الفصل الرابع: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

اختبار سريع:

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

(1)

محور التماثل $x = 1$

المقطع y $(0\ ,-12)$

الرأس $(1,-13)$

---

(2)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0\ ,6)$

الرأس $(-1,5)$

---

(3)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0\ ,-8)$

الرأس $(-1,-10)$

---

(4)

محور التماثل $x = 3$

المقطع y $(0\ ,3)$

الرأس $(3,-15)$

---

(5)

محور التماثل $x = 2$

المقطع y $(0\ ,-4)$

الرأس $(2,-16)$

---

(6)

محور التماثل $x = -1$

المقطع y $(0\ ,-1)$

الرأس $(-1,-5)$

---

(7) أعمال:

محور التماثل $x = 25$ ، المقطع y $(0\ ,550)$ ، الرأس $(25, 543.75)$

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

(8)

$b^2 - 4ac = 25 - 4\square 2\square 3 = 25 - 24 = 1$

---

(9)

$b^2 - 4ac = 108$

---

(10)

$b^2 - 4ac = -8$

$b^2 - 4ac = 100$ (11)

---

(12)

$b^2 - 4ac = 121$

---

(13)

$b^2 - 4ac = -172$

أكمل المربع فى كل عبارة تربيعية مما يأتى إن أمكن:

(14)

$$(x^2 + 8x + 16) - 16 = 0$$

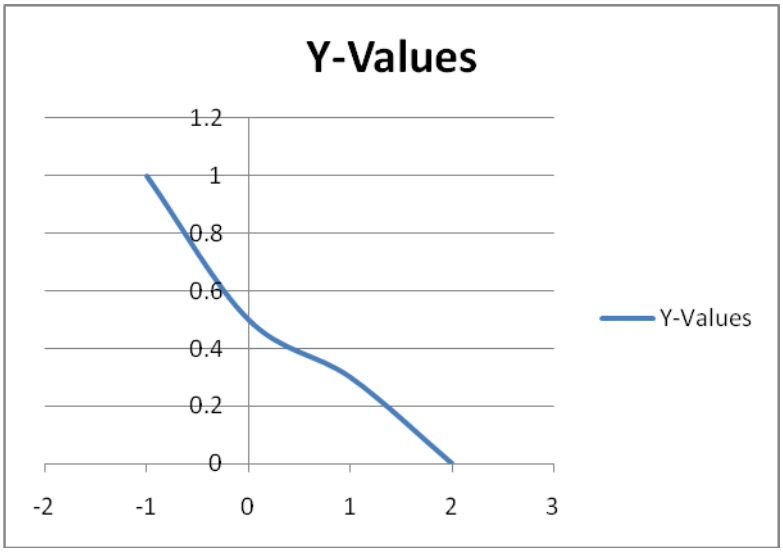
---

(15)

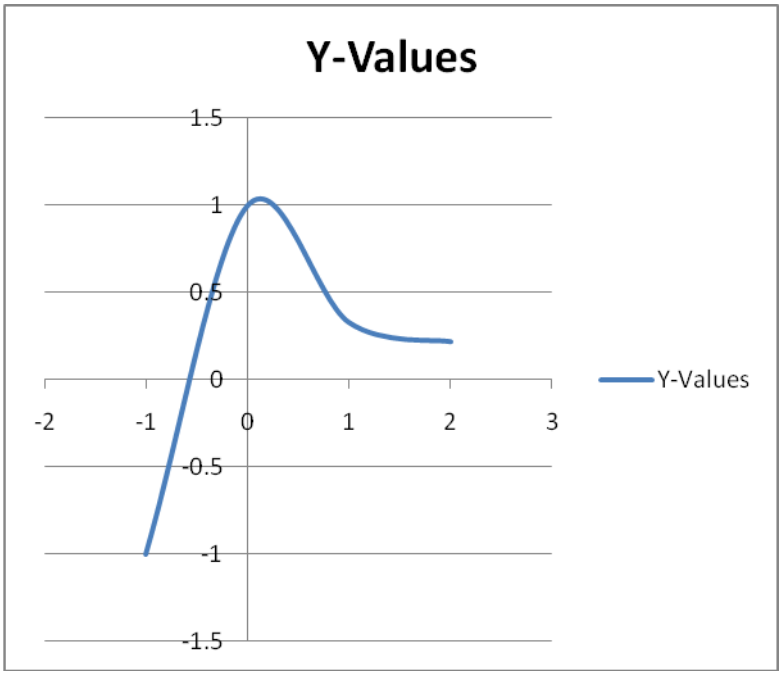
$$(x^2 - 18x - 81) + 81 = 0$$

مثل كل دالة مما يأتى بيانيا

(16)

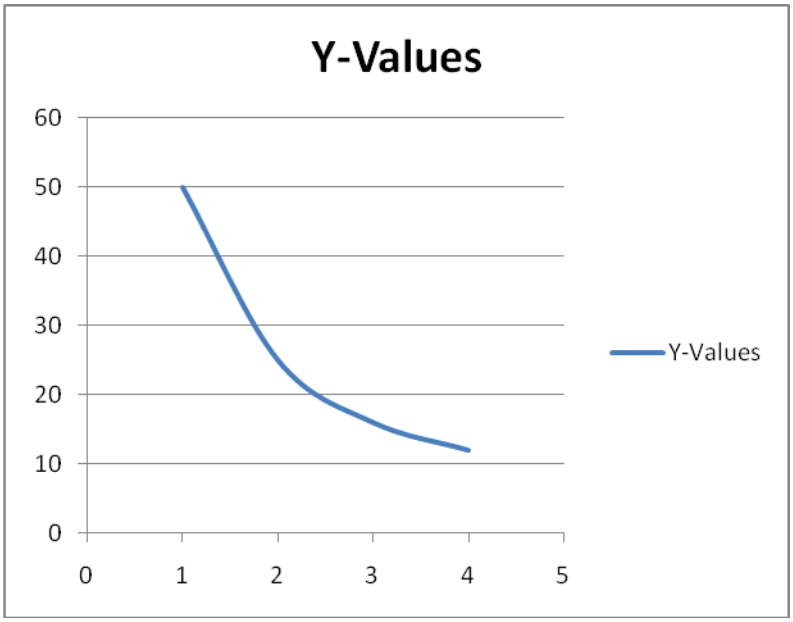


(17)



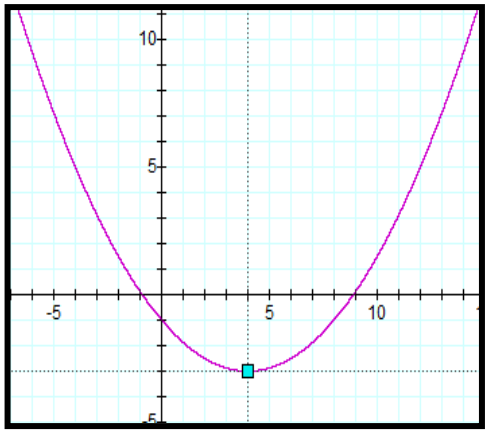
(18) هدية:

F(x)= 50/x



(4-1)القطوع المكافئة.

■ تحقق من فهمك:



(1)

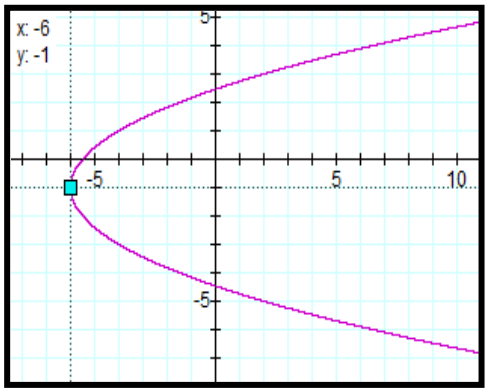
(1A) المنحني مفتوح رأسيا إلى أعلى

الرأس $(4,-3)$

البؤرة $(4,-1)$

الدليل $y=-5$

معادلة محور التماثل $x=4$



(1B) المنحني مفتوح أفقيا إلى اليمين

الرأس $(-6,-1)$

البؤرة $(-5.5,-1)$

الدليل $y=-6.5$

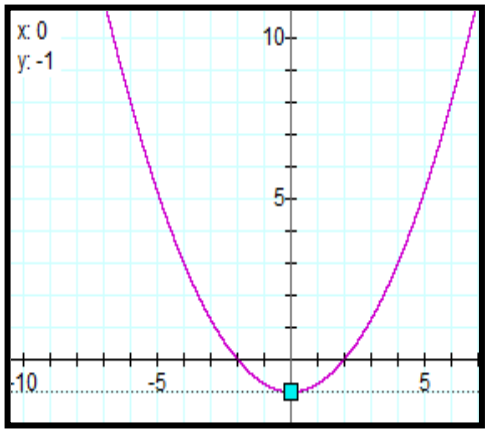
معادلة محور التماثل $x=-6$

■ تحقق من فهمك:

(2) فلك:

$x^2=44.8(y-6)$ $\quad -5\le x\le 5$

أقصر مسافة هي $11.2\ ft$



■ تحقق من فهمك:

(3)

(3A $x^2 = 4(y+1)$

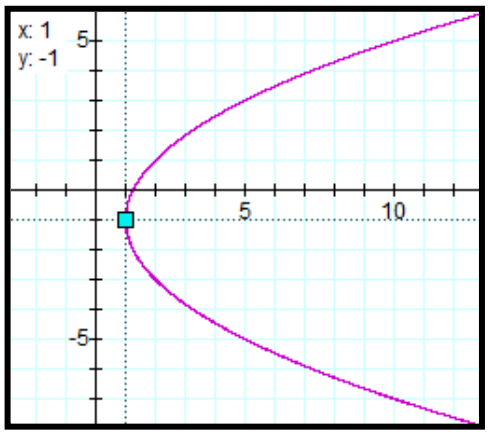
الرأس $(0,-1)$

البؤرة $(0,0)$

الدليل $y = -2$

معادلة محور التماثل $x = 0$

طول الوتر البؤري $= 4$



(3B $(y+1)^2 = 4(x-1)$

الرأس $(1,-1)$

البؤرة $(2,-1)$

الدليل $x = 0$

معادلة محور التماثل $y = -1$

طول الوتر البؤري $= 4$

■ تحقق من فهمك:

(4)

(4A

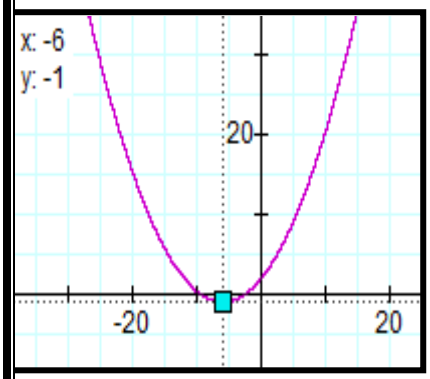
بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً

البؤرة $(h,k+p) = (-6,2)$ ، الرأس $(h,k) = (-6,-1)$

لذا فإن $h = -6$ ، $k = -1$ ، $p = 2+1 = 3$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

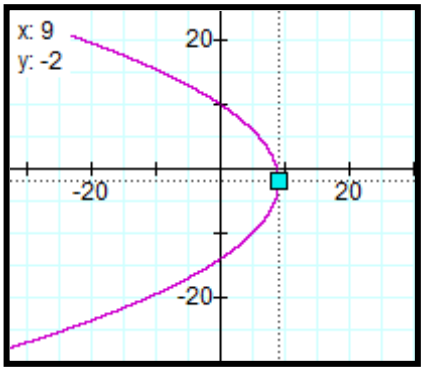
هي $(x+6)^2 = 12(y+2)$



(4B

بما أن الدليل مستقيم أفقيا فإن المنحني مفتوح أفقياً

$h = x - c$



البؤرة $(h+p\ ,k) = (5,-2)$ ، الرأس $(h\ ,k) = (9,-2)$

لذا فإن $h = 9$ ، $k = -2$ ، $p = 5-9 = -4$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

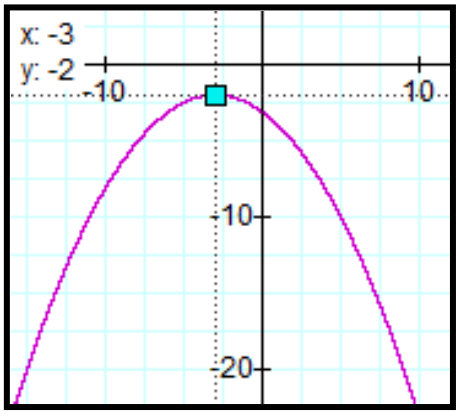
هي $(y+2)^2 = -16(x-9)$

(4C

المنحني مفتوح لأسفل

البؤرة $(h\ ,k+p) = (-3,-4)$ لذا $h = -3$ ، $k = -4-p$

المنحني يمر بالنقطة $(5,-10)$ إذن:



$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$\therefore (5+3)^2 = 4p(-10+4+p)$

$\therefore 64 = 4p^2 - 24p$

$\therefore p^2 - 6p - 16 = 0$

$\therefore (p-8)(p+2) = 0$

$\therefore p = 8 \quad , \quad p = -2$

المنحنى مفتوحاً لأسفل $p = -2$ إذن $k = -2$

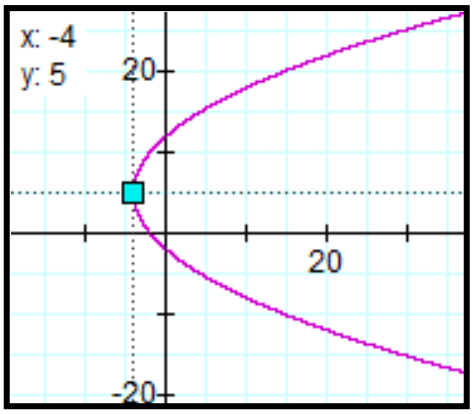
إذن معادلة المنحنى هي $(x+3)^2 = -8(y+2)$

(4D

المنحني مفتوح الي اليمين

البؤرة $(h+p,k)=(-1,5)$ لذا $k=5$ ، $h=-1-p$

المنحني يمر بالنقطة $(8,-7)$ إذن:



$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

$$\therefore(-7-5)^2=4p(8+1+p)$$

$$\therefore 144=4p^2+36p$$

$$\therefore p^2+9p-36=0$$

$$\therefore(p+12)(p-3)=0$$

$$\therefore p=-12 \quad , \quad p=3$$

المنحنى مفتوحاً لليمين $p=3$ إذن $h=-4$

إذن معادلة المنحنى هي $(y-5)^2=12(x+4)$

■ تحقق من فهمك:

(5)

(5A

$$y=4x^2+4 \quad , \quad (-1\ ,\ 8)$$

$$(x-0)^2=\frac{1}{4}(y-4)$$

$$h=0\ ,\ k=4\ ,\ p=\frac{1}{16}=0.0625$$

البؤرة $(0\ ,\ 4.0625)$ =

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1-0)^2 + (8 - 4.0625)^2} = 4.0625$$

$$A = (0\ , 4.0625 - 4.0625) = (0, 0)$$

$$m = \frac{8-0}{-1-0} = -8$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 8 = -8(x + 1)$$

$$y = -8x$$

(5B

$$x = 5 - \frac{y^2}{4} \quad , \ (1\ , -4)$$

$$(y - 0)^2 = -4(x - 5)$$

$$h = 5\ , k = 0\ , p = -1$$

البؤرة = $(4\ , 0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (-4-0)^2} = 5$$

$$A = (4 - 5\ , 0) = (-1, 0)$$

$$m = \frac{-4-0}{1+1} = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

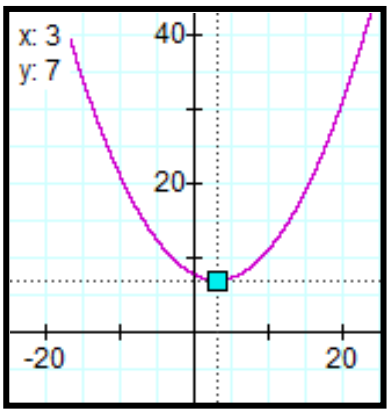
$$y + 4 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x - 2$$

تدرب وحل المسائل.

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثل منحناه بيانياً:

(1) المنحنى مفتوح رأسيا لأعلى



الرأس $(3,7)$

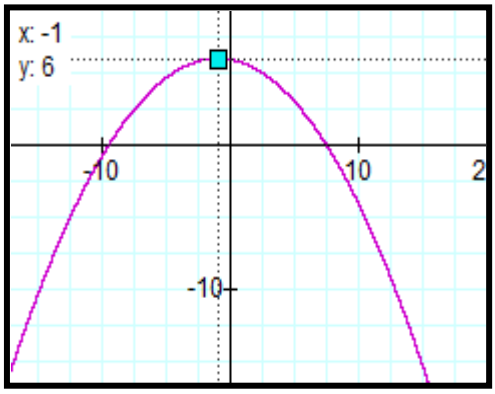
البؤرة $(3,10)$

الدليل $y = 4$

معادلة محور التماثل $x = 3$

طول الوتر البؤري $= 12$

(2) المنحنى مفتوح رأسيا لأسفل



الرأس $(-1,6)$

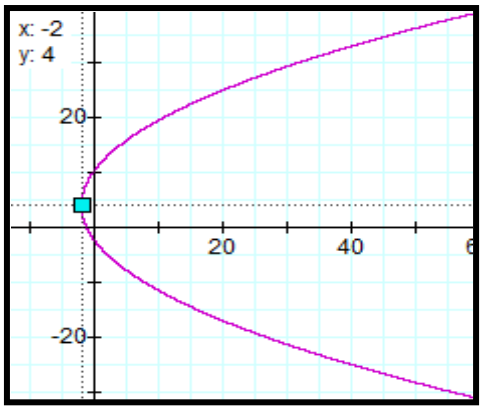
البؤرة $(-1,3)$

الدليل $y = 9$

معادلة محور التماثل $x = -1$

طول الوتر البؤري $= 12$

(3) المنحنى مفتوح أفقيا لليمين



الرأس $(-2,4)$

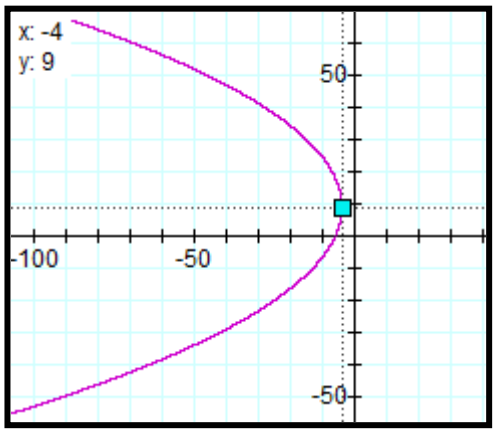
البؤرة $(3,4)$

الدليل $x = -7$

معادلة محور التماثل $y = 4$

طول الوتر البؤري $= 20$

(4) المنحنى مفتوح أفقيا لليسار



الرأس $(-4,9)$

البؤرة $(-14,9)$

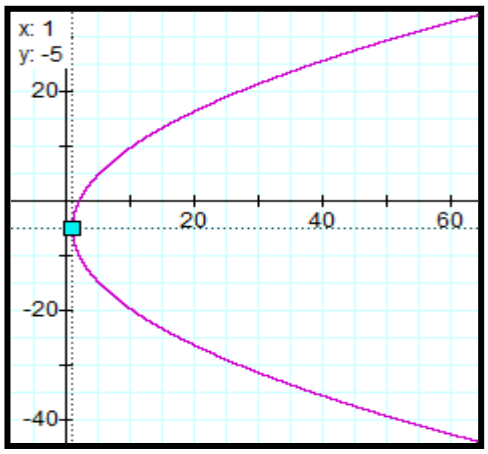
الدليل $x=6$

معادلة محور التماثل $y=9$

طول الوتر البؤري $=40$

---

(5) المنحنى مفتوح أفقيا لليمين



الرأس $(1,-5)$

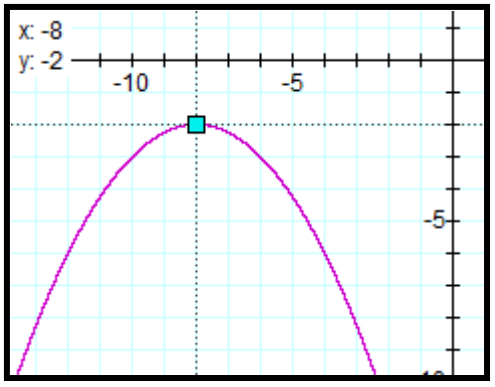
البؤرة $(7,-5)$

الدليل $x=-5$

معادلة محور التماثل $y=-5$

طول الوتر البؤري $=24$

(6) المنحنى مفتوح رأسيا لأسفل



الرأس $(-8,-2)$

البؤرة $(-8,-3)$

الدليل $y=-1$

معادلة محور التماثل $x=-8$

طول الوتر البؤري $=4$

(7) لوح تزلج:

$x^2 = 8(y-2)$ طول البعد البؤري $= 4\ ft$

---

(8) قوارب:

(a

$$y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$$

$$(y-5)^2 = 180(x-3)$$

(b طول الحبل = طول الوتر البؤري $= 45\ ft$

أكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ ، ثم حدد خصائصة ، و مثل منحناه بيانياً:

(9) $x^2 = 8(y+7)$

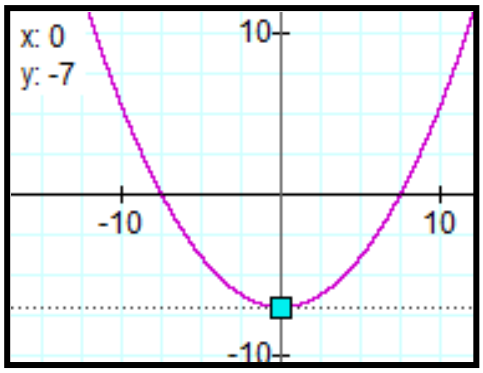
الرأس $(0,-7)$

البؤرة $(0,-5)$

الدليل $y = -9$

معادلة محور التماثل $x = -8$

طول الوتر البؤري $= 8$



---

(10)

$y^2 = -8(x+7)$

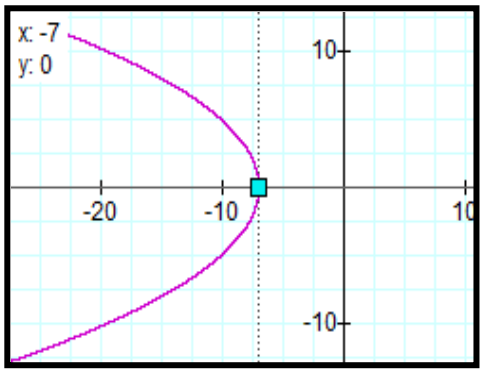
الرأس $(-7,0)$

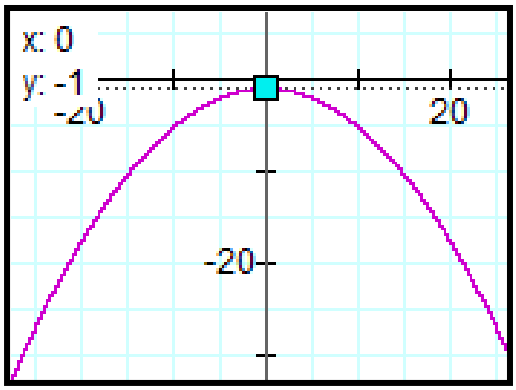
البؤرة $(-9,0)$

الدليل $x = -5$

معادلة محور التماثل $y = 0$

طول الوتر البؤري $= 8$





$x^2 = -24(y+1)$ **(11)**

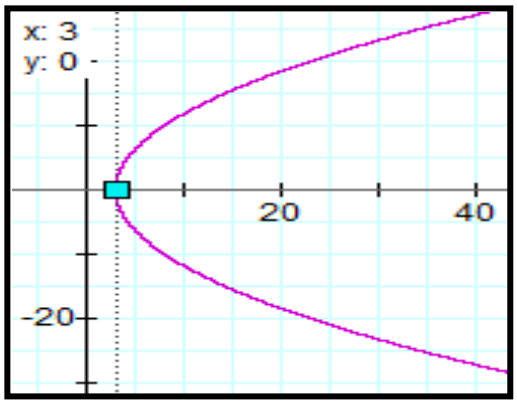
الرأس $(0,-1)$

البؤرة $(0,-7)$

الدليل $y = 5$

معادلة محور التماثل $x = 0$

طول الوتر البؤري $= 24$



$y^2 = 20(x-3)$ **(12)**

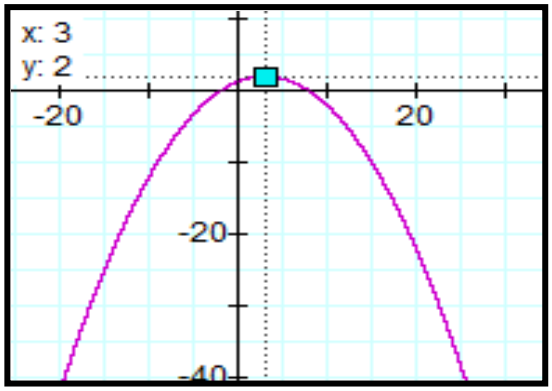
الرأس $(3,0)$

البؤرة $(8,0)$

الدليل $x = -2$

معادلة محور التماثل $y = 0$

طول الوتر البؤري $= 20$



$(x-3)^2 = -12(y-2)$ **(13)**

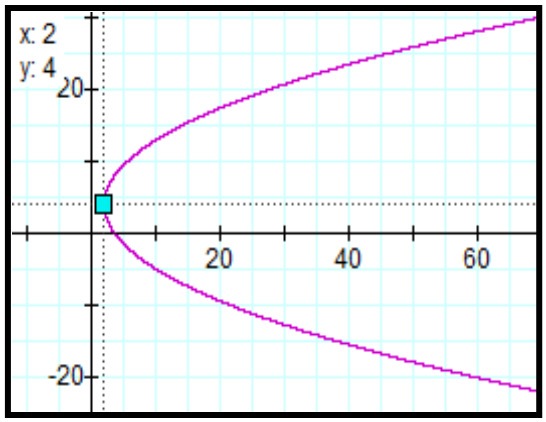
الرأس $(3,2)$

البؤرة $(3,5)$

الدليل $y = -1$

معادلة محور التماثل $x = 3$

طول الوتر البؤري $= 12$



$(y-4)^2 = 10(x-2)$ **(14)**

الرأس $(2,4)$

البؤرة $(4.5,4)$

الدليل $x = -\frac{1}{2}$

معادلة محور التماثل $y = 4$

طول الوتر البؤري $= 10$

أكتب القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(15) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسيا

البؤرة $(h,k+p)=(-9,-7)$ ، الرأس $(h,k)=(-9,-4)$

لذا فإن $h=-9$ ، $k=-4$ ، $p=-7+4=-3$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2=4p(y-k)$

هي $(x+9)^2=-12(y+4)$

---

(16)

المنحني مفتوح لأعلى

البؤرة $(h,k+p)=(3,3)$ لذا $h=3$ ، $k=3-p$

المنحني يمر بالنقطة $(23,18)$ إذن:

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

$$\therefore(23-3)^2=4p(18-3+p)$$

$$\therefore 400=4p^2+60p$$

$$\therefore p^2+15p-100=0$$

$$\therefore(p-5)(p+20)=0$$

$$\therefore p=5 \quad , \quad p=-20$$

المنحنى مفتوحا لأعلى $p=5$ إذن $k=-2$

إذن معادلة المنحنى هي $(x-3)^2=10(y+2)$

---

(17) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقيا

البؤرة $(h+p,k)=(2,-1)$ ، الرأس $(h,k)=(-4,-1)$

لذا فإن $h=-4$ ، $k=-1$ ، $p=2+4=6$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2=4p(x-h)$

هي $(y+1)^2=24(x+4)$

(18) المنحني مفتوح إلى اليمين

البؤرة $(h+p,k)=(11,4)$ لذا $k=4$ ، $h=11-p$

المنحني يمر بالنقطة $(20,16)$ إذن:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$\therefore(16-4)^2=4p(20-11+p)$$
$$\therefore 144=4p^2+36p$$
$$\therefore p^2+9p-36=0$$
$$\therefore(p+12)(p-3)=0$$
$$\therefore p=-12 \quad , \quad p=3$$

المنحنى مفتوحا لليمين $p=3$ إذن $h=8$

إذن معادلة المنحنى هي $(y-4)^2=12(x-8)$

---

(19) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقيا

البؤرة $(h+p,k)=(-3,-2)$ ، الرأس $(h,k)=(1,-2)$

لذا فإن $h=1$ ، $k=-2$ ، $p=-3-1=-4$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2=4p(x-h)$

هي $(y+2)^2=-16(x-1)$

(20) المنحني مفتوح رأسيا إذن معادلتة الأساسية $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

المنحني يمر بالنقطة $(6,-5)$ إذن:

$$\therefore (6-h)^2 = 4p(-5-k)$$

$$\therefore h^2 - 12h + 36 = -20p - 4pk \quad \rightarrow (1)$$

المنحني يمر بالنقطة $(0,-2)$ إذن:

$$\therefore (0-h)^2 = 4p(-2-k)$$

$$\therefore h^2 = -8p - 4pk \quad \rightarrow (2)$$

المنحني يمر بالنقطة $(-12,-14)$ إذن:

$$\therefore (-12-h)^2 = 4p(-14-k)$$

$$\therefore h^2 + 24h + 144 = -56p - 4pk \quad \rightarrow (3)$$

بحل الثلاث معادلات ينتج أن $h = 0$ ، $k = -2$ ، $p = -3$

إذن معادلة المنحنى هي $x^2 = -12(y+2)$

---

(21) بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً

البؤرة $(h,k+p) = (-3,4)$ ، الرأس $(h,k) = (-3,2)$

لذا فإن $h = -3$ ، $k = 2$ ، $p = 4-2 = 2$

إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

هي $(x+3)^2 = 8(y-2)$

---

(22) الرأس $(h,k) = (-3,2)$ لذا $h = -3$ ، $k = 2$

طول الوتر البؤري $|4p| = 8$ لذا فإن $p = 2$

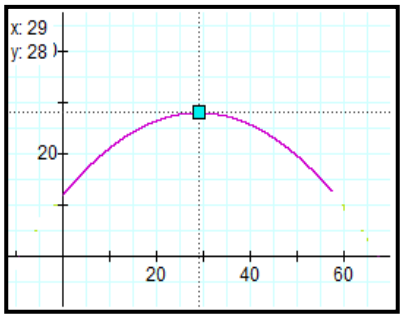
محور التماثل $y = 2$ إذن المنحني مفتوح أفقياً

إذن معادلة المنحنى هي $(y-2)^2 = 8(x+3)$

(23) عمارة:

(a $(x-29)^2 = -52.5(7-28)$

(b



اكتب كل معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يلى عند النقطة المعطاة:

(24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$, $(-5\,,-5)$

$h=-7\,,\ k=3\,,\ p=-\frac{1}{8}=-0.125$

البؤرة $= (-7\,,\ 2.875)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(-5+7)^2+(-5-2.875)^2}=8.125$$

$$A=(-7\,,2.875-8.125)=(-7,-5.25)$$

$$m=\frac{-5+5.25}{-5+7}=\frac{1}{8}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+5=\frac{1}{8}(x+5)$$

$$y=\frac{1}{8}x-\frac{35}{8}$$

$$y^2 = \frac{1}{5}(x-4) \quad , \ (24\ ,\ 2) \quad (25)$$

$$(y-0)^2 = \frac{1}{5}(x-4)$$

$$h = 4\ ,\ k = 0\ ,\ p = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$\text{البؤرة} = (4.05\ ,\ 0)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(24-4.05)^2 + (2-0)^2} = 20.05$$

$$A = (4.05 - 20.05\ ,0) = (-16,0)$$

$$m = \frac{2-0}{24+16} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{20}(x-24)$$

$$y = \frac{1}{20}x + \frac{4}{5}$$

$$(x+6)^2 = 3(y-2) \quad , \ (0\ ,\ 14) \quad (26)$$

$$h = -6\ ,\ k = 2\ ,\ p = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\text{البؤرة} = (-6\ ,\ 2.75)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(0+6)^2 + (14 - 2.75)^2} = 12.75$$

$$A = (-6\ , 2.75 - 12.75) = (-6, -10)$$

$$m = \frac{14+10}{0+6} = 4$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 14 = 4(x - 0)$$

$$y = 4x + 14$$

$$-4x = (y+5)^2 \ , \ (0\ , -5) \quad (27)$$

$$(y+5)^2 = -4(x - 0)$$

$$h = 0\ , k = -5\ , p = -1$$

البؤرة $= (-1\ , -5)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(0+1)^2 + (-5+5)^2} = 1$$

$$A = (-1-1\ , -5) = (-2, -5)$$

$$m = \frac{-5+5}{0+2} = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 5 = 0(x - 0)$$

$$x = 0$$

حدد إتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ فى كل مما يأتى:

(28) مفتوح إلى الأسفل

(29) مفتوح إلى اليسار

(30) مفتوح إلى الأعلى

(31) مفتوح إلى اليمين

---

(32) **جسور:**

$(a$ $x^2 = -180.3(y + 20)$

$(b$ $30.35\ m$

أكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتة، ويمس المستقيم المعطى منحناه فى كل مما يأتى:

الحـــــــــــل: يوجد عدد لانهائي من المعادلات يتوقف ذلك على نقطة التماس بين المنحنى والمماس

(33) المنحني مفتوح رأسيا

البؤرة $(h,k+p) = (0,3)$ لذا $h = 0$ ، $k = 3 - p$

المنحني يمر بالنقطة $(4,6)$ إذن:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$\therefore (4-0)^2 = 4p(6-3+p)$$

$$\therefore 16 = 4p^2 + 12p$$

$$\therefore p^2 + 3p - 4 = 0$$

$$\therefore (p-1)(p+4) = 0$$

$$\therefore p = 1 \quad , \quad p = -4$$

المنحنى مفتوحا لأعلى $p = 1$ إذن $k = 2$

إذن معادلة المنحنى هي $x^2 = 4(y-2)$

(34) المنحني مفتوح الي اليمين

البؤرة $(h+p,k)=(1,0)$ لذا $k=0$ ، $h=1-p$

المنحني يمر بالنقطة $(4,4)$ إذن:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

$$\therefore(4-0)^2=4p(4-1+p)$$

$$\therefore 16=4p^2+12p$$

$$\therefore p^2+3p-4=0$$

$$\therefore(p+4)(p-1)=0$$

$$\therefore p=-4 \quad , \quad p=1$$

المنحنى مفتوحا لليمين $p=1$ إذن $h=0$

إذن معادلة المنحنى هي $y^2=4x$

---

(35) **تمثيلات متعددة:**

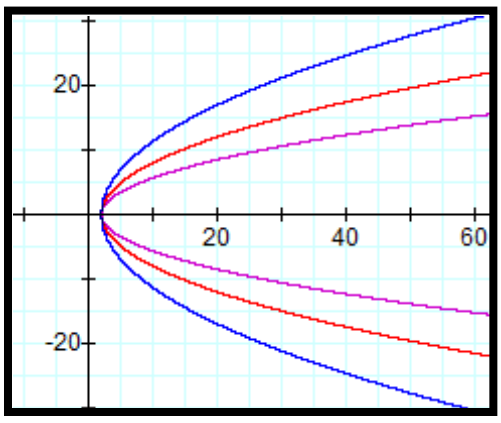
a) **هندسياً:**

i) وحدة

ii) وحدتين

iii) أربع وحدات

b) **بيانيا:**



c) **لفظياً:**

عندما تتحرك البؤرة بعيداً عن الرأس يزداد توسع منحنى القطع المكافئ رأسيا

---

d) **تحليلياً:**

$$(x+1)^2 = 4(y+7)$$

---

e) تحليلياً:

جميع القطوع لها نفس الرأس $(0, -1)$ ومنحنياتها مفتوحة إلى أسفل ومنحنى المعادلة $x^2 = 2(y+1)$ هو الأضيق، لكن منحنى المعادلة $x^2 = -12(y+1)$ هو الأوسع.

---

(36) **إكتشف الخطأ:**

بما أن $p = 1$ فإن منحنى القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.

---

(37) **تبرير:**

كل نقطة على المنحنى للقطع المكافئ بعدها عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل. ولأن الرأس يقع مباشرة بين البؤرة والدليل على محور التماثل فإنها هي الأقرب إلى البؤرة.

---

(38) **تبرير:**

الربعان الأول والرابع ، الرأس $(-2,5)$ وتقع الرأس على يسار المحور y والمنحنى مفتوح إلي اليسار لذا فإنة لا يوجد نقاط للمنحنى على يمين المحور y أو في الربعين الأول والرابع .

---

(39) **تحد:**

$$y^2 = \frac{15}{8}x$$

---

(40) **أكتب:**

إذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي x نفسه فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى أعلى أو إلى أسفل وإذاكان الإحداثي y للرأس أصغر من الإحداثي y للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى الأعلى. أما إذا كان أكبر من الإحداثي y للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى أسفل.

وإذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي y نفسه فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليمين أو إلى اليسار وإذاكان الإحداثي x للرأس أصغر من الإحداثي x للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليمين. أما إذا كان أكبر من الإحداثي x للبؤرة فإن إتجاة فتحة القطع تكون إلى اليسار.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

(41) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

(42) $\log_4 16^x = 4x$

(43) $\log_3 27^x = 3x$

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتى. ثم تحقق من صحة حلك:

(44)

$$8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 2^{3(2x-1)} = 2^3$$

$$\therefore 6x - 3 = 3$$

$$\therefore 6x = 6 \quad \therefore x = 1$$

---

(45)

$$\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$$

$$\therefore \log_3(x^2 - 6x) = 3$$

$$\therefore x^2 - 6x = 3^3 = 27$$

$$\therefore x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$\therefore (x-9)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = 9 \ , x = -3$$

للتحقق عوض عن قيمة x

$x = -3$

$\log_3(3) + \log_3(6+3) \overset{?}{=} 3$

$\log_3(3^2) = \log_3 27 = 3$ c

$x = 9$

$\log_3(-9) + \log_3(6-9) \overset{?}{=} 3$

$\log_3(-9) + \log_3(-3)$ d

إذن $x = -3$

(46)

$\log_3 x \le -3$

$\therefore x \le 3^{-3}$

$\therefore x \le \frac{1}{27}$

$\therefore \left\{ x \middle| 0 < x \le \frac{1}{27} \right\}$

---

(47) أوجد كل مما يأتي:

(a $h(-3) = 20$

(b $h(6x) = 16 - \frac{4}{4x+1}$

(b $h(10-2c) = 16 - \frac{12}{23-4c}$

---

(48)

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 1 \quad \therefore 2\theta = 90 \quad \therefore \theta = 45$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \sin 45 + \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

تدرب على إختبار

(49)

$\sqrt{x^3}$ ←←← **G**

---

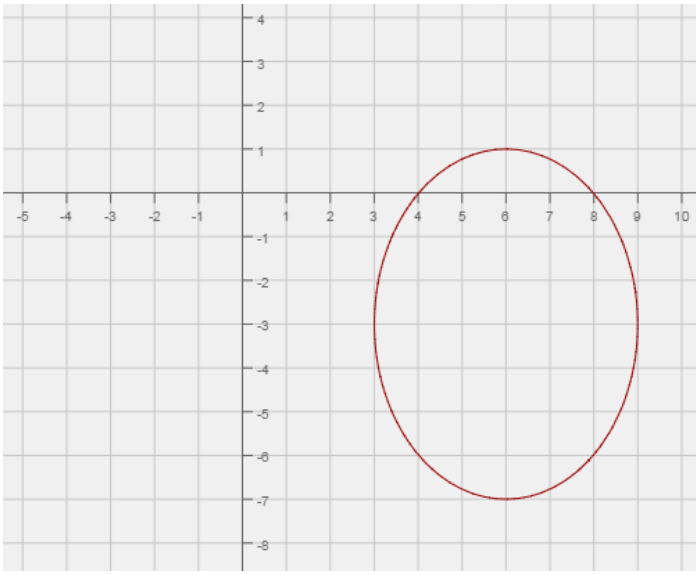
(50)

$y = x^2$ ←←← **D**

(4 – 2) القطوع الناقصة والدوائر

■ تحقق من فهمك:

(1)



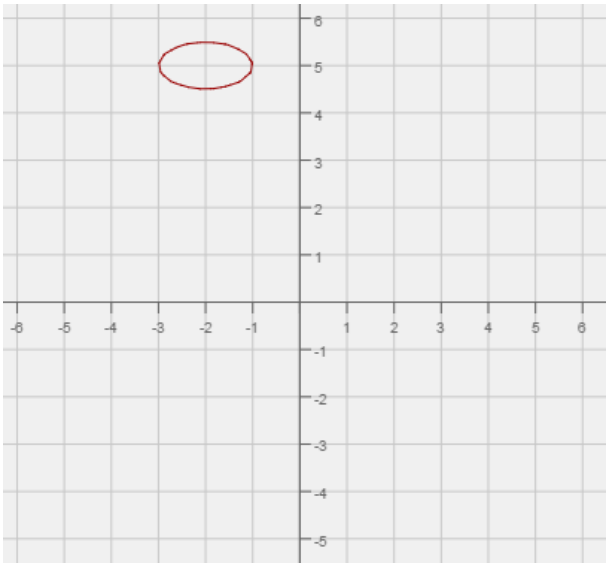
(1A) الاتجاه: رأسي، المركز: $(6,3)$

البؤرتان: $(6,-3\pm\sqrt{7})$

الرأسان: $(9,-3)$ ، $(3,-3)$

المحور الأكبر: $x=6$

المحور الأصغر: $y=-3$



(1B) الاتجاه: أفقي، المركز: $(-2,5)$

البؤرتان: $\left(-2\pm\frac{\sqrt{3}}{2},5\right)$

الرأسان: $(-1,5)$ ، $(-3,5)$

الرأسان المرافقان: $(-2,5.5)$ ، $(-2,4,5)$

المحور الأكبر: $y=5$

المحور الأصغر: $x=-2$

■ تحقق من فهمك:

(2)

$$\frac{(x-6)^2}{2.25}+\frac{(y-3)^2}{56}=1 \quad (2A)$$

$$\frac{(x=2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1 \quad (2B)$$

■ تحقق من فهمك:
(3)

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{48-18}}{\sqrt{48}}=0.79 \quad (3A$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{19-17}}{\sqrt{19}}=0.32 \quad (3B$$

■ تحقق من فهمك:
(4)

$$e=\frac{c}{a}$$

$$\therefore 0.39=\frac{c}{12.5}$$

$$\therefore c=4.875$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{12.5^2-4.875^2}=11.51$$

$$\therefore 2b=23.02\ mm$$

■ تحقق من فهمك:
(5)

$$x^2+y^2=9 \quad (5A$$

$(x-5)^2+y^2=25$ (5B

■ تحقق من فهمك:

(6)

$$(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{3+1}{2},\frac{-3+5}{2}\right)=(2,1)$$

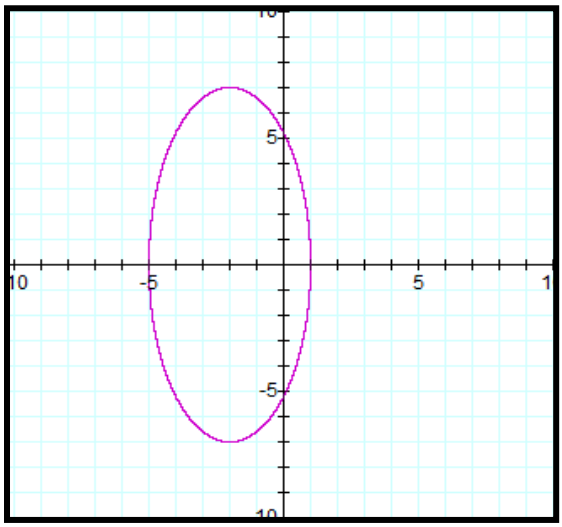
$$\therefore h=2 \quad , k=1$$

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{17}$$

إذن معادلة الدائرة هي $(x-2)^2+(y-1)^2=17$

تدرب وحل المسائل.

