منشورات جامعة البعث
كلية العلوم

التحليل (٥)

الدكتور
إبراهيم إبراهيم

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٩٩٣ - ١٩٩٤

)✱(الفصل الأول)✱(

التوابع ذات التغيرات المحدودة

نتناول في هذا الفصل نوعا هاما وواسعا من التوابع ، يلزم في الكثير من أقسام التحليل الرياضي ، انه صف التوابع ذات التغيرات المحدودة . وقبل البدء بدراسة التوابع ذات التغيرات المحدودة لابد من تعريف التجزئة لمجال $[a,b]$ ، حيث نستخدم هذا المفهوم كثيرا ، وذكر بعض خواصه .

تعريف التجزئة

ليكن المجال $[a,b]$ حيث $a < b$ عندئذ كل مجموعة $P[a,b]$:

$$P[a,b]:= \{x_o, x_1, \ldots, x_n \ : \ x_i \in [a,b], \ i = 1,2,\ldots,n, \quad a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

نسميها تجزئة للمجال $[a,b]$ ، وللاختصار سنكتب :

$$P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$$

أو P فقط .

كما نلاحظ فان التجزئة ليست وحيدة ، لذا سنرمز بـ $\mathbb{P}[a,b]$ لأسرة كل تجزئات المجال $[a,b]$.

تعريف نظيم التجزئة

نظيم التجزئة P ونرمز له بـ $\lambda(P)$ هو العدد :

$$\lambda(P): = \max_k (x_k - x_{k-1})$$

مفهوم دقة وخشونة التجزئة

نقول ان التجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ أدق (أقوى) من التجزئة $P' = \{a = y_o, y_1, \ldots, y_m = b\}$ اذا كان $P \supset P'$. في هذه الحالة نقول أيضا ان التجزئة P' أخشن (أضعف) من التجزئة P .

اذا كانت التجزئة P أدق من التجزئة P' فان $\lambda(P) \le \lambda(P')$.

١-١ تعاريف ومفاهيم أساسية :

ليكن $f(x)$ تابعا معرفا على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ، حيث $a < b$ ، ولتكن :

$$P = \{a = x_o, x_1, \dots, x_n = b\}$$

تجزئة لهذا المجال . ولنشكل المجموع $V(f,p)$:

$$V(f,P) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| .$$

كل تجزئة للمجال $[a,b]$ يقابلها مجموع من هذا الشكل وبالتالي لدينا أسرة من المجاميع .

١-١-١ تعريف :

نقول عن التابع $f(x)$ انه ذو تغيرات محدودة (ذ ت م) على المجال $[a,b]$ اذا كانت المجموعة $\{V(f,p) : P \in \mathbb{P}[a,b]\}$ محدودة ، أي يوجد عدد ثابت موجب M بحيث يكون :

$$V(f,P) \leq M \quad ; \quad \forall P \in \mathbb{P}[a,b] .$$

عندئذ نسمي الحد الأعلى لهذه المجموعة بالتغير الكلي للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ونرمز له بالرمز $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. اذن :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) := \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P)$$

أما اذا كانت المجموعة $\{V(f,p): P \in \mathbb{P}[a,b]\}$ غير محدودة فنقول: ان التابع $f(x)$ ليس ذا تغيرات محدودة على المجال $[a,b]$ ، وفي هذه الحالة يكون :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) := \infty$$

۱-۱-۲ ملاحظة :

آ - اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فينتج من التعريف السابق أن :

$$V(f,P) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \quad ; \quad \forall P \in \mathbb{P}[a,b]$$

ومن أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ توجد تجزئة P' للمجال $[a,b]$ بحيث يكون:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < V(f,P') + \varepsilon \; .$$

ب - عندما يكون التابع معرفا على مجال غير محدود ، مثلا $[a, +\infty)$ ، فيكون $f(x)$ ذ ت م على هذا المجال اذا كان ذ ت م على كل مجال محدود $[a,A]$ ويوجد عدد ثابت K (لايتعلق بـ A) بحيث يكون :

$$\overset{A}{\underset{a}{V}}(f) \leq K$$

وفي هذه الحالة يكون التغير الكلي :

$$\overset{\infty}{\underset{a}{V}}(f) := \sup_{A>a} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{A\to\infty} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f)$$

وهكذا من أجل المجالات غير المحدودة $(-\infty,b]$ و $(-\infty,+\infty)$.

جـ - إذا كان $b < a$ فنضع :

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) := - \overset{a}{\underset{b}{V}}(f)$$

۱-۱-۳ ملاحظة :

في التعاريف السابقة لم نذكر أية خواص للتابع $f(x)$ (كأن يكون مستمرا حيث يمكن لتابع مستمر أن يكون ليس ذ ت م - كما سنرى) .

۱-۱-٤ مثال على تابع ذ ت م :

ليكن التابع : $f(x) = x^2+1$ المعرف على المجال $[1,5]$ ، ولتكن التجزئة:

$$p = \{1 = x_o, x_1, \ldots, x_n = 5\}$$

فيكون لدينا :

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |[x_k^2+1]-[x_{k-1}^2+1]| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k-1}^2) = x_n^2 - x_o^2 = 25 - 1 = 24 \text{ ،}$$

وبما أن التجزئة p كانت اختيارية ، فالمجموع $V(f,p)$ يكون محدودا من أجل أية تجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$. وبالتالي فان $f(x)$ ذ ت م على المجال $[1,5]$ ويكون تغيره الكلي :

$$\overset{5}{\underset{1}{V}}(f) = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} V(f,P) = 24$$

هنا التابع $f(x)$ يكون مستمرا وذو تغيرات محدودة .

1-1-5 مثال : على تابع ليس ذ ت م :

ليكن التابع $f(x)$ المعرف على المجال $[0,1]$ بالشكل :

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x} \quad ; \quad x \neq 0$$

ومعلوم أن هذا التابع مستمر على المجال $[0,1]$ وسنبرهن الآن أنه ليس ذ ت م.

لنأخذ التجزئة : $P_n : = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\}$ للمجال $[0,1]$

فنجد بعد الحساب أن :

$$V(f,P_n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} : = v_n$$

وبما أن v_n لايمكن أن يكون محدودا من أجل كل n (حيث أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة) . فنجد أن :

$$\overset{1}{\underset{o}{V}}(f) = +\infty$$

بالمقابل يوجد توابع غير مستمرة لكنها ذ ت م،انظر (١ ـ ٣ ـ c)و(١ـ٣ـ٨) .

سنذكر الآن بعض الحقائق التي ستلزمنا فيما بعد .

١ـ١ـ٦ ملاحظة :

لتكن P و P' تجزئتان للمجال $[a,b]$ بحيث أن P' أدق من P عندئذ يكون :

$$V(f,P) \leq V(f,P')$$

وبعبارة أخرى : عند اضافة نقاط جديدة للتجزئة P ، فلن يصغر المجموع $V(f,P)$
لأنه في الحقيقة لو أخذنا :

$$P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b\}$$

$$P' = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_{i-1}, x', x_i, \ldots, x_n = b\}$$

فيكون :

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq$$

$$\leq |f(x_1) - f(x_o)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \ldots$$

$$+ |f(x') - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x')| + \ldots +$$

$$+ |f(x_n) - f(x_{n-1})| = V(f,P')$$

١ـ١ـ٧ ملاحظة :

اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a\ ,\ b]$ فيكون أيضا ذ ت م على كل مجال $[a',b'] \subset [a,b]$ ، ويكون :

$$\overset{b'}{\underset{a'}{V}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

وهذا ينتج مباشرة من التعريف والملاحظة (١ـ١ـ٦) .

١ـ٢ خواص التوابع ذات التغيرات المحدودة :

نستعرض فيما يلي أهم خواص التوابع ذات التغيرات المحدودة .

١-٢-١ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون محدودا على هذا المجال .

* البرهان : لتكن $P = \{a,x,b\}$ تجزئة للمجال $[a,b]$ حيث $a < x < b$ ،

فيكون :

$$V(f,P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) .$$

لدينا الآن :

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| .$$

لنضع $A =: \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)|$ فنجد :

$$|f(x)| \leq A \quad ; \quad x \in [a,b]$$

الذي يعني أن التابع $f(x)$ محدود على المجال $[a,b]$.

١-٢-٢ ملاحظة :

ان عكس المبرهنة (١-٢-١) غير صحيح في الحالة العامة ، فمثلا التابع $f(x)$ الوارد في المثال (١-١-٥) محدود على المجال $[0,1]$ لكنه ليس ذ ت م على هذا المجال ، كما رأينا .

١-٢-٣ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون كل من $|f(x)|$ و $\alpha f(x)$ (حيث α عدد ثابت) و $\frac{1}{f(x)}$ (بشرط $f(x) \neq 0$ مهما يكن $x \in [a,b]$) أيضا ذ ت م على المجال $[a,b]$.

* البرهان : من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ نجد :

$$V(|f|,P) = \sum_{k=1}^{n} \Big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

الذى نستنتج منه أن $|f(x)|$ ذ ت م على $[a,b]$ ، بنفس الوقت يكـــــون

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

أ) لدينا :

$$V(\alpha f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left|\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})\right| =$$

$$= |\alpha| \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \leq |\alpha| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

الذى نستنتج منه أن $\alpha f(x)$ ذ ت م على $[a,b]$ ويكون $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f) \leq |\alpha| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

ب) لنفرض الآن أن $|f(x)| \geq c > 0$ من أجل كل $x \in [a,b]$ فيكون لدينا :

$$V(\frac{1}{f},p)= \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{f(x_{k-1})-f(x_k)}{f(x_k)\ f(x_{k-1})}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right| \leq \frac{1}{c^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

ومنه نستنتج أن $\frac{1}{f(x)}$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ ويكون $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\frac{1}{f}) \leq \frac{1}{C^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

<u>١-٢-٤ مبرهنة :</u>

اذا كان التابعان $f(x)$ و $g(x)$ ذ ت م على المجال $[a,b]$ فيكون كـــل من $f(x) \mp g(x)$ و $f(x) \cdot g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ (حيث $g(x) \neq 0$ مهما يكن $x \in [a,b]$) أيضا ذ ت م على $[a,b]$.

* البرهان : من أجل أية تجزئة $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$
نجد مايلي :

$$V(f \mp g,p) = \sum_{k=1}^{n} \left|[f(x_k) \mp g(x_k)]-[f(x_{k-1}) \mp g(x_{k-1})]\right| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left|[f(x_k)-f(x_{k-1})] \mp [g(x_k)- g(x_{k-1})]\right| \leq$$

)*(الفصـــل الثانـــي)*(

تكامـل ستيلجس

سوف نعتبر في هذا الفصل أن تكامل ريمان $\int_a^b f(x)dx$ معروف مع جميع خواصه . ونريد تعميم هذا التكامل لنحصل على مايسمى تكامل ستيلجس .

وكما هو ملاحظ يكون في تكامل ريمان تابع واحد $f(x)$ معرف على مجال $[a,b]$، أما في تكامل ستيلجس فيوجد تابعان $f(x)$ و $g(x)$ معرفان على المجال $[a,b]$. ولتسهيل المقارنة سنذكّر بتعريف تكامل ريمان .

ليكن $f(x)$ تابعا معرفا ومحدودا على المجال $[a,b]$ ولتكن :

$P = \{a = x_o, x_1, \ldots, x_n = b\}$ تجزئة لهذا المجال ، ونضع كالعادة $\lambda(p) := \max\limits_k (x_k - x_{k-1})$.

في كل مجال جزئي $[x_{k-1}, x_k]$ نختار نقطة ξ_k حيث $k = 1,2,\ldots,n$ ثم نشكل المجموع التالي (المسمى مجموع ريمان التكاملي) :

$$\sigma(f,P) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \quad (x_k - x_{k-1})$$

فاذا كانت النهاية $\lim\limits_{\lambda(p)\to 0} \sigma(f,P)$ موجودة ومحدودة ومستقلة عن التجزئة P ، وعن طريقة اختيار النقاط ξ_k من المجالات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ ، فنسمي تلك النهاية بتكامل ريمان المحدد للتابع $f(x)$ على المجال $[a,b]$ ونرمز لها بالرمز : $(R) \int_a^b f(x)dx$ أو اختصارا ب $\int_a^b f(x)dx$.

وفي هذه الحالة نقول أيضا ان التابع $f(x)$ كمول حسب ريمان على المجال $[a,b]$.

٢-١ تعريف وخواص تكامل ستيلجس :

٢-١-١ تعريف :

ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعان معرفان ومحدودان على المجال $[a,b]$ ولتكن التجزئة : $P = \{ a = x_o, x_1, \dots, x_n = b\}$.

في كل مجال جزئي $[x_{k-1}, x_k]$ نختار نقطة ξ_k حيث $k = 1,2,\dots,n$ ثم نشكل المجموع التالي (المسمى مجموع ستيلجس التكاملي للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ الموافق للتجزئة P) :

$$S(f,g,p) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

فاذا كانت النهاية : $\lim_{\lambda(p) \to 0} S(f,g,p)$ موجودة ومحدودة ومستقلة عن التجزئة P ، وعن طريقة اختيار النقاط ξ_k من المجالات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ ، فنسمي تلك النهاية تكامل ستيلجس للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ على المجال $[a,b]$ ونرمز لها بالرمز :

$$(s) \int_a^b f(x)\, dg(x)$$

أو فقطبالرمز : $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ للاختصار .

في هذه الحالة نقول أيضا ان تكامل ستيلجس $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ موجود.

٢-١-٢ ملاحظة :

من الواضح أنه اذا كان $g(x) = x$ فنحصل على تكامل ريمان الآنف الذكر. لذا يعتبر تكامل ستيلجس تعميما لتكامل ريمان .

٢-١-٣ ملاحظة :

يمكن التعبير عن التعريف (٢-١-١) كما يلي :

نسمي العدد $I := \int_a^b f(x)dg(x)$ تكامل ستيلجس للتابع $f(x)$ بالنسبة للتابع $g(x)$ على المجال $[a,b]$ ، اذا كان من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$

يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه اذا كان $\lambda(P) < \delta$ فان $|S(f,g,p) - I| < \varepsilon$ ،
وذلك كيفما أخذت تجزئة المجال $[a,b]$ وكيفما اختيرت النقاط ξ_k من المجالات الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ حيث $k = 1,2,\dots,n$.

فيما يلي نذكر بعض خواص تكامل ستيلجس .

٢-١-٤ مبرهنة :

يكون دوما : $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$

* البرهان : بأخذ $f(x) \equiv 1$ تنتج العلاقة مباشرة بحساب مجموع ستيلجس التكاملي .

٢-١-٥ مبرهنة :

اذا كان كل من التكاملين $\int_a^b f_1(x)\, dg(x)$ و $\int_a^b f_2(x) dg(x)$ موجودا

فانه من أجل أى عددين α_1 و α_2 يكون التكامل :

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]\, dg\,(x)$$

موجود أيضا ، كما أن :

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] dg(x) = \alpha_1 \int_a^b f_1(x) dg(x) + \alpha_2 \int_a^b f_2(x) dg(x)$$

* البرهان : من أجل أية تجزئة P للمجال $[a,b]$ نجد أن :

$$S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g, P) = \alpha_1 S(f_1, g, P) + \alpha_2 S(f_2, g, p)$$

وبحسب الفرض فان نهاية الطرف الأيمن موجودة - وبالتالي نهاية الطرف الأيسر عندما $\lambda(p) \to 0$ ، وهذه النهايات هي تكاملات ستيلجس الموافقة للعلاقة المطلوبة .

٢-١-٦ مبرهنة :

اذا كان كل من التكاملين $\int_a^b f(x) dg_1(x)$ و $\int_a^b f(x) dg_2(x)$ موجودا

فانه من أجل أى عددين β_1 و β_2 يكون $\int_a^b f(x)d[\beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(x)]$
موجود أيضا ، كما أن :

$$\int_a^b f(x)d[\beta_1 g_1(x)+\beta_2 g_2(x)] = \beta_1\int_a^b f(x)dg_1(x)+\beta_2\int_a^b f(x)dg_2(x)$$

* البرهان : من أجل أية تجزئة P للمجال $[a,b]$ نجد أن :

$$S(f,\beta_1 g_1+\beta_2 g_2,P) = \beta_1 S(f,g_1,P) + \beta_2 S(f,g_2,P)$$

وعندما $\lambda(P) \to 0$ فان نهاية الطرف الأيمن موجودة وبالتالي نهاية الطرف الأيسر ، وهذه النهايات هي تكاملات ستيلجس الموافقة للعلاقة المطلوبة .

يمكن تعميم المبرهنتين (٢-١-٥) و (٢-١-٦) لأجل أكثر من تابعين بشكل مشابه .

٢-١-٧ مبرهنة : (دستور التكامل بالتجزئة)

اذا كان أحد التكاملين : $\int_a^b f(x)dg(x)$ أو $\int_a^b g(x)df(x)$ موجودا فيكون الثاني موجود أيضا ، كما أن :

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

حيث أن :

$$f(x)g(x)\Big|_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

* البرهان : نفرض أن التكامل $\int_a^b g(x)df(x)$ موجود .

اذا كانت $P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ تجزئة للمجال $[a,b]$ و ξ_k نقاط اختيارية من المجالات الجزئية $[x_{k-1},x_k]$ حيث $k=1,2,\dots,n$ فيكون لدينا :

$$a=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\dots\le x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\le\xi_{i+1}\le x_{i+1}\le\dots\le$$
$$\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=b.$$

$$S(f,g,p) = f(x)g(x)\Big|_a^b - S(g,f,p')$$

وبملاحظة أن $\lambda(p) \to 0$ يقتضي $\lambda(p') \to 0$ وبالعكس ، نجد بأخذ النهاية في طرفي المساواة الأخيرة ، أن التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود ويكون :

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x)$$

وهي العلاقة التي تعطي دستور التكامل بالتجزئة في تكامل ستيلجس .

٢ـ١ـ٨ مبرهنة :

لتكن $a < c < b$.فاذا كان التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ موجودا ، فيكون كل من التكاملين $\int_a^c f(x)dg(x)$ و $\int_c^b f(x)dg(x)$ موجودا أيضا ، كما أن:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$$

* البرهان : من وجود التكامل $I = \int_a^b f(x)dg(x)$ وحسب الملاحظة

(٢ـ١ـ٣) فانه من أجل أى عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أنه اذا كان $\lambda(P) < \delta$ ينتج : $|S(f,g,P) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ ،حيث أن P تجزئة للمجال $[a,b]$،والذى يعني في الوقت ذاته أن :

$$I = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f,g,p) \, .$$

من أجل هذه النهاية يصح مايسمى بمبدأ بولزانو ـ كوشي (أو اختبار كوشي) للتقارب . فاذا كانت P و P' تجزئتين للمجال $[a,b]$ بحيث $\lambda(P)<\delta$ و $\lambda(P')<\delta$ وكان $S(f,g,P)$ و $S(f,g,P')$ مجموعي ستيلجس التكاملين الموافقين لهما فنجد أن :

$$|S(f,g,P)-S(f,g,P')| \le |S(f,g,P)-I|+|S(f,g,P')-I| < \varepsilon \, .$$

نفرض الآن أن c احدى نقاط التجزئة P (وكذلك P') ، ونعتبر أن نقاط التجزئة

الواقعة في المجال $[c,b]$ هي نفسها في الحالتين ، عندئذ نجد أن الفرق :

$$S(f,g,P) - S(f,g,P')$$

يؤول لفرق من الشكل :

$$S(f,g,P_1) - S(f,g,P_1')$$

حيث أن P_1 و P_1' تجزئتان للمجال $[a,c]$ معينتان بالشكل :

$$P_1 = P\cap[a,c] \quad , \quad P_1' = P'\cap[a,c] \cdot$$

من أجل المجال $[a,c]$ وبتطبيق مبدأ بولزانوا ـ كوشي للتقارب على مجاميع ستيلجس التكاملية الموافقة ، نستنتج أن التكامل $I_1 = \int_a^c f(x)dg(x)$ موجود .

وبمناقشة مشابهة نبرهن على وجود التكامل : $I_2 = \int_c^b f(x)\, dg(x)$

لتكن الآن P تجزئة ما للمجال $[a,b]$ بحيث $c \in P$ ، فيمكن تقسيمها الى تجزئتين P_1 و P_2 للمجالين $[a,c]$ و $[c,b]$ على الترتيب ، حيث :

$$P_1 = P\cap[a,c] \quad , \quad P_2 = P\cap[c,b]$$

عندئذ مجاميع ستيلجس التكاملية تحقق العلاقة :

$$S(f,g,P) = S(f,g,P_1) + S(f,g,P_2)$$

بأخذ النهايات في هذه المساواة نجد :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x) \cdot$$

٢ـ١ـ٩ ملاحظة :

ان عكس المبرهنة (٢ـ١ـ٨) غير صحيح بشكل عام ، اذ أن وجود التكاملين $\int_a^c f(x)dg(x)$ و $\int_c^b f(x)dg(x)$ لايؤدي بالضرورة لوجود التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$ (وذلك بخلاف تكامل ريمان) كما يبين لنا المثال التالي :

٢ـ١ـ١٠ مثال :

ليكن التابعان $f(x)$ و $g(x)$ المعرفان على المجال $[-1,1]$ بالشكل

)*(الفصل الثالث)*(

المجموعات المقيسة

في هذا الفصل نريد تعميم مفهوم الطول (وبشكل مشابه يتم تعميم مفهوم المساحة والحجم) . فعلى سبيل المثال ، معلوم أن طول المجال $[a,b]$ هو العدد $b - a$ ، نفس الشيء بالنسبة للمجالات $]a,b]$ و $[a,b($ و (a,b) .
وهنا يجوز التساؤل : هل يمكن أن نقول شيئا - مثلا - عن طول متتالية من الاعداد الحقيقية $\{a_n\}$ ، أو عن طول مجموعة بشكل عام ؟ .

بالنسبة للمفهوم المألوف للطول ، ليس لهذا الكلام معنى . لذا سنتعرف فيما يلي على مفهوم جديد هو القياس بحيث تصبح عبارة قياس مجموعة - بدلا من طول مجموعة - ذات معنى من أجل أية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وكذلك من أجل مجموعة ما X .

٣-١ الجبر - الجبر التام :

فيما يلي نعتبر أن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}(X)$ أسرة كل المجموعات الجزئية لـ X .

٣-١-١ تعريف :

نقول عن الصف $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ انه جبر على X اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

(ج١) $\phi \in \mathcal{A}$ و $X \in \mathcal{A}$.

(ج٢) اذا كان $A \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{A}$ فان $(A \cup B) \in \mathcal{A}$.

(ج٣) اذا كان $A \in \mathcal{A}$ فان $A^c \in \mathcal{A}$ حيث هنا $A^c = X - A$

٣-١-٢ ملاحظة :

من أجل أى عدد منته من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ من $\mathcal{A}$ يكون

أيضـــا : $\mathcal{A} \ni \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right)$.

٣-١-٣ تعريف :

نقول عن الصف $\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{F}$ انه جبر تام (أو σ - جبر) على X اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

(ج ت١) $\mathcal{F} \ni \phi$ و $\mathcal{F} \ni X$

(ج ت٢) من أجل أية متتالية $\{A_n\}$ من عناصر $\mathcal{F}$ فان $\mathcal{F} \ni \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$.

(ج ت٣) اذا كان $\mathcal{F} \ni A$ فان $\mathcal{F} \ni A^c$ ، حيث هنا $A^c = X - A$

أما الثنائية $[X, \mathcal{F}]$ فنسميها فضاء مقيسا .

٣-١-٤ ملاحظة :

آ - من الشرطين (ج ت ٢) و (ج ت ٣) ينتج فورا أن $\mathcal{F} \ni \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)$ وذلك من أجل أية متتالية $\{A_n\}$ من $\mathcal{F}$.

ب - واضح أن كل جبر تام على X هو جبر على X ، لكن العكس غير صحيـــح في الحالة العامة ، كما سنرى فيما بعد .

جـ - من الأمثلة على الجبور التامة على مجموعة X :

$$\mathcal{F}_1 = \{\phi , X\} \quad , \quad \mathcal{F}_2 = \{\phi , A, A^c, X\} \quad ; \quad \mathcal{F}_3 = \mathcal{P}(X)$$

حيث أن A أية مجموعة جزئية من X .

د - اذا كانت A و B من الجبر $\mathcal{A}$ (الجبر التام $\mathcal{F}$) فمن الواضح أن كلا مـــن $A \cap B$ و $A - B$ تكون أيضا من $\mathcal{A}$ (أو $\mathcal{F}$) .

٣-١-٥ تعريف :

نقول عن الصف $\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{M}$ انه مطّرد اذا تحقق الشرطان التاليان :

(ص م ١) من أجل أية متتالية متزايدة $\{A_n\}$ من $\mathcal{M}$ أي :

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots\cdot$$

فان $\mathcal{M} \ni \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$.

(ص م ٢) من أجل أية متتالية متناقصة $\{B_n\}$ من $\mathcal{M}$ أي :

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots\cdot\cdot$$

فان

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) \ni \mathcal{M}.$$

من الواضح هنا أن كل جبر تام هو صف مطرّد .

٢-١-٦ ملاحظة :

أ- من التعاريف السابقة نستنتج أن تقاطع أية أسرة غير خالية من الجبور (الجبور التامة - الصفوف المطردة) يكون من جديد جبرا (جبرا تاما - صفا مطردا) .

ب- اذا كان الآن الصف $\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{K}$ ، حيث $\mathcal{K} \neq \phi$ ، فيوجد على الأقل جبر (جبر تام - صف مطرد) يحوى الصف $\mathcal{K}$. ولكن أصغر جبر (أصغر جبر تام - أصغر صف مطرد) يحوى الصف $\mathcal{K}$ هو تقاطع جميع الجبور (الجبور التامة - الصفوف المطردة) التي تحوى $\mathcal{K}$.

لذا نقدم الآن التعريف التالي ، حيث نفرض $\mathcal{K} \neq \phi$ دوما :

٢-١-٧ تعريف :

ليكن $\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{K}$. عندئذ : أصغر جبر (أصغر جبر تام - أصغر صف مطرد) يحوى الصف $\mathcal{K}$ نسميه الجبر (الجبر التام - الصف المطرد) المولّد بالصف $\mathcal{K}$ ونرمز له بـ $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{K})$ - $\mathcal{M}(\mathcal{K})$) . كما نسمي $\mathcal{K}$ الصف المولّد للجبر $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ (للجبر التام $\mathcal{F}(\mathcal{K})$، للصف المطرد $\mathcal{M}(\mathcal{K})$).

٢-١-٨ ملاحظة :

ليكن الصفان $\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{K}_1$ و $\mathcal{P}(X) \supseteq \mathcal{K}_2$. فاذا كان $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{K}_2)$ فينتج مباشرة أن $\mathcal{F}(\mathcal{K}_1) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{K}_2)$.

بامكاننا الآن معرفة متى يكون ~~الجبر $\mathcal{A}$ جبرا~~ تاما .

٢-١-٩ مبرهنة :

يكون الجبر $\mathcal{A}$ جبرا تاما اذا وفقط اذا كان $\mathcal{A}$ صفا مطردا .

* البرهان : نفرض أن $\mathcal{A}$ جبرا تاما . عندئذ حسب الشرط (ج ت ٢) يكون

$\mathcal{A} \ni (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ وذلك من أجل أية متتالية $\{A_n\}$ من $\mathcal{A}$ وكذلك $\mathcal{A} \ni (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$

اذن $\mathcal{A}$ صف مطرد.

نفرض الآن أن $\mathcal{A}$ صفا مطردا ونبرهن أنه جبر تام .

ان الشرطين (ج ت ١) و (ج ت ٣) ليسا الا الشرطين (ج١) و (ج٣) وهما محققان . ولبرهان الشرط (ج ت ٢) نأخذ أية متتالية $\{A_n\}$ من $\mathcal{A}$.

لنضع $B_n := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. فنجد أن $\{B_n\}$ متتالية متزايدة ،

كما أن : $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. اذن $\mathcal{A}$ جبر تام .

٣-١-١٠ مبرهنة :

من أجل الجبر $\mathcal{A}$ يكون : $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}(\mathcal{A})$

* البرهان : لدينا هنا $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})$ لأن $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ جبر تام فهو صف مطرد . ولنبرهن أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر (عندئذ يكون $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر تام حسب المبرهنة السابقة) . لتكن المجموعة المثبتة $A \subseteq X$ ولنأخذ الصف $\mathcal{G}(A)$:

$$\mathcal{G}(A) := \{B \subseteq X : A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \ , \ A-B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \ , \ B-A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

فيكون له الخواص التالية :

(1) $B \in \mathcal{G}(A) \iff A \in \mathcal{G}(B)$.

(2) من أجل $A \in \mathcal{A}$ يكون $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}(A)$.

(3) من أجل أية مجموعة مثبتة $A \subseteq X$ يكون $\mathcal{G}(A)$ صفا مطردا .

من (2) و (3) ينتج من أجل $A \in \mathcal{A}$ أن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}(A)$ وبالتالي حسب (1) فانه من أجل $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ يكون $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}(B)$. وباستخدام (3) مرة أخرى نجد أن $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}(B)$ عندما $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ وهذا يعني أنه من أجل أى $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ فان :

$$A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \ , \ A-B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \ , \ B-A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

وبما أن $X \in \mathcal{M}(A)$ نستنتج أن $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ جبر على X وبالتالي جبر تام حسب المبرهنة السابقة . ومنه ينتج : $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{F}(\mathcal{A})$.

بالعودة للتعريف (٣-١-٧) نتعرف على نوع هام جدا من الجبور التامة على المجموعة $\mathbb{R}$.

٣-١-١١ تعريف :

الجبر التام المولّد بصف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ نسميه جبر بوريل على $\mathbb{R}$ ونرمز له بـ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ وكل عنصر منه نسميه مجموعة بوريلية .

لدينا الآن المبرهنة الهامة التالية ، التي تبين لنا امكانية توليد جبر بوريل من عدة صفوف .

٣-١-١٢ مبرهنة :

يمكن توليد جبر بوريل $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ بأحد الصفوف التالية :

(١) $\mathcal{J}_1 := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R} \; ; \; a < b\}$

(٢) $\mathcal{J}_2 := \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R} \; ; \; a < b\}$

(٣) $\mathcal{J}_3 := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R} \; ; \; a < b\}$

(٤) $\mathcal{J}_4 := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R} \; ; \; a < b\}$

(٥) $\mathcal{J}_5 := \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

(٦) $\mathcal{J}_6 := \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$

(٧) $\mathcal{J}_7 := \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\}$

(٨) $\mathcal{J}_8 := \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}$

* البرهان :

١- بما أن (a,b) مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فانه عبارة عن مجموعة بوريلية

٣-٢-٣ تعريف :

كل تابع μ معرف على جبر تام $\mathcal{F}$:

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty] \quad ; \quad A \longmapsto \mu(A)$$

نسميه قياسا على $\mathcal{F}$ اذا حقق الشرطين التاليين :

(ق١) $\mu(\phi) = 0$

(ق٢) μ تابع جمعي تام ، هذا يعني أنه من أجل أية متتالية $\{A_n\}$ مـن $\mathcal{F}$ ومنفصلة مثنى مثنى فان :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

كما نسمي الثلاثية $[X, \mathcal{F}, \mu]$ فضاء مقيسا مع قياس (أو اختصارا فضاء قياس) .

تجدر الملاحظة هنا الى أن القياس (وكذلك شبه القياس) ليس وحيدا، أى يمكن تعريف اكثر من قياس على جبر تام $\mathcal{F}$.

(ويمكن تعريف القياس على جبر $\mathcal{A}$ بنفس الشكل الوارد في التعريف ٣-٢-٣) .

٣-٢-٤ ملاحظة :

من الواضح أن كل قياس هو شبه قياس ، ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة . ونتساءل الآن : متى يصبح شبه القياس m قياسا . وللاجابة على هذا السؤال نمهد ببعض المفاهيم .

٣-٢-٥ تعريف :

نسمي التابع μ^* :

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty] \quad ; \quad A \longmapsto \mu^*(A)$$

قياسا خارجيا على $\mathcal{P}(X)$ (أو على X) اذا حقق الشروط الثلاثة التالية :

(ق خ ١) $\mu^*(\phi) = 0$

(ق خ ٢) من أجل أية مجموعتين A و B من $\mathcal{P}(X)$ و $A \subseteq B$ فان $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(ق خ ٣) من أجل أية متتالية $\{A_n\}$ من $\mathcal{P}(X)$ فان :

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

(تسمى هذه الخاصة بالخاصة تحت الجمعية التامة ، ومن باب أولى فهي صحيحة من أجل اجتماع منته) .

٣-٢-٦ تعريف :

ليكن μ^* قياسا خارجيا على X . عندئذ نقول عن المجموعة $E \in \mathcal{P}(X)$ إنها مقيسة بالنسبة لـ μ^* (أو μ^*- مقيسة) اذا تحققت المساواة :

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad ; \quad \forall A \in \mathcal{P}(X) .$$

حيث هنا $E^c = X - E$.

سوف نرمز بـ $\mathcal{M}_{\mu^*}$ لصف المجموعات المقيسة بالنسبة لـ μ^* .

٣-٢-٧ ملاحظة :

آ - في التعريف السابق يكفي أخذ المتراجحة :

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad ; \quad A \in \mathcal{P}(X)$$

لكي تكون المجموعة E مقيسة بالنسبة لـ μ^*، حيث أن المتراجحة :

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad ; \quad A \in \mathcal{P}(X)$$

محققة دوما لأن :

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

ب - واضح أنه اذا كانت المجموعة E مقيسة بالنسبة لـ μ^* فتكون متممتها E^c مقيسة بالنسبة لـ μ^* أيضا .

٣-٢-٨ نتيجة :

اذا اعتبرنا $X = \phi^c$ فنجد من العلاقة :

$$\mu^*(A \cap \phi) + \mu^*(A \cap X) = \mu^*(\phi) + \mu^*(A) \quad ; \quad A \in \mathcal{P}(X)$$

$\lambda^*(\phi) = 0$ أن (٣-٣-٢) وجدنا في النتيجة (ق خ ١) : البرهان *

(ق خ ٢) لتكن E و G أي مجموعتين من $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ بحيث $E \subseteq G$ ، عندئذ كل تغطية لـ G تكون بنفس الوقت تغطية لـ E . من هذا ينتج أن $\lambda^*(E) \leq \lambda^*(G)$.

(ق خ ٣) لتكن $\{E_n\}$ أية متتالية من $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. فنبرهن بشكل مشابه تماما لبرهان المبرهنة (٣-٢-٢) صحة العلاقة :

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

اذن يعرف λ^* قياسا خارجيا على $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

٣-٣-٤ ملاحظة :

لنضع $\mathcal{L} := \mathcal{M}_{\lambda^*}$ عندئذ كل مجموعة $E \in \mathcal{L}$ تحقق المساواة :

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \quad ; \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

وحسب المبرهنة (٣-٢-١٧) يكون $\mathcal{L}$ جبرا تاما على $\mathbb{R}$ ، كما أن $\lambda := \lambda^*|_{\mathcal{L}}$ يعرف قياسا على $\mathcal{L}$. وهنا يكون $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}$.

٣-٣-٥ تعريف :

القياس λ المعرف على الجبر التام $\mathcal{L}$ نسميه قياس ليبيغ في $\mathbb{R}$. وكل مجموعة $E \in \mathcal{L}$ نسميها مجموعة مقيسة حسب ليبيغ وقياسها هو العدد $\lambda(E)$.

٣-٣-٦ مبرهنة :

اذا كانت E مجموعة قابلة للعد على الأكثر فان : $\lambda(E) = 0$.

* البرهان : لنضع :

$$E = \{a_1, a_2, \ldots\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{a_k\}$$

وبالتالي يكون : $\lambda^*(E) = \lambda^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{a_k\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(\{a_k\}) = 0$

(حيث اعتبرنا كالعادة $0.\infty = 0$) . ومنه نجد أن $\lambda^*(E) = 0$. وحسب المبرهنة

(٣-٢-٩) فان : $E \in \mathcal{L}$ ، اذن :

$\lambda(E) = 0$.

٣-٣-٧ نتيجة :

من المبرهنة السابقة ينتج مباشرة مايلي :

آ - قياس ليبيغ لمجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ يساوى الصفر أى $\lambda(\{a\}) = 0$

ب - اذا كانت $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية والصحيحة والعادية على الترتيب فتكون كل منها مجموعة مقيسة حسب ليبيغ ، كما أن :

$\lambda(\mathbb{N}) = 0 \quad , \quad \lambda(\mathbb{Q}) = 0 \quad , \quad \lambda(\mathbb{Z}) = 0$.

أما فيما يتعلق بالمجالات $[a,b] \quad , \quad [a,b) \quad , \quad (a,b] \quad , \quad (a,b)$

فان المبرهنة والنتيجة التاليتان تبينان أن كل منها عبارة عن مجموعة مقيسة حسب ليبيغ وقياس كل منها هو طول المجال .

٣-٣-٨ مبرهنة :

ليكن $a < b$. عندئذ يكون المجال $[a,b]$ مجموعة مقيسة حسب ليبيغ، كما أن : $\lambda([a,b]) = b-a$.

* البرهان : لنأخذ أية مجموعة $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. عندئذ حسب الملاحظة (٣-٣-١)/(هـ) فانه من أجل أى عدد مفروض $\varepsilon > 0$ توجد أسرة $\mathcal{I} = \{I_k\}$ من المجالات المفتوحة التي تشكل تغطية للمجموعة A وبحيث يكون :

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$$

نعين موضع النقطتين a و b في المجالات $\{I_k\}$ ومن ثم نقسم المجالات الناتجة الى قسمين :

$\{I'_k\}$ وهي المجالات المحتواة في (a,b) .

$\{I''_k\}$ وهي المجالات الباقية .

فيكون لدينا :

$$\lambda^*(A \cap [a,b]) + \lambda^*(A \cap [a,b]^c) \leq \sum l(I'_k) + \sum l(I''_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$$

)*(الفصل الرابع)*(

التوابـــع المقيســـة

٤ـ١ تعاريف وبعض الاختبارات :

فيما يلي نعتبر أن $f(x)$ تابعا ذا قيم حقيقية معرفا على مجموعة $E \in \mathcal{L}$، وسوف نستخدم الرموز التالية ، حيث c عدد حقيقي :

$$E(f > c) := \{x \in E : f(x) > c\}$$

$$E(f \geq c) := \{x \in E : f(x) \geq c\}$$

$$E(f < c) := \{x \in E : f(x) < c\}$$

$$E(f \leq c) := \{x \in E : f(x) \leq c\}$$

٤ـ١ـ١ تعريف :

نقول عن التابع $f(x)$ انه مقيس (حسب ليبيغ) على المجموعة $E \in \mathcal{L}$ اذا كانت المجموعة $E(f > c)$ مقيسة (حسب ليبيغ)من أجل أى عدد حقيقي c .

٤ـ١ـ٢ مبرهنة :

ليكن $\lambda(E) = 0$ ، عندئذ كل تابع $f(x)$ معرف على E يكون مقيسا عليها.

* البرهان : بما أن : $E(f > c) \subseteq E$

وبالتالي : $\lambda[E(f > c)] \leq \lambda(E) = 0$

فيكون $\lambda[E(f > c)] = 0$. وهذا يعني أن المجموعـــة $E(f > c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c .

٤ـ١ـ٣ مبرهنة :

لتكن A مجموعة جزئية مقيسة من المجموعة المقيسة E . عندئذ اذا كـــان $f(x)$ مقيسا على E فيكون أيضا مقيسا على A .

* البرهان : لنضع :

$$A(f > c) := \{x \in A : f(x) > c\}$$

فيكون لدينا :

$$A(f > c) = A \cap E(f > c)$$

ومنه نجد أن المجموعة $A(f > c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c . اذن $f(x)$ مقيس على A .

٤-١-٤ مبرهنة :

اذا كان التابع $f(x)$ مقيسا على المجموعات $E_1, E_2, \ldots,$ فيكـــون مقيسا على : $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

* البرهان : من أجل أى عدد حقيقي c تكون المجموعات $E_k(f > c)$ مقيسة، حيث هنا $k = 1,2,\ldots$ ، وبما أن $E(f > c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k(f > c)$ فتكـــون المجموعة $E(f > c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c . اذن $f(x)$ مقيس على E .

٤-١-٥ ملاحظة :

ليكن $f(x)$ تابعا معرفا على المجموعة المقيسة E بحيث :

$$f(x) = a \quad ; \quad x \in E$$

(a عدد ثابت) .

في هذه الحالة نقول ان التابع $f(x)$ يأخذ قيمة ثابتة على المجموعة E . وهـذا التابع مقيس على E لأنه من أجل العدد الحقيقي c يكون :

$$E(f > c) = \begin{cases} E & ; \quad c < a \\ \phi & ; \quad c \geq a \end{cases}$$

اذن المجموعة $E(f > c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c .

