الوحدة الأولى :الـمـتـتـالـــيـات

أولاً : التعبير عن المتتالية : يتم التعبير عن المتتالية بثلاثة طرق :

إعطاء الحد العام U_n بدلالة n $u_n = f(n)$	إعطاء صيغة تدريجية $u_0 = \cdots$ $u_{n+1} = f(u_n)$	سلسلة يعطي u_n بشكل مجموع $u_n = \cdots + \cdots + \cdots$

ثانياً : دراسة اطراد متتالية : هناك أربعة طرق :

نوجد الفرق $u_{n+1} - u_n$ ونقارنه مع الصفر اكبر من الصفر : متزايدة اصغر من الصفر : متناقصة يساوي الصفر : ثابتة	نوجد النسبة : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارن مع الواحد اكبر من الصفر : متزايدة اصغر من الصفر : متناقصة يساوي الصفر : ثابتة بشرط : جميع حدود المتتالية موجبة	إذا كانت معطاة بالحد العام $u_n = f(n)$ ندرس اطراد التابع $f(x)$ على المجال $[a\,,\infty[$ فيكون اطراد المتتالية مثل اطراد التابع	إذا كانت معطاة بالصيغة التدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$ نوجد حدود أولى منها وناخذ فكرة عنها متزايدة او متناقصة ثم نثبت اطرادها بالتدريج متزايدة نثبت $u_{n+1} \geq u_n$ متناقصة نثبت

ثالثاً : الاثبات بالتدريج :

لاثبات علاقة من اجل $n \geq n_0$ نستخدم الاثبات بالتدريج وفق :

1- العلاقة E(n) هي (نكتب العلاقة المطلوبة اثباتها)

2- نثبت $E(n_0)$ (نعوض في العلاقة n بـ n_0 فتكون محققة)

3- نفرض E(n) صحيحة ونثبت صحة E(n+1) ننطلق من E(n) حتى نحصل على E(n+1)

الشكشكة منبلش من يسار الطلب لنوصل ل يمين الطلب بمساعدة	المتراجحة منبلش من الفرض لنوصل الطلب (منضيف ع كيفنا) واخر شي منكب الزيادات	المضاعفات منبلش بالطلب لنوصل ل الفرض منسحب عامل مشترك ومنحط جوا الأقواس الفرض	الاطراد اما كسري منبلش بالطلب لنوصل ل الفرض (منوحد مقامات) أو جذري منضرب مرافق	الحصر منبلش بالطلب لنوصل ل الفرض (احاطة)

رابعاً : المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية :

من حيث	الحسابية	الهندسية
التعريف	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بإضافة عدد ثابت r أساس المتتالية $u_0 , u_1 , u_2 , \dots \dots \dots , u_{n+1} , \dots$	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بضرب عدد ثابت q أساس المتتالية $u_0 , u_1 , u_2 , \dots \dots \dots , u_{n+1} , \dots$
الشرط	$u_{n+1} - u_n = r$ حيث r : عدد ثابت	$q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ حيث q عدد ثابت
الحد العام u_n بدلالة u_0	$u_n = u_0 + n r$	$u_n = u_0 . q^n$
العلاقة بين الحدين u_m , u_p	$u_m = u_p + (m - p)r$	$u_m = u_p . q^{m-p}$
المجموع	$S = n \frac{a + l}{2}$ حيث : n عدد الحدود (دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول +1) a الحد الأول l الحد الاخير	$S = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$ حيث : n عدد الحدود a الحد الأول l الحد الاخير
a , b , c ثلاث حدود متوالية	$b = \frac{a + c}{2}$	$b = \sqrt{a . c}$

نهاية أفكار بحث المتتاليات

ورقة عمل نموذجية لطلاب البكالوريا العلمي في الوحدة الأولى المتتاليات

السؤال الأول أجب عن الأسئلة التالية

- ادرس جهة اطراد كل متتالية مما يلي :

$$u_n = \frac{n-1}{9^n} \quad ، \quad u_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \quad ، \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n+2} \end{cases}$$

- احسب المجموع : $s = 1 + \frac{3}{2} + 2 + \ldots\ldots + \frac{31}{2}$
- ليكن لدينا المتتالية u_n المعرفة وفق $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = -u_n + 5$ والمطلوب :

احسب الحدود الأربعة ثم خمن عبارة u_n بدلالة n

- ليكن لدينا المتتالية $(u_n)n \geq 0$ المعرفة وفق : $u_1 = 1$ ، $u_0 = 0$ ، $u_{n+1}=2u_{n-1} - u_n$ والمطلوب:

أثبت أن $v_n = u_{n+1} - u_n$ هندسية أوجد أساسها ثم بين أنها غير مطردة

أثبت أن $t_n = u_{n+1} + 2u_n$ مطردة ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

- لدينا a ، b ، c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية حيث $a > c$ تحقق العلاقتين

والمطلوب : $a . b^2 . C = -48$ ، $a + b + c = 6$

احسب c ، b ، a ثم حدد عبارة u_n بدلالة n

- أثبت أنه أيا كان العدد الطبيعي n فإن : $9^n - 2^n$ مضاعف للعدد 7
- أثبت أنه أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 4$ فإن $2^n \geq n^2$
- ليكن لدينا (a , b , c) ثلاث أعداد حقيقية تشكل ثلاث حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها q

والأعداد $(4a , 5b , 4c)$ تشكل ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية والمطلوب احسب q

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1} \end{cases}$

أثبت أن المتتالية هندسية $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ وفق معرفة عند كل عدد طبيعي n

- ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق

$U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \ldots + \frac{1}{n^2}$ والمطلوب أثبت أن المتتالية متزايدة تماما

أثبت مستعملاً بالتدريج أن $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

انتهت الأسئلة

أتمنى لكم التوفيق والنجاح الباهر

السؤال الأول : (20 درجة)

ادرس جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة وفق الصيغة : $u_n = \dfrac{n+1}{n-1}$

السؤال الثاني : (30 درجة)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها (2 -) وفيها $u_1 = -2$. اكتب u_n بدلالة n .

واستنتج قيمة المجموع : $u_4 + u_8 + \ldots\ldots + u_{4n}$

السؤال الثالث : (30 درجة)

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق :

$u_0 = 2\cos\theta$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ في حالة $n \in N$.

أثبت بالتدريج أن : $u_n = 2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$

السؤال الرابع : (70 درجة)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \;\;,\;\; u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_{n-1} - u_n \;\;;\; n \geq 1 \end{cases}$$

1) لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - u_n$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية جد أساسها .

ثم بين أنها غير مطردة .

2) لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $t_n = u_{n+1} + 2u_n$ أثبت أن $(t_n)_{n\geq 0}$ مطردة .

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

انتهت الأسئلة

الوحدة الثانية :النـهـايــات

أولاً : حالات عدم التعيين : هناك أربعة حالات :

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$	$0 . \infty$
نضرب البسط والمقام بالمرافق إن وجد جذر نحلل البسط والمقام نختصر ثم نوجد النهاية	نخرج عامل مشترك نختصر ثم نوجد النهاية	هنالك طريقتان : نضرب ونقسم بالمرافق أو نخرج عامل مشترك	غالباً إذا وجد $\frac{1}{x}$ نسعى إلى تغيير المتحول نفرض $t = \frac{1}{x}$

ثانياً : مبرهنات الإحاطة :

الإحاطة 1	الإحاطة 2	الإحاطة 3
إذا كان $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ وكان $\lim \; g(x) = \lim \; h(x) = l$ فيكون $\lim \; f(x) = l$	إذا كان $\|f(x) - l\| \leq g(x)$ وكان $\lim \; g(x) = 0$ عندئٍ $\lim \; f(x) = l$	إذا كان $f(x) \leq g(x)$ $\lim g(x) = \infty \to \lim f(x) = \infty$ $\lim f(x) = -\infty \to \lim g(x) = -\infty$

$-1 \leq sinx$ او $cosx \leq 1$

$1 - COS2X = 2COS^2X$

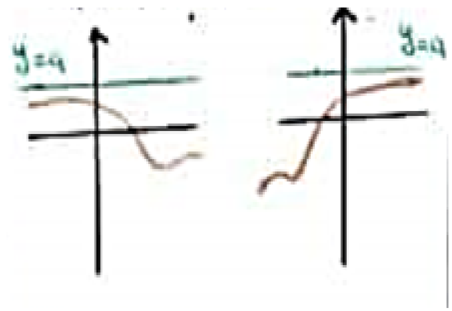
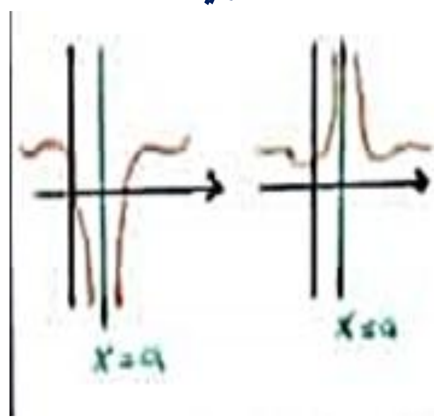
$0 \leq sinx^{\,2}$ او $cosx^2 \leq 1$

$Sin2x = 2sinx . cosx$

$X - 1 \leq E(X) \leq X$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{sinx} = 1$$

ثالثاً: المقاربات : هناك ثلاثة أنواع للمقاربات

المقارب الافقي	المقارب الشاقولي	المقارب المائل
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l$ $y=l$ مقارب افقي في جوار $\pm\infty$ 	$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ X=a مقارب شاقولي 	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ قد يوجد مقارب مائل لاثبات أن $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل للخط c نثبت ان : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$

رابعاً: إيجاد معادلة المقارب المائل :

تابع كسري	تابع جذري	بشكل عام f(x)
نقسم قسمة اقليدية فيكون $f(x)=$ $ax+b+\frac{c}{h(x)}$ فيكون $\Delta: y=ax+b$ مقارب للخط c بجوار $\pm\infty$ لان $f(x)-y_\Delta=\frac{c}{h(x)}$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$	نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية $f(x)=\sqrt{(ax+b)^2\pm C}$ فيكون $\Delta_1: Y=ax+b$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ $\Delta_2: Y=-(ax+b)$ مقارب مائل بجوار $-\infty$	نوجد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ للتابع f مقارب مائل من الشكل y=ax+b $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ $b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق f(x)-y

الاســــــــتـــــــــمـــــــــرار

إذا كان التابع كتب بشكل فرع واحد .... = f(x) فهو مستمر على كل مجال من مجالات مجموعة Df	إذا كان f يكتب بشكل فرعين او اكثر $f(x)\left[\begin{matrix}------ & X<a\\ ------ & X\geq a\end{matrix}\right.$ ندرس استمرار التابع f عند النقطة a إذا تحقق الشرط $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

حل المعادلات

F(x) = m	F(x) = 0
يكون للمعادلة f(x)=m حلاً وحيداً في المجال [a,b] إذا تحقق -1 Fمستمر ومطرد على المجال [a,b] -2 $m \in f[a,b]$ يكون الجذر α يقع بين $a_1 \leq \alpha \leq b_1$ إذا كان m يقع بين $f(a_1)$ و $f(b_1)$	يكون للمعادلة f(x)=0 حلاً وحيداً في المجال [a,b] إذا تحقق : -1 F مستمر ومطرد على المجال [a,b] -2 مقدار سالب $f(a).f(b) =$ يكون الجذر α يقع بين $a_1 \leq \alpha \leq b_1$ إذا كان m يقع بين $f(a_1)$ و $f(b_1)$ من اشارتين مختلفتين

ورقة عمل رياضيات نموذجية لطلاب البكالوريا العلمي في الوحدة الثانية النهايات والاستمرار

السؤال الأول أجب عن الأسئلة التالية

أوجد نهاية كل مما يلي عند A

$F(x) = \frac{3-\sqrt{4x-3}}{-3+\sqrt{2x+3}}$ $a = 3$ ، $a = 0$ $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$

- أوجد نهاية التابع f المعرف على $\acute{R}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{\sin 6x}{x} - \frac{5x+7}{x} + \frac{\sin 3x}{\frac{3}{2}x}$
- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ أثبت أن التابع f متزايد تماماً
- احسب نهاية التابع f المعرف على $R \setminus [\,1\,]$ وفق $f(x) = \frac{x^2+\sin x}{x-1}$ عند $+\infty$

السؤال الثاني : أجب عن الأسئلة التالية

- ليكن f التابع المعرف على R المعين بالعلاقة $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$
والمطلوب هو إثبات أن الخط يقبل مقاربا مائلا في جوار ∞ - وفي جوار $+\infty$
- ليكن f التابع المعرف على $]\,1 , +\infty\,[$ وفق $f(x) = \frac{-2x+1}{1-x}$ والمطلوب أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
ثم عين عدداً يحقق إذا كان $x > A$ كان f من المجال $]\,2.92,\ 1.08\,[$
- ليكن لدينا التابع المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{6x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

عين f مجموعة تعريف Df

$f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+1}$ أوجد الأعداد c و b و a

ثم ادرس نهاية التابع عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلفها

- يرمز $g(x)$ الى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x وليكن f التابع المعرف على المجال $]\,+1 , -1\,[$ وفق
$f(x) = g(x) - x$ هل التابع مستمر على المجال $[\,-1 , +1\,]$
- هل التابع f اشتقاقي عند الصفر $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

السؤال الثالث : حل المسائل التالية :

المسألة الأولى :

ليكن لدينا التابع المعرف على وفق $F(X) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$

- ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً
- أكتب $4x^2 - 4x + 3$ بالشكل القانوني
- ادرس نهاية للتابع h وفق $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$
- استنتج أن الخط c يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما
- ثم أثبت أن الخط يقع فوق كل من هذين المقاربين

المسألة الثانية : ليكن لدينا التابع وفق

$$f(x) = \frac{3x+\sqrt{x}}{2x+3}$$

- أوجد نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف
- أوجد $f'(x)$ ثم نظم جدول تغيرات
- أوجد عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$
- ارسم الخط c

المسألة الثالثة : ليكن لدينا التابعين $g(x) = \frac{5x+4}{6x-3}$ و $f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$

أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أوجد $\lim_{x\to\infty} g(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(g(x))$

اعد حساب $\lim_{x\to\infty} f(g(x))$ بعد كتابة $f(g(x))$ بدلالة x

----

انتـــــــــــــهت الأسئلــــــــــــة

أتــمـــنـــى لــكـــم الـتــوفــيـــق والـــنــجـــاح الــبـــاهـــر

الــمـــدرس : مــحـــمـــد عــمـــرو صـــديـــق

الوحدة الثالثة : الاشـــتـــقـــاق

اولاً : قابلية الاشتقاق عند عدد a

يكون التابع f قابل للاشتقاق عند العدد a من مجموعة تعريف إذا تحقق

الشرط : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l =$ عدد

نسمي العدد L العدد المشتق ونكتب $F'(a) = l$

ثانياً : تطبيقات الاشتقاق

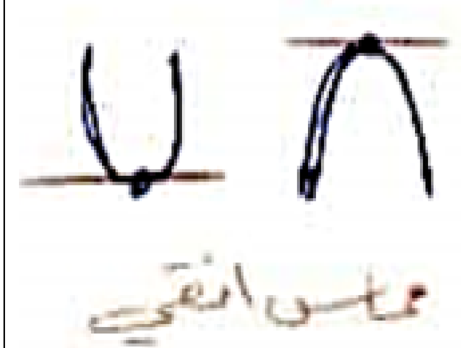
1) معادلة المماس	2) إيجاد نهاية تابع
لايجاد معادلة المماس للخط c في نقطة منه فاصلتها a -1 نوجد نقطة التماس $x_0 = a$ $y_0 = f(a)$ -2 نوجد ميل المماس $m = f'(a)$ -3 نعوض في معادلة المماس $y - y_0 = m(x - x_0)$	إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$ يمكن إزالة حالة عدم تعيين باستخدام العدد المشتق -1 نكتب f(x) بالشكل $f(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ -2 نوجد g(x) و g(a) و g'(a) نعوض $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$
3) التقريب التالفي	4) اطراد تابع
القيمة التقريبية لـ f(a+h) $f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$	$f'(x) > 0$ يكون متزايد تماماً $f'(x) < 0$ يكون متناقص تماماً $f'(x) = 0$ قيمة حدية
5) مركز التناظر $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$	6) التابع الزوجي F(-x) = f(x) 7) التابع الفردي F(-x) = f(x) 8) التابع الدوري F(x+2II) = f(x)

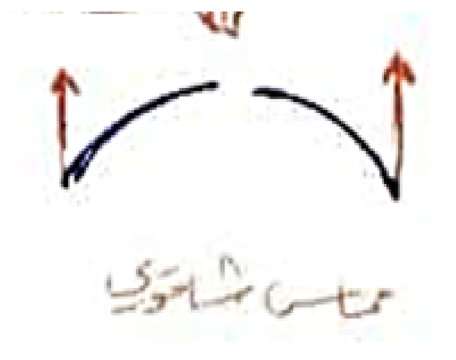
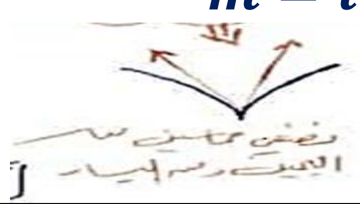
ثالثاً : القيم الحدية لها نوعان :

<table>
<tr><th>القيمة الحدية الصغرى</th><th>القيمة الحدية الكبرى</th></tr>
<tr><td>F(c) قيمة حدية صغرى يوجد جوار لـ c وهو I يحقق مهما يكن
$x \in I \cap D_f \;\; f(c) \le f(x) \leftarrow$
</td><td>F(c) قيمة حدية كبرى يوجد جوار لـ c وهو I يحقق مهما يكن
$x \in I \cap D_f \;\; f(c) \ge f(x) \leftarrow$
</td></tr>
</table>

مناقشة هامة جداً جداً لقابلية الاشتقاق :

<table>
<tr><th>$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$</th><th>$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$</th><th>$\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_1$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">يكون f قابل للاشتقاق عند a ويقبل مماساً مائلاً m=L

إذا كانت L = 0 يقبل مماساً افقياً
</td><td rowspan="3">F غير قابل للاشتقاق عند a

ويقبل مماساً شاقولياً معادلته x=a
</td><td>F قابل للاشتقاق عند a من اليسار ويقبل نصف مماس من اليسار ويقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = e_1$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l_2$</td></tr>
<tr><td>F قابل للاشتقاق عند a من اليمين ويقبل نصف مماس من اليمين ميله $m = l_2$
</td></tr>
</table>

رابعاً : أثبات متراجحة :

لاثبات صحة متراجحة مثلاً : $g(x) < f(x)$ نتبع الخطوات :

1- ننقل الطرف الصغير إلى الكبير $g(x) - f(x) < 0$

2- ندرس اطراد التابع $h(x) = g(x) - f(x)$

X		A	
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$h(a)$	$\nearrow$

3- $h(a)$ قيمة حدية صغرى

$$h(x) \geq h(a)$$

$$h(x) > 0$$

$$g(x) - f(x) > 0$$

$$g(x) > f(x)$$

نتائج هامة جداً :

1- التابع f يبلغ قيمة حدية عند a قيمتها b هذا يعني $f'(a) = 0 \quad \rightarrow \quad f(a) = b$

2- المماس للخط C في النقطة (a,b) افقي هذا يكافئ $f'(a) = 0 \quad \rightarrow \quad f(a) = b$

3- المماس للخط C في النقطة (a,b) ميله m هذا يكافئ $f'(a) = m \quad \rightarrow \quad f(a) = b$

مشتق تركيب تابعين : $[f(g_{(x)})]' = f'(g_{(x)}) \,.\, g'(x)$

مثال 1 : $\left(f(\sqrt{x})\right)' = f'(\sqrt{x}) \,.\, (\sqrt{x})'$

مثال 2 : $\left(f(sinx)\right)' = f'(sinx) \,.\, (sinx)'$

ورقة عمل في النهايات والاشتقاق

المسألة الأولى : أوجد نهاية كل دالة عند a الموافقة ؟

1) $f(x)=\frac{xCos\sqrt{x}}{x^2+1}$ $\quad a=+\infty$

2) $f(x)=\frac{sin^2x}{1-\cos x}$ $\quad a=0$

3) $(x)=\sqrt{x^2-4}+2x$ $\quad a=-\infty$

4) $f(x)=\frac{1-cos\theta}{\theta\sin\theta}$ $\quad \theta=0$

5) $f(x)=(x+1)\ cos\frac{\sqrt{2}}{x+1}$ $\quad$ a = -1

6) f(x) = cos $\left(\frac{\pi x^2+\pi}{4x^2}\right)$ $\quad a=+\infty$

7) f(x) = $\frac{3x^3}{(x+1)(x^2-4)}$ $\quad a=\infty,-2$

8) f(x) = $\frac{2+\sqrt{x}}{x-3}$ $\quad a=+3$

9) $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x+4}$ $\quad a=-4,1$

10) $f(x)=sinx\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ $\quad a=0$

11) $f(x)=\sqrt{9x^2-4x-3x}$ $\quad a=+\infty$

12) $f(x)=\frac{E(x)}{x^2}$ $\quad a=+\infty$ $\quad$ $E(x)$ هو تابع الجزء الصحيح للعدد x

المسألة الثانية : أوجد نهاية كل دالة عند أطراف مجالات تعريفها ؟

وأوجد معادلة كل مقارب وجدته؟

1) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2x}$

2) $f\ (x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

3) $f(x)=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2-1}$

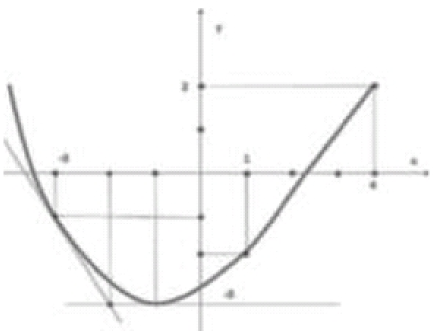
4) $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

المسألة الثالثة:

ليكن c الخط البياني للدالة f المعرفة بالشكل : $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+2}$

والمطلوب : أوجد D_f للدالة ، ثم أوجد معادلتي المماسين للخط c الموازيين للمستقيم الذي معادلته $2x+y=1$

المسألة الرابعة:



1) أوجد مجموعة تعرف التابع f(x) المبين في الشكل المجاور

2) أوجد $f(-1)$ ، $f(-3)$ وأوجد قيمة حدية صغرى وقيمة حدية كبرى

3) ارسم جدول تغيرات التابع وماهي حلول المعادلة f (x) = m

ثم أوجد $f'(-1)$ ، $f'(-3)$

4) أكتب معادلة المماس عند نقطة فاصلتها -3

المسألة الخامسة: لدينا جدول بتغيرات التابع f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{-1}{2}$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

1) من الجدول أوجد القيمة الحدية الصغرى ثم أوجد مجموعة تعرف التابع

2) أوجدمعادلات المقاربات الشاقولية والمقاربات الأفقية

3) هل يملك التابع مقارب مائل

4) استنتج نهاية $\lim\limits_{x\to1}\left(f(f(x))\right)$

5) ماعدد حلول المعادلة $f(x)=0$ على مجموعة تعريفه

6) أكتب معادلة المماس للخط c عند النقطة التي فاصلتها (1 -)

المسألة السادسة: ليكن لدينا التابع f المعرف بالعلاقة :

$$f(x) = \begin{cases} A + \dfrac{3(x-1)}{x^2+x-2} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

أوجد قيمة $A \in N$ ليكون التابع مستمر على R

المسألة السابعة: ليكن f تابع معرف على $R/\{-3\}$

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$$

1) أوجد عدد A يحقق $x > A$ فإن $f(x)$ ينتمي على المجال $]-2.05\ ,\ 1,95[$

2) إذا علمت أن $3 + \frac{Cos2x}{x^2} \leq g(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$

3) أوجد نهاية التابع $g(x)$ عند $+\infty$ ثم أوجد نهاية $f(g(x))$ عند $+\infty$

المسألة الثامنة: إذا كان f تابع يحقق $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{x+1}$

1) أوجد نهاية التابع f عند $+\infty$

2) أوجد معادلة للمقارب الأفقي للتابع $f(x)$

لمسألة العاشرة:

ليكن لدينا التابع المعرف بالعلاقة : $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 16|}$

1) أوجد مجموعة تعريف التابع

2) أحسب $\lim_{x\to\infty} (f(x) - 3x)$ ثم استنتج معادلة المقارب المائل بجوار $+\infty$

المسألة الحادية عشر :

ليكن لدينا التابع المعرف بالعلاقة : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

والمطلوب :

1) أثبت أن التابع يملك محور تناظر

2) أوجد معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم وادرس النسبي مع الخط C

لمسألة الثانية عشر :

ليكن لدينا التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق : $f(x) = x - E(x)$

حيث : $E(x)$ هو تابع الجزء الصحيح للعدد x

1) أكتب التابع f بصيغة لاتحوي $E(x)$

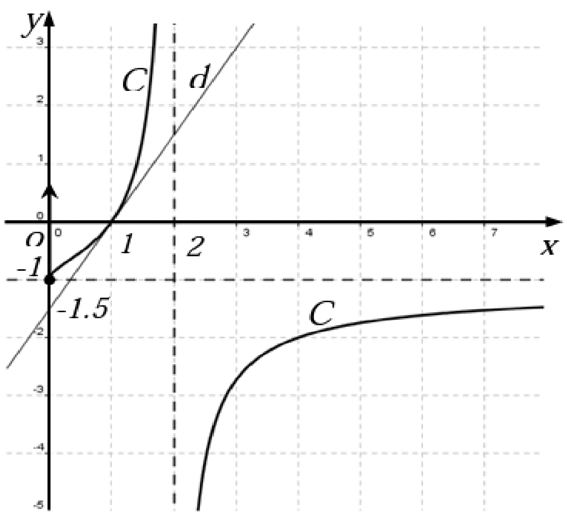
2) ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$

3) هل التابع f مستمر على المجال $[0,2]$

4) أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$ عند الصفر

ورقة عمل في الوحدة الثالثة الأشتقاق

السؤال الاول :



يوضح الشكل جانباً الخط البياني C لتابع f

معرف على $[0,2[\cup]2,+\infty[$, d مماس للخط C

1) اكتب معادلة كل مستقيم مقارب للخط C يوازي أحد المحورين الاحداثيين .

2) هل يقبل f الاشتقاق عند الصفر ؟ علل إجابتك .

3) للتابع قيمة حدية محلية عينها وبين نوعها .

4) اكتب معادلة المماس d للخط C .

السؤال الثاني :

التمرين الأول : ليكن التابع $f(x)=\sin\left(\pi\sqrt{x}\right)$ احسب $f(1)$ و $f'(x)$ و $f'(1)$

واستنتج $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{x}\right)}{x-1}$

التمرين الثاني : a و b عددان حقيقيان , C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{-1\}$ وفق :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+1}$$

عين a و b لتكون $y=-2$ معادلة للمماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه .

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعين بالعلاقة : $f(x)=-x\sqrt{4x-x^2}$

2) a . ما نهاية $\dfrac{f(x)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر ؟ استنتج أن f اشتقاقي عند الصفر .

b . ما نهاية $\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ عندما تسعى x إلى 4 ؟ هل f اشتقاقي عند $x=4$.

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها , وبين ما للتابع f من قيم حدية محلية موضحاً نوعها .

4) اكتب معادلتي مماسي الخط C في النقطتين $O(0,0)$ و $A(4,0)$ وارسم هذين المماسين ثم ارسم C .

انتهت الأسئلة

ورقة عمل في الإشتقاق

السؤال الأول :

الجدول الآتي هو جدول تغيرات لتابع f معرف على المجال $]-\infty,1]$, خطه البياني C :

x	$-\infty$		-3		0		1
$f'(x)$		$-$	-0.5	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

1) كم عدد القيم الحدية المحلية للتابع f وما هي ؟ بين نوعها .

2) اكتب معادلة لكل مماس للخط البياني C في النقاط $A(-3,0)$ و $B(0,-1)$ و $D(1,0)$.

السؤال الثاني :

التمرين الأول : ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=\sin^2 x-2\cos^3 x$

1) قارن كلاً من $f(x+2\pi)$ و $f(-x)$ مع $f(x)$ واستنتج أنه تكفي دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

2) أثبت أن $f'(x)=(1+3\cos x)\sin 2x$ عند كل عدد حقيقي x .

التمرين الثاني : ليكن g التابع المعرف على R وفق : $g(x)=x-\sin|x|$ خطه البياني C

1) ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر من اليسار , ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليسار لخطه C في $O(0,0)$

2) ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر من اليمين , ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطه C في $O(0,0)$

3) هل يقبل التابع g الاشتقاق عند الصفر ؟ ولماذا ؟

السؤال الثالث :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R^* وفق : $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$

1) تيقن أن المستقيم $\Delta : y=x-2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها . وبين ما للتابع f من قيم حدية محلية موضحاً نوعها .

3) أثبت أن $A(0,-2)$ مركز تناظر للخط البياني C .

4) ارسم مقاربات C ثم ارسم C .

انتهت الأسئلة

الوحدة الرابعة : نــهــايــة الــمــتــتــالــيــة

اولاً : المتتاليية المحدودة :

-1 نقول أن المتتاليية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الأدنى بالعدد m إذا تحقق الشرط $u_n \geq m$

حيث m العنصر القاصر

-2 نقول أن المتتاليية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة من الأدنى بالعدد m إذا تحقق الشرط $u_n \leq M$

حيث M العنصر الراجح

-3 نقول ان المتتاليية محدودة إذا كان : $m \leq u_n \leq M$

ثانياً : تقارب متتاليية :

من الشكل $u_n = f(n)$	هندسية أساسها q	من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$
نوجد نهايتها كما تعلمنا سابقاً إيجاد نهاية تابع f(x) $\lim_{x\to\infty} u_n$ نميز حالتين : -1 $\lim_{x\to\infty} u_n = l$ متقاربة من العدد l -2 $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = \pm\infty$ متباعدة نحو $\pm\infty$	نميز ثلاث حالات بحسب قيمة الأساس q -1 $-1 < q < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ -2 $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ -3 $q < -1$ ليس لها نهاية	نثبت انها متقاربة بإحدى الطريقتين إما نثبت انها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة أو نثبت انها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة وفي الحالتين نهايتها هو العدد l حل المعادلة $f(l) = l$ ملاحظة : إذا كانت متزايدة وغير محدودة من الأعلى فهي متباعدة نحو ∞ وكذلك إذا كانت متناقصة وغير محدودة من الأدنى فهي متباعدة $-\infty$

ثالثاً : المتتاليتان المتجاورتان :

نقول أن المتتاليات v_n , u_n متجاورتان إذا تحقق الشرطان :

1- احداهما متزايدة والأخرى متناقصة

2- لهما نفس النهاية $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$ او $\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$

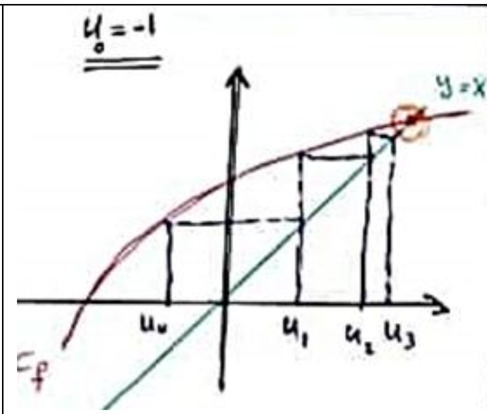
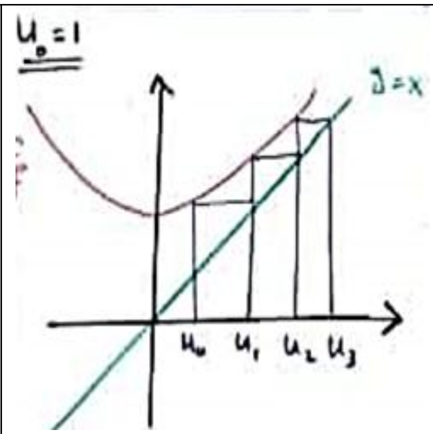
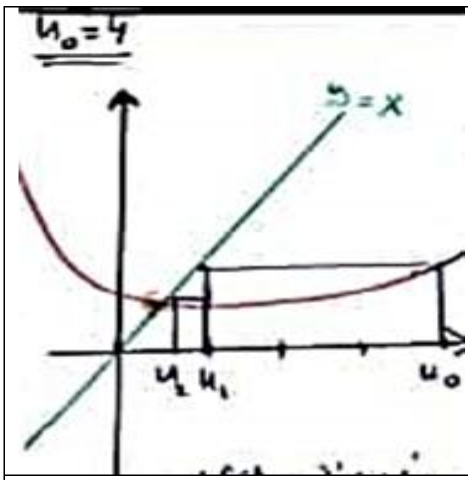
رابعاً: تمثيل الحدود الأولى لمتتالية $u_{n+1} = f(u_n)$

1- نرسم الخط البياني c_f للتابع $f(x)$

2- نرسم المستقيم y = x منصف الربعين الأول والثالث مع إيجاد نقطة التقاطع مع c_f إن وجدت

3- نعين الحد u_n على محور الفواصل ثم نصعد إلى c_f ومنه y = x ثم ننزل إلى محور الفواصل فنكون قد حصلنا على u_1

4- من u_1 نصعد إلى c_f ثم y = x ثم محور الفواصل فنحصل على .... u_2 وهكذا

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>نلاحظ من التمثيل
- المتتالية متزايدة تماماً
- المتتالية محدودة من الأعلى
- فالمتتالية متقاربة من العدد فاصلة نقطة التقاطع</td>
<td>نلاحظ من التمثيل
- المتتالية متزايدة
- المتتالية غير محدودة من الأعلى فالمتتالية متباعدة نحو $+\infty$</td>
<td>نلاحظ من التمثيل :
- المتتالية متناقصة
- محدودة من الأعلى فهي متقاربة من العدد فاصلة نقطة التقاطع</td>
</tr>
</table>

ورقة عمل في الوحدة الرابعة نهاية متتالية

السؤال الأول :

1) ادرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n=\dfrac{2(n!)}{(-1)^n-n!}$

2) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

برهن : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\leq u_n\leq\dfrac{n}{n+1}$ ثم ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n=\dfrac{-n^2+n-4}{n}$ محدودة من الأعلى .

السؤال الثاني :

نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$\begin{cases} x_0=1 \\ x_{n+1}=\frac{1}{3}(y_n+2x_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_0=-2 \\ y_{n+1}=\frac{1}{6}(x_n+5y_n) \end{cases}$$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=x_n-y_n$ هندسية

واكتب عبارة v_n بدلالة n ثم احسب نهايتها .

2) أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

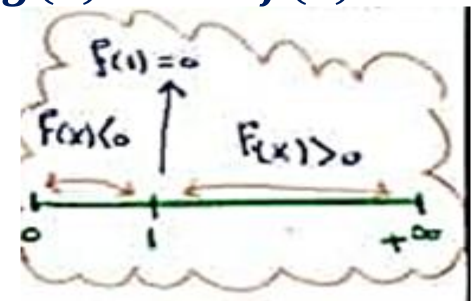
3) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n=x_n+2y_n$ ثابتة .

ثم استنتج أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان من عدد ℓ يطلب ايجاده .

....

انتهت أسئلة النموذج الأول من اختبار نهاية متتالية

الوحدة الخامسة : التابع اللوغارتمي

مجموعة تعريف	مجموعة القيم	خواص اللوغارتم
$f(x) = lng(x)$ معرف بشرط ما وراء اللوغارتم اكبر تماماً من الصفر $g(x) > 0$ ملاحظة $f(x) =$ $ln\|g(x)\|$ معرف على R ماعدا القيم التي تعدم القيم المطلقة	$g(x) < 1 \rightarrow f(x) < 0$ سالب $g(x) > 1 \rightarrow f(x) > 0$ موجب $g(x) = 0 \rightarrow f(x) = 0$  	$ln(1) = 0$ $lna = lnb \leftrightarrow a = b$ $lnx = m \leftrightarrow x = e^m$ $lna + lnb = lna.b$ $lna - lnb = ln\frac{a}{b}$ $lna^n = nlna$ $ln\frac{1}{a} = -lna$ $ln\sqrt{a} = lna^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}lna$

ثانياً : حل المعادلات والمتراجحات :نميز ثلاث حالات

$lnf(x) > lng(x)$ $lnf(x) < lng(x)$ $lnf(x) = lng(x)$	$lnf(x) > m$ $lnf(x) < m$ $lnf(x) = m$	غير الشكل السابقين
1- نوجد شرط الحل $D_1: f(x) > 0$, $D_2: g(x) > 0$ $D = D_1 \cap D_2$ 2- نحذف اللوغارتمات نحصل على معادلة أو متراجحة نحلها 3- نناقش الحل أما معادلة : مرفوق أو مقبول أو متراجحة : بالتقاطع مع شرط الحل D	1- نوجد شرط الحل D 2- $lnf(x) = m$ $f(x) = e^m$ نحل المعادلة او المتراجحة 3- نناقش الحل	1- نوجد شرط الحل 2- نستخدم خواص اللوغارتم لتحويل المعادلة أو المتراجحة إلى احد الشكلين السابقين 3- نحلها

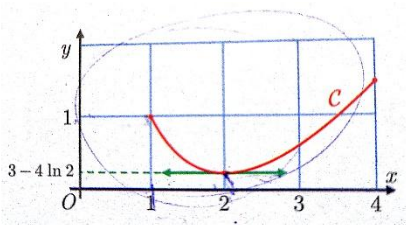
ثالثاً: دراسة التابع اللوغارتمي

النهايات	الاشتقاق	التابع الأصلي
مصطلحات $ln(0) = -\infty$ $ln\infty = \infty$ **مقدسات** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{lnx} = \infty$ $\lim\limits_{x\to 0} xlnx = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{ln(x+1)} = 1$	$f(x) = lng(x)$ $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ $= \frac{\text{مشتق ما داخل اللوغارتم}}{\text{ما داخل اللوغارتم}}$ **F اشتقاقي على كل مجال مستمر من مجموعة تعريفه**	**1- نوجد التابع الأصلي للوغارتم بالتجزئة** $f(x) = lnx$ $F(x) = \int lnx\, g(x)$ $u = lnx \qquad v' = 1$ $u' = \cdots \qquad v =$ $F(x) = u.v - \int v.u'dx$ $f(x) = g(x).lnx$ $F(x) = \int g(x).lnx\,.d(x)$ **نستخدم التجزئة ايضاً** $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ **البسط مشتق المقام** $F(x) = ln\lvert u(x)\rvert$

ورقة عمل في الوحدة الخامسة (التابع اللوغارتمي)

السؤال الأول : أجب عن الأسئلة التالية نتأمل تابعاً وفق $f(x) = ax + cLn\,x + b$

a , b , c أعداد حقيقية نهدف الى تعينها نجد في الشكل المجاور الخط البياني لهذا التابع



أوجد مجموعة تعريف التابع واحسب تابعه المشتق الثاني

استفد من المعلومات المدونة في الشكل لإثبات أن :

$a + b = 1 \quad , \quad 2x + b + cLn\,2 = 3 - 4\ln 2 \quad , \quad 2a + c = 0$

أوجد a , b , c ثم اكتب عبارة $f(x)$

أكتب معادلة المماس عند نقطة فاصلتها تعدم المشتق

- حل المعادلة التالية : $Ln\,|2x + 3| + Ln\,|x - 1| = 2Ln|x|$
- أثبت صحة المساواة التالية : $Ln\,(\frac{x-1}{x+2}) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

السؤال الثاني :

- نفترض وجود عددين حقيقين موجبين تماما a و b يحققان $\ln\frac{a+b}{3} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$ احسب $\frac{a}{b}$
- أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين $x^2 + y^2 = 10$

$Ln\,x + Ln\,y = Ln\,3$

- أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحققان $\frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$

السؤال الثالث :_ حل المسائل

1 - ليكن f التابع المعرف على $I =]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\frac{x+1}{1-x}$

- أثبت أن f تابع متناظر بالنسبة الى مبدأ الإحداثيات
- أثبت أن f اشتقاقي على I
- ادرس تغيرات F على المجال $[0,1[$
- ارسم الخط البياني للتابع F

2 - ليكن الخط البياني للتابع F المعرف على المجال $I=]0,\infty[$

$$f(x) = x - \ln 2 - \frac{1}{x}$$

- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
- أثبت أن d الي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب للخط c في جوار $+\infty$
- ادرس الوضع النسبي للخط البياني c ومقاربيه d
- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد
- ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني c

انتـــــــــــــهت الأسئلـــــــــــــة

ورقة عمل في الوحدة الخامسة التابع اللوغارتمي

السؤال الأول: أوجد نهاية: $\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$

السؤال الثاني : أثبت أن : $\frac{x}{1+x} \le \ln(x+1)$

السؤال الثالث ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدول واستنتج المقاربات الموازية وادرس وضعه النسبي
- ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم c
- بين أن f(x) = 2 لها حل وحيد وأن هذا الحل a ينتمي الى المجال] -2,-1 [واستنتج أن a تحقق المعادلة $a = -1-\sqrt{2}e^{\frac{a}{2}}$

السؤال الرابع : ليكن لدينا التابع المعرف على:$]0,1[\cup]1,+\infty[$ $f(x) = \frac{1}{x^b\, lnx}$ والمطلوب

- اذا علمت أن c يمر من $A(e^2,\frac{1}{2e})$ فأوجد قيمة b
- اذا كان التابع هو $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\, lnx}$ فأجب عن ما يلي
  - ادرس تغيرات التابع ثم دل على مقارباته وقيمه المحلية
  - ارسم الخط البياني وكل المقاربات
  - استنتج جدول اطراد g(x) = $|f(x)|$
  - اعط عدداً A يحقق الشرط اذا كان X $> A$ انتمى f(x) الى المجال المفتوح الذي مركزه ونصف قطره $\frac{1}{20ln10}$

السؤال الخامس :

والمطلوب : $\begin{cases} f(x) = 3 - 2x + \frac{\ln(1+x^2)}{x} \\ f(0) = 3 \end{cases}$ ليكن لدينا التابع المعرف كما يلي :

- أثبت أن f قابل للاشتقاق عند القيمة x = 0
- أثبت أن الخط c للتابع f متناظر بالنسبة للنقطة (0,3)

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

المدرس : محمد عمرو صديق

الوحدة السادسة : التابع الاسي

مجموعة تعريف	مجموعة القيم	خواص التابع اللوغارتمي
$f(x) = e^{g(x)}$ مجموعة تعريف هي مجموعة تعريف الاس g(x)	$e^{g(x)} > 0$ التابع الاسي اكبر تماماً من الصفر دوماً	$e^x = e^y \leftrightarrow x = y$
		$e^x = m \leftrightarrow x = lnm$
		$e^a . e^b = e^{a+b}$
		$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
		$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
		$[e^a]^b = e^{a.b}$
		$e^x . e^{-x} = 1$ $(e^x)^2 = e^{2x}$
		$a^x = e^{xlna}$

ثانياً : حل المعادلات والمتراجحات:

الأساس e	الأساس a
$\boldsymbol{e^{f(x)} >< = e^{g(x)} \rightarrow f(x) >< = g(x)}$	$\boldsymbol{a^{f(x)} >< = a^{g(x)} \rightarrow f(x) >< = g(x)}$
$\boldsymbol{e^{f(x)} >< = m \rightarrow f(x) >< = lnm}$	$\boldsymbol{a^{f(x)} >< = b^{g(x)} \rightarrow e^{f(x)lna} >< = e^{g(x)lnb}}$
$\boldsymbol{ae^{2x} + bc^x + c >\leq 0}$ **معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول $\boldsymbol{e^x}$ نحلها بالتحليل المباشر او بالـ Δ نوجد $\boldsymbol{e^x}$ فثم نستنتج x** **أو متراجحة بنفس الطريقة ثم نشكل جدول إشارة**	$\boldsymbol{a_1 a^{2x} + b_1 a^x + c_1 >\leq 0}$ **معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول $\boldsymbol{a^x}$ نحلها ثم نوجد $\boldsymbol{a^x}$ ونستنتج x** **او متراجحة بنفس الطريقة**

دراسة التابع الاسي :

النهايات	الاشتقاق	التابع الأصلي
$e^{-\infty} = 0$ $e^{\infty} = \infty$ مقدسات : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ نهاية مميزة: $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$ إذا كانت $\lim \quad f(x) = 1^{\infty}$ فهي حالة عدم تعيين نزيلها بالاستفادة من المقدسة نكتب f بالشكل : $f(x) = [(1+t)^{\frac{1}{t}}]^n$ فتكون $\lim \quad f(x) =$ e^n	$f(x) = e^{g(x)}$ $f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$ مشتق الأساس بالقوة نفسها F اشتقاقي على كل مجال مستمر من مجموعة تعريف	$f(x) = e^x$ $F(x) = e^x$ $f(x) = e^{ax+b}$ $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ $f(x) = u'e^u$ $F(x) = e^u$ $f(x) = g(x).e^{ax}$ نستخدم التكامل بالتجزئة $F(x) = \int g(x).e^{ax}$

المعادلات التفاضلية :

<table dir="rtl">
<tr><td>من الشكل $y' = ay$</td><td>من الشكل $y' = ay + b$</td></tr>
<tr><td>الحل العام هو
$y = f_k(x) = ke^{ax}$</td><td>الحل العام هو :
$\mathrm{y} = f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">إذا طلب مني الحل الذي يحقق الشرط المعطى :
1- نوجد الحل العام ثم نعوض في الشرط المعطى لايجاد K
2-نوجد K ثم نعوضها في الحل العام</td></tr>
<tr><td colspan="2">إذا طلب مني هل التابع f حلاً للمعادلة
1-نوجد f’(x) ثم نعوض y=f(x) و y’=f’(x) في المعادلة التفاضلية إذا كانت محققة فهو حل وغير ذلك فهو ليس حلاً</td></tr>
</table>

ورقة عمل في الوحدتين الخامسة والسادسة

أولاً: أجب عن الأسئلة التالية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\ln|x-2|+\ln|x+4|=3\ln 2$. $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$.

السؤال الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ، أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج معادلة المقارب الأفقي للخط البياني للتابع f .

السؤال الثالث: حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين:
$$\begin{pmatrix} \ln xy = 2 \\ 2\ln x - 3\ln y = -1 \end{pmatrix}$$

السؤال الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\ln x$ ، اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها 1 وادرس وضعه النسبي.

ثانياً : أجب عن الأسئلة التالية : (الأول 50 والثاني 50 والثالث 80)

السؤال الأول: حل المعادلة التفاضلية $2y'+y=1$ ثم عيّن قيمة k كي يمر الخط البياني للحل بالنقطة $A(0,-1)$.

السؤال الثاني: ***حل كل من المعادلات أو المتراجحات*** $2e^{-x}=\dfrac{3}{e^x+3}$. $e^x+4e^{-x}\le 5$.

السؤال الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=xe^{-x}+x-2$ والمطلوب

1) أكتب معادلة Δ المقارب المائل للخط C وادرس وضعه النسبي.

2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

3) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يحقق $1<\alpha<2$.

4) ارسم Δ ثم ارسم C .

ثالثاً : حل المسألتين التاليتين
(130 لكل مسألة)

المسألة الأولى ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=(ax+b)e^x$ والمطلوب:

عيّن العددين a و b كي يمر الخط البياني f قيمة حدّية في النقطة $A(1,-e)$.

في حالة $a=1$ و $b=-2$ نعرّف C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x)=(x-2)e^x$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2) ادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي.

3) اكتب معادلة d المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها صفر.

4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و C .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة $f(x)=x+1-\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$ والمطلوب:

1) عيّن D_f مجموعة تعريف التابع f .

2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ، حدد مقاربات C .

3) أثبت أن $f(x)+f(2-x)=4$ ثم استنتج أن النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر للخط البياني C.

4) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C .

5) ارسم مقاربات C ، ثم ارسم C.

أولاً: أجب عن الأسئلة التالية: (30° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2e^{-x} = \dfrac{3}{e^x + 3}$.

السؤال الثاني: اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع $f(x) = x + 3^x$ في نقطة منه فاصلتها صفر.

السؤال الثالث: احسب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$.

السؤال الرابع: عيّن حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y + 1$ والذي يحقق $f(0) = 1$.

ثانياً: حل المسألتين التاليتين: (90° درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: I) ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = (ax + b)e^x$ والمطلوب:

عيّن العددين a و b كي يمر الخط البياني f قيمة حدّية في النقطة $A(1,-e)$.

II) في حالة $a = 1$ و $b = -2$ نعرّف C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = (x-2)e^x$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2) ادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي.

3) اكتب معادلة d المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها صفر.

4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و C .

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = xe^{-x} + x - 2$ والمطلوب:

1) أكتب معادلة Δ المقارب المائل للخط C وادرس وضعه النسبي.

2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق $1 < \alpha < 2$.

4) ارسم Δ ثم ارسم C .

أولاً: أجب عن الأسئلة التالية: ($30°$ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة

السؤال الثاني: احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$.

السؤال الثالث: ليكن التابع $f(x) = ax + b + \dfrac{\ln x}{x}$ ، عيّن قيمة a, b كي يقبل التابع f قيمة حدّية في النقطة $A(1,0)$.

السؤال الرابع: حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين: $\begin{pmatrix} \ln(x-y) = 2\ln 2 \\ \ln x - \ln y = \ln 3 \end{pmatrix}$.

ثانياً: حل *المسائل التالية* : ($90°$ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x - 1}$ والمطلوب:

1) أثبت أن مجموعة تعريف التابع هي $\mathbb{R}^*$.
2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها .
3) دل على مقاربات C الأفقية والشاقولية.
4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C .

المسألة الثانية: I) ليكن التابع $g(x) = xe^x + 1$ ، ادرس اطراد التابع g ثم استنتج أن $g(x) > 0$؟

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x) = e^x + \ln x$ والمطلوب:

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم استنتج مقاربات C .
2) أثبت $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ ثم استنتج جدول تغيرات التابع f .
3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق $0 < \alpha < 1$.
4) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C .

المسألة *الثالثة*: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = \ln(e^x + a)$ والمطلوب:

1) أثبت أن $\Delta : y = x$ مقارب مائل للخط البياني C أياً كانت قيمة a .
2) عيّن قيمة a ليمر الخط C بالنقطة $A(0, \ln 2)$
3) في حالة $a = 1$: ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.
4) ارسم Δ ثم ارسم C .

المسألة *الرابعة*: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ، حدد القيم الحدية للتابع f .
2) ادرس وضع C بالنسبة لمقاربه الأفقي.
3) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C .

المسألة *الخامسة*: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x) = x + 1 - \ln|x|$ والمطلوب:

1) اكتب f بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.
2) ادرس تغيرات f على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.
3) حدد مقاربات C وقيمته الحدّية.
4) اكتب معادلة d المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها -1.
5) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم d و C.

الوحدة السابعة : التكامل والتوابع الاصلية

- F تابع اصلي للتابع f $F'(x) \to f(x)$
- F و G تابعان اصليان للتابع f نفسه $F'(X) = G'(X)$ او $[F(x) - G(x)]'$
- نسمي الخط البياني للتابع الأصلي F (المنحني التكاملي)
- إذا كان F(X) تابع اصلي للتابع f عندئذ F(X)+C تابعاً اصلياً ايضاً ل f

قواعد التابع الأصلي :

التابع الأصلي F	التابع f
$F(x) = ax$	$f(x) = a$
$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$f(x) = x^n$
$F(x) = ln\|...\|$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$F(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$F(x) = -cosx$	$f(x) = sinx$
$F(x) = sinx$	$f(x) = cosx$
$F(x) = tanx$	$f(x) = 1 + tan^2x$
$F(x) = cotx$	$f(x) = 1 + cot^2x$

التابع من الشكل f(ax+b) :

التابع الأصلي F	التابع f
$F(x) = \frac{1}{a} \times \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$f(x) = (ax+b)^n$
$F(x) = \frac{1}{a} ln\|ax+b\|$	$f(x) = \frac{1}{ax+b}$
$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax+b}$	$f(x) = e^{ax+b}$
$F(x) = -\frac{1}{a} cos(ax+b)$	$f(x) = sin(ax+b)$
$F(x) = \frac{1}{a} sin(ax+b)$	$f(x) = cos(ax+b)$

التابع الأصلي لتركيب تابعين :

التابع الأصلي F	التابع f
$F(x) = e^u$	$f(x) = u'e^u$
$F(x) = ln\|u\|$	$f(x) = \frac{u'}{u}$
$F(x) = -cosu$	$f(x) = u'sinu$
$F(x) = sinu$	$f(x) = u'cosu$

التكامل المحدد :

$$\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

التكامل بالتجزئة :

$$\int_a^b u.v'dx = [u.v]_a^b - \int_a^b v.u'$$

تفريق كسر :

إذا كان f كسر ومقامه من الدرجة الثانية $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ودرجة البسط اصغر من درجة المقام نفرق الكسر

1- نحلل المقام ونفرق :

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{\propto}{ax+b} + \frac{\beta}{cx+d}$$

2- نوحد المقامات ونحذفها :

$$g(x) = \propto(cx+d) + \beta(ax+b)$$

3- لايجاد α نعوض $x = \frac{-a}{b}$

لايجاد β نعوض $x = \frac{-d}{c}$

أولاً: أجب عن السؤالين التاليين: ($30°$ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: أثبت أن التابع $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ يكتب بالشكل $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x}$ ثم احسب $I=\int_1^2 f(x)\,dx$.

السؤال الثاني: عيّن تابعاً أصلياً للتابع $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ على $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

ثانياً: أجب عن السؤال التالي: ($60°$ درجة)

ليكن لدينا التابع $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+x-3}{x^2-x-2}$ المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ والمطلوب:

1) عيّن الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-2}$.

2) احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$.

ثالثاً: حل المسألتين التاليتين: ($90°$ لكل مسألة)

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ والمطلوب:

1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها. ارسم C.

2) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x(1+e^{-x})$ والمطلوب:

1) أثبت أن المستقيم $\Delta : y=x$ مقارب المائل للخط C وادرس وضعه النسبي.

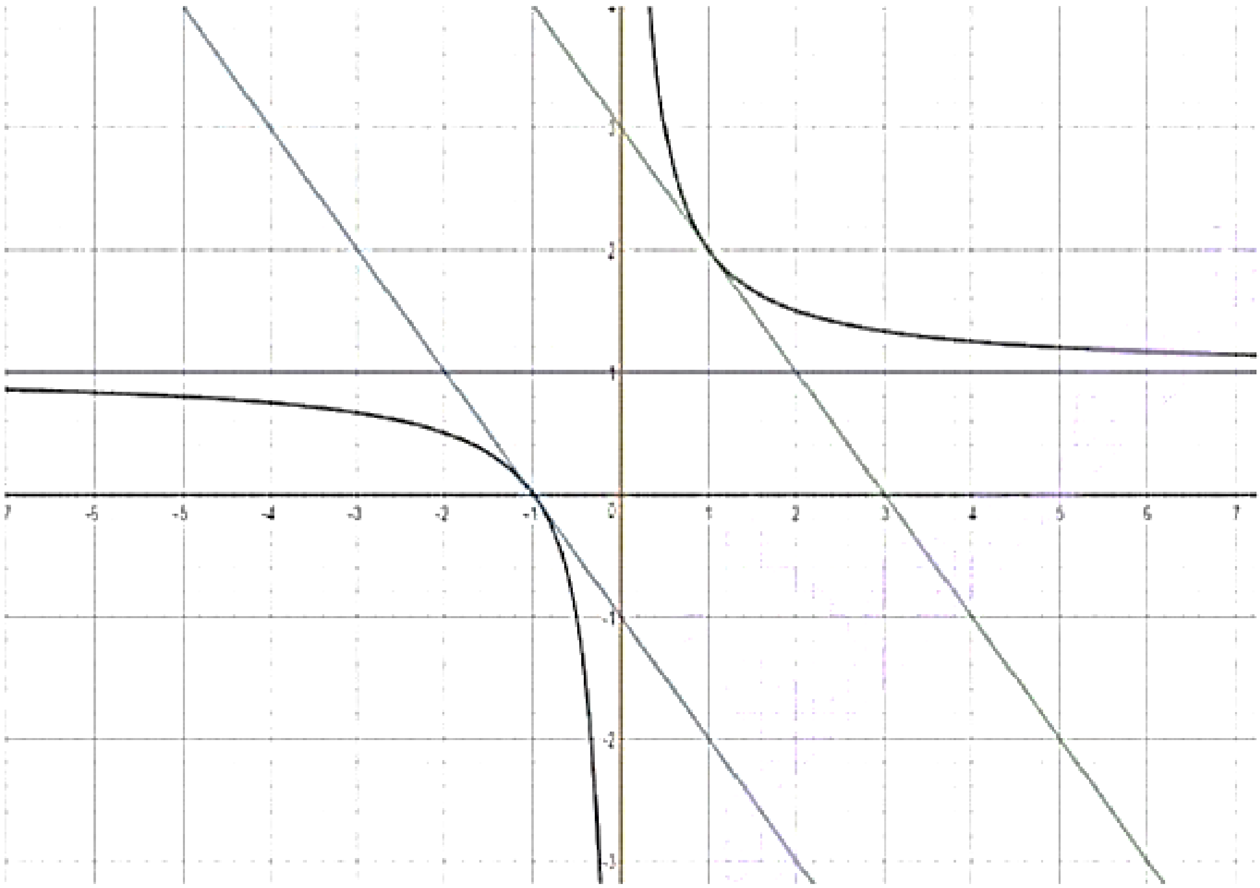
2) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ، ارسم C.

3) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيم $x=1$.

تمارين تدريبية للاستنتاج من الخط البياني

التمرين الأول

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a- أوجد مجموعة تعريف التابع وصورتها (المستقر الفعلي)

b- أوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف

c- أوجد معادلات المقاربات الأفقية و الشاقولية للخط البياني

d- علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)=k$ حل وحيد عندما $k\neq 1$

e- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=1$

f- احسب كل مما يلي $f(1), f(-1), f'(1), f'(-1)$

g- أوجد معادلة المماس المار من النقطة التي فاصلتها تساوي الواحد

h- هل التابع اشتقاقي عند الصفر، علل ذلك؟

i- إذا علمت أن التابع يعطى بالشكل $f(x)=\frac{ax+b}{x}$ أوجد قيم a , b

حل التمرين الأول

a- مجموعة تعريف التابع $D_f = R \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = R \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

b- النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty , \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1 \quad , \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$$

c- معادلات المقاربات الأفقية و الشاقولية للخط البياني

$x = 0$ مقارب شاقولي هو $y'y$ عند $+\infty$ و $-\infty$

$y = 1$ مقارب أفقي يوازي $x'x$ عند $+\infty$ و $-\infty$

d- للمعادلة $f(x) = k$ حل وحيد عندما $k \neq 1$

التابع متزايد تماما على D_f فإن للمعادلة حل وحيد أيا كانت $k \in f(D_f)$

e- لا يوجد حلول للمعادلة $f(x) = 1$ لأن $1 \notin f(D_f)$

f- $f(1) = 2, f(-1) = 0$

$$f'(1) = m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{0-1} = -1 \ ; \ (0,3),(1,2) \in d$$

$$f'(-1) = m_{d'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-0}{0+1} = -1 ; (0,-1),(-1,0) \in d'$$

g- معادلة المماس المار من النقطة التي فاصلتها تساوي الواحد

$$d: y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\Rightarrow d: y = -1(x-1) + 2$$

$$\Rightarrow d: y = -x + 3$$

h- التابع غير اشتقاقي عند الصفر، لأنه غير مستمر عنده

i- $f(x) = \frac{ax+b}{x}$

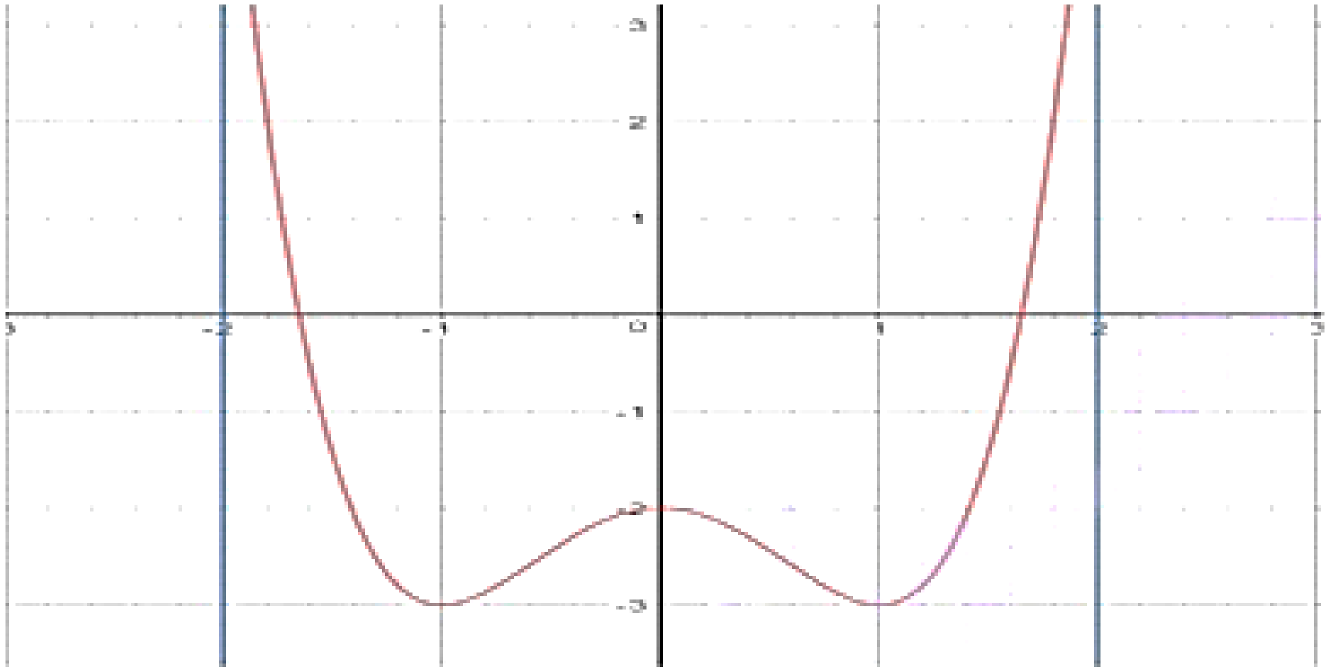
$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a(1)+b}{(1)} = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \frac{a(-1)+b}{(-1)} = 0 \Rightarrow -a + b = 0$$

بالحل المشترك نجد $b = 1 \ , a = 1$

التمرين الثاني

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a -اكتب مجموعة تعريفه و مستقره الفعلي

b -أوجد جدول تغيرات التابع

c -ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ حيث $k \in R$

d -ما مجموعة حلول المتراجحة $-3 \leq f(x) \leq -2$

e -احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

f -اكتب معادلات مقارباته الشاقولية

g -أوجد $f(-1), f(0), f(1), f'(-1), f'(0), f'(1)$

حل التمرين الثاني

a- مجموعة تعريف التابع $D_f =]-2,+2[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = [-3,+\infty[$

b- جدول تغيرات التابع

x	-2		-1		0		$+1$		$+2$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

c- مناقشة عدد الحلول للمعادلة $f(x) = k$

$k \in]-\infty,-3[\Rightarrow$ لا يوجد حلول

$k = -3 \Rightarrow$ حلان

$k \in]-3,-2[\Rightarrow$ أربع حلول

$k = -2 \Rightarrow$ ثلاث حلول

$k \in]-2,+\infty[\Rightarrow$ أربع حلول

d- $x \in [-1.7,+1.7]$ هي مجموعة حلول المتراجحة

x	-1.7		-1		0		$+1$		$+1.7$
$f(x)$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

ملاحظة: الجدول هنا للتوضيح فقط و غير مطلوب ضمن الحل

e- النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty \,, \qquad \lim_{x\to +2^-} f(x) = +\infty$$

f- المقاربات الشاقولية

$x = -2$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يمين المقارب

$x = +2$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يسار المقارب

g- $f(1) = f(-1) = -3 \,, f(0) = -2$

$f'(1) = f'(-1) = f'(0) = 0$ لأنها قيم حدية المماسات عندها أفقية ميلها يساوي المشتق عند النقطة ويساوي الصفر

التمرين الثالث

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب

a اكتب مجموعة تعريفه و مستقره الفعلي

b ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ حيث $k \in R$

c احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

d اكتب معادلات مقارباته الشاقولية

e أوجد $f(-1), f(0), f(1), f'(-1), f'(0), f'(1)$

حل التمرين الثالث

a مجموعة تعريف التابع $D_f =]-2,+2[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = [-1,+\infty[$

b مناقشة عدد الحلول للمعادلة $f(x) = k$

$k \in]-\infty,-1[\Leftarrow$ لا يوجد حلول

$k = -1 \Leftarrow$ حلان

$k \in]-1,0[\Leftarrow$ أربع حلول

$k = 0 \Leftarrow$ ثلاث حلول

$k \in]0,+\infty[\Leftarrow$ أربع حلول

c -النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty \,, \qquad \lim_{x\to +2^-} f(x) = +\infty$$

d -المقاربات الشاقولية

$x = -2$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يمين المقارب

$x = +2$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يسار المقارب

e -$f(1) = f(-1) = -1 \,, f(0) = 0$

$f'(1) = f'(-1) = f'(0) = 0$ لأنها قيم حدية المماسات عندها أفقية ميلها يساوي المشتق عند النقطة ويساوي الصفر

التمرين الرابع

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب

a -اكتب مجموعة تعريفه و مستقره الفعلي

b -ما عدد حلول المعادلة $f(x) = k$ حيث $k \in R$، معللاً ذلك؟

c -احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

d -اكتب معادلة مقاربه الشاقولي

e -احسب ميل المقارب المائل، ثم اكتب معادلته

f -ما إشارة $f'(x)$، علل ذلك؟

حل التمرين الرابع

a- مجموعة تعريف التابع $D_f = R \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = R =]-\infty, +\infty[$

b- مناقشة عدد الحلول للمعادلة $f(x) = k$

المستقيم الأفقي $y = k$ يقطع الخط البياني للتابع في نقطتين فللمعادلة حلان أيا كان $k \in R$

c- النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة لتعريف وعند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty , \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

d- المقارب الشاقولي

$x = 0$ مقارب يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و c على يسار المقارب

$x = 0$ مقارب يوازي $y'y$ عند $-\infty$ و c على يمين المقارب

e- نقاط من المقارب المائل $(0,2)$, $(-2,0)$

نوجد ميله $m_\Delta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{0+2} = 1$

نعوض بقانون معادلة مستقيم علم منه الميل ونقطة

$$\Delta: y - y_1 = m_d(x - x_1)$$

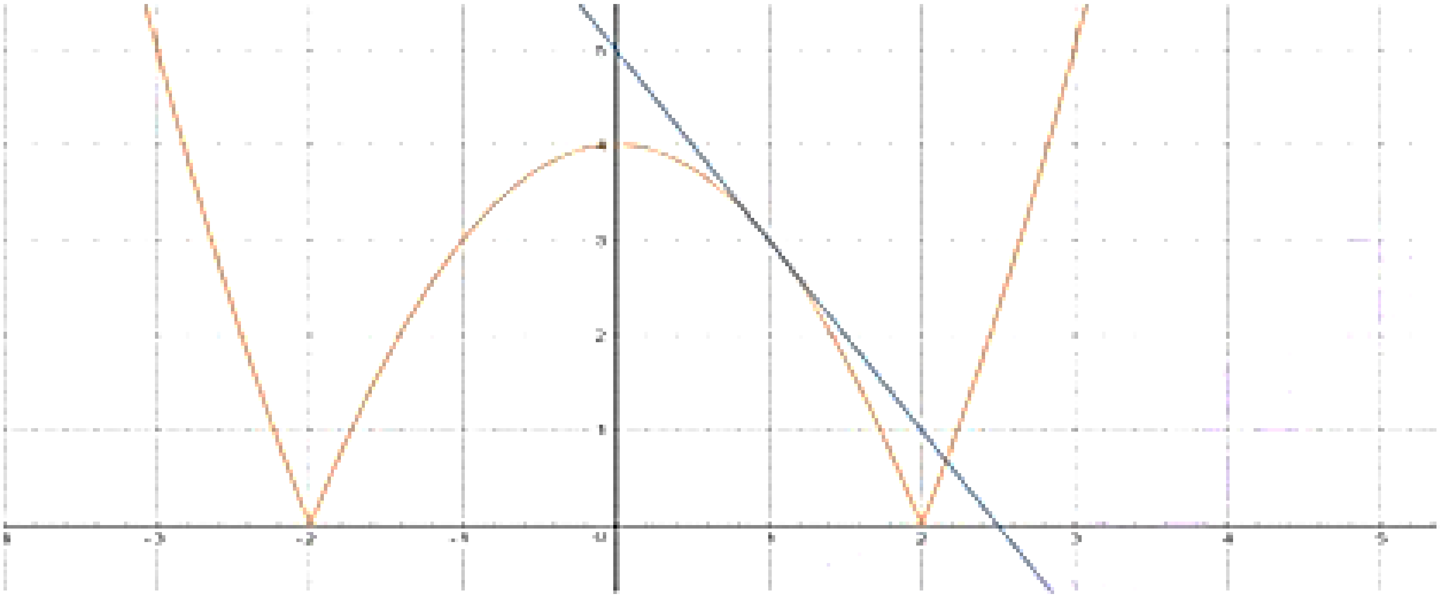
$$\Rightarrow \Delta: y - 0 = 1(x - (-2))$$

$$\Rightarrow \Delta: y = x + 2$$

f- $f'(x) > 0$ لأن الخط البياني للتابع متزايد تماما على كامل مجموعة تعريفه

التمرين الخامس

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a -أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي

b -هل التابع زوجي أم فردي، علل ذلك؟

c -أوجد $f(-2), f(2), f(0), f(1)$

d -أوجد $f'(-2), f'(+2), f'(0), f'(1)$

e -أوجد معادلة المماس d في النقطة التي فاصلتها تساوي (1)

f -اكتب معادلة المماس d' نظير d بالنسبة لمحور التراتيب

g -أوجد $f([-2,+2])$

h -ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$

i -ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$، أحصر كل منها ضمن مجال صغير

حل التمرين الخامس

a- مجموعة تعريف التابع $D_f = R =]-\infty, +\infty[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = R^+ = [0, +\infty[$

b- التابع زوجي لأن خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

c- $f(-2) = f(2) = 0$, $f(0) = 4$, $f(1) = 3$

d- $f'(-2) = f'(+2) = f'(0) = 0$ لأنها قيم حدية

لحساب $f'(1)$: نوجد نقطتين من المماس d $A(1,3), B(0,5)$

$$f'(1) = m_d = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{0-1} = -2$$

e- نعوض بقانون معادلة مستقيم علم منه الميل ونقطة

$$d: y - y_1 = m_d(x - x_1)$$

$$\Rightarrow d: y - 3 = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow d: y = -2x + 5$$

f- من خواص التناظر $A'(-1,3), B(0,5)$ نوجد ميله $m_{d'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{0+1} = 2$

نعوض بقانون معادلة مستقيم علم منه الميل ونقطة

$$d': y - y_1' = m_{d'}(x - x_1')$$

$$\Rightarrow d': y - 3 = 2\big(x - (-1)\big)$$

$$\Rightarrow d': y = 2x + 5$$

g- $f([-2, +2]) = [0,4]$

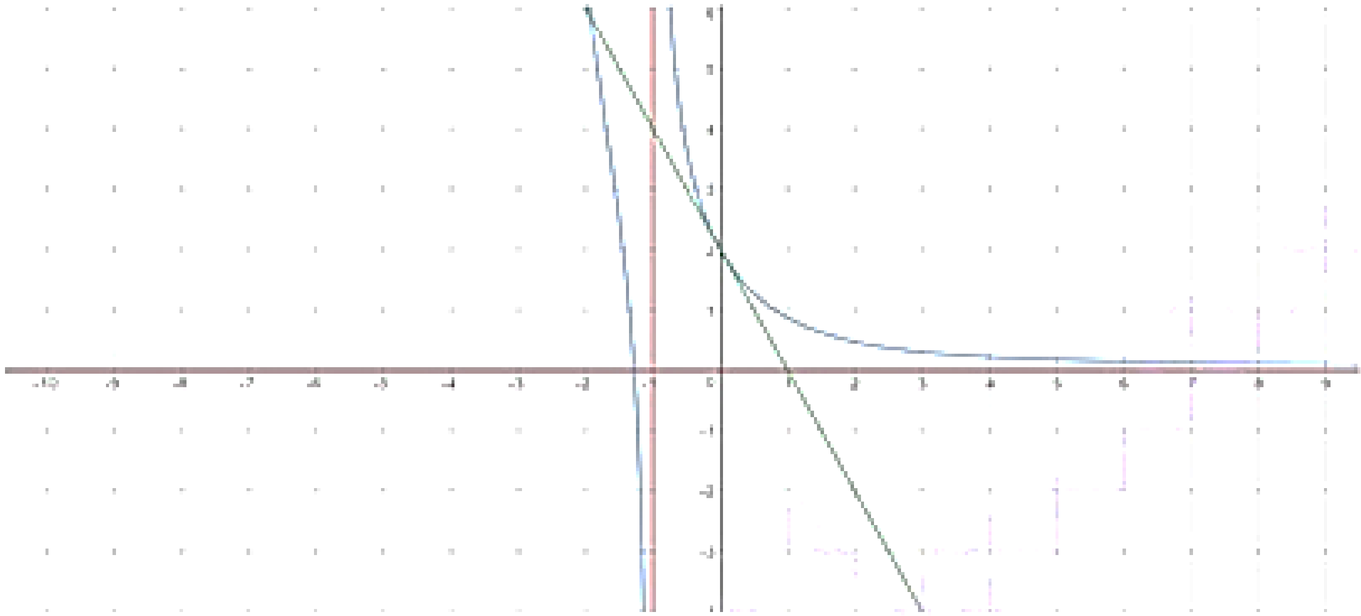
h- $f(x) \geq 5 \Rightarrow y \in [5 + \infty[\Rightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

i- $f(x) = 2$ لها أربع حلول

$x_1 \in]-3, -2[$ و $x_3 \in]2,3[$ و $x_2 \in]-2, -1[$ و $x_1 \in]1,2[$

التمرين السادس

نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب



a- أوجد المقاربات الأفقية والشاقولية للتابع

b- أوجد مجموعة تعريفه ومستقره الفعلي

c- أوجد $f(]-1,0]) , f([0,+\infty[)$

d- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

e- أوجد $f(0), f'(0)$

f- اكتب معادلة المماس المار من النقطة التي فاصلتها 0

g- إذا علمت أن التابع يعطى بقاعدة الربط $f(x)=e^{-x}+\frac{1}{ax+b}$ وأن $\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$ وخطه مار من النقطة $(0,2)$ عين قيمة $a\ ,b$

حل التمرين السادس

a - المقاربات الأفقية والشاقولية

$y=0$ مقارب أفقي هو $x'x$ عند $+\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي يوازي $y'y$ عند $+\infty$ و $-\infty$

b مجموعة تعريف التابع $D_f = R \setminus \{0\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

المستقر الفعلي $f(D_f) = R \setminus \{0\} =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

c -$f([0,+\infty[) =]0,2]$ و $f(]-1,0]) = [2,+\infty[$

d حل وحيد $x_1 \in]-2,-1[$

e -$f(0)=2$ و لحساب $f'(0)$: نوجد نقطتين من المماس d $A(1,0), B(0,2)$

$$f'(0) = m_d = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{0-1} = -2$$

f -نعوض بقانون معادلة مستقيم علم منه الميل ونقطة

$$d: y - y_1 = m_d(x - x_1)$$

$$\Rightarrow d: y - 2 = -2(x - 0)$$

$$\Rightarrow d: y = -2x + 2$$

g التابع من الشكل $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{ax+b}$

$$(0,2) \in C_f \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow e^0 + \frac{1}{a(0)+b} = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow e^{-\infty} + \frac{1}{a(-1)+b} = +\infty$$

$$\Rightarrow -a + b = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 1$$

علاقات أساسية في المثلثات

مطابقات شهيرة

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$Sin^2 x + cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} Sin^2 x = 1 - cos^2 x \\ cos^2 x = 1 - Sin^2 x \end{cases}$$

دساتير ضعفي زاوية

$$Sin\ 2x = 2 \sin x . \cos x$$

$$Cos\ 2x = cos^2 x - Sin^2 x$$

دساتير مربعات النسب المثلثية لنصف زاوية

$$2Sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$2cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

دساتير ثلاثة أضعاف زاوية

$$Sin\ 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$Cos\ 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

دساتير الإتمام ودوران ربع دورة

$$Sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$Cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$Sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$Cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

$$Sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

$$Cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

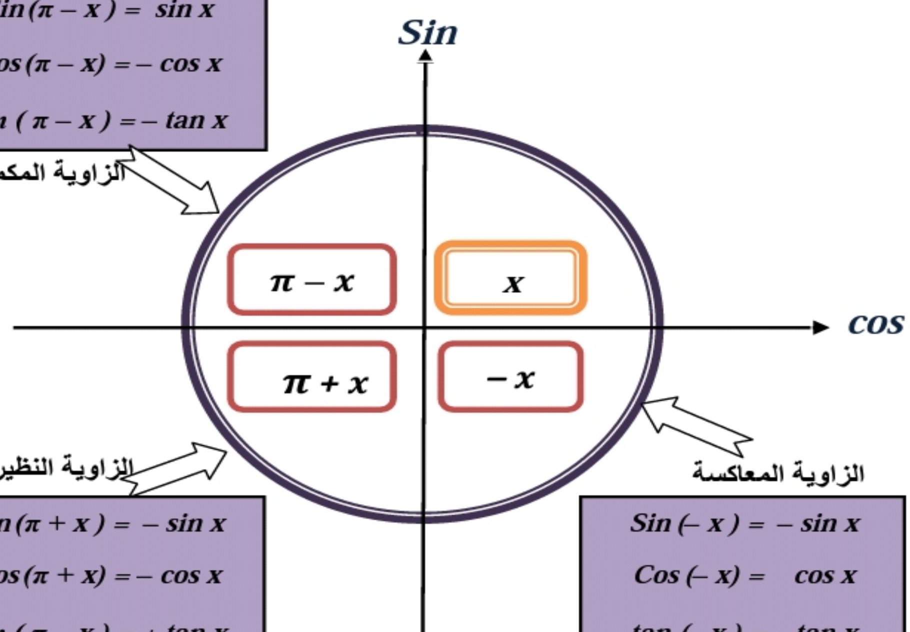
دساتير الإرجاع إلى الربع الأول

$$Sin(\pi - x) = \sin x$$

$$Cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

الزاوية المكملة



الزاوية النظيرة

$$Sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$Cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = +\tan x$$

الزاوية المعاكسة

$$Sin(-x) = -\sin x$$

$$Cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

النسب المثلثية للزوايا الشهيرة

الزاوية بالدرجات	0	30	45	60	90	180	270	360
الزاوية بالراديان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

علاقات أساسية في المثلثات

المدرس : محمد عمرو صديق

المعادلات المثلثية

المعادلات المثلثية البسيطة

$$* \sin x = \sin\theta \rightarrow \begin{cases} x = \theta + 2\pi k \\ x = \pi - \theta + 2\pi k \end{cases}$$

$$* \cos x = \cos\theta \rightarrow \begin{cases} x = \theta + 2\pi k \\ x = -\theta + 2\pi k \end{cases}$$

$$* \tan x = \tan\theta \rightarrow \{ x = \pi k$$

معادلات مثلثية خاصة (هامة للغاية)

$* \sin x = 0 \rightarrow x = \pi k$

$* \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$* \tan x = 0 \rightarrow x = \pi k$

$* \sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$* \cos x = 1 \rightarrow x = 2\pi k$

$* \sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

$* \cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2\pi k$

النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين

$$\text{Sin}(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\text{Sin}(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\text{Cos}(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\text{Cos}(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

دساتير التحويل

التحويل من مجموع إلى جداء

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$$

التحويل من جداء إلى مجموع

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{-1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

الدرجة العظمى : 600

المدة : ثلاث ساعات

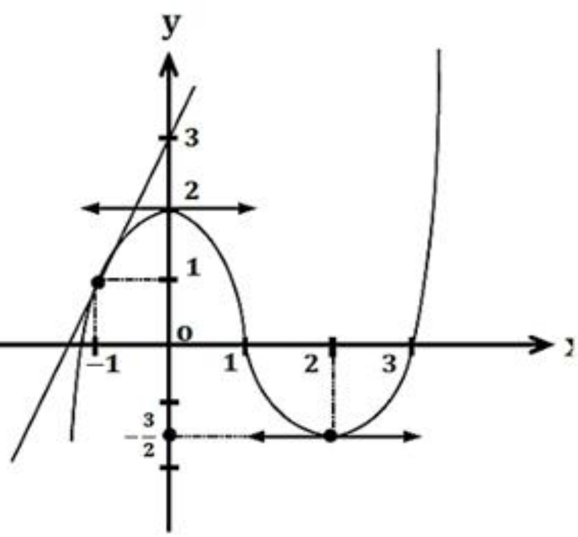
نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2019)

الجزء الأول

((الصفحة الأولى))

أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : **(40 درجة لكل سؤال)**

السؤال الأول : نجد جانباً C_f الخط البياني لتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ و المطلوب :



1) احسب $f(2)$, $f^{\prime}(2)$
2) ما هو عدد القيم الحدية محليا للتابع f ؟
3) عين صورة المجال $[1,3]$ وفق f
4) اكتب معادلة المماس لمنحني التابع في نقطة منه فاصلتها $x=-1$

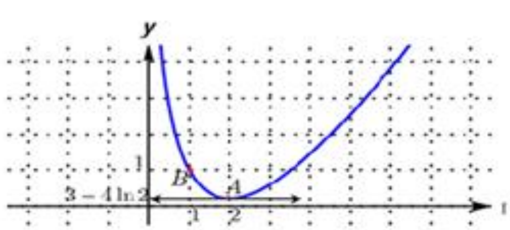
السؤال الثاني : احسب النهايتين : ① $g(x)=\sqrt{x^2+x}-2x$ ② $f(x)=\sqrt{x^2+x}+x$

السؤال الثالث : حل المعادلة : $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$

السؤال الرابع : حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ثم عين حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : **(60 درجة لكل تمرين)**

التمرين الأول : ليكن التابع المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=ax+b+c\ln(x)$ حيث a و b و c أعداد حقيقية، (C) خطه البياني في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المعطى في الشكل المجاور:



❶ أثبتي أنّ f اشتقاقي على I و احسبي تابعه المشتق $f'(x)$

❷ استفيدي من المعلومات المدوّنة على الشكل لإثبات أنّ $a+b=1$ و $2a+c=0$ و $2a+b+c\ln 2=3-4\ln 2$

❸ أوجدي a و b و c ثمّ اكتبي عبارة $f(x)$

التمرين الثاني : ليكن التابع f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\ln(x+1)-x$

① ادرس تغيرات التابع f

② استنتج صحة المتراجحة : $\ln(x+1)\le x$ في حالة $x>-1$

يتبع في الصفحة التالية ....

التمرين الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$ والمطلوب:

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② ادرس وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي ، ارسم C.

③ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

التمرين الرابع : التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالصيغة : $f(x)=\ln(e^x+2)$

① أثبت أن التابع f يكتب بالصيغة : $f(x)=x+\ln(1+2e^{-x})$

② أوجد معادلتي المقارب الأفقي و المقارب المائل للخط C

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين :　　　　**(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى : ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ خطه البياني C

① أوجد معادلة كل مقارب للخط البياني C يوازي أحد المحورين الإحداثيين .

② ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها و بين ماله من قيم حدية

③ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $[-1,1]$

④ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

⑤ ناقش حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

⑥ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و محور الفواصل و المستقيمين : $x=1$ و $x=-1$

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=(2-x).e^x$

① ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها و دل على القيمة الحدية ثم ارسم C

② احسب S مساحة السطح المحصور بين C و محور الفواصل و المستقيمين : $x=0$ و $x=2$

③ استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x)=(x-2).e^x$

④ عين الأعداد a,b,c حتى يكون التابع $G:x\to(ax^2+bx+c).e^{2x}$ هو تابع اصلي للتابع f^2

——————————((انتهت الأسئلة))——————————

مع التمنيات بالنجاح و التوفيق للجميع　　　　المدرس : محمد عمرو صديق

ملخص الأشعة بشكل كامل ومفصل مع مثال عن كل فكرة

لإثبات ان A,B,C تشكل مستو يجب ان نثبت مثلا عدم ارتباط الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ خطيا

مثال : اثبت ان النقاط $C(2,1,0)$ $B(-1,0,0)$ $A(2,2,3)$ تشكل مستو

الحل : $\overrightarrow{AC}(1,-1,-3)$ $\overrightarrow{AB}(-3,-2,-3)$ الشعاعين غير مرتبطين خطيا اذا النقاط A,B,C تشكل مستو

لإثبات ان الاشعة u,v,w مرتبطة خطيا (أي تقع في مستو واحد) يجب ان نثبت ان $w = au + bv$ (بصير لكلشي)

مثال : A,B,C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ E نقطة تحقق العلاقة $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ اثبت ان الاشعة $\overrightarrow{AE}$ $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا وان النقاط A, B, C, E تقع في مستو واحد

الحل : من العلاقة المفروضة نجد : $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$

ومنه الاشعة $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا والنقاط A, B, C, E تقع في مستو واحد

طرق ايجاد معادلة المستوي لثلاث نقاط تمر منها

الطريقة الأولى :

- نبحث عن شعاعين يؤلفان النقاط A,B,C تكون غير مرتبطة خطيا ولتكن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$
- نختار نقطة مجهولة من المستوي ولتكن $M(x,y,z)$ • نبحث عن قيم a,b في العلاقة $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$
- وذلك بإيجاد قيم a,b من احدى المعادلتين المنشورتين والتعويض بالثالثة للحصول على معادلة المستوي

الطريقة الثانية :

تستخدم هذه الطريقة عادة اذا وجد عددا لا يقل عن ثلاث اصفار في مركبات النقاط التي يمر منها المستوي

- نعوض النقاط A,B,C في معادلة المستوي العامة $ax + by + cz + d = 0$
- يتشكل ثلاث معادلات نحصل منها على a,b,c بدلالة d • نقسم على $d \neq 0$ نحصل على معادلة المستوي المطلوب

الطريقة الثالثة (الناظم) :

- نبحث عن شعاعين يؤلفان النقاط A,B,C تكون غير مرتبطة خطيا ولتكن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$
- نختار ناظم للمستوي $\vec{n}(a,b,c)$ فيكون **n.AB = 0 , nAC = 0**
- نختار قيمة لاحد مركبات الناظم ونعوضه في المعادلتين **المؤلفتين** من الجداء السابق فنحصل على الناظم

نختار احدى النقاط التي يمر منها المستوي ولتكن A **n.AM= 0**

$$a(X-Xa) + b(y-ya) + c(Z-Za)= 0$$

مثال : عين معادلة المستوي P المار بالنقاط $A(1,0,0), B(0,1,0), C(1,2,1)$

الحل :

الطريقة الأولى : نلاحظ ان $\overrightarrow{AC}(0,2,1)$ $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ غير مرتبطين خطيا لعدم تناسب مركباتهم فان A,B,C تشكل مستو

نختار $M(x,y,z)$ من المستوي P فان : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

- نختار نقطة مجهولة من المستوي ولتكن $M(x,y,z)$ • نبحث عن قيم a,b في العلاقة $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} -x+1 &= a \ldots\ldots \boxed{1} \\ y &= a + 2b \ldots\ldots \boxed{2} \\ z &= b \ldots\ldots\ldots\ldots \boxed{3} \end{aligned}$$

بتعويض $\boxed{1}$ و $\boxed{3}$ في $\boxed{2}$ نجد $y = -x + 1 + 2z \Longleftarrow$ **p : x+y -2z -1 = 0**

الطريقة الثانية :

$$p{:}ax + by + cz + d = 0 \Longrightarrow \begin{aligned} A \in P &\Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow a = -d \\ B \in P &\Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow b = -d \\ C \in P &\Rightarrow a + 2b + c + d = 0 \end{aligned}$$

نعوض قيم a,b في المعادلة الاخيرة نجد $-d - 2d + c + d = 0 \Rightarrow c = 2d$ نعوض قيم a,b,c في معادلة المستوي الرئيسية نجد :

$P: -dx - dy + 2dz + d = 0$ بالتقسيم على $-d \neq 0$ نجد **p : x + y -2z + 1 = 0**

ثالثا : طريقة الناظم نلاحظ ان $\overrightarrow{AC}(0,2,1)$, $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ غير مرتبطين خطين لعدم تناسب مركباتهم فان A,B,C تشكل مستو

نختار ناظم المستوي P $\vec{n}(a,b,c)$ فان

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -a + b = 0 \ldots \boxed{1}$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow 2b + c = 0 \ldots \boxed{2}$$

نختار قيمة $c = -2$ نعوض في $\boxed{2}$ ثم نعوض قيمة b في $\boxed{1}$

$a = 1$, $b = 1$ أي $\vec{n}(1,1,-2)$ ومعادلة المستوي من الشكل $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ بالتعويض نجد **p : x + y - 2z -1=0**

ايجاد معادلة مستوي يمر بالنقطتين A و B ويحوي الشعاع u

الطريقة الأولى

- نتأكد من ان الشعاعين $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا
- نختار نقطة مجهولة من المستوي ولتكن $M(x,y,z)$
- نبحث عن قيم a,b في العلاقة $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\vec{u}$
- وذلك بإيجاد قيم a,b من احدى المعادلتين المنشورتين والتعويض بالثالثة للحصول على معادلة المستوي

الطريقة الثانية (الناظم)

- نتأكد من ان الشعاعين $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا
- نختار ناظم للمستوي $\vec{n}(a,b,c)$
- فيكون $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\ ,\ \vec{n}.\vec{u}=0$
- نختار قيمة لاحد مركبات الناظم ونعوضه في المعادلتين المتشكلتين من الجداء السابق فنحصل على الناظم
- نختار إحدى النقاط التي يمر منها المستوي ولتكن A ونعوض بإحدى العلاقتين $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

مثال : عين معادلة المستوي Q المار من النقطتين $A(1,0,0),B(0,1,1)$ ويعامد المستوي $P: x+y+z=0$

الحل : نبرهن ان المستقيم AB لايعامد المستوي P أي $\overrightarrow{AB},\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)\,,\overrightarrow{n_P}(1,1,1)$

$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P}=0 \Rightarrow a+b+c=0$ $\qquad$ $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -a+b+c=0$

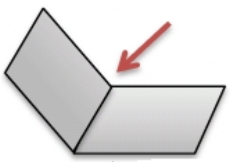
نعطى قيمة $c=1$ ونعوض في المعادلتين ونجمع المعادلتين $2b+2=0 \Rightarrow b=-1$ ومنه $a=0$ أي $\overrightarrow{n_Q}(0,-1,1)$ ونتابع كما في المثال السابق

طرق ايجاد المعادلات الوسيطية في الفراغ

اولا : المستقيم المار من A وموجهه $\vec{u}(a,b,c)$

$$\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$$

ثانيا : المستقيم الذي يشكل الفصل **المشترك** لمستويين متقاطعين بالحل المشترك **لمعادلتي المستويين** نوجد **مثلا x و y** بدلالة z فنحصل على المعادلتين الديكرتيتين للمستقيمين معطي مجموعة نقاط المستقيم M بدلالة z ثم نعطي قيمة $Z=t$ فنحصل على المعادلات الوسيطية



مثال : عين المعادلات الوسيطية للفصل المشترك $P: x+y+z=0$ $\quad Q: 2x-y+5z+3=0$

الحل بجمع معادلتي المستويين نجد $3x+6z+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-2z-1}$

نعوض في المعادلة الاولى $-2z-1+y+z=0 \Rightarrow \boxed{y=z+1}$

نسمي المعادلتين الناتجتين بالمعادلتين الديكارتيتين للمستقيم المستقيم ممثل بمجموعة النقاط $M(-2Z-1,Z+1,Z)$

نعطي قيمة $Z=t$

$$\begin{cases}x=-2t-1\\y=t+1\\z=t\end{cases}$$

طريقة ايجاد مجموعة نقاط المستقيم المار من A وموجهه u(a,b,c)

- نختار نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم المطلوب
- فيكون $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$
- بعد النشر نحصل على ثلاث معادلات تحوي k نوجد قيمة k من احداها ونعوضها بالمعادلتين الباقيتين فنحصل على المعادلتين الديكارتيتين للمستقيم
- نتابع كما في الفقرة السابقة

مثال : عين مجموعة نقاط المستقيم المار من $A(1,1,0)$ وموجهه $\vec{u}(1,-1,2)$

الحل نختار نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم المطلوب فيكون $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$

$$\begin{bmatrix}x-1\\y-1\\z\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x-1=k\ \ldots\boxed{1}\\y-1=-k\ \ldots\boxed{2}\\z=2k\ \ldots\boxed{3}\end{matrix}$$

من $\boxed{3}$ نجد $k=\frac{1}{2}z$ نعوض في $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ $\quad \boxed{y=-\frac{1}{2}z+1}\ ,\ \boxed{x=\frac{1}{2}z+1}$

مجموعة نقاط المستقيم $M(\frac{1}{2}z+1,-\frac{1}{2}z+1,z)$

الوضع النسبي للمستويين p و Q

$\overrightarrow{nQ}\ ,\ \overrightarrow{n_P}$ مرتبطين **خطياً** المستويين متوازيين واذا **تحققت النسبة** $\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{d_1}{d_2}}$ المستويين منطبقان

$\overrightarrow{nQ}\ ,\ \overrightarrow{n_P}$ **غير** مرتبطين خطيا المستويين متقاطعين **بستقيم يدعى الفصل المشترك** وعند تحقق العلاقة $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$ **المستويين** متعامدان

الوضع النسبي لمستقيمين d1 , d2

- $\overrightarrow{u_{d2}}\ ,\ \overrightarrow{u_{d1}}$ مرتبطين **خطياً المستقيمان متوازيان** ويقعان في مستو واحد
- $\overrightarrow{u_{d2}}\ ,\ \overrightarrow{u_{d1}}$ غير مرتبطين خطيا المستقيمان متقاطعان اذا كان لهما نقطة اشتراك ويقعان في مستو واحد
- $\overrightarrow{u_{d2}}\ ,\ \overrightarrow{u_{d1}}$ غير مرتبطين خطيا وليس لهما نقطة اشتراك المستقيمان متخالفان يقعان في مستويين مختلفين

مثال : ادرس الوضع النسبي للمستقيمين

$$d_1:\begin{cases}x=2\\y=1+s\\z=-1-s\end{cases} \qquad d_2:\begin{cases}x=2-t\\y=3+t\\z=-2t\end{cases}$$

لحل : $\overrightarrow{u_{d2}}(-1,1,-2)\ ,\ \overrightarrow{u_{d1}}(0,1,-1)$ مركباتهم غير متناسبة فالمستقيمان اما متقاطعان متخالفان

بالحل **المشترك بين** معادلتيهما نجد :

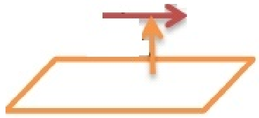
$$\begin{matrix}2-t=2\ \ldots\ldots\boxed{1}\\3+t=1-s\ \ldots\boxed{2}\\-2t=-1-s..\boxed{3}\end{matrix}$$

من $\boxed{1}$ نجد $t=0$ نعوض في $\boxed{2}$ $s=-2$ وهذا لا يحقق $\boxed{3}$

فالمستقيمان متخالفان ولا يقعان في **مستو واحد**

الوضع النسبي لمستقيم d ومستوي P

- المستقيم d يوازي المستوي P يكون $\overrightarrow{np}.\overrightarrow{u_d}=0$ ولإثبات ان d محتوى في P يكفي ان نختار نقطة من d يجب ان تحقق معادلة المستوي P



- المستقيم d يقطع المستوي P يكون $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d}\neq 0$ لإيجاد نقطة الاشتراك نبحث عن الحل المشترك بين معادلتي المستقيم والمستوي ومن حالات التقاطع تعامد مستقيم ومستوي يجب ان يكون $\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{u_d}$ مرتبطين خطيا

مثال : اثبت ان المستقيم $\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-2t \quad t\in R\\ z=2+t\end{cases}$ والمستوي $P: 2x+3y+2z-9=0$ متوازيان

وهل المستقيم محتوى في المستوي

الحل: نلاحظ ان موجه المستقيم $\vec{u}(2,-2,1)$ وناظم المستوي $\vec{n}(2,3,2)$ حيث $\vec{n}.\vec{u}=4-6+2=0$ أي ان المستقيم يوازي المستوي

نختار نقطة من المستقيم ولتكن $A(1,1,2)$ عندما $t=0$,نعوضها في معادلة المستوي نجد انها تحققه فالمستقيم محتوى في لمستوي

المسقط القائم : لا يجاد المسقط القائم لنقطة A على المستو P

- نشكل معادلة المستقيم المار من A وموجهه ناظم المستوي P • بالحل المشترك بين معادلتي المستوي والمستقيم نوجد نقطة التقاطع التي تشكل المسقط القائم للنقطة A

مثال : عين المسقط القائم للنقطة $A(1,1,2)$ على المستوي $P: x-2y+z=0$

الحل : نشكل معادلة المستقيم المار من A وموجهه ناظم المستوي P حيث $\overrightarrow{n_P}(1,-2,1)$

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1-2t \quad t\in R\\ z=2+t\end{cases}$$

بالحل **المشترك بين** معادلتي**المستوي** و المستقيم نجد : $1+t-2+4t+2+t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{6}$

نقطة الاشتراك التي تمثل المسقط القائم $A'(\frac{5}{6},\frac{8}{6},\frac{11}{6})$

بعد نقطة عن مستقيم لحساب بعد A عن **مستقيم** ممثل نقطيا

- نوجد **معادلة المستقيم الممثلة بجميع نقاط** M بدلالة احد المجاهيل **وليكن Z**
- نوجد AM^2 بدلالة Z • نكتب AM^2 بالشكل**القانوني (إتمام الى مربع كامل)** • يتشكل لدينا العبارة $AM^2=a(z-b)+s$ علما ان $a>0\ ,\ s>0$
- البعد متمثل بأقصر المسافات بين $A\,,d$ أي عندما $z=b$ • يصبح البعد في هذه الحالة $l=\sqrt{s}$

مثال : احسب بعد النقطة $A(1,0,1)$ عن المستقيم الممثل نقطيا $M(y-1,y,y+1)$

الحل :

$$AM^2=(y-2)^2+y^2+y^2 \Rightarrow AM^2=y^2-4y+4+2y^2 \Rightarrow AM^2=3y^2-4y+4$$

$$AM^2=3\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+4 \Rightarrow AM^2=3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}+4 \Rightarrow AM^2=3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}$$

البعد متمثل بأقصر المسافات عندما $y=\frac{2}{3}$ ويكون البعد هو $l=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ولحساب احداثيات **المسقط القائم للنقطة** A **على** المستقيم نعوض $y=\frac{2}{3}$ في M فيكون $A'(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3})$

قانون البعد بين نقطة ومستوي بفرض لدينا المستوي $ax+by+cz+d=0$ والنقطة A

$$dist(P,A)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

عادة يستخدم قانون البعد : • ايجاد ارتفاع الهرم • ايجاد نصف قطر الكرة الماسة لمستوي

- ايجاد البعد بين مستويين متوازيين • ايجاد البعد بين مستوي ومستقيم متوازيين

ايجاد البعد بين مستويين متوازيين بفرض لدينا المستويين المتوازيين P,Q

- نختار نقطة من P مثلا وذلك باختيار مركبتين لها والتعويض في معادلة المستوي لا يجاد المركبة الثالثة • نوجد بعد النقطة عن المستوي Q

مثال : احسب البعد بين المستويين $P: x-y+2z=0 \quad , \quad Q: 2x-2y+4z-1=0$

الحل : نلاحظ ان المستويين متوازيين لان ناظميهما مرتبطين خطيا نختار $A(1,1,Z)$ نعوضها في P تصبح $A(1,1,0)$

نوجد بعدها عن Q $dist(Q,A)=\frac{|2-2-1|}{\sqrt{4+4+16}}=\frac{1}{\sqrt{24}}$

ايجاد البعد بين مستوي ومستقيم بفرض لدينا المستوي P والمستقيم d المتوازيين • نختار نقطة من المستقيم • نحسب بعد تلك النقطة عن المستوي

مثال : احسب البعد بين المستقيم $\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-2t \quad t\in R\\ z=2+t\end{cases}$ **والمستوي** $Q: 2x-2y+4z-1=0$

الحل : **نختار النقطة A(1,1,2) من** المستقيم عندما $t=0$ نحسب بعد النقطة **عن المستوي** $dist(Q,A)=\frac{|2-2+8-1|}{\sqrt{4+4+16}}=\frac{7}{\sqrt{24}}$

إيجاد بعد بين مستقيمين متوازيين : بفرض لدينا المستقيمين : d1 و d2

1- نختار نقطة من المستقيم الأول
2- نحسب بعد النقطة عن المستقيم الثاني

مثال : احسب البعد بين المستقيمين :

$$d1 \quad \begin{cases} x = 2s \\ y = 2 - 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \qquad d2 \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

إيجاد معادلة مستوي يحوي مستقيمين :

بفرض لدينا المستقيمان d1 , d2 لايجاد المستوي الحاوي لهما :

1- نختار نقطتين من المستقيم d1 ونقطة d2
2- نوجد معادلة المستوي باحدى الطرق الثلاث(ذهبية مباشرة ناظمية)

استخدامات يكفي :

1- لاثبات أن d هو الفصل المشترك للمستويين P Q يكفي ان نختار نقطتين من المستقيم d يجب ان تحقق معادلتي المستويين
2- لاثبات أن A’ هو المسقط القائم للنقطة A على المستوي P يكفي أن نثبت أن A’ ينتمي للمستوي P أن AA’ مرتبط خطياً مع ناظم المستوي
3- لاثبات أن A , B , C تشكل المستوي P يكفي ان نثبت ان النقاط A , B , C تنتمي للمستوي F وان الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً
4- لاثبات وقوع نقطة على سطح كرة يكفي أن تنتمي المعادلة الكرة أو يكون بعدها عن مركز الكرة يساوي نصف قطرها
5- لاثبات ان النقطة D تنتمي للمستوي المحور للقطعة AB يكفي أن نثبت أن AB=BD

المعادلة الديكارتية للكرة :

1- معادلة كرة مركزها A ونصف قطرها R : $(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 + (Z - Z_A)^2 = R^2$
2- معادلة كرة قطرها AB مركزها النقطة I منتصف AB ونصف قطرها R=$\frac{1}{2}AB$
3- معادلة كرة مركزها A وتمس مستوي P يكون نصف قطرها البعد بين A والمستوي P
4- المعادلة المنشورة $X^2 + Y^2 + Z^2 + ax + by + cz = d$ بعد كتابتها بالشكل القانوني تصبح
$(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 + (Z - Z_A)^2 = R^2$

نميز ثلاث حالات k>0 المعادلة تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{K}$

K=0 المعادلة تمثل نقطة وحيدة A ، K<0 المعادلة تمثل مجموعة خالية

مركز الابعاد المتناسبة :

اولاً : مركز الابعاد المتناسبة لنقطتين : إذا كانت D مركز ابعاد متناسبة للنقطتين (A,a)(B,b) فهي تحقق العلاقة $a\overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

ثانياً : مركز الابعاد المتناسبة لثلاث نقاط أو اكثر : إذا كانت S مركز الابعاد المتناسبة (A,a) , (B,b) , (C , c) $a\overrightarrow{AD} + b\overrightarrow{BD} = 0$

حالات خاصة : MA+MB=0 لنقطة m منتصف AB

-MA+MB+MC= النقطة M مركز ثقل المثلث ABD

ثالثاً: العلاقتين الخرافيتين : بفرض A , B , C نقاط متمايزة من الفراغ : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ حيث I منتصف AB

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ حيث G مركز ثقل المثلث ABC

تعميم S مركز الابعاد المتناسبة للنقاط (A,a)(B.b)(D,d)(E,e) فإن : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + d\overrightarrow{MD} + e\overrightarrow{ME} + (a + b + d + e)\overrightarrow{MS}$

الحل :

- $G(\frac{3}{2},0,0)$ $\begin{cases} x_G = \frac{1+2+0}{2} = \frac{3}{2} \\ y_G = \frac{-1-3+4}{2} = 0 \\ z_G = \frac{-2+0+2}{2} = 0 \end{cases}$

- $I(\frac{1}{3},0,1)$ $\begin{cases} x_I = \frac{-1+2+0}{3} = \frac{1}{3} \\ y_I = \frac{1-3+2}{3} = 0 \\ z_I = \frac{2+0+1}{3} = 1 \end{cases}$

- نعلم ان $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}$ وبما ان G مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(A,-1),(B,1),(C,2)$ فان
$-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$ بالتعويض بالعلاقة المفروضة نجد $3|2\overrightarrow{MG}| = 2|3\overrightarrow{MI}|$ $6MG = 6MI \Longrightarrow \boxed{MG = MI}$
وهي تمثل مستوي محوري للقطعة GI

مثال ٢ : في معلم متجانس لدينا النقاط $A(2,0,1)$, $B(1,-2,1)$, $C(5,5,0)$, $D(-3,-5,6)$ اذا علمت ان A,B,C,D تقع في مستو واحد اثبت ان D مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ عين α,β,γ

الحل : نوجد العلاقة الشعاعية التي تجعل النقاط في مستو واحد $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BD} + b\overrightarrow{CD}$ $\Longleftarrow$ $\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-4\\-3\\5\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-8\\-10\\6\end{pmatrix}$

بالنشر نجد $-5 = -4a - 8b \ldots\ldots \boxed{1}$

$-5 = -3a - 10b \ldots\ldots \boxed{2}$ نضرب المعادلة ١ بالعدد ٣ و $\boxed{2}$ بالعدد -٤ ونجمع المعادلتين : $5 = 16b \Longrightarrow \boxed{b = \frac{5}{16}}$

$5 = 5a + 6b \ldots\ldots \boxed{3}$

نعوض في ١ $-5 = -4a - \frac{5}{2} \Longrightarrow \boxed{a = \frac{5}{8}}$ وهذا يحقق $\boxed{3}$ ومنه $\overrightarrow{DA} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BD} + \frac{5}{16}\overrightarrow{CD}$

$16\overrightarrow{AD} - 10\overrightarrow{BD} - 5\overrightarrow{CD} = \vec{0}$ أي ان D مركز أبعاد النقاط $(A,16)$, **(B,-10)** **(c,-5)**

مثال ٢ : عين موضع G كمركز ابعاد متناسبة للنقاط المثقلة **(A,3)** , $(B,1),(C,-1)$

الحل : نفرض H مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(A,3)$, **(B,1)** $3\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ اذا G مركز ابعاد متناسبة للنقطتين $(H,4),(C,-1)$

$4\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{HG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$

المستوي المحوري لإيجاد المعادلة الديكارتية لمعادلة المستوي المحوري للقطعة AB

طريقة اولى : نختار نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي المطلوب فيكون : $MA = MB$ بالنشر والاصلاح **نحصل على المعادلة** $ax + by + cz + d = 0$

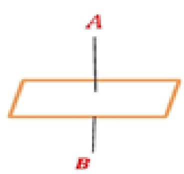
مثال : عين معادلة المستوي المحوري للقطعة $A(1,1,1),B(0,-1,0)$

الحل : نختار نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي المطلوب $MA^2 = MB^2$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 + z^2$ $\Longrightarrow$ $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2$

$\boxed{2x + 4y + 2z = +2}$

طريقة ثانية :



نوجد N منتصف AB والتي تقع على المستوي نختار ناظم المستوي $\overrightarrow{AB}$ نكتب معادلة المستوي

$a(x - x_N) + b(y - y_N) + c(z - z_N) = 0$

مثال : عين معادلة المستوي المحوري للقطعة $A(1,1,1),B(0,-1,0)$

الحل : نوجد N منتصف AB والتي تقع على المستوي $x_N = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$, $y_N = \frac{1-1}{2} = 0$, $z_N = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

$N(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ نوجد ناظم المستوي المطلوب $\overrightarrow{AB}(-1,-2,-1)$ نكتب معادلة المستوي : $a(x - x_N) + b(y - y_N) + c(z - z_N) = 0$

$\boxed{2x + 4y + 2z = +2}$

التمثيل النقطي لبعض المعادلات الشهيرة (مجموعة النقاط) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$

مجموعة النقاط M تمثل مستوي محوري للقطعة AB $|\overrightarrow{MA}| = a|\overrightarrow{MB}|$ حيث a عدد حقيقي موجب مجموعة النقاط M تمثل كرة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

مجموعة النقط M تمثل كرة مركزها I منتصف AB ونصف قطرها $R = \frac{1}{2}AB$ $|\overrightarrow{MA}| = K$

مجموعة النقط M تمثل كرة مركزها A ونصف قطر K $\overrightarrow{MA}.\vec{S} = 0$

مجموعة النقاط M تمثل مستوي يمر من A وناظمه $\vec{S}$ $\overrightarrow{MA} = k\vec{u}$

مجموعة النقاط M تمثل مستقيم يمر من A وموجهه $\vec{u}$

الوضع النسبي لثلاث مستويات بالحل المشترك للمعادلات الثلاث نميز ثلاث حالات :

- الجملة لها حل وحيد اذا **المستويات الثلاث** تشترك بنقطة وحيدة
- الجملة لها عدد غير منته **من الحلول المستويات الثلاث** تشترك بمستقيم
- الجملة مستحيلة الحل المستويات لا تشترك باي نقطة معا

عادة تحل جملة المعادلات بطريقة غاوس

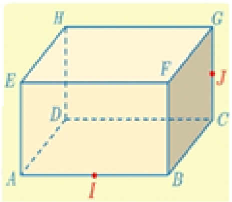
انتهت أفكار الأشعة مع الأمثلة عن جميع الأفكار بفضل الله تعالى

ورقة عمل شاملة في الهندسة

المسالة الأولى : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$

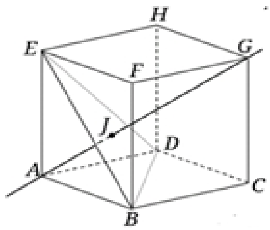
- عين مجموعة نقاط الفراغ **التي تحقق العلاقة** $|\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MH}| = |\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}|$
- اوجد المعادلة **الديكارتية** لمجموعة نقاط **الفراغ M**

المسالة الثانية : مكعب طول حرفه 1 **مزود بمعلم** متجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ و I منتصف AB و **J منتصف** CG



- جد احداثيات النقاط A , E , I • جد احداثيات O مركز ثقل المثلث AEI
- عين موضع M التي تحقق العلاقة $3\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$
- اكتب معادلة المستوي المار من النقاط A , E , I

المسالة الثالثة : مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه 3 نعطي معلما متجانسا $\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$



- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم AG • اثبت ان المستقيم AG عمود على المستوي EBD
- المستقيم AG يتقاطع مع المستوي EBD في نقطة J عين احداثياتها
- اثبت ان J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EBD ومركز ثقله
- احسب حجم رباعي الوجوه $ABED$
- اثبت انه مهما كانت M من الفراغ فان $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}-3\overrightarrow{MJ} = -\overrightarrow{MD}$

المسالة الرابعة : في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(1,1,1)$ $B(3,2,0)$ والمستوي $Q: x-y+2z+4=0$

- عين المعادلة الديكارتية للمستوي p المار من B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظما عليه
- اوجد المعادلة الديكارتية للكرة S التي قطرها $(2AB)$ ، مركزها A
- اثبت ان المستوي Q مماس للكرة S
- اثبت ان $C(0,2,-1)$ مسقط A على المستوي Q
- **أثبت أن d** المعطى بالعلاقات الوسيطية $t \in R$ $\begin{cases} x = t \\ y = 12-5t \\ z = 4-3t \end{cases}$ هو **الفصل** المشترك للمستوين Q , P

المسالة الخامسة :

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **ليكن** لدينا $A(6,1,5)$ والمستوين $P: 7x+6y+5z=23$ $Q: x-2y+z=-1$

والمستقيم d المعين بالمعادلات الوسيطية $t \in R$ $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 2+\frac{1}{2}t \\ z = -2-2t \end{cases}$ • اكتب المعادلات الوسيطية**للمستقيم d1** المار من A **والعمودي** على P

- اثبت ان المستقيمان d , $d1$ متخالفان
- اثبت ان المستقيم d محتوى في المستوي P وان المستقيم $d1$ يوازي المستوي Q
- احسب المسافة بين المستقيم $d1$ والمستوي Q

مسألة شاملة في الهندسة

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$

١. بين ان ABC تعين مستوي ٢. عين شعاعا ناظميا على **المستو** ABC ٣. استنتج **المعادلة الديكارتية** للمستوي ABC

٤. اثبت ان المثلث ABC قائم ٥. احسب مساحة المثلث ABC ٦. عين بعد D عن المستوي ABC

٧. احسب حجم الهرم $D-ABC$ ٨. عين مركز الكرة ω التي معادلتها $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$ واحسب نصف قطرها

٩. احسب بعد ω عن المستوي ABC ١٠. اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من ω ويعامد المستوي ABC

١١. ليكن لدينا المستوي $Q: x+y+z-1=0$ بين ان المستويين ABC, Q متعامدان ١٢. اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ' الذي يشكل الفصل المشترك للمستويين ABC , Q ١٣. عين بعد D عن ABC ثم استنتج المسافة بين D و Δ' ١٤. ادرس الوضع النسبي بين المستقيمين Δ, Δ'

١٥. اعط المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري P للقطعة MN حيث $M(1,0,0), N(-1,0,2)$ ١٦. عين تقاطع المستويات الثلاث ABC, P, Q

١٧. عين احداثيات النقطتين G مركز ثقل المثلث ABC والنقطة G' مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(A,3), (B,-1), (C,1)$

١٨. عين مجموعة نقاط الفراغ M لكل ممايلي :

- $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$
- $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = 6$
- $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 0$
- $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$

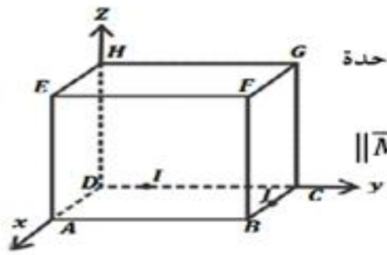
الاسم : ....

مذاكرة رياضيات في الأشعة شاملة لطلاب البكالوريا العلمي

السؤال الأول: لتكن النقاط $A(5,0,0)$ و $B(2,-1,1)$ و $C(10,1,-2)$ $D(3,2,1)$ (80 درجة)

1. هل النقاط A , B , C , D تقع في مستو واحد ؟ علل اجابتك
2. لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ و L نقطة تحقق العلاقة $3\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD}$ و G مركز ثقل المثلث BCD
أثبت أن المستقيمين (AI) و (GL) متوازيان.

السؤال الثاني:(100 درجة) $ABCDEFGH$ مكعب والنقطة I من الحرف $[CD]$ وتحقق : $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة J من الحرف $[BC]$ وتحقق : $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ ولنعتبر معلماً متجانساً $(D;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ والمطلوب :



1) أوجد احداثيات رؤوس المكعب واحداثيات I و J
2) أوجد احداثيات N مركز ثقل المثلث EJG واستنتج أن النقط E, N, C لاتقع على استقامة واحدة
3) أوجد العددين الحقيقين a , b كي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{EG} + b\,\overrightarrow{EJ}$
4) أوجد مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3$

السؤال الثالث : لدينا النقاط : $A(-1,0,2)$, $B(0.0.1)$, $c(2,-1,1)$
ولدينا المستقيم d المار من A والموجه بشعاع $\vec{u}(4,1,-2)$
و لدينا المستقيم $\acute{d}$ المار من B والموجه بشعاع $\vec{v}(3,1,-1)$ والمطلوب :

1- أثبت أن d و $\acute{d}$ متقاطعان في النقطة N يطلب تعيين احداثياتها.
2- أوجد معادلة المستوي P الذي يقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه.
3- أوجد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P ويمر بالنقطتين A,B
4- اكتب معادلة الكرة التي مركزها N وتمس المستوي Q
5- أوجد احداثيات $\acute{C}$ المسقط القائم للنقطة C على الفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q

السؤال الرابع في معلم متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$

1) عين احداثيات النقطتين G مركز ثقل المثلث ABC
2) عين احداثيات النقطة G' مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,3), (B,-1), (C,1)$
3) عين مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق العلاقة $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$
4) اكتب المعادلة الديكارتية لمجموعة النقاط M

السؤال الخامس نتامل في الفضاء المنسوب الى المعلم المتجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ النقاط $A(1,2,0)$ $B(0,0,1)$ $C(1,5,5)$

1) اثبت ان النقاط A, B, C تشكل مستو عين معادلته الديكارتية
2) اوجد احداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي ABC

السؤال السادس:

في معلم متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ليكن لدينا $A(6,1,5)$ والمستوين $P: 7x + 6y + 5z = 23$ $Q: x - 2y + z = -1$
والمستقيم d المعين بالمعادلات الوسيطية

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \quad t \in R \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

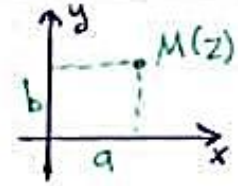
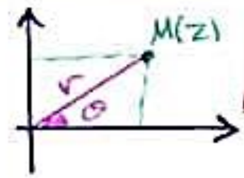
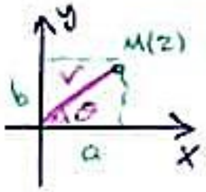
1) اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم $d1$ المار من A والعمودي على P
2) اثبت ان المستقيمان $d, d1$ متخالفان
3) اثبت ان المستقيم d محتوى في المستوي P وان المستقيم $d1$ يوازي المستوي Q

انتهت الأسئلة

المدرس : محمد عمرو صديق

البحث الرابع

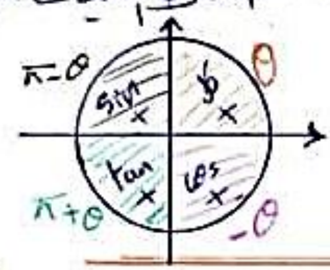
الأعداد العقدية C

	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
التمثيل	 $\boxed{Z = a + ib}$ (a الحقيقي $Re(z)$، b التخيلي $Im(z)$)	 $\boxed{Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]}$ $\arg(z) = \theta + 2\pi k$	 $\boxed{Z = re^{i\theta}}$ $\arg(z) = \theta + 2\pi k$
الطويلة	$\lvert Z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$	$\lvert Z\rvert = r$ (حقيقي موجب r)	$\lvert Z\rvert = r$
المرافق	$\bar{Z} = a - ib$	$\bar{Z} = r[\cos\theta - i\sin\theta]$	$\bar{Z} = re^{-i\theta}$
التساوي	$Z_1 = Z_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$	$Z_1 = Z_2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k \\ r_1 = r_2 \end{cases}$	$Z_1 = Z_2 \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k \\ r_1 = r_2 \end{cases}$
الجمع والطرح	$Z_1 \mp Z_2 = (a_1 \mp a_2) + i(b_1 \mp b_2)$	———	———
الضرب	$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2)$ ننشر مع مراعاة $i^2 = -1$	$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ نضرب الأطوال ونجمع السعات	$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
القسمة	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ نقسم الأطوال ونطرح السعات	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
القوة	$Z^n = (a+ib)^n$ ننشر أو متطابقة	$Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ "دستور دموافر"	$Z^n = r^n e^{in\theta}$ "دستور دموافر"

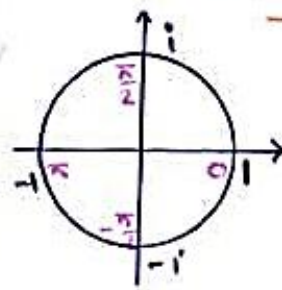
الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي/الأسي

$Z = a + ib$

1. نوجد الطويلة r : $r = \sqrt{a^2+b^2}$
2. نخرج r عامل مشترك
   $Z = r\left[\underbrace{\frac{a}{r}}_{\cos\theta} + i\underbrace{\frac{b}{r}}_{\sin\theta}\right]$
3. نستنتج الزاوية θ من الدائرة المثلثية حسب الربع الواقعة فيه



انتبه



$1 = e^{0i}$
$-1 = e^{\pi i}$
$i = e^{\frac{\pi}{2} i}$
$-i = e^{-\frac{\pi}{2} i}$

انتبه

- لإيجاد قسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الأسي أو المثلثي نوجد Z_1 ثم Z_2 ثم نوجد القسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$
- لإيجاد Z^n بالشكل الأسي أو المثلثي نوجد Z ثم نوجد Z^n (دموافر)

الجذور التربيعية

بالشكل الجبري $\boxed{Z = a+ib}$

1. نفرض الجذر w من الشكل : $\boxed{w = x+iy}$
   $w^2 = Z$
2. نكتب العلاقات

مهم

$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ ---- (1)
$x^2-y^2 = a$ ---- (2)
$x.y = \frac{b}{2}$ --- (3)

3. نحل (1) و (2) حلاً مشتركاً بالجمع نجد $x = \mp$ ، $y = \mp$
4. من (3) نناقش إشارة x و y فيكون
   $x.y > 0 \Leftarrow$ x و y لهما نفس الإشارة
   $x.y < 0 \Leftarrow$ x و y من إشارتين مختلفتين

بالشكل الأسي $\boxed{Z = re^{i\theta}}$

1. نفرض الجذر من الشكل $\boxed{w = Re^{i\alpha}}$
   $w^2 = Z$
2. نكتب العلاقات

مهم

$R = \sqrt{r}$
$\alpha = \frac{\theta}{2} + \pi k$

3. نفرض $k=0 \Leftarrow \alpha = \dots \Leftarrow w_0 = \dots$ الجذر الأول
   $k=1 \Leftarrow \alpha = \dots \Leftarrow w_1 = \dots$ الجذر الثاني

خواص المرافق $\bar{Z}$

1. $Z.\bar{Z} = |Z|^2$
2. اذا كانت $|Z| = 1$ فإنه $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$ ← مهم
3. Z حقيقي $\Leftrightarrow$ $\bar{Z} = Z$
   Z تخيلي بحت $\Leftrightarrow$ $\bar{Z} = -Z$ ← مهم
4. $\bar{\bar{Z}} = Z$

$\bar{Z}$ نظير Z بالنسبة لمحور $x'x$

مجموعة النقاط M

لايجاد مجموعة النقاط M التي تحقق علاقة معطاة

- نفرض $Z = x + iy$
- نعوض في العلاقة فنحصل على علاقة تحوي x و y
- اذا كانت من الدرجة الاولى (مستقيم)
- " " " الثانية ((دائرة))

بالاتمام لمربع كامل نوجد مركزها ونصف قطرها

حل المعادلات

تحوي Z و $\bar{Z}$

- نفرض $Z = a + ib$
  $\bar{Z} = a - ib$
- نعوض في المعادلة نحصل على معادلتين بمجهولين a, b
- نحل جملة المعادلتين فنحصل على a, b

ويكون $Z = a + ib$

من الشكل $aZ^2 + bZ + c = 0$

نوجد $\Delta = b^2 - 4ac$ ونميز ثلاث حالات

$\boxed{\Delta > 0}$ لها حلان حقيقيان

$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\boxed{\Delta = 0}$ لها حل وحيد

$Z = \frac{-b}{2a}$

$\boxed{\Delta < 0}$ لها حلان عقديان مترافقان

$Z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a}$

$Z_2 = \bar{Z_1}$

من الشكل $Z^2 = a + ib$

حل المعادلة هو الجذر التربيعي للمقدار $a + ib$ نوجده كما درسنا سابقاً

3

البحث الخامس

تطبيقات الأعداد العقدية

قوانين هامة

- كل نقطة $M(x,y)$ تمثل بعدد عقدي : $Z_M = x + iy$
- كل شعاع $\vec{u}(x,y)$ تمثل بعدد عقدي : $Z_{\vec{u}} = x + iy$
- العدد العقدي الممثل للشعاع $\vec{AB}$

$$\boxed{Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A}$$

- طول قطعة مستقيمة AB

$$\boxed{AB = |\vec{AB}| = |Z_B - Z_A|}$$

- منتصف قطعة مستقيمة AB

$$\boxed{Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}}$$

- مركز ثقل مثلث ABC

$$\boxed{Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}}$$

- مركز الأبعاد المتناسبة (A,α) (B,β) (C,γ)

$$\boxed{Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$$

الزاوية الموجهة

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ (\vec{u},\vec{v}) = \arg \dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}} \\ \bullet\ (\vec{AB},\vec{CD}) = \arg \dfrac{Z_{\vec{CD}}}{Z_{\vec{AB}}} = \arg \dfrac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \end{array}}$$

نتيجة هامة جداً جداً

1. لإثبات تعامد مستقيمين AB و CD نوجد الزاوية بين شعاعيهما

$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} = \text{تخيلي بحت}$$

$$\Rightarrow \arg \frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = \mp \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{AB \perp CD}$$

2. لإثبات توازي مستقيمين AB، CD نوجد الزاوية بين شعاعيهما

$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C} = \text{حقيقي}$$

$$\Rightarrow \arg \frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{CD}}} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \text{أو} \Rightarrow \boxed{AB \parallel CD}$$

التحويلات الهندسية

① الانسحاب T

M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}$ يمثله العدد المركب b

$$\boxed{Z' = Z + b}$$

Z': الصورة، b: شعاع الانسحاب

② التحاكي H

M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه w ونسبته K

$$\boxed{Z' - w = K(Z - w)}$$

Z': الصورة، w: المركز، K: النسبة

③ التناظر المركزي S

M' صورة M وفق تناظر مركزه w

$$\boxed{Z' - w = -(Z - w)}$$

④ التناظر المحوري محوره oX

M' صورة M وفق تناظر محوره oX

$$\boxed{Z' = \overline{Z}}$$

⑤ الدوران R

M' صورة M وفق دوران مركزه w وزاويته θ

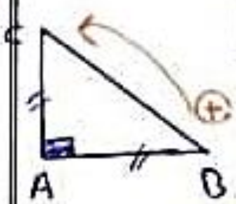
$$\boxed{Z' - w = e^{i\theta}(Z - w)}$$

Z': الصورة، w: المركز، θ: الزاوية

مثلثات خاصة بالدوران

① • إذا كان ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A
عندئذ

C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$



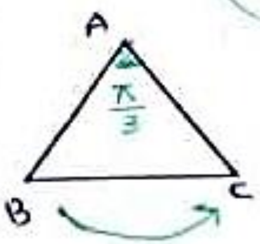
$$c - a = i(b - a)$$

• أو B صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b - a = -i(c - a)$$

② إذا كان ABC مثلث متساوي الأضلاع

C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$



$$c - a = e^{\frac{\pi}{3}i}(b - a)$$

(الوكذلك بالنسبة لـ B و A)

مجموعات خاصة

$$\boxed{|Z - w| = r}$$

الدائرة مركزها يمثله العدد العقدي w ونصف قطرها (R)

$$\boxed{|Z - a| = |Z - b|}$$

محور القطعة المستقيمة AB حيث A يمثله a و B يمثله b

الجذور التكعيبية

لإيجاد الجذر التكعيبي للعدد $Z = re^{i\theta}$

• نفرض الجذر $w = Re^{i\alpha}$

$w^3 = Z$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \sqrt[3]{r} \\ \alpha = \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{2\pi k}{3} \end{array}}$$

الجذر التكعيبي بالأسي فقط !!!

نعوض $k=0$ نوجد الجذر الأول w_0

نعوض $k=1$ نوجد الجذر الثاني w_1

نعوض $k=2$ نوجد الجذر الثالث w_2

ملاحظة:

حل المعادلة $Z^3 = re^{i\theta}$

هو الجذر التكعيبي للعدد $re^{i\theta}$

نتيجة هامة

* لإثبات ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A مثلاً

طريقة أولى نوجد النسبة

$\dfrac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \mp i$ تخيلي بحت

نأخذ arg

$\arg \dfrac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}} = \mp \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow ABC$ قائم في A

نأخذ الطويلة

$\left|\dfrac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}\right| = |\mp i| \Rightarrow \dfrac{|Z_{\overrightarrow{AB}}|}{|Z_{\overrightarrow{AC}}|} = 1 \Rightarrow |Z_{\overrightarrow{AB}}| = |Z_{\overrightarrow{AC}}|$

$\Rightarrow AB = AC$

متساوي الساقين

طريقة ثانية

نثبت C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\pm\dfrac{\pi}{2}$

فيكون ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في A

ورقة عمل في الوحدة الرابعة (العقدية)

السؤال الأول أكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$z = (\sin\frac{5\pi}{12} + i\cos\frac{5\pi}{12})^3$$

$$z = (\sqrt{7} - 3)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z = -2i\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

4) حل في C المعادلة الآتية : $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i = 0$

علماً أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً .

السؤال الثاني :

نتأمل عددين عقديين z و w يحققان $|z| = |w| = 1$ و $z \neq w$. أثبت أن $u = \frac{1 - zw}{z - w}$ عدد حقيقي

السؤال الثالث :

ليكن العدد العقدي $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ ، أثبت أن : $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1$

السؤال الرابع :

لتكن الأعداد المركبة التالية : $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ، $Z_2 = \sqrt{3} + i$ ، $Z_3 = 1$

1- اكتب كلاً من العددين Z_1 و Z_2 بالشكل الأسي .

2- اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري .

3- اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الأسي واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$.

السؤال الخامس :

1) اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة : $(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4) = 0$

2) أثبت أن النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مربع .

انتهت الأسئلة

1 حل معادلة من الدرجة الثالثة

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً:

$$z^3 + (2 - 2i)z^2 - 2z + 8 + 4i = 0$$

2

إذا كانت A, B, C النقاط التي تمثل الأعداد العقدية a, b, c حلول السابقة :

① ارسم في جملة متعامدة نظامية النقاط A, B, C ، استنتج طبيعة المثلث ABC.

② أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق : $(z+1)(\bar{z}+2i)$ عدداً حقيقياً بحتاً

تمثل مستقيم d

3

① اختصر المقدار $t = \dfrac{e^{2\theta i} - e^{-2\theta i}}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}$ ، وحدد متى يكون المقدار موجوداً ،

② اختصر المقدار $w = \sqrt{2}.\left(\dfrac{1+\cos\varphi - i\sin\varphi}{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}\right)$ ،

③ في حالة : $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ ، اكتب w بالشكل الأسي ، ثم احسب w^{100}.

ورقة عمل في الوحدة الخامسة (تطبيقات العقدية)

السؤال الأول :

فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a و b الممثلان للنقطتين A و B بالعلاقة المعطاة

عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A :

1) $b-1=a-i$ 2) $b+i=i\,a-1$ 3) $b=-2a+3i$

السؤال الثاني :

لتكن النقطتان A و B يمثلهما العددان العقديان $z_A=1-i$ و $z_B=3+i$ بالترتيب :

1) عين طبيعة Δ مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق $|z-1+i|=|z-3-i|$ ومثلها في شكل .

2) عين طبيعة Γ مجموعة النقاط $N(z)$ التي تحقق $|z-1+i|=1$ ومثلها على الشكل السابق .

السؤال الثالث :

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نتأمل ثلاث نقاط A و B و C

تمثلها بالترتيب الأعداد العقدية $a=3-11i$ و $b=-2i$ و $c=6-5i$

1) جد العدد العقدي c' الممثل للنقطة C' صورة C وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}=-\vec{v}$.

2) جد العدد العقدي a' الممثل للنقطة A' صورة A وفق تحاك مركزه B ونسبته -2 .

3) احسب $\dfrac{a-c}{b-c}$ ثم أثبت أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين .

السؤال الرابع :

لتكن A و B و C و D أربع نقاط تمثلها بالترتيب الأعداد العقدية :

$a=2$ و $b=1-i$ و $c=-2i$ و $d=(\sqrt{3}+1)(1-i)$

1) أثبت أن النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة .

2) احسب $\dfrac{d-a}{c-a}$ واستنتج أن المثلث ACD متساوي الأضلاع .

السؤال الخامس :

لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها بالترتيب الأعداد العقدية :

$a=2-3i$ و $b=-1+6i$ و $c=4+i$ و $d=-4-3i$

وليكن g العدد العقدي الممثل للنقطة G منتصف $[AB]$:

.

1) احسب g وبرهن أن $\frac{c-g}{a-g}=\frac{a-g}{d-g}$.

2) ماذا يمثل المستقيم (GA) في المثلث CGD ؟

السؤال السادس :

نزود المستوي بمعلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ونتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما

العددان العقديان $a=4$ و $b=4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ على الترتيب ، وليكن C منتصف $[AB]$:

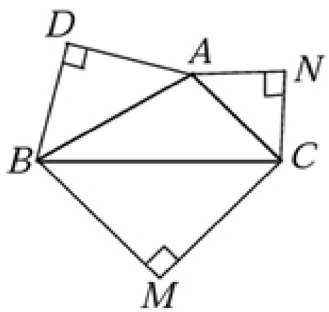
1) ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة المثلث OAB ثم استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OC})$.

2) جد بالشكل الجبري العدد العقدي c الممثل للنقطة C وتيقن أن $|c|=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

ثم اكتب c بالشكل المثلثي .

3) استنتج مما سبق أن $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

السؤال السابع :



نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً .

ننشئ خارجه النقاط D و M و N التي تجعل المثلثات

DBA و MCB و NAC قائمة في D و M و N بالترتيب

ومتساوية الساقين ومباشرة .

بفرض a و b و c و d و m و n الأعداد العقدية الممثلة بالترتيب للنقاط A و B و C و D و M و N

1) إذا كانت $F'(z')$ صورة $F(z)$ وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول $\Omega(\omega)$ فأثبت أن :

$$\omega=\frac{1}{2}[(1-i)z+(1+i)z']$$

2) اكتب d بدلالة a و b ، واكتب m بدلالة b و c ، واكتب n بدلالة c و a .

3) استنتج أن للمثلثين ABC و DMN مركز الثقل ذاته .

4) نختر معلماً مباشراً متجانساً مبدؤه النقطة A :

1 – أثبت أن المستقيمين (AM) و (DN) متعامدان ، واستنتج أن $AM=DN$.

2 – نفترض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(M,2),(N,1),(D,1)$ ، جد $\frac{b}{c}$.

(انتهت الأسئلة)

البحث السادس

التحليل التوافقي

المضروب $n!$

- $n! = n(n-2)\ldots\times 1$
- $n! = n(n-1)!$
  $= n(n-1)(n-2)!$
  $= \ldots$
- $0! = 1$
  $1! = 1$

عدد تباديل مجموعة مؤلفة من n عنصراً هو $n!$

التراتيب P_n^r $n \geq r$

- $P_n^r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots}_{r \text{ مرة}}$
- $P_n^n = n!$
- $P_n^1 = n$

★ لاختيار r عنصراً <u>مختلفاً</u> من مجموعة تحوي n عنصراً (اليوم الأهمية لترتيب العناصر المختارة)
نستخدم P_n^r التراتيب

★ لتوزيع أو (ترتيب) r عنصراً <u>مختلفاً</u> على n مكاناً نستخدم P_n^r

التوافيق $\binom{n}{r}$ $n \geq r$

- $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$
- $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ قاعدة في حل المسائل دائماً ضرورية
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{r_2} \Rightarrow$ إما $r_1 = r_2$ أو $r_1 + r_2 = n$

لاختيار r عنصراً من مجموعة تحوي n عنصراً (لا نهتم بأهمية لترتيب العناصر المختارة)
نستخدم التوافيق: $\binom{n}{r}$

7

مفكوك ذو الحدين

$$(a\mp b)^n=\underbrace{\binom{n}{0}a^n\cdot b^0}_{a^n}\mp\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2\mp\cdots\cdots+\underbrace{\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r}_{t_r \text{ الحد ذو الدليل } r}+\cdots\cdots+\underbrace{\binom{n}{n}a^0\cdot b^n}_{b^n}$$

نتائج

- عدد الحدود $n+1$ والحد الاول a^n والاخير b^n
- الحد ذو الدليل r يعطى بالعلاقة $t_r=\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$

وفي حالة $(a-b)^n$ عندئذٍ $t_r=\binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r(-1)^r$

تنبيهات هامة

هام جداً

- اذا طلب الحد الذي يحوي X^9 نوجد t_r ثم نعوض الحد الذي يحوي X^9 يحقق الأس يساوي 9 نحل المعادلة نوجد r ثم نحسب الحد t_r
- اذا طلب الحد الثابت (المستقل عن X) نحل بنفس الطريقة ونعوض الأس يساوي الصفر نوجد r ثم t_r

انتبه ((n و r عددان طبيعيان))

قوى النسب المثلثية $\sin^n x$, $\cos^n x$

أويلر

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x$$

$$e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x$$

الـ

لإيجاد $\sin^n x$ أو $\cos^n x$ نستخدم دستورا أويلر لـ $\sin$ أو $\cos$ ثم نوجد $\sin^n x$ أو $\cos^n x$

ورقة عمل في الوحدة السادسة (التحليل التوافقي)

السؤال الأول : لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ بفرض عدم التكرار:

1) كم عدد مكونا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينها من الأرقام السابقة.
2) كم عدداً منها أقل من 400 ومكون من ثلاثة أرقام مختلفة
3) كم عدداً منها زوجيا ومكون من ثلاثة أرقام مختلفة
4) كم عدداً منها مضاعفا للعدد 5 ومكون من ثلاثة أرقام مختلفة
5) كم عدداً منها ليس من مضاعفات العدد 5 وأقل من 400 ومكون من ثلاثة أرقام مختلفة.

السؤال الثاني : أوجد قيمة n في الحالات الآتية :

1) $P_{n}^{4} = 42\, P(n, 2)$ 2) $2P_{n}^{2} + 50 = P(2n, 2)$ 3) $\binom{n}{4} = \frac{1}{4} P_{n}^{3}$

السؤال الثالث : أثبت أن : $\dfrac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}$

السؤال الرابع : أراد طالب شراء 3 قصص وقلمين فإذا وجد في المكتبة 10 قصص و8 أقلام بكم طريقة يمكن شراء ما يلزمه.

السؤال الخامس : تتألف جمعية من ست أعضاء بينهم شخص معين اسمه ليث نريد أن ننتخب مجلسا مؤلفا من مدير وأمين سر ومحاسب فبكم طريقة يمكن أن يتم الانتخاب على أن يكون ليث من بين الأشخاص المنتخبين.

السؤال السادس : نريد انتخاب لجنة مؤلفة من خمسة أشخاص يتم اختيارهم من بين 12 رجل و8 نساء بكم طريقة يمكن إجراء هذا الانتخاب إذا كانت اللجنة مؤلفة على الأقل من ثلاثة رجال وامرأة

السؤال السابع : على طالب أن يجيب عن 8 أسئلة يختارها من 10 أسئلة :

1) بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة
2) بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية.
3) بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة الثمانية إذا كان عليه أن يجيب عن أربعة أسئلة على الأقل من الأسئلة الستة الأولى.

انتهت الأسئلة

البحث السابع

الاحتمالات

① العمليات على الاحداث

- $A\cap B$: A تقاطع B تعني وقوع A و B معاً
- $A\cup B$: A اتحاد B تعني وقوع احد الحدثين على الأقل
- A' : متمم A يعني عدم وقوع الحدث A

② قانون الاحتمال

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$n(A)$ ← عدد الحالات الموافقة

$n(\Omega)$ ← عدد الحالات الكلية

دي مورغان:

$(A\cup B)' = A'\cap B'$

$(A\cap B)' = A'\cup B'$

$0 \le P(A) \le 1$

$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$P(A') = 1 - P(A)$

③ الاستقلال الاحتمالي

يكون الحدثان A و B مستقلان احتمالياً اذا تحقق الشرط

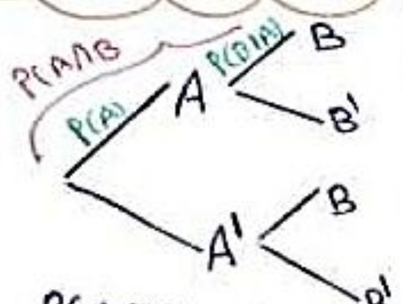
$$P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$$

④ الاحتمال المشروط والمخطط الشجري

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{?}{?}$$

((احتمال A شرط B))

⑤ المخطط الشجري



★ $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$

!!!

ملاحظة ①

$P(B|A)$ نوجده مباشرة من المخطط الشجري

$P(A|B)$ نكتب القانون ثم نعوض فيه

ملاحظة ②

في مسائل سحب الكرات أو البطاقات

- معاً (توافيق)
- تتالي دون اعادة (توافيق)
- تتالي مع اعادة ((برنولي))

المتحول العشوائي

قيم المتحول X

$$\boxed{X = \{X_1, X_2, X_3 \cdots X_i\}}$$

قانون الاحتمالي

- $P(X = X_1) = \cdots$
- $P(X = X_2) = \cdots$
- $\vdots$
- $P(X = X_i) = \cdots$

X_i	X_1	X_2	$\cdots$	X_i
$P(X_i)$	$P(X_1)$	$P(X_2)$	$\cdots$	$P(X_i)$
$X_i P(X_i)$	$X_1 P(X_1)$	$X_2 P(X_2)$	$\cdots$	$X_i P(X_i)$

التوقع الرياضي

$$\boxed{E(x) = \sum X_i P(X_i)}$$

التباين

$$\boxed{V(x) = E(X^2) - (E(x))^2}$$

الانحراف المعياري

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(x)}}$$

المتحولات العشوائيات المستقلات

اذا كان المتحول X والمتحول Y عندئذ جدول القانون الاحتمالي لزوج المتحولين (X, Y) هو:

$X \backslash Y$	Y_1	X_2	$\cdots$	Y_j	قانون X
X_1	$P(X_1 \cap Y_1)$	$P(X_1 \cap Y_2)$	$\cdots$	$P(X_1 \cap Y_j)$	$P(X_1)$
X_2	$P(X_2 \cap Y_1)$	$P(X_2 \cap Y_2)$	$\cdots$	$P(X_2 \cap Y_j)$	$P(X_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
X_i	$P(X_i \cap Y_1)$	$P(X_i \cap Y_2)$	$\cdots$	$P(X_i \cap Y_j)$	$P(X_i)$
قانون Y	$P(Y_1)$	$P(Y_2)$	$\cdots$	$P(Y_j)$	1

يكون المتولان X و Y مستقلان احتمالية اذا تحقق الشرط

$$P(X_i) \cdot P(Y_j) = P(X_i \cap Y_j)$$

التجارب البرنولية

اذا كانت التجربة تتكرر n مرة ونريد ايجاد وقوع حدث ما k مرة فالتجربة برنولية

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

حيث

- n عدد مرات تكرار التجربة
- K عدد المرات المطلوبة
- P احتمال وقوع الحدث في المرة الواحدة
- q متمم لـ P $q = 1 - P$

التوقع الرياضي

$$\boxed{E(x) = n \cdot P}$$

التباين

$$\boxed{V(x) = n \cdot P \cdot q}$$

الانحراف المعياري

$$\boxed{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}$$

(دورة ٢٠١٣) يحوي صندوق 7 بطاقات متماثلة تحمل الأرقام 1,2,2,3,3,3,3 نسحب من الصندوق عشوائيا بطاقتين على التتالي مع إعادة البطاقة المسحوبة

١-إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين يساوي 4 ما احتمال أن يكون رقم إحدى البطاقتين المسحوبتين يساوي 1 .

٢-ليكن X متغيرا عشوائيا يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين ، احسب توقعه الرياضي .

(دورة ثانية ٢٠١٣) يحوي صندوق 6 بطاقات متماثلة تحمل الأرقام 2,2,3,3,3,4 نسحب من الصندوق عشوائيا بطاقتين على التتالي مع إعادة البطاقة المسحوبة

١-إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين يساوي 6 ما احتمال أن يكون للبطاقتين المسحوبتين الرقم ذاته

٢-ليكن X متغيرا عشوائيا يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين احسب توقعه الرياضي .

(دورة ٢٠١٤) يحوي صندوق 5 بطاقات متماثلة تماما مرقمة بالأرقام 0,1,1,2,2 نسحب من الصندوق عشوائيا ثلاث بطاقات على التتالي دون إعادة ، وليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة احسب توقعه الرياضي

(دورة ٢٠١٥) يحوي مغلف 5بطاقات متماثلة تماما مرقمة بالأرقام 0,0,1,1,1 نسحب من المغلف عشوائيا ثلاث بطاقات على التتالي مع إعادة ، وليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام البطاقات المسحوبة ، احسب توقعه الرياضي .

(دورة ٢٠١٥) ليكن n عددا طبيعيا $2 \leq n \leq 8$

١-يحوي صندوق على كرات متماثلة 3 كرات بيضاء و n كرة حمراء ، نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة ولنفترض أن الحدث A إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل حمراء ، والحدث B الكرتان المسحوبتان من لون واحد ، بحيث $P(A|B) = \frac{2}{3}$ والمطلوب احسب قيمة n .

٢-بفرض أن $n = 4$ ، ليكن X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي .

(دورة ٢٠١٦) صندوقان متماثلان ، أحدهما I يحوي n كرة حمراء وكرتين بيض والآخر II يحوي كرتين بيض وكرة حمراء ، اختير أحد الصندوقين عشوائيا وسحبت منه كرة واحدة فقط وليكن الحدث A حدث الحصول على كرة حمراء والحدث B حدث اختيار الصندوق II والمطلوب :

١-احسب n إذا علمت أن $P(B|A) = \frac{2}{5}$

٢-بفرض أن $n = 4$ ، ليكن X متحول عشوائي الذي يأخذ القيمة (2) عند سحب كرة حمراء ويأخذ القيمة (3) عند سحب كرة بيضاء ، اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي .

(دورة ٢٠١٦) صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة ، الصندوق I يحوي ثلاث كرات مرقمة بالأرقام 1,1,2

والصندوق II يحوي أربع كرات مرقمة بالأرقام 1,2,2,3 والمطلوب :

نختار أحد الصندوقين عشوائيا ونسحب منه كرتين معا فإذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين فردي احسب احتمال أن تكون الكرتان سحبتا من الصندوق I

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق I ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق II ليكن X متحول عشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوقين اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واحسب توقعه

(دورة ٢٠١٧) نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية ، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$ ليكن X متحول عشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار احسب توقعه الرياضي وتباينه

(دورة ٢٠١٧) يحوي مغلف 5بطاقات متماثلة ومرقمة بالأرقام 1,1,1,2,2 سحبت من المغلف عشوائيا ثلاث بطاقات معا ، وليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام البطاقات الثلاث المسحوبة ، اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X احسب توقعه الرياضي .

أسئلة دورات في الاحتمالات

(دورة ١٩٨٨) صندوق يحوي 4 كرات بيضاء، 3 كرات حمراء (الكرات متماثلة إلا في لونها) سحبت من الصندوق كرتان عشوائيا ودون إعادة والمطلوب :

١- ما احتمال كون الكرتان المسحوبتان من اللون ذاته .

٢- إذا فرضنا X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة احسب توقعه الرياضي

(دورة ١٩٨٩) يحوي كيس 8 بطاقات مرقمة كما يلي 8,7,6,5,4,3,2,1 سحبت من هذا الكيس بطاقتان معا عشوائيا والمطلوب :

١- ما احتمال أن تكون إحدى البطاقتين المسحوبتين تحمل الرقم 5.

٢- إذا كان مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أكبر تماما من (10) فما احتمال أن تحمل إحداها الرقم (5).

(دورة ١٩٩٠) يحتوي صندوق على كرتين حمراوين و 4 كرات بيضاء ، نسحب من الصندوق 3 كرات عشوائيا ودون إعادة ، فإذا كان X متحول عشوائي دال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة احسب توقعه

(دورة ١٩٩٤) في فضاء احتمالي A,B حدثان فيه ، إذا علمت أن

$$P(A) = \frac{1}{2} \ , \ P(B) = \frac{1}{3} \ , P(A \cup B) = \frac{7}{12}$$

فاحسب $P(A \cap B)$, $P_B(A)$, $P(A' \cap B')$

(دورة ١٩٩٨) يحتوي صندوق على كرتين حمراوين وثلاث كرات بيضاء نسحب عشوائيا منه وعلى التتابع ثلاث كرات مع الإعادة فإذا كان X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة احسب توقعه

(دورة ١٩٩٩) يحتوي صندوق على (8) بطاقات مرقمة كما يلي : 3,3,3,3,2,2,0,0 نسحب عشوائيا بطاقتين على التتابع دون إعادة :

١- إذا علمنا أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين أكبر تماما من 4 ، فما احتمال أن يكون مجموعهما زوجيا ؟

٢- نفرض X متحولا عشوائيا حقيقيا يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين اكتب قيم X وأوجد جدول قانونه الاحتمالي احسب التوقع الرياضي له .

(دورة ٢٠٠٢) تسع بطاقات متماثلة ، على n منها كتب الرقم 3 $(n \geq 4)$ وكتب على باقي البطاقات الرقم (5) سحب منها بطاقتان عشوائيا :

١- إذا علمت أن احتمال سحب بطاقتين تحملان الرقم ذاته يساوي $\frac{1}{2}$ احسب n .

٢- نفرض n =6 والمتحول العشوائي X يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين احسب توقعه

(دورة ٢٠٠٧) ليكن الحدثان x, y من الفضاء الاحتمالي : $p(x) = \frac{1}{3} \ , p(y) = \frac{1}{4}$, $p(x \cup y) = \frac{5}{12}$ هل الحدثان x, y مستقلان؟ علل ثم أوجد $p_{x'}(y)$ ، $p_{y'}(x')$.

(دورة ٢٠٠٨) يحوي صندوق (6) كرات متماثلة (4 حمراء ، 2 بيضاء) نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة . نعرف متغير عشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة .احسب توقعه

(دورة ٢٠١٠) يحتوي صندوق 9 كرات متماثلة (2 حمراء) و (3 بيضاء) و (4 زرقاء) نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة والمطلوب :

١- ما احتمال كون الكرتان من لونين مختلفين .

٢- نعطي للكرة الحمراء القيمة (0) والكرة البيضاء القيمة (1) والكرة الزرقاء القيمة (2) وليكن X متغيرا عشوائيا يدل على مجموع القيم الناتجة من سحب الكرتين ، احسب توقعه.

(دورة إضافية ٢٠١١) يحوي صندوق 6 بطاقات تحمل الأرقام 1,1,2,2,3,3 نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي دون إعادة ، ليكن X متغيرا عشوائيا يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين احسب توقعه.

(دورة ٢٠١٢) يحوي مغلف 7 بطاقات مرقمة بالأرقام 1,2,3,4,5,6,7 نسحب عشوائيا من المغلف بطاقتين معا ، فإذا علمت أن رقم إحدى البطاقتين المسحوبتين زوجيا فما احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين عددا زوجيا ؟

السؤال الاول : حل التمارين التالية :

التمرين الأول : لتكن الاحتمالات التالية : (*اختياري*)

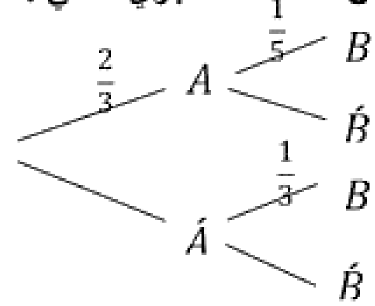
$$P(A)=\frac{1}{2}\quad ,P(B)=\frac{1}{3}\quad ,P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

احسب $P(\acute{A})\,,P(\acute{B})\,,P(A\cup B)\,,P(A\setminus B)$

$$P(A\cap\acute{B})\,,P(\acute{A}\cap\acute{B})\,,P(\acute{A}\cup\acute{B})$$

التمرين الثاني : في مكتبة نسبة شراء الأقلام 40% و نسبة شراء الدفاتر 50% ، و نسبة شراء الأقلام و الدفاتر معاً 20% ، هل الحدثان (شراء الأقلام و شراء الدفاتر) مستقلان احتمالياً ؟

التمرين الثالث : ليكن المخطط الشجري التالي :



١- احسب : $P(\acute{A}), P(\acute{B}|A)\,, P(\acute{B}|\acute{A})$ ؟

٢- استنتج كلاً من

$$P(A\cap B)\,,P(A\cap\acute{B})\,,P(\acute{A}\cap B),P(\acute{A}\cap\acute{B})$$

التمرين الرابع : نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات التالية

بأحد العددين $+2$ و -2 :

١- احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً 0؟

٢- احسب احتمال ألا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين ؟

السؤال الثاني : حل التمارين التالية :

التمرين الأول : في صندوق (كرتان زرقاوان و خمس كرات خضراء و ثلاث كرات حمراء) :

نسحب عشوائياً من الصندوق كرتين دون اعادة :

١) إذا علمت أن الكرات المسحوبة من نفس اللون ، فما احتمال أن تكونان حمراوين ؟

٢) إذا كانت الكرات احداها خضراء ، فما احتمال أن تكون الأخرى حمراء ؟

التمرين الثاني : في مغلف 6 بطاقات مرقمة :

3	2	2	2	1	1

نسحب من المغلف بطاقتين معاً :

X محول عشوائي يدل على مجموع البطاقتين المسحوبتين .

١. ما هي قيم المتحول X ؟

٢. اكتب جدول قانونه الاحتمالي و احسب توقعه و تباينه و انحرافه المعياري ؟

التمرين الثالث : نلقي قطعة نقود 5 مرات متتالية ، فما احتمال ظهور الوجه H أربع مرات ؟

التمرين الرابع : نلقي حجر نرد مثالي أربع مرات متتالية ، ليكن A حدث ظهور عدد فردي مرتين على الأقل ، احسب احتمال A ؟

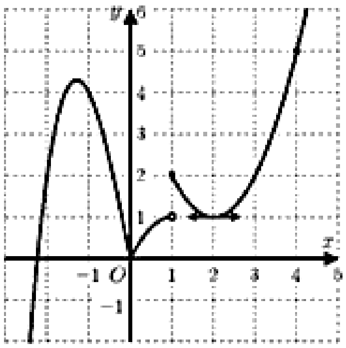
عيّن الحد المختلف عن x في منشور ذي الحدين

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ ؛ ما هي أمثال x^3 في هذه المنشور؟

الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية　　　　　　　　　　الدرجة العظمى: ستمئة
المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية　　　　　　　　　　المدة: ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية. (40° لكل سؤال)



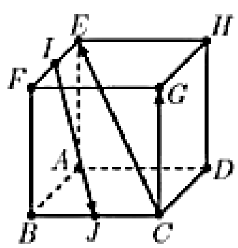
السؤال الأول. نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=5$؟
2) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 5$؟
3) هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع. علل ذلك؟
4) ما عدد القيم الحدية للتابع f؟
5) ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x=2$؟
6) أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x=1$؟

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$					$\frac{16}{81}$

السؤال الثاني. ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية. الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X.

1) ما عدد الاختبارات في التجربة؟
2) أكمل الجدول المجاور.
3) ما التوقع الرياضي والتباين للمتحول العشوائي X؟



السؤال الثالث. في الشكل المجاور مكعب. I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$.

1) أثبت أن $2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$.
2) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً.

السؤال الرابع: حل المعادلة: $4^{x}=5^{x+1}$.

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية. (60° لكل تمرين)

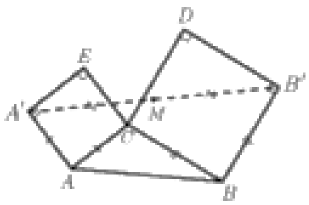
التمرين الأول.

1) ليكن g التابع المعرف على $I=]-1,+\infty[$ وفق العلاقة $g(x)=\ln(\sqrt{x+1})$.
احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(\sqrt{x+1})-\ln\sqrt{2}}{x-1}$.

2) احسب نهاية التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-2}$ عند $+\infty$.

التمرين الثاني. لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0=4$ و $x_{n+1}=\dfrac{3}{4}x_n+2$ في حالة $n\geq 0$.

1) نعرّف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n=x_n-8$.
أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية. واكتب y_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.



التمرين الثالث. ليكن المثلث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشكل المجاور.
تمثّل الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'.

1) B' هي صورة C وفق دوران مركزه B، عيّنه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b, c.

2) أثبت أنّ $a' = i(c-a) + a$.

التمرين الرابع. أثبت صحة المساواة $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$، ثم احسب $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^2 x \, dx$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين. (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى. ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = xe^{-x}$.

1) أوجد نهاية التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$، أوجد $f'(x)$، ادرس اطراده ونظم جدولاً به وعين قيمته الحدية، ثم ارسم (C).

2) احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

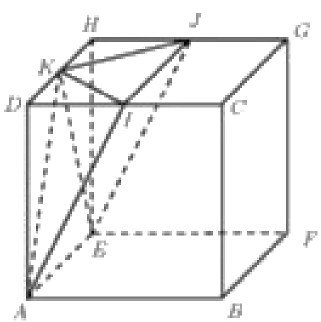
3) بيّن أنّه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0, e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلّين مختلفين.

4) لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان الدليل n.

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة. ثُمّ بيّن تقاربها واحسب نهايتها.

المسألة الثانية. نتأمّل مكعباً $ABCDEFGH$. لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب. نتخذ $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ.



1) أوجد احداثيات النقاط A, I, E.

2) اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.

3) احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ و حجم الهرم $KAIJE$.

4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K.

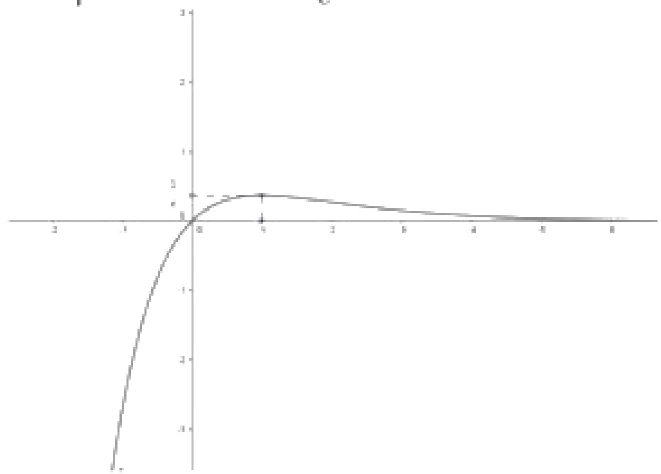
5) احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.

6) أثبت أنّ N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha), (I,\beta), (E,\gamma)$ حيث α و β و γ هي أثقال يطلب تعيينها.

انتهت الأسئلة

السؤال	الخطوة	الحل	الدرجة	ملاحظات
الأول	1	عدد حلول المعادلة $f(x)=5$: حل وحيد	5	
	2	مجموعة حلول المتراجحة $[4,+\infty[$	5	
	3	$f(1)$ قيمة كبرى محلية، لأنه يوجد جوار I يحقق أياً كان x ينتمي إلى $I\cap\mathbb{R}$ فإن $f(x)\leq f(1)$	5+5	
	4	عدد القيم الحدية المحلية : أربعة	5	
	5	قيمة المشتق تساوي الصفر	5	
	6	غير اشتقاقي عند $x=1$.غير مستمر عند $x=1$	5+5	
المجموع			40	
الثاني	1	عدد الاختبارات $n=4$	5	
	2	من الجدول $p^4=\frac{16}{81}$ ومنه $p=\frac{2}{3}$	5	
	3	$\begin{array}{c\|ccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \mathbb{P}(X=k) & \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} \end{array}$ أو كتب $\mathbb{P}(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$	4×5	
	4	$\mathbb{V}(X)=npq=\frac{8}{9},\ \mathbb{E}(X)=np=\frac{8}{3}$	3+2 3+2	
المجموع			40	
الثالث	1	$2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$	5+5+5	
	2	$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CJ}$	5	
	3	$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}-2\overrightarrow{CE}$	5+5	
	4	$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ (فهي مرتبطة خطياً)	5+5	
المجموع			40	
الرابع		$\ln 4^x=\ln 5^{x+1}$	10	
		$x\ln 4=(x+1)\ln 5$	5+5	
		$x\ln 4-x\ln 5=\ln 5$	5	
		$x\ln\frac{4}{5}=\ln 5$	5+5	
		$x=\frac{\ln 5}{\ln(0.8)}$	5	
		أو $\left(\frac{4}{5}\right)^x=5\leftarrow x\ln(0.8)=\ln 5\leftarrow x=\frac{\ln 5}{\ln(0.8)}$	40	
المجموع			40	

ثانياً التمرين الأول		$g(1)=\ln\sqrt{2}$ ، $g'(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}$ ، $g'(1)=\dfrac{1}{4}$	2 + 10 + 3	
		$f(x)=\dfrac{\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{2}}{x-1}=\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$	5	
		$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\dfrac{1}{4}$	5 + 5	
		$-1\le\sin x\le+1$	5	
		$2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$	5	
		في حالة $x>2$ يكون $\dfrac{2x-1}{x-2}\le\dfrac{2x+\sin x}{x-2}\le\dfrac{2x+1}{x-2}$	5	
		$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x-2}=2$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-2}=2$	5 + 5	
		إذن $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x-2}=2$	5	
المجموع			60	
الثاني		نحسب y_{n+1}	5	
		$y_{n+1}=x_{n+1}-8=\dfrac{3}{4}x_n-6$ $=\dfrac{3}{4}(x_n-8)=\dfrac{3}{4}x_n$	5 + 5 5 + 5	
		$(y_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{4}$ و $y_0=-4$ و $y_n=-4(\dfrac{3}{4})^n$	5 + 2 + 5	
		$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ لأن أساسها $-1<\dfrac{3}{4}<1$	5 + 5	
		$x_n=y_n+8$ وبالتالي $x_n=-4(\dfrac{3}{4})^n+8$	5 + 3	
		$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=8$	5	
المجموع			60	
الثالث		$b'-b=e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-b)$ ومنه $b'=-i(c-b)+b$	5 + 10 5 + 5 5	10 دستور 5 زاوية دوران + 5 تعويض + 5تعويض $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ب $-i$ + 5

<table>
<tr><td></td><td>$5+5$</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$</td><td></td><td>ثالثا
الاول</td></tr>
<tr><td></td><td>5
5
$3+3$
$3+3$
$+5$
5
+ النقطة
2
المساعدة
$3+3$
$3+3$
$5+5$
$5+5$</td><td>$f'(x)=(1-x)e^{-x}$
جدول تغيرات f :
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & \frac{1}{e} & \searrow & 0 \end{array}$$

$u=x \quad , \quad v'=e^{-x}$
$u'=1 \quad , \quad v=-e^{-x}$
$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=-\frac{2}{e}+1$$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
$3+3$

$3+3$

3
3
$3+3$</td><td>الخاصة المطلوب إثباتها $0<u_n\leq 1$ من أجل كل عدد طبيعي n
طريقة 1: نلاحظ أن f متزايد تماماً على $I=[0,1]$ ومنه
$$f(I)=\left[0,\frac{1}{e}\right]\subset[0,1]=I$$
ولأن $u_0\in I$ فجميع حدود المتتالية تنتمي إلى I والخاصة $0<u_n\leq 1$ محققة أياً كانت n.
طريقة 2:
• لتكن $E(n)$ الخاصة $0<u_n\leq 1$.
• في حالة $n=0$ لدينا $0<u_0=1\leq 1$ إذن $E(0)$ محققة.
• نفترض صحة $E(n)$ أي $0<u_n\leq 1$. ولكن f متزايد تماماً على</td><td></td><td></td></tr>
</table>

		المجال $[0,1]$ وبالتالي $f(0) < f(u_n) \leq f(1)$ أي $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{e} \leq 1$ والخاصة $E(n+1)$ صحيحة فالمتراجحة صحيحة أياً كانت $n \in \mathbb{N}$.		
	3 3 3 3 12	• لتكن $E(n)$ الخاصة $u_{n+1} < u_n$. • في حالة $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = \frac{1}{e} < 1$ إذن $E(0)$ محققة. • نفترض صحة $E(n)$ أي $u_{n+1} \leq u_n$. f متزايد على $[0,1]$ إذن $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ والخاصة $E(n+1)$ محققة. إذن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة. طريقة ثانية: حدود المتتالية موجبة تماماً و $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ فالمتتالية متناقصة تماماً.		
	100			المجموع
	$5+5+5$ 5 $5+5$ $5+5$	احداثيات النقاط $A(0,0,0), I(\frac{1}{2},0,1), E(0,1,0)$ معادلة مستوي مار من A هي من الشكل $ax+by+cz=0$ نعوض إحداثيات I, E نجد $b=0$ ، $\frac{1}{2}a+c=0$ وبالتالي باختيار $a=2$ نكون $c=-1$ ومعادلة المستوي $2x-z=0$		الثاني
5 احداثيات k	5 5 5 5	h بُعد K عن المستوي $AIJE$ احداثيات k هي $(0,\frac{1}{2},1)$ $h = \frac{\left\|1\times 0 + 0\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times 1\right\|}{\sqrt{1^2+0+(-\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ حساب مساحة $AEJI$ لدينا $AI = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ وبالتالي مساحة $AEJI = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ وبالتالي $V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$		
	4	$\vec{u}(2,0,-1)$ شعاع ناظم على المستوي		

الجمهورية العربية السورية

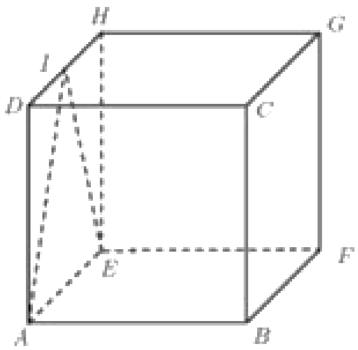
وزارة التربية — الدرجة العظمى: ستمئة

2

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية — المدة: ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية. (40° لكل سؤال)



السؤال الأول. نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1. مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$: حيث I هي منتصف $[DH]$.

1) أعط إحداثيات النقاط I و E و A.

2) جدْ إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI.

3) أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$؟

4) احسب $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IE}$.

السؤال الثاني. ليكن f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x+1}$.

1) جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$، أياً يكن x من D.

2) احسب $I=\int_0^2 f(x)\,dx$.

السؤال الثالث. ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

اثبت أنّ $\dfrac{w\overline{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت.

السؤال الرابع. احسب مشتق التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{1-\sin x}$.

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية. (60° لكل تمرين)

التمرين الأول. ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$.

1) ما نهاية التابع f عند $-\infty$؟

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثمّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

التمرين الثاني. لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة $x_0=5$ و $x_{n+1}=\dfrac{6}{5}x_n+\dfrac{4}{5}$.

1) احسب x_1,x_2,x_3، ثم ادرس اطراد المتتالية.

2) نعرّف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n=x_n+4$. أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية.

3) اكتب y_n بدلالة n. ثم احسب $y_2+y_3+\cdots+y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\dfrac{6}{5}$.

تابع في الصفحة الثانية.

التمرين الثالث. في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$.

1) أثبت أنّ المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها.

2) اكتب معادلةً للمستوي Q العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B .

التمرين الرابع. يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء. نسحب عشوائياً معاً كرتين من الصندوق. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثّل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

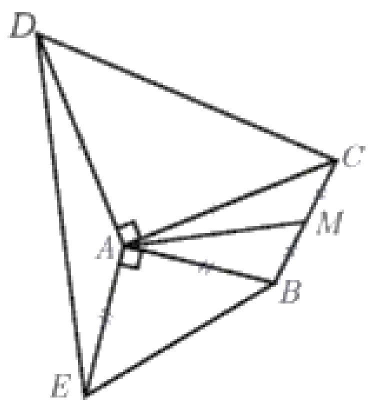
1) ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

2) احسب كلاً من $\mathbb{P}(X=1)$ و $\mathbb{P}(X=3)$ ثم استنتج قيمة $\mathbb{P}(X=2)$.

3) احسب توقّع X وانحرافه المعياري.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين. ($100°$ لكل مسألة)

المسألة الأولى.



نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً. لتكن M منتصف $[AC]$، وليكن AEB و ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين. نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A . ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C.

1) احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية e و d و m المُمثّلة للنقاط E و C و M بالترتيب.

2) احسب $\dfrac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أنّ (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأنّ $ED=2AM$.

3) نفترض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2),(E,3),(C,1),\ (B,1)$.

- احسب $\dfrac{c}{b}$. ثم استنتج قياس الزاوية BAC .

المسألة الثانية.

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$.

1) احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f .

2) أوجد $f'(x)$ ثم ادرس إشارة المشتق ثم نظّم جدولاً بتغيرات التابع f .

3) ارسم الخط C في معلم متجانس.

4) لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n=f(n)$ نضع $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. أثبت أنّ $S_n=\ln\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$.

انتهت الأسئلة

الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

الدرجة العظمى: ستمئة

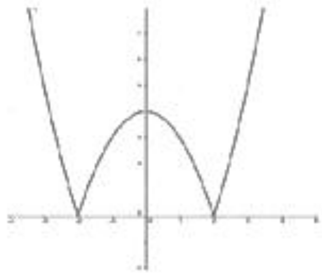
المدة: ثلاث ساعات

3

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً . أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول. تجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$.والمطلوب



1) كم حلا للمعادلة $f(x) = 2$.
2) احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر.
3) عين صورة المجال $I = \left[-2,2\right]$ وفق f .
4) كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f .

السؤال الثاني. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية : $-\ln(x+1) + \ln x = \ln(x-1)$.

السؤال الثالث. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$.

السؤال الرابع. ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{x}{y}\right)^8$ ؟

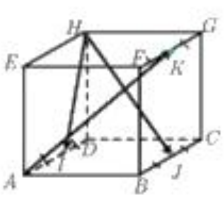
ثانياً. حل التمرينات الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. إذا كان $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2} + \dfrac{1}{2}$ أياً يكن x من $\mathbb{R}^*$. أوجد نهاية التابع f عند الصفر.

التمرين الثاني. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2-u_n}$.

1. أثبت أنّ $0 < u_n < 1$ أياً كانت n من $\mathbb{N}$.
2. نعرّف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n .
3. اكتب u_n بدلالة n ، واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

التمرين الثالث. $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$



1. باختيار معلم متجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$.
2. أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة : $\overrightarrow{AK} = a\,\overrightarrow{HI} + b\,\overrightarrow{HJ}$
ثمّ استنتج أنّ الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً .

التمرين الرابع. عيّن العددين z_1 و z_2 حيث $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = -3 + i2\sqrt{3} \end{cases}$.

تابع في الصفحة الثانية.

5 علامة

ثالثاً. حل المسألتين الآتيتين : (90 درجة للأولى و 110 للثانية)

المسألة الأولى. صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الاقل والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل احسب الاحتمالات التالية:

1) A ، B ، $A \mid B$

2) إذا كان X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه

المسألة الثانية. ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ خطه البياني C .

1. أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه.

2. ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها. وبيّن أنّه يبلغ قيمة حدية محلية عيّنها وبيّن نوعها.

3. استنتج أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمزه بالرمز α أثبت أنّ $1 < \alpha < 2$.

4 ارسم المقارب المائل ثمّ ارسم C، واحسب مساحة المطح المحصور بين C والمستقيمات التي معادلاتها

$y = x - 2$ و $x = \ln 2$ و $x = \ln 3$

الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية — الدرجة العظمى: ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية — المدة: ثلاث ساعات

4

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً أجب عن الأسئلة الاربعة الآتية. (40° لكل سؤال)

السؤال الأول . نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

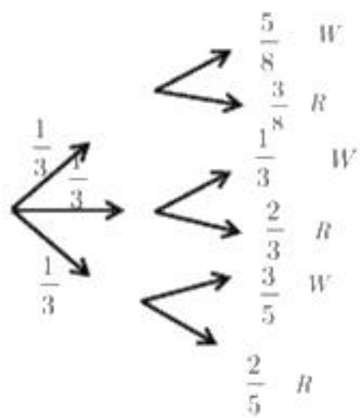
2) ما عدد القيم الحدية محلياً.

3) اكتب معادلة مماس منحن التابع عند نقطة فاصلتها $x=1$.

السؤال الثاني . حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z^2=1+i2\sqrt{2}$

السؤال الثالث : ليكن التابع f المعرف على $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عين A ليكون $x>A$ ليكون $f(x)$ من المجال $[1.95,2.05]$



السؤال الرابع: في المخطط الشجري المرسوم جانباً، الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R على الكرات الحمراء حيث يتم اختيار عشوائياً كرة واحدة

1) ماالاحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء

2) إذاكانت الكرة المسحوبة حمراء فماالاحتمال أن تكون من الصندوق الأول

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية. (240°)

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x+3}$

1- اكتب $f(x)$ بالشكل: $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{x+3}$ وعين قيمة كلاً من a ، b ثم أثبت أن المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

2- احسب $\int_0^2 f(x)\,dx$.

التمرين الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n>0}$، $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$ ، $u_0=e^3$

v_n متتالية معرفة بالشكل: $v_n=\ln(u_n)-2$ والمطلوب :

1) أثبت أن v_n هندسية وعين v_0, q

2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) أثبت أن $\lim u_n=e^2$

التمرين الثالث: $ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من CD تحقق: $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J\in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب:

1) جد احداثيات النقط H,E,J,K,G في المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$

2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً

4) أثبت أن المستقيم HK يوازي (EGJ)

التمرين الرابع: أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحد ين $(x+\frac{1}{x})^8$

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين. (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى:

أولاً: ليكن التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $g(x)=e^x+2-x$

ادرس اطراد التابع g واستنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x)>0$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\frac{(x-1)}{e^x}$

1) أثبت أن $f'(x)=\frac{1}{e^x}g(x)$

2) بين أن للمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $0<\alpha<\frac{1}{2}$

3) أثبت أن المستقيم $\Delta : y=x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

4) ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=0$ ،

$x=1$

المسألة الثانية : في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$, $D(-4,2,1)$ والمطلوب :

1) أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

2) أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

3) احسب بعد النقطة D عن المستوي ABC ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D,ABC)

انتهت الأسئلة

الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية — الدرجة العظمى: ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية — (نموذج5) — المدة: ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية. ($40°$ لكل سؤال)

السؤال الأول.

لتكن $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية عين أساسها واحسب $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

السؤال الثاني.

اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

السؤال الثالث. رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A وأربعة للمؤلف B

1)بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الاولى للمؤلف B

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتابا معينا للمؤلف B في البداية

السؤال الرابع. أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين $\begin{cases} e^x - \dfrac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية. ($60°$ لكل تمرين)

التمرين الأول. ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب

1) احسب $g(\frac{\pi}{4})$ ، $g'(x)$ ، $g'(\frac{\pi}{4})$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

2) احسب مشتق التابع $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

التمرين الثاني. لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq0}$ ، $(x_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق $x_n = \dfrac{4n+5}{n+1}$ و $y_n = \dfrac{4n+1}{n+2}$.

أثبت أن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq0}$ ، $(x_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

التمرين الثالث ليكن كثير الحدود $P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$

1) عين عددين a, b يحققان $P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$

2)**حل في** $\mathbb{C}$ **المعادلة** $P(z) = 0$.

التمرين الرابع:يشتري محل للأدوات الكهربائية 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B .
نعلم أن نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج المصنع A هي 4% وفي انتاج B هي 10%. نسحب عشوائياً مصباحاً.

1)ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

2)اذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من B .

يتبع في الصفحة الثانية

تتمة نموذج 5

$\boxed{\text{ثالثاً}}$ حل المسألتين الآتيتين. (100° لكل مسألة)

المسألة الأولى.

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1) ادرس نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبين اذا كانت له نهاية حقيقية عند $x=-1$.

2)أوجد معادلة مقارب أفقي للخط البياني C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

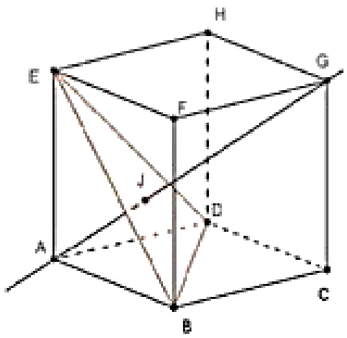
3) احسب $f'(x)$ ونظم جدولا بتغيرات f وعين ماله من قيم حدية محلية.

4) أوجد معادلة المماس في النقطة من C التي فاصلتها $x=-2$.

5) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محوري الإحداثيات والمنحني C والمستقيم $x=3$.

المسألة الثانية. $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3

في المعلم $(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$



1)عين احداثيات النقاط D,B,E,G

2) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AG)

3) أثبت أنّ المستقيم (AG) ناظم للمستوي (EDB)

4) المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين احداثياتها

5) أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله

6)أحسب حجم رباعي الوجوه $AEDB$

انتهت الأسئلة

الجمهورية العربية السورية

وزارة التربية　　　　　نموذج 6　　　　　الدرجة العظمى: ستمئة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية　　　　　المدة: ثلاث ساعات

نموذج امتحان لمادة الرياضيات الصف الثالث الثانوي العلمي (المنهاج الجديد 2017)

أولاً أجب عن الأسئلة الاربعة الآتية.　　(40° لكل سؤال)

السؤال الأول.

نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3 ↗ $+\infty$		‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 3	

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.

2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C؟

3) هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟

4) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

السؤال الثاني.

اكتب العدد العقدي $Z = (1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالشكل الأسي.

السؤال الثالث.

$ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC . جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق

$$\|MB + MD + MC\| = \|3MA - MB - MD - MC\|$$

السؤال الرابع.

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^x$. احسب $f(\ln 2)$ و $f'(\ln 2)$ ثم استنتج $\lim_{x\to\ln 2}\frac{e^x - 2}{x - \ln 2}$.

ثانياً حل التمارين الأربعة الآتية.　　(60° لكل تمرين)

التمرين الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ والمطلوب

1) أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 1$.

2) أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

3) علّل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

التمرين الثاني.

صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً. نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك. عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه.

التمرين الثالث. أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$. (تتمة نموذج 6)

التمرين الرابع. عين مجموعة تعريف التابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$ واحسب نهايته عند الصفر.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين. ($100°$ لكل مسألة)

المسألة الأولى. ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

1) أوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف.

2) ادرس اطراد التابع ونظم جدولا بها.

3) بيّن القيم الحدية المحلية للتابع f. وارسم خطه البياني.

4) استنتج عدد حلول المعادلة $x^2e^{-x}=1$.

5) احسب مساحة السطح المحصور بين C محور الفواصل والمستقيم $y=1$.

المسألة الثانية.

نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب الى معلم متجانس $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً، وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$. وأخيراً لتكن S الكرة مركزها A ونصف قطرها AB.

1) أثبت أنّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي $\mathcal{P}$.

2) جِد معادلة الكرة S.

3) أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S.

4) أثبت أنّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q.

5) ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً: $d:\begin{cases}x=t,\\ y=12-5t, \quad t\in\mathbb{R}\\ z=4-3t,\end{cases}$.

(a) أثبت أنّ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q.

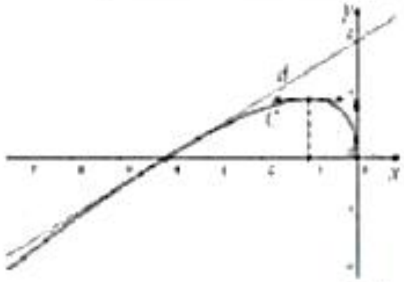
(b) أثبت أنّ المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

انتهت الأسئلة

نموذج امتحان مادة الرياضيات للشهادة الثانوية العامة الفرع العلمي

دورة عام ٢٠١٨

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: ليكن لدينا الشكل المرسوم جانباً C هو الخط البياني لتابع f معرف على $]-\infty,0]$ و d هو مماس للخط C في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل، والمطلوب:

١) نظم جدولاً بتغيرات التابع f .

٢) اكتب معادلة المماس d والمماس الأفقي لـ C ونصف المماس الشاقولي لـ C .

٣) ارسم الخط البياني C' للتابع $g(x) = -f(-x)$.

السؤال الثاني: ليكن لدينا التابع $f : x \mapsto \frac{3x-1}{(x-2)^2}$ ، احسب نهاية f عند 2 ، ثم عين عدداً α يحقق الشرط:

إذا كان x عنصراً من المجال $]2-\alpha , 2+\alpha[$ مختلفاً عن 2 كان $f(x) > 10^3$.

السؤال الثالث: أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) إذا علمت أن $A(3,2,1)$ و $B(0,1,0)$

ثم تمثيلاً وسيطياً لنصف المستقيم $[BA)$.

السؤال الرابع: احسب أمثال x^4 في منشور $(2x + \frac{1}{x})^{10}$.

ثانياً: أجب عن التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{2u_n+6}; n \geq 0 \end{cases}$$

١) أثبت أن التابع $x \mapsto \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n .

٢) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً .

التمرين الثاني: ليكن التابع f المعرف وفق: $f(x) = \sqrt{x^2+4x+1}$

١) احسب نهاية f عند $+\infty$.

٢) أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ وأن نهاية $x \mapsto f(x) - ax$ عند $+\infty$ عدد حقيقي b ،

ثم استنتج وجود مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$.

التمرين الثالث: يتواجه فريقان A و B في لعبة كرة الطائرة مكونة من خمسة أشواط، يكسب الفريق B الشوط الواحد باحتمال يساوي 0.6 ، ويربح الفريق المباراة الذي يكسب أكبر عدد من الأشواط ، ما احتمال أن يربح الفريق A ؟

التمرين الرابع : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1,-1,-2)$ و $B(1,-2,-3)$ و $C(2,0,0)$.

١) برهن أن النقط A و B و C تعين مستو ثم تحقق أن معادلته الديكارتية هي: $x+y-z-2=0$.
٢) ليكن المستويان P و Q معادلتاهما : $P: x-y-2z+5=0$ و $Q: 3x+2y-z+10=0$
ادرس تقاطع المستويات: (ABC) و P و Q .

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : في مجموعة الأعداد العقدية C :

١) المعادلة $z^3-12z^2+48z-128=0$:
١) تحقق أن $z=8$ هو حلاً للمعادلة .
٢) عين الثوابت α و β و γ ليكون : $z^3-12z^2+48z-128=(z-8).(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$ ثم حل المعادلة .

٢) في المستوي العقدي لتعرف النقط A و B و C صور الأعداد $z_A=2-2i\sqrt{3}, z_B=2+2i\sqrt{3}, z_C=8$:

١) اكتب كلاً من الأعداد z_A و z_B و z_C بالشكل الأسي .

٢) أوجد طويلة وزاوية العدد $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC .

٣) أنشئ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقط : $(A,|z_A|)$ ، $(B,|z_B|)$ ، $(C,|z_C|)$.

٤) أوجد مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|$.

المسألة الثانية : ليكن لدينا الخط البياني C للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$:

١) احسب نهاية التابع f عند الصفر و $+\infty$ واستنتج ماله من مقاربات توازي المحورين الإحداثيين ، ثم ادرس وضع C مع مقاربه الأفقي Δ .
٢) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .
٣) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{2},1[$.
٤) باستخدام التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$.
٥) ارسم Δ ثم ارسم C .
٦) احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x=e$ و $x=1$.

------------------------------ انتهت الأسئلة ------------------------------

الجمهورية العربية السورية	مادة الرياضيات للثالث الثانوي العلمي	اسم الطالب :
وزارة التربية		المدة : ثلاث ساعات
	دورة ٢٠١٧-٢٠١٨	الدرجة : ٦٠٠ درجة

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة التالية (٤٠ درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد فيما يأتي جدولاً لتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	1 ‖ -2	$-$	
$f(x)$	1	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘	-3

١) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C .

٢) هل يوجد مقاربات مائلة للخط C ؟

٣) هل يمكنك رسم مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه ؟

٤) هل f اشتقاقي عند 3 ؟

٥) عين القيم الحدية للتابع f .

السؤال الثاني : لتكن النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد العقدية $a=3+5i, b=3-5i, c=7+3i$

بين أن: $\frac{b-c}{a-c}=2i$ ، ثم استنتج أن ABC قائم الزاوية و $BC=2AC$.

السؤال الثالث : عين في منشور $(x^2-\frac{2}{x})^{12}$ الحد الذي يحوي x^{12} والحد المستقل عن x .

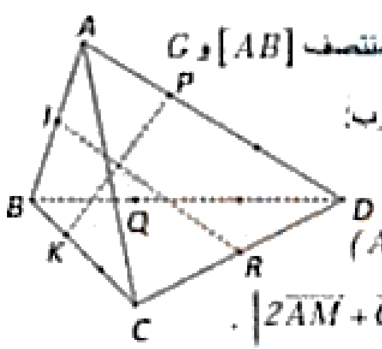
السؤال الرابع: احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق : $u_n=\frac{2n!+(-1)^n}{n!}$

ثانياً: حل التمارين الأربعة التالية: (٦٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : $ABCD$ رباعي وجوه ، النقاط P, Q, R, K, I تحقق :

$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ، R منتصف $[CD]$ ، $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ ، I منتصف $[AB]$ و G

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2),(B,2),(C,1),(D,1)$ والمطلوب:



١) أثبت أن المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان .

٢) عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2),(C,1)$

٣) عين المجموعة المكونة من النقاط M التي تحقق : $\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\|=\|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\|$.

التمرين الثاني : $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{2u_n+6} \end{cases}$ عند كل $n\ge0$

١) أثبت أن التابع $x\mapsto\frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن: $\frac{1}{2}<u_n\le1$ أياً كان الحد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً .

التمرين الثالث : f هو التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4\sin x}{x}$ خطه البياني C

١) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

٢) برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ وادرس وضع C بالنسبة لهذا المقارب .

التمرين الرابع : لتكن الأعداد المركبة $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}\,,\,z_2=\sqrt{3}+i\,,\,z_3=i$

١) اكتب كلاً من العددين z_1 و z_2 بالشكل الأسي .

٢) حل في C المعادلة $z^3=z_3$.

٣) اكتب العدد : $\left(\dfrac{z_1}{2}\right)^{12}+\left(\dfrac{z_2}{2}\right)^{12}$ بالشكل الجبري.

٤) اكتب العدد $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ بالشكلين الجبري والأسي ، ثم استنتج قيمة كل من $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ، $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين . (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : نتأمل في معلم متجانس النقاط $A(-\frac{1}{2},3,1),B(-1,0,2),C(2,1,1),D(-3,3,-1)$

1) a) أثبت أن النقاط B,C,D تمثل مستوٍ ، أوجد معادلته .

b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته .

٢) a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD) .

b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD) .

٣) احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$.

٤) a) أثبت أن النقاط B,C,D تقع على كرة مركزها A .

b) احسب نصف قطر هذه الكرة واكتب معادلتها.

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على R وفق $f(x)=x^3e^x$ ، والمطلوب :

١) جد تابعاً أصلياً F للتابع f على R بالصيغة $F(x)=P(x)e^x$ حيث P كثير حدود.

٢) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

٣) ارسم C الخط البياني للتابع f .

٤) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=1$.

------------------------------ انتهت الأسئلة ------------------------------

اختبار 1

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية: (30 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول. احسب كلاً مما يأتي :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)$ ❷ $\int_0^{\ln 2} e^x(1-e^x)^3dx$

السؤال الثاني. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $9^x-3^{x+1}+2=0$.

السؤال الثالث. $ABCD$ رباعي وجوه، مركز ثقله G، I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$. أثبت أنّ النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة .

السؤال الرابع. في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,-1,0)$، والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $2x+y-2z+9=0$ ، اكتب معادلة الكرة التي مركزها A، وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

ثانياً حل التمرينات الآتية: (70 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. أثبت أنّ $\ln x \le x-1$، أياً يكن $x>0$. باختيار $x=e^{1/3}$ و $x=e^{-1/3}$، احصر e.

التمرين الثاني. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالعلاقات: $u_0=0$ و $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماماً.

التمرين الثالث. احسب قيمة r إذا علمت أن $\frac{1}{\binom{6}{r}}+\frac{1}{\binom{5}{r}}=\frac{1}{\binom{4}{r}}$.

التمرين الرابع. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى. ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

1. أثبت أن المستقيم $\Delta: y=2x-1$ مقارب للخط C، وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ.
2. ادرس التابع f، وعين المقارب الشاقولي لـ C، وارسم كل مقارب وجدته ، ثُمّ ارسم C.
3. أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α، واحصره في مجال طوله 0.5.

المسألة الثانية. يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$، نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة، ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين.

1. عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الإحتمالي.
2. احسب التوقع الرياضي $\mathbb{E}(X)$، والتباين $\mathbb{V}(X)$.

اختبار 2

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية: (30 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول. ليكن $(\mathcal{C})$ الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4 - 4\cos x}{x^2}$$

❶ أوجد $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

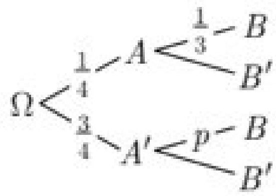
❷ أثبت أنّ المستقيم $\Delta : y = x$ مقارب للخط $(\mathcal{C})$.

السؤال الثاني. نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي: $u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

❶ أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n .

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

السؤال الثالث. ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور. كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً؟



السؤال الرابع. نتأمّل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط $A(1,5,4)$، و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$.

❶ بيّن أنّ النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة .

❷ بين أنّ النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

❸ استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداداحقيقية يطلب تعيينها.

ثانياً حل التمرينات الآتية: (70 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. أوجد نهاية التابع f المعيّن بالعلاقة $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$، ثمّ أعطِ عدداً حقيقياً α يحقق الشرط: إذا كان $x > \alpha$ كان $f(x) \in]2.9, 3.1[$.

التمرين الثاني. أثبت أنّه أياً كانت x من $]-1,+\infty[$ كان $\ln(x+1) \geq \dfrac{x}{1+x}$.

التمرين الثالث.

❶ حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0 \qquad \text{(لاحظ أنّ : } (1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}\text{)}$$

❷ في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين $z_A=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$ و $z_B=\overline{z_A}$ بيّن أنّ $\frac{z_A}{z_B}=e^{\frac{\pi}{6}i}$ واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

التمرين الرابع. نريد تأليف لجنة مكونة من (مديرو نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص. بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأنّ في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى. ليكن $(\mathcal{C})$ الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x+1)^2.\,e^{-x}$.

❶ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، واستنتج المقارب الموازي لمحور الفواصل وادرس وضع $(\mathcal{C})$ بالنسبة إليه.

❷ ارسم كل مقارب وجدته، ثم ارسم $(\mathcal{C})$.

❸ بيّن أنّ للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد α وأنّ هذه الحل ينتمي إلى المجال $]-2,-1[$ واستنتج أنّ α تحقّق المعادلة $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين $(\mathcal{C})$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

❺ استنتج مجموعة تعريف التابع $x\mapsto g(x)=\ln(f(x))$ ثم حلّ المعادلة $g(x)=-x$.

المسألة الثانية. لدينا n صندوقاً $u_1,u_2,\dots,u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء. وكلّ صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء. نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n.

يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء).

1. احسب $\mathbb{P}(R_1)$.
2. أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_2)=\frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1)+\frac{1}{4}$.
3. أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_k)=\frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1})+\frac{1}{4}$ في حالة $2\le k\le n$.
4. نعرّف $x_k=\mathbb{P}(R_k)-\frac{1}{3}$.

❶ أثبت أنّ المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$ هندسية. عيّن أساسها وحدها الأول.

❷ اكتب x_k بدلالة k واستنتج $\mathbb{P}(R_k)$ بدلالة k.

اختبار 3

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية: (30 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول. أثبت أنّ للمعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ثمّ بيّن أنّ $\alpha \in]-1,0[$.

السؤال الثاني. حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$، ثم عيّن حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$.

السؤال الثالث. ليكن التابع f المعرّف بالصيغة $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - |x|$. احسب النهايتين:

❶ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ❷ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

السؤال الرابع. يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء وخمس كرات بيضاء، عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة، وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين. يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة. ما احتمال أن يحصّل اللاعب نقطة واحدة فقط؟

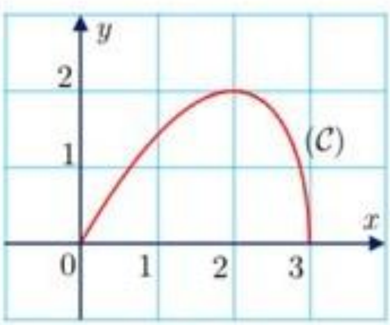
ثانياً حل التمرينات الآتية: (70 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان كما يأتي

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n}$$

أثبت أنّ هاتين المتتاليتين متجاورتان.

التمرين الثاني. في الشكل المجاور $(\mathcal{C})$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,3]$ بالصيغة: $f(x) = x\sqrt{3-x}$. عندما يدور $(\mathcal{C})$ دورة كاملة حول محور الفواصل يولّد مجسماً دورانياً S .



❶ ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ في حالة $x \in]0,3[$؟

❷ عيّن $A(x)$، مساحة هذا المقطع بدلالة x، ثمّ استنتج V حجم المجسم S.

التمرين الثالث. في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، لدينا النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقدية: $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$.

❶ اكتب العدد العقدي $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

❷ عيّن $(\mathcal{E})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\dfrac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً.

❸ عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\dfrac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً.

التمرين الرابع. في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,\ 3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$.

❶ أثبت أنّ المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

❷ أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC).

❸ احسب بُعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: **(100 درجة لكل مسألة)**

المسألة الأولى. ليكن $(\mathcal{C})$ الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

❶ ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها واستنتج ما للخط $(\mathcal{C})$ من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين. وعيّن قيمته الحدية مبيناً نوعها.

❷ ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم $(\mathcal{C})$.

❸ احسب مساحة السطح المحصور بين $(\mathcal{C})$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$ و $x=\frac{1}{e^2}$.

المسألة الثانية. يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء. إذا صدّ ضربة الجزاء n فإنّ احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8، وإذا لم يصد ضربة الجزاء n فإنّ احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6. نفترض أنّ احتمال أن يصد أوّل ضربة جزاء يساوي 0.7.

ليكن A_n الحدث « يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n ».

1. احسب $\mathbb{P}(A_2|A_1)$ و $\mathbb{P}(A_2|A_1')$.

2. استنتج أنّ $\mathbb{P}(A_2)=0.74$.

3. نعرّف $p_n=\mathbb{P}(A_n)$:

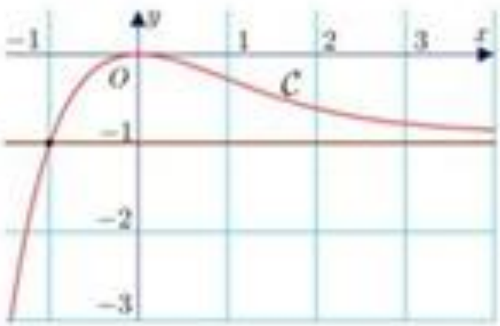
❶ برهن أنّ $p_{n+1}=(0.2)p_n+0.6$.

❷ لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ بالصيغة $u_n=p_n-0.75$ بيّن أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2. استنتج عبارة p_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$.

اختبار 4

أولاً أجب عن الأسئلة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول. في الشكل المجاور خط بياني C لدالة f، ومن خلال قراءة بيانية للشكل أجب عن الأسئلة التالية:



❶ ما معادلة المستقيم المقارب للخط C؟ وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب ؟

❷ يقبل f قيماً حدية محلياً. عيّنها وعين نوعها.

❸ في حالة عدد حقيقي k، عيّن بدلالة k عدد حلول المعادلة k.

السؤال الثاني. لتكن المجموعة $S = \{2,3,5,6,7,9\}$.

❶ ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S ؟

❷ ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

السؤال الثالث. في لمعلم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط : $A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$. بيّن مع التعليل صحّة أو خطأ كل من المقولات الآتية:

❶المثلث ABC قائم

❷ المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

❸ حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V = 81$.

ثانياً حل التمرينات الآتية: (70 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول. ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x\cdot e^{-x}$ والمطلوب :

❶ احسب $\int_{0}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

❷ أثبت أنّ التابع $y=f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=e^{-x}$.

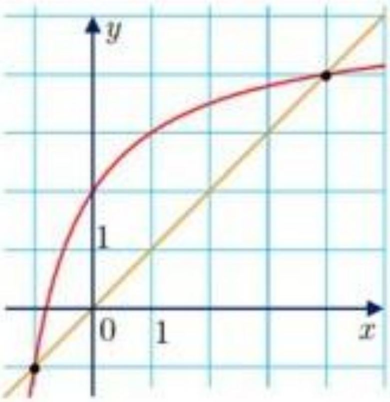
التمرين الثاني. المستقيمان L و L' معرّفان وسيطياً وفق

$$L:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} \quad : t\in\mathbb{R} \qquad \text{و} \qquad L':\begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \\ z=-1+2s \end{cases} \quad : s\in\mathbb{R}$$

❶ أثبت أنّ L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

❷ أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L و L'

التمرين الثالث.



نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}$

❶ باستعمال الرسم , مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3.

❷ ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وتقاربها.

❸ نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$.

1. بيّن أنّ $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية، وعيّن أساسها وحدها الأول.

2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n، وعين نهاية المتتالية u_n.

التمرين الرابع. نتأمّل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية: $a=-1$ و $b=2+i\sqrt{3}$ و $c=2-i\sqrt{3}$ و $d=3$ بالترتيب. والمطلوب :

❶ ارسم النقاط A و B و C و D، ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC.

❷ عين $\arg\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC.

❸ أثبت أنّ D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$.

ثالثاً حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى. **أولاً** : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=x(\ln x)^2$$

❶ أثبت $f(x)$ يكتب بالشكل : $f(x)=4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

ثانياً : ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق : $g(x)=-2x\ln x$. أثبت أنه عند $x>0$ يكون $f(x)-g(x)=xf'(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخطين C_f و C_g.

ثالثاً : ليكن x_0 من $]0,+\infty[$.

❶ بين أنّ معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y=x\,f'(x_0)+g(x_0)$.

❷ ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب، ثم استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها x_0.

الجمهورية العربية السورية — الاسم:

وزارة التربية — الرقم:

نموذج لمادة الرياضيات لشهادة الدراسة الثانوية العامة دورة 2020 — المدة: ثلاث ساعات

الدرجة: ستمئة فقط

<u>أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية</u> (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

1- جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2- اذكر قيمة حدية للتابع وبيّن نوعها.

3- هل $f(5)=4$ قيمة حدية للتابع؟

4- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني للتابع.

5- اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x)=\ln(f(x))$.

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,3]$ وفق $f(x)=(x-3)\sqrt{x(3-x)}$ ، جد $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ، واستنتج أنه اشتقاقي عند الـ $x=3$.

السؤال الثالث: $ABCD$ رباعي وجوه، مركز ثقله G ، فيه K مركز ثقل الوجه BCD أثبت أنّ النقاط G و A و K تقع على استقامة واحدة، وعيّن موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$.

<u>ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية</u> (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: صِف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات: $x^2+z^2=16$ و $2\le y\le 5$

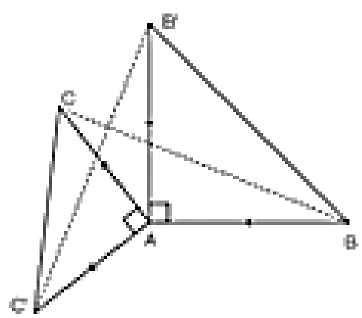
السؤال الثاني: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2(1+i)z-4+2i=0$.

السؤال الثالث: لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,8,9\}$ ، والمطلوب:

1- كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟

2- كم عدداً من مضاعفات العدد 5 ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟

<u>ثالثاً: حل التمارين الثلاثة الآتية</u> (70 درجة للأول - 70 درجة للثاني - 80 درجة للثالث).



التمرين الأول: في الشكل المجاور المثلثان ABB' و ACC' كلٌ منهما قائم في A ومتساوي الساقين، نأمل المعلم المتجانس والمباشر $(A,\vec{u},\vec{v})$، والمطلوب:

1- اكتب $z_{B'}$ بدلالة z_B ، و $z_{C'}$ بدلالة z_C.

2- احسب $\frac{z_{B'}-z_{C'}}{z_B-z_C}$.

3- استنتج أنّ $(BC)\perp(B'C')$ و $BC=B'C'$.

التمرين الثاني: لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرّفة تدريجياً وفق: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

1- أثبت بالتدريج أنّ $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

2- أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية، ثمّ اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3- ليكن S_n المجموع المعرّف بالشكل $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$، اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

التمرين الثالث: ليكن التابع f المعرّف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$، والمطلوب:

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

2- جِد عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$، كان $f(x)$ في المجال $]1.99, 2.01[$

3- جِد $f'(x)$ ثمّ استنتج $g'(x)$، حيث إنّ $g(x) = \frac{2\sin x + 1}{\sin x + 5}$.

رابعاً: حلّ المسألتين الآتيتين (100 درجة لكل مسألة).

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق: $f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1- أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$، وادرس الوضع النسبي للخط C_f بالنسبة للمقارب d.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها، واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f.

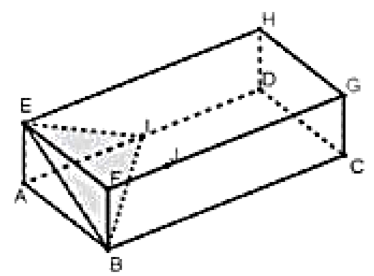
3- أثبت أنّ $f(x) + f(-x) = -2$.

4- استنتج أنّ C_f متناظرٌ بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$.

5- ارسم ما وجدته من مقاربات ثمّ ارسم C_f.

6- استنتج رسم C_g للتابع C_g المعرّف وفق $g(x) = -2x + 1 - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

المسألة الثانية: ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $AD = 4$ و $AE = 1$، ولتكن I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$، والمطلوب:



1- جِد احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات واحداثيات كل من I و J.

2- أثبت أنّ معادلة المستوي (EIB) هي $x + y + 2z - 2 = 0$.

3- بيّن نوع المثلث EIB، ثم احسب مساحته.

4- احسب بُعد G عن المستوي (EIB)، واستنتج حجم رباعي الوجوه $G - EIB$.

5- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J وعمودياً على المستوي (EIB).

6- استنتج أنّ المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$.

انتهت الأسئلة

الجمهورية العربية السورية — الاسم:

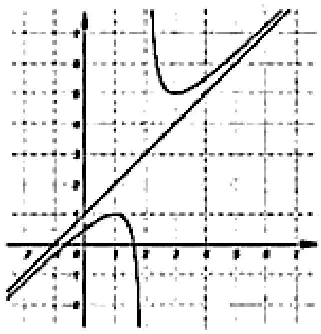
وزارة التربية — الرقم:

نموذج لمادة الرياضيات لشهادة الدراسة الثانوية العامة دورة 2020 — المدة: ثلاث ساعات

الدرجة: ستمئة فقط

<u>أولاً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية.</u> (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: في الشكل المرسوم جانباً. ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$، والمطلوب:



1- جِدْ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- دلّ على القيم الحدية للتابع وبيّن نوعها.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

4- اكتب معادلة المقارب المائل.

5- اذكر إحداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني C_f.

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\cos x$

1- جِدْ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

2- استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$.

السؤال الثالث: حلّ المتراجحة $e^{x}-1\le 6e^{-x}$.

<u>ثانياً: أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة الآتية.</u> (45 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ادرس وضع المستقيمين d و d' المعرّفين كما يأتي:

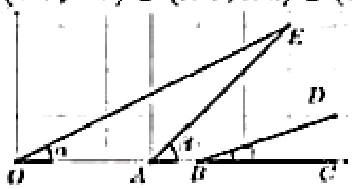
$$d:\begin{cases}x=2t-5\\ y=t-2\\ z=-\frac{1}{2}t+3\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R} \qquad \text{و} \qquad d':\begin{cases}x=s+5\\ y=2\\ z=2s+5\end{cases}\ ;s\in\mathbb{R}$$

السؤال الثاني: جِدْ الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $\omega=8-6i$.

السؤال الثالث: عيّن قيمة n في المعادلة الآتية: $P^{5}_{n+2}=45P^{3}_{n+1}$.

<u>ثالثاً: حلّ التمارين الثلاثة الآتية</u> (80 درجة للأول - 70 درجة للثاني - 70 درجة للثالث).

التمرين الأول: في الشكل المجاور α و β و γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجّهة $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE})$ و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب، والمطلوب:



1- اكتب كلاً من الأعداد العقدية الآتية بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي: $z_{\overrightarrow{OE}}$ و $z_{\overrightarrow{AE}}$ و $z_{\overrightarrow{BD}}$.

2- اكتب العدد العقدي $z_{\overrightarrow{OE}}\cdot z_{\overrightarrow{AE}}\cdot z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي.

3- استنتج المجموع $\alpha+\beta+\gamma$.

التمرين الثاني: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-2,2[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$، والمطلوب:

1- أثبت أنّ التابع f هو تابع فردي، ثمّ ادرس تغيرات التابع على المجال $[0,2[$.

2- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

3- ادرس الوضع النسبي بين C_f و T.

التمرين الثالث: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-\sqrt{x^2+5}$، والمطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2- أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1,2[$، ثمّ جد هذا الحل جبرياً.

3- استنتج مشتق التابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=2\sin x-\sqrt{\sin^2 x+5}$.

__رابعاً: حلّ المسألتين الآتيتين__ (100° درجة لكل مسألة).

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$، والمطلوب:

1- ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

2- أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f، ثمّ ادرس الوضع النسبي.

3- حلّ المعادلة $f(x)=x$.

4- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة تدريجياً بالشكل $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ عند كل $n\in\mathbb{N}$، والمطلوب:

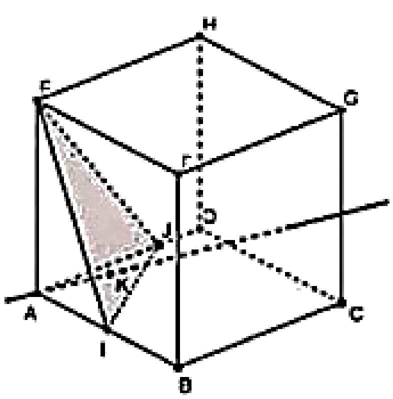
a- احسب u_1 و u_2.

b- استنتج من تزايد التابع f على المجال $]2,+\infty[$ صحة الخاصة $E(n): 2<u_{n+1}<u_n$ وذلك من أجل $n\in\mathbb{N}$.

c- استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة، واحسب نهايتها.

d- ارسم مقاربات C_f وارسم المستقيم $\Delta: y=x$، ثمّ ارسم C_f ومثّل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ على الرسم نفسه.

المسألة الثانية: ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً طول حرفه يساوي 4، ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J تحقق العلاقة $4\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AD}$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$، والمطلوب:



1- جدْ احداثيات رؤوس المكعب والنقطتين I و J.

2- أثبت أنّ معادلة المستوي (EIJ) هي $6x+4y+3z-12=0$.

3- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A وعمودياً على المستوي (EIJ)، ثمّ جدْ احداثيات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ).

4- احسب مساحة المثلث AEJ ثمّ استنتج حجم رباعي الوجوه $I-AEJ$.

5- احسب بُعد A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ.

انتهت الأسئلة

تم الانتهاء من المنهاج + النماذج الوزارية والاختبارات

بعون الله تعالى

ملاحظة هامة هذا الملخص غير كافي

على الطالب دراسة المنهاج بشكل كامل والإعادة من الملخص

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

أخوكم المدرس : محمد عمرو صديق