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلتة فى كل مما يأتى ، ثم مثّل منحناه بيانياً:



(1) الإتجاه: رأسي

المركز: $(-2,0)$

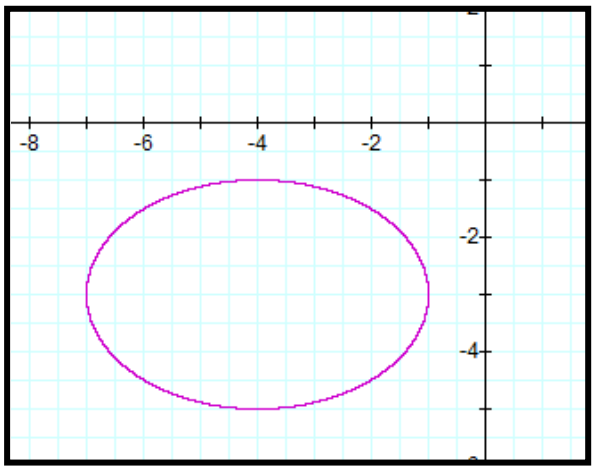
البؤرتان: $(-2,\pm 2\sqrt{10})$

الرأسان: $(-2,\pm 7)$

الرأسان المرافقان: $(-5,0)$ ، $(1,0)$

المحور الأكبر: $x=-2$

المحور الأصغر: $y=0$



(2) الإتجاه: أفقي

المركز: $(-4,-3)$

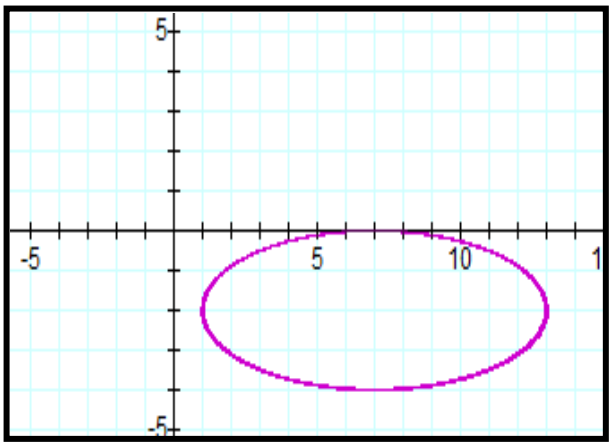
البؤرتان: $(-4\pm\sqrt{5},-3)$

الرأسان: $(-7,-3)$ ، $(-1,-3)$

الرأسان المرافقان: $(-4,-1)$ ، $(-4,-5)$

المحور الأكبر: $y=-3$

المحور الأصغر: $x=-4$



(3) الإتجاه: أفقي

المركز: $(7,2)$

البؤرتان: $(7\pm 4\sqrt{2},-2)$

الرأسان: $(1,-2)$ ، $(13,-2)$

الرأسان المرافقان: $(7,0)$ ، $(7,-4)$

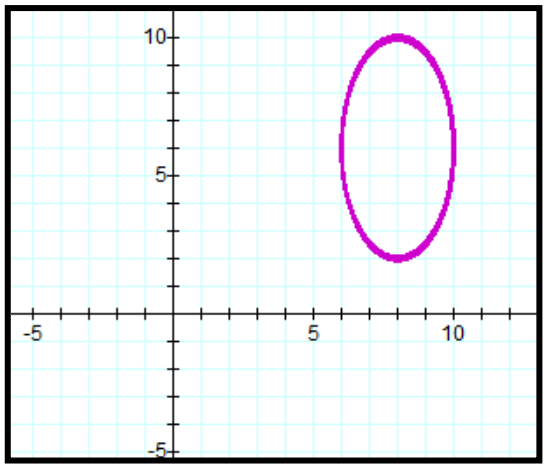
المحور الأكبر: $y=-2$

المحور الأصغر: $x=7$

---

(4) الإتجاه: رأسي

المركز: $(8,6)$



البؤرتان: $(8,\pm 2\sqrt{3})$

الرأسان: $(8,10)$ ، $(8,2)$

الرأسان المرافقان: $(10,6)$ ، $(6,6)$

المحور الأكبر: $x=8$

المحور الأصغر: $y=6$

أكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(5)

بما أن الرأسان $(h+a,k)=(13,-3)$ ، $(h-a,k)=(-7,-3)$

لذا فإن $k=-3$ ، $h=3$ ، $a=10$

بما أن البؤرتان $(h+c,k)=(11,-3)$ ، $(h-c,k)=(-5,-3)$

لذا فإن $c=8$ وبالتالي فإن $b=\sqrt{100-64}=6$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$

---

(6)

بما أن الرأسان $(h,k+c)=(4,3)$ ، $(h,k-c)=(4,-9)$

لذا فإن $k=-3$ ، $h=4$ ، $c=6$

بما أن طول المحور الأصغر $2b=8$ فإن $b=4$

وبالتالي فإن $a=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$

---

(7)

نستخدم نهايتي المحور الأكبر في إيجاد a حيث $a=\frac{1-(-13)}{2}=7$

نستخدم نهايتي المحور الأصغر في إيجاد b حيث $b=\frac{4-0}{2}=2$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر $(h,k)=\left(\frac{-13+1}{2},\frac{2+2}{2}\right)=(-6,2)$

وبما أن الإحداثي y لنهايتي المحور الأكبر متساويان فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+6)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

---

(8)

بما أن البؤرتان $(h,k+c)=(-6,9)$ ، $(h,k-c)=(-6,-3)$

لذا فإن $h=-6$ ، $k=3$ ، $c=6$

بما أن طول المحور الأكبر $2a=20$ فإن $a=10$

وبالتالي فإن $b=\sqrt{100-36}=8$

وبما أن الإحداثي x لنهايتي البؤرتان متساويان فإن المحور الأكبر رأسي ، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+6)^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{100}=1$

---

(9)

بما أن الرأسان المرافقان $(h+b,k)=(-3,7)$ ، $(h-b,k)=(-13,7)$

لذا فإن $k=7$ ، $h=-8$ ، $b=5$

بما أن طول المحور الأكبر $2a=16$ فإن $a=8$

وبما أن الإحداثي x للرأسان المرافقان متساويان فإن المحور الأكبر رأسي ، ومعادلة القطع الناقص هي $\frac{(x+8)^2}{25}+\frac{(y-7)^2}{64}=1$

<u>حدد الإختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاه معادلته في كل مما يأتي:</u>

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{72-54}}{\sqrt{72}} = 0.5 \quad (10)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{40-12}}{\sqrt{40}} = 0.837 \quad (11)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{33-27}}{\sqrt{33}} = 0.426 \quad (13)$$

---

(14) سباق:

(a

$$e = \frac{c}{a} \quad , \quad \therefore 0.75 = \frac{c}{500}$$

$$\therefore c = 375$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{500^2 - 375^2} = 330.72$$

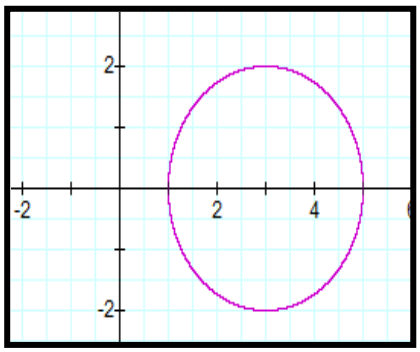
$$\therefore 2b = 661.44 \; ft$$

$$\frac{x^2}{25000} + \frac{y^2}{109375} = 1 \qquad (b$$

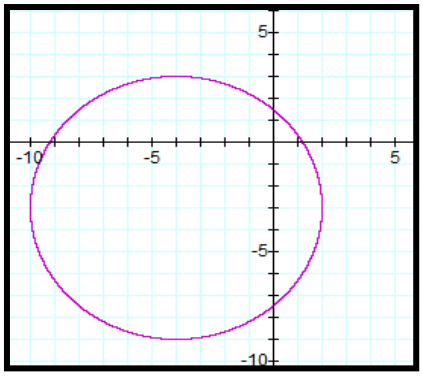
أكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي ، ثم مثّل منحناها بيانياً:

(15) (16) (17)

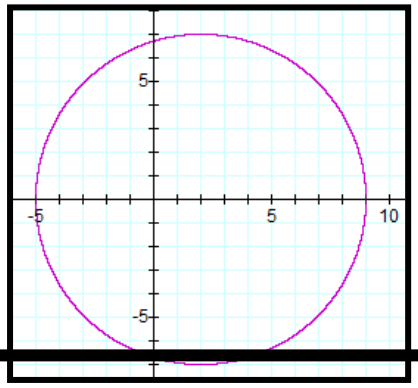
$(x-3)^2+y^2=4$



$(x+6)^2+(y+3)^2=36$



$(x-2)^2+y^2=49$



أكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها فى كل مما يأتي:

(18) $(x-2)^2+(y+1.5)^2=\frac{25}{4}$

---

(19) $x^2+(y+10)^2=16$

(20) $(x-1.5)^2+(y+8)^2=\frac{53}{4}$

---

(21) $(x+1)^2+(y+6)^2=29$

---

(22) معادلات:

إفرض أن $p(x,y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وإحداثيات بؤرته ورؤوسه موضحه بإستعمال تعريف القطع الناقص والبعد بين أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت .

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\sqrt{x^2+(y+c)^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}=2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$

$$x^2+y^2-2cy+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+y^2+2cy+c^2$$

$$4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}=4a^2+4cy$$

$$a^2\left(x^2+y^2+2cy+c^2\right)=a^4+2a^2cy+c^2y^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2+2a^2cy+a^2c^2=a^4+2a^2cy+c^2y^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2=a^4+c^2y^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$a^2-c^2=b^2 \quad \rightarrow\rightarrow \quad a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

---

(23)

(a) طول المحور الأصغر **71.35** مليون ميل

(b) $e=0.203$

أوجد المركز و البؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

(24)

المركز: $(-5,0)$

البؤرتين: $(-2,0)$ ، $(-8,0)$

الرأسين: $(-1,0)$ ، $(-9,0)$

---

(25)

المركز: $(-2,1)$

البؤرتين: $(-2,-3)$ ، $(-2,5)$

الرأسين: $(-2,-4)$ ، $(-2,6)$

(26)

المركز: $(-1,0)$

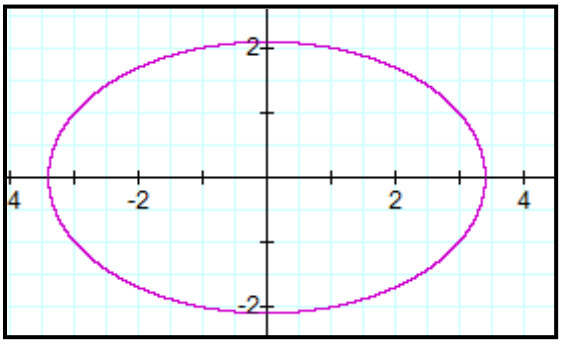
البؤرتين: $(-1,7)$ ، $(-1,-7)$

الرأسين: $(-1,\sqrt{65})$ ، $(-1,-\sqrt{65})$

---

(27) **شاحنات:**

(a)



(b) $\frac{x^2}{11.56}+\frac{y^2}{4.41}=1$

(c) $e=0.79$

أكتب معادلة القطع الناقص الذى يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتى:

(28) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

(29) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

(30) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{36}=1$

(31) $\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{48}=1$

---

(32) **هندسة:**

$(x-6.5)^2+(y-4.5)^2=32.5$

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى تمر بالنقاط المعاطة فى كل مما ياتى:

(33) $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

(34) $(x-1)^2+(y+7)^2=16$

(35) $x^2+(y-6)^2=9$

(36) $(x+1)^2+(y-4)^2=64$

مسائل مهارات التفكير العليا

(37) **إكتشف الخطأ:**

كلاهما إجابة صحيحة، المحور الأكبر في الشكل الأيسر الأفقي، في حين هو رأسي في الشكل الأيمن

(38) تبرير:

لا، فإذا كان $a^2 = p + r$ ، $b^2 = p$ فإن $c = \pm\sqrt{r}$ والبؤرتين للقطع $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 1$ هما $(0, \sqrt{r})$ ، $(0, -\sqrt{r})$ بينما البؤرتان للقطع $\frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$ هما $(\sqrt{r}, 0)$ ، $(-\sqrt{r}, 0)$

تحد:

(39) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

---

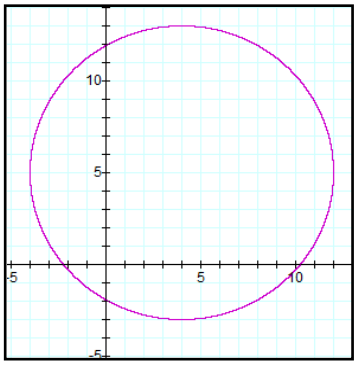
(40) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$

---

(41) مسألة مفتوحة:

المجال: $[h - r \ , h + r]$

مجال $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 8^2$ هو: $[-4 \ , 12]$



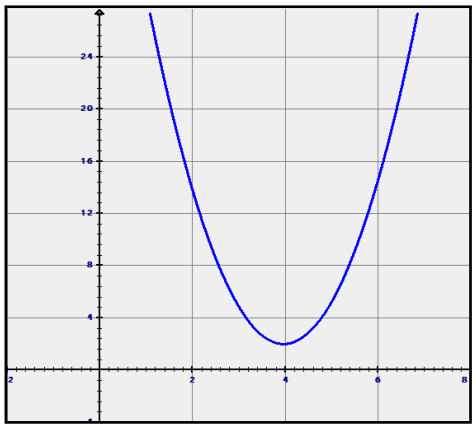
(42) اكتب:

بما أن $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ فعندما تقترب قيمة a من قيمة b فإن قيمة c تقترب من الصفر ويقترب الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$ من الصفر وتقترب البؤرتان من المركز، وبذلك يقترب شكل القطع الناقص من الدائرة

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافيء المعطاة معادلته فى كل مما يأتى:

(43)



القطع المكافيء مفتوح لأعلى

الرأس: $(4,2)$

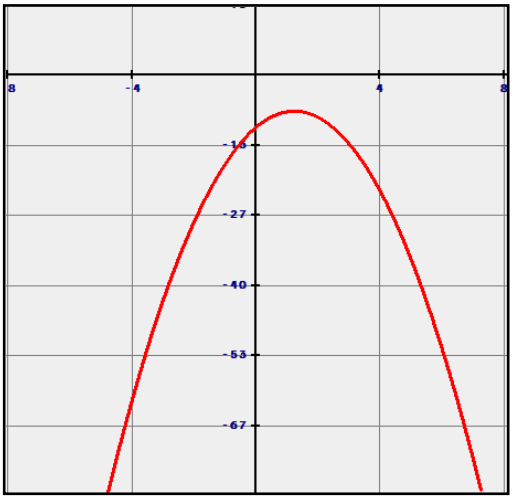
البؤرة: $(4,2.08)$

الدليل: $y=1.92$

محور التناظر: $x=4$

---

(44)



القطع المكافيء مفتوح لأسفل

الرأس: $(\frac{5}{4},\frac{-55}{8})$

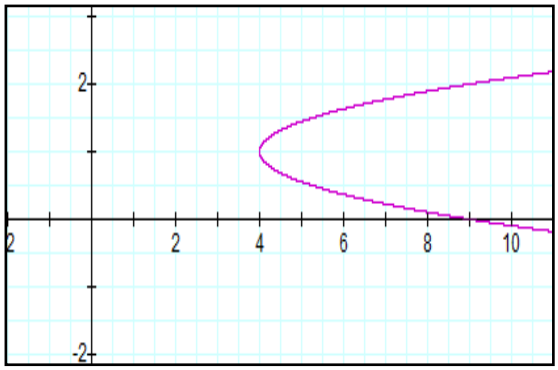
البؤرة: $(\frac{5}{4},\frac{56}{8})$

الدليل: $y=\frac{-27}{4}$

محور التناظر: $x=\frac{5}{4}$

---

(45) القطع المكافيء مفتوح الى اليمين



الرأس: $(4,1)$

البؤرة: $(4.05,1)$

الدليل: $x=3.95$

محور التناظر: $y=1$

حدد كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$:

(46) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = \frac{5\pi}{4}$

---

(47) $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = \pi$

---

(48) $\theta = \frac{11\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$

لكل دالة مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن ، وحدد مجالها :

(49) $f^{-1}(x) = \frac{-3x-2}{x-1}$ ⟵ **المجال:** $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

---

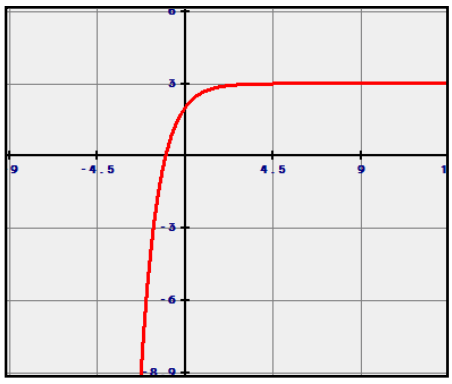
(50) $f^{-1}(x) = -x^2 + 5$ ⟵ **المجال:** $[0,\infty)$

---

(51) **لا يمكن إيجاد** f^{-1}

---

(52) **المدى:** $(-\infty,3)$



تدريب على اختبار

(53) B 8

---

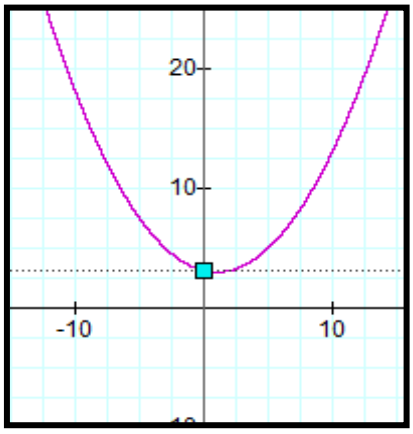
(54) c $\frac{x^2}{182.25}+\frac{y^2}{56.25}=1$

إختبار منتصف الفصل

اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتى ، ثم مثل منحناهما بيانياً:

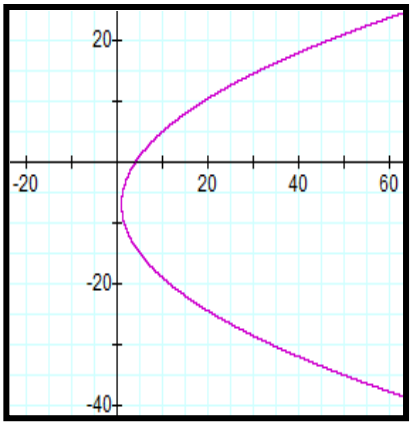
(1)

$$(x-1)^2 = 8(y-3)$$



(2)

$$(y+7)^2 = 16(x-1)$$



---

(3) إختيار من متعدد:

D

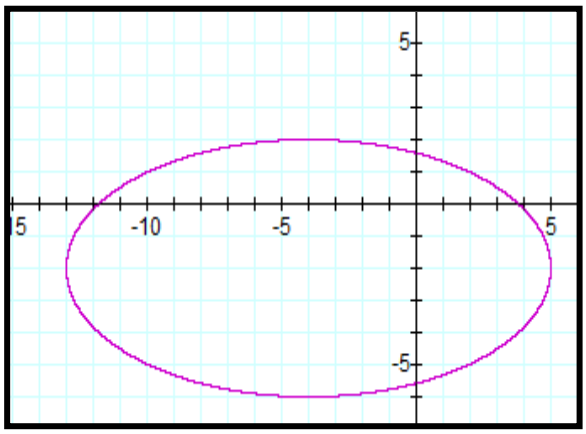
---

(4) تصميم:

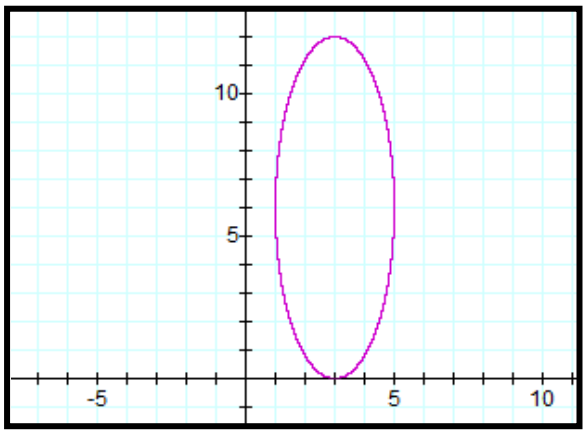
$$y = \frac{2}{625}x^2$$

مثل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته فى كل مما يأتى بيانياً:

(5)



(6)



اكتب معادلة كل من القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة فى كل مما يأتى :

(7) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{20}=1$

(8) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$

(9) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+7)^2}{36}=1$

(10) $\frac{(x-8)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{49}=1$

---

(11) سباحة:

(a حوالي $22\ ft$

(b $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{121}=1$

---

(12) اختيار من متعدد:

$1 \leftarrow\leftarrow\leftarrow C$

(3 – 4) القطوع الزائدة

■ تحقق من فهمك:

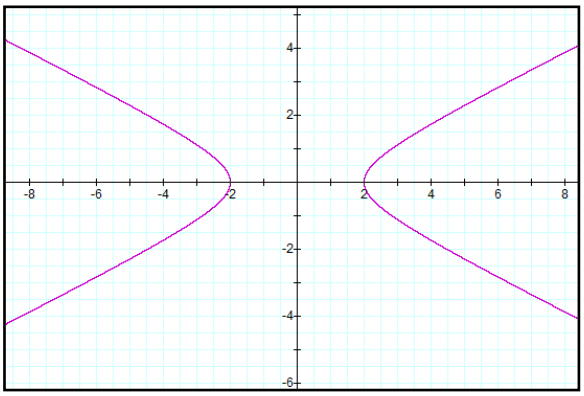
(1)

(1A) الاتجاه: أفقي، المركز: $(0,0)$

البؤرتان: $(\pm\sqrt{5},0)$

الرأسان: $(-2,0)$ ، $(2,0)$

خط التقارب: $y=\pm\frac{1}{2}x$

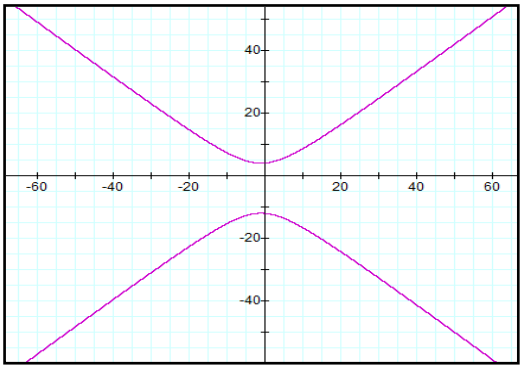


(1B) الاتجاه: رأسي، المركز: $(-1,-4)$

البؤرتان: $(-1,-4\pm\sqrt{145})$

الرأسان: $(-1,4)$ ، $(-1,-12)$

خط التقارب: $y+4=\pm\frac{8}{9}(x+1)$



■ تحقق من فهمك:

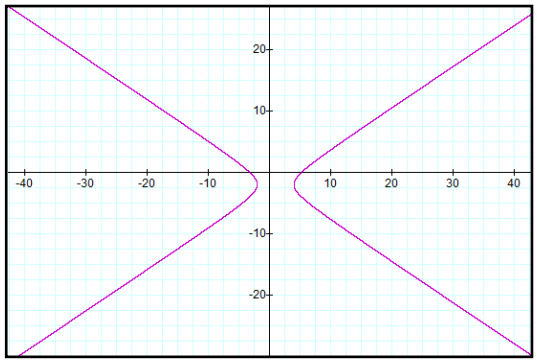
(2)

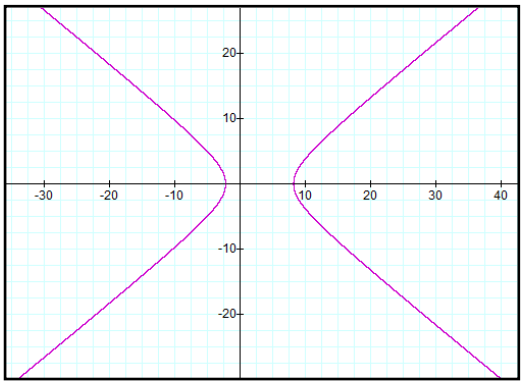
(2A) الاتجاه: أفقي، المركز: $(1,-2)$

البؤرتان: $(1\pm\sqrt{13},-2)$

الرأسان: $(4,-2)$ ، $(-2,-2)$

خط التقارب: $x+2=\pm\frac{2}{3}(y-1)$





$(2B)$ الاتجاه: أفقي، المركز: $(3,0)$

البؤرتان: $(3\pm3\sqrt{5},0)$

الرأسان: $(3\pm3\sqrt{3},0)$

خط التقارب: $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}(x-3)$

■ تحقق من فهمك:

(3)

$\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{25}=1$ $(3A)$

$\frac{(x-7)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ $(3B)$

■ تحقق من فهمك:

(4)

$e=\frac{c}{a}=1.5$ $(4A)$

$e=\frac{c}{a}=2.45$ $(4B)$

■ تحقق من فهمك:

