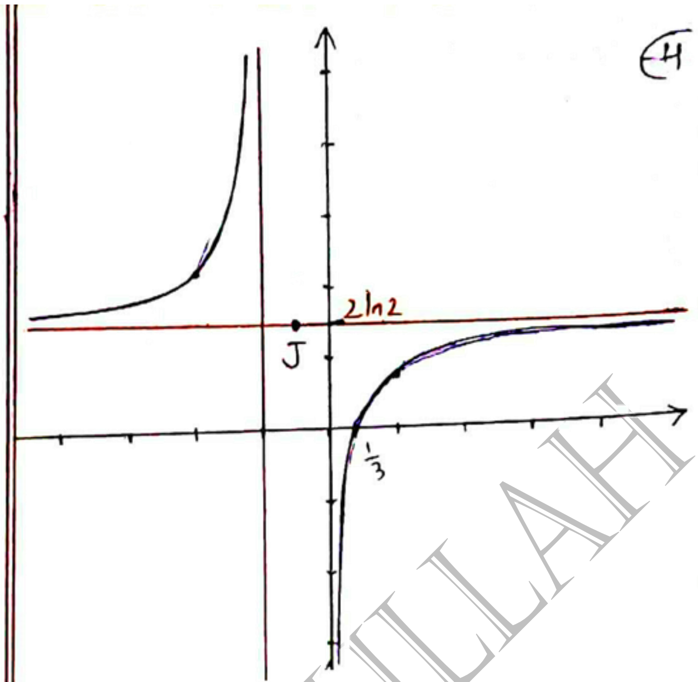
$$l_1 = f\left(\frac{-1}{2}+h\right) + f\left(\frac{-1}{2}-h\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4\left(\frac{-1}{2}+h\right)}{\frac{1}{2}+h}\right) + \ln\left(\frac{4\left(\frac{-1}{2}-h\right)}{\frac{1}{2}-h}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{4\,\cancel{\left(\frac{-1}{2}+h\right)}^{-1} \times 4\,\cancel{\left(\frac{-1}{2}-h\right)}^{-1}}{\cancel{\left(\frac{1}{2}+h\right)}\cancel{\left(\frac{1}{2}-h\right)}}\right]$$

$$= \ln(16) = 4\ln 2 = 2b$$

فالنقطة $I\left(\frac{-1}{2}, 2\ln 2\right)$ مركز تناظر للمنحني C_h.



(4)

$\boxed{ج}$

(1) $t_n = \ln\frac{4n}{n+1} = \ln 4 + \ln\frac{n}{n+1}$

$t_1 = \ln 4 + \ln\frac{1}{2}$

$t_2 = \ln 4 + \ln\frac{2}{3}$

$t_3 = \ln 4 + \ln\frac{3}{4}$

$\vdots$

$t_{n-1} = \ln 4 + \ln\frac{n-1}{n}$

$t_n = \ln 4 + \ln\frac{n}{n+1}$

$+$

$n\ln 4 + \ln\left(\cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{\frac{2}{3}} \times \cancel{\frac{3}{4}} \times \dots \times \frac{n}{n+1}\right)$

$= n\ln 4 + \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$\Rightarrow \boxed{t_1 + t_2 + \dots + t_n = n\ln 4 - \ln(n+1)}$

(2) لنستخرج شرط الحل:

$$\begin{cases} \frac{4x}{x+1} > 0 \rightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ 2x - 12 > 0 \rightarrow x \in]6, +\infty[\\ 2x - 7 > 0 \rightarrow x \in]\frac{7}{2}, +\infty[\end{cases}$$

ومنه شرط الحل:

$D_1 =]6, +\infty[$

$\ln\left(\frac{4x}{x+1}\right) \geq \ln\left(\frac{2x-12}{2x-7}\right)$

نأخذ exp الطرفين:

$\frac{4x}{x+1} \geq \frac{2x-12}{2x-7}$

من شرط الحل نستنتج أن $2x - 7 > 0$

وكذلك $x + 1 > 0$

$4x(2x-7) \geq (2x-12)(x+1)$

$8x^2 - 28x \geq 2x^2 + 2x - 12x - 12$

$6x^2 - 18x + 12 \geq 0$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$(x-1)(x-2) \geq 0$

محققة أياً كان x من D_1.

ومنه حل المتراجحة هو $]6, +\infty[$

D - قسم التابع الأسي:

$\boxed{أ}$

(1)

$\lim_{x \to -\infty} K(x) = \lim_{t \to 0} f(t) = f(0) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} K(x) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = 4$

(2)

$K'(x) = (e^x)' f'(e^x)$

$= e^x \frac{4}{(1+e^x)^2} > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$K'(x)$	+	+	
$K(x)$	0	$\nearrow$	4

3)

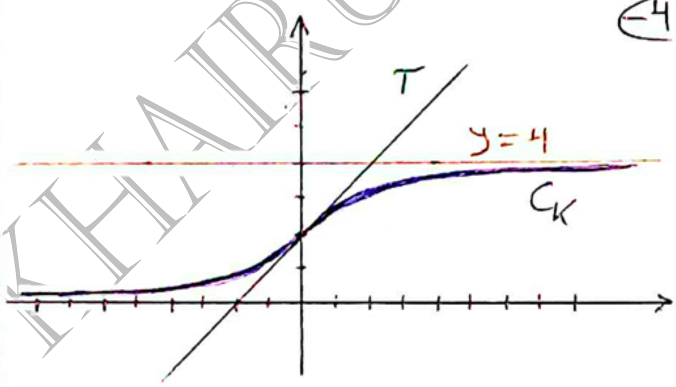
$$T: \; y = K'(0)(x-0) + K(0)$$

$$K(0) = f(1) = 2 \quad , \quad K'(0) = 1$$

$$y = (x-0) + 2$$

$$\boxed{T: \; y = x + 2}$$

4)



5)

$$\frac{4}{1+e^{x}} = \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}} = K(-x)$$

ا) نظير C بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $x=0$.

ب)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{4}\right)^{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} = 1^{\infty}$$

حالة عدم تعيين نزيلها:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{x}$$

نفرض $\frac{-1}{x+1} = t$

$$t \to 0 \quad , \quad x = \frac{-1}{t} - 1$$

$$l = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{-1}{t} - 1}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}} \times \frac{1}{1+t}\right]$$

$$= \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e}$$

طريقة ثانية:

$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{4}\right)^{x}$$

$$\ln l = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right]$$

$$= - \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= - \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = -1$$

حيث $t = \frac{1}{x}$

$$\ln l = -1 \Rightarrow l = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

E: قسم التكامل والتوابع الأصلية:

أ) 1)

$$f(x) = 4 \, \frac{x+1-1}{x+1}$$

$$= 4\left[1 - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$F(x) = 4x - 4\ln|x+1|$$

2) لإيجاد حدود التكامل نحل المعادلة

$$f(x) = x$$

$$a = x_1 = 0 \quad , \quad b = x_2 = 3$$

لتعيين $|f(x)-y|$ ندرس إشارة

الفرق $f(x)-y$ على المجال $[0,3]$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{4x}{1+x} - x$$

$$= \frac{4x - x - x^2}{1+x} = \frac{x(3-x)}{1+x}$$

$$f(x) - y_\Delta \geq 0$$

C_f فوق Δ على $[0,3]$ ومنه :

$$S = \int_a^b |f(x)-y_\Delta|\, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{x(3-x)}{1+x}\, dx$$

$$= \int_0^3 \left(-x + 4 - \frac{4}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4\ln(x+1)\right]_0^3$$

$$= -\frac{9}{2} + 12 - 4\ln 4 - (0+0+0)$$

$$\boxed{S = \frac{15}{2} - 8\ln 2}$$

3)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^3 \frac{16x^2}{(1+x)^2}\, dx$$

$$= 16\pi \int_0^3 \frac{x^2+2x+1-2x-1}{(1+x)^2}\, dx$$

$$V = 16\pi \int_0^3 \frac{(1+x)^2 - 2x - 1}{(1+x)^2}\, dx$$

$$= 16\pi \int_0^3 \left(1 - \frac{2x+2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$$

$$= 16\pi \left[x - \ln(x+1)^2 - \frac{1}{x+1}\right]_0^3$$

$$= 16\pi \left[3 - 4\ln 2 - \frac{1}{4} - (0-1)\right]$$

$$= 16\pi \left[\frac{15}{4} - 4\ln 2\right]$$

$$\boxed{V = \pi[60 - 64\ln 2]}$$

ت)

1)

$u = \ln x$	$v' = 1$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = x$

$$\int_a^b u v' = [uv]_a^b - \int_a^b v u'$$

$$\int_1^e \ln x\, dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= [x\ln x - x]_1^e$$

$$\int_1^e \ln x\, dx = 0 - (0-1) = 1$$

لحساب $\int_1^e \ln(x+1)\, dx$ ؛

نضع $u = x+1$ عندئذٍ $du = dx$

عندما $x=1$ يكون $u=2$

عندما $x=e$ يكون $u=e+1$

$$\int_1^e \ln(x+1)\,dx = \int_2^{e+1} \ln u\,du$$

$$= \left[u\ln u - u\right]_2^{e+1}$$

$$= (e+1)\left[\ln(e+1) - 1\right] - (2\ln 2 - 2)$$

$$= e\ln(e+1) + \ln\left(\frac{e+1}{4}\right) + 1 - e$$

---

2)

$$\int_1^e h(x)\,dx = \int_1^e \left(\ln 4 + \ln x - \ln(x+1)\right)dx$$

$$= \left[x\ln 4\right]_1^e + \cancel{1} - e\ln(e+1) - \ln\left(\frac{e+1}{4}\right) \cancel{-1} + e$$

$$= (2e-2)\ln 2 + e - e\ln(e+1) - \ln(e+1) + 2\ln 2$$

$$\int_1^e h(x)\,dx = e(2\ln 2 + 1) - (1+e)\ln(1+e)$$

ت

1)

$$\chi(x) = 4\,\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$K(x) = 4\ln(1+e^x)$$

---

2)

$$A(\alpha) = \int_\alpha^0 \chi(x)\,dx = \left[K(x)\right]_\alpha^0$$

$$A(\alpha) = K(0) - K(\alpha)$$

$$= 4\ln 2 - 4\ln(1+e^\alpha)$$

3) نعلم أن : $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$

$$\lim_{\alpha\to-\infty} A(\alpha) = 4\ln 2 - 4\ln(1+0)$$

$$= 4\ln 2$$

- انتهى حل المسألة -