* تعطينا المبرهنة التالية شروطا مكافئة لتعريف التابع المقيس على مجموعة E .

ثانياً مبرهنة :

ليكن $f(x)$ تابعا معرفا على المجموعة المقيسة E ، عندئذ تكون الدعاوى التالية متكافئة فيما بينها :

(١) المجموعة $E(f<c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c .

(٢) المجموعة $E(f \leq c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c .

(٣) المجموعة $E(f > c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c .

(٤) المجموعة $E(f \geq c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c .

وبالتالي يكون التابع $f(x)$ مقيسا على E اذا وفقط اذا كانت احدى هذه المجموعات الأربعة مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c .

* البرهان : (١) $\Leftarrow$ (٢): نبرهن أولا أن : $E(f \leq c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f<c+\frac{1}{n})$

في الواقع اذا كان $x \in E(f \leq c)$ فيكون $f(x) \leq c$ وبالتالي من أجل أى عدد طبيعي n يكون : $f(x) < c + \frac{1}{n}$ وبالتالي $x \in E(f<c+\frac{1}{n})$ وذلك من أجل أى عدد طبيعي n .

اذن : $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f<c+\frac{1}{n})$. وهذا يعني أن :

$$E(f \leq c) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f<c+\frac{1}{n})$$

وبالعكس: اذا كان $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f<c+\frac{1}{n})$ فيكون :

$$f(x) < c + \frac{1}{n} \quad ; \quad n = 1,2,\ldots$$

وبالتالي فان $f(x) \leq c$. وهذا يعني أن $x \in E(f \leq c)$.

اذن :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f<c+\frac{1}{n}) \subseteq E(f \leq c)$$

من هذا كله نجد :

$$E(f \leq c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f<c+\frac{1}{n})$$

وبما أن الطرف الأيمن عبارة عن مجموعة مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c فتكون المجموعة $E(f \geq c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c . وبذلك تكـــون الدعوى (٤) محققة عندما (٣) محققة .

(٤)$\Leftarrow$(١) : بما أن :

$$E(f < c) = E - E(f \geq c)$$

نستنتج أن المجموعة $E(f < c)$ مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c .

٤-١-٧ ملاحظة : لنضع :

$$E(f = +\infty) := \{x \in E : f(x) = +\infty\}$$

$$E(f = -\infty) := \{x \in E : f(x) = -\infty\}$$

عندئذ نجد من العلاقتين التاليتين :

$$E(f = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n)$$

$$E(f = -\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < -n) \quad \text{و}$$

ان المجموعتين $E(f = +\infty)$ و $E(f = -\infty)$ مقيستان .

* نتعرف الآن على نوع خاص من التوابع المقيسة .

٤-١-٨ تعريف :

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E . عندئذ التابع $I_A(x)$:

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & ; \quad x \in A \\ 0 & ; \quad x \in E-A \end{cases}$$

نسميه التابع المميز للمجموعة A .

وكل تركيب من الشكل $\sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$ ، حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية و $A_i \subseteq E(f = a_i)$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$ نسميه تابعا درجيا.

٤ـ١ـ٩ مبرهنة :

الدعاوى التالية صحيحة دوما .

(آ) $I_\phi(x) = 0$

(ب) $I_{A \cap B}(x) = I_A(x) . I_B(x)$

(جـ) $I_{A-B}(x) = I_A(x) - I_{A \cap B}(x)$

(د) $I_{A \cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_{A \cap B}(x)$

(هـ) $I_A(x) \leq I_B(x)$ اذا وفقط اذا كانت $A \subseteq B$.

(و) $I_A(x) = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(x)$ إذا وفقط إذا كانت $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ والمجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ منفصلة مثنى مثنى .

(ز) $I_{A^c}(x) = 1 - I_A(x)$

* البرهان :

(آ) واضح أن $I_\phi(x) = 0$ من تعريف التابع المميز لمجموعة .

(ب) لدينا :

$$I_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in A , x \in B \\ 0 & ; \quad x \in A , x \notin B \\ 0 & ; \quad x \notin A . x \in B \\ 0 & ; \quad x \notin A , x \notin B \end{cases}$$

اذن في كل الأحوال يكون : $I_A(x) = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(x)$.

ز) من العلاقة : $1 = I_{A \cup A^c}(x) = I_A(x) + I_{A^c}(x)$ نجد أن :

$$I_{A^c}(x) = 1 - I_A(x) .$$

٤-١-١٠ مبرهنة :

يكون التابع $I_A(x)$ مقيسا على المجموعة E اذا وفقط اذا كانت المجموعة A مقيسة .

* البرهان : نفرض أن التابع $I_A(x)$ مقيس على E .

بما أن $A = E(I_A > 0)$ فنجد مباشرة أن المجموعة A مقيسة .

نفرض الآن أن المجموعة A مقيسة ونبرهن أن $I_A(x)$ مقيس على E .

في الواقع لدينا :

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E & ; \quad c < 0 \\ A & ; \quad 0 \leq c < 1 \\ \phi & ; \quad c \geq 1 \end{cases}$$

اذن $E(I_A > c)$ مجموعة مقيسة من أجل أى عدد حقيقي c . وهذا يعني أن $I_A(x)$ مقيس على E.

٤-١-١١ نتيجة :

كل تابع درجي يكون مقيسا على مجموعة تعريفه E ، وذلك عندما تكون المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مقيسة ، حيث هنا : $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

نتعرف الآن على مفهوم جديد هو ((تقريبا في كل مكان)) .

٤-١-١٢ تعريف :

نقول عن خاصة ما * انها محققة تقريبا في كل مكان على المجموعة $E \in \mathcal{L}$ (أو غالبا في كل مكان على E) ، اذا كانت * محققة على $E - E_0$ حيث $\lambda(E_0) = 0$ ، ونكتب $\overset{ae}{*}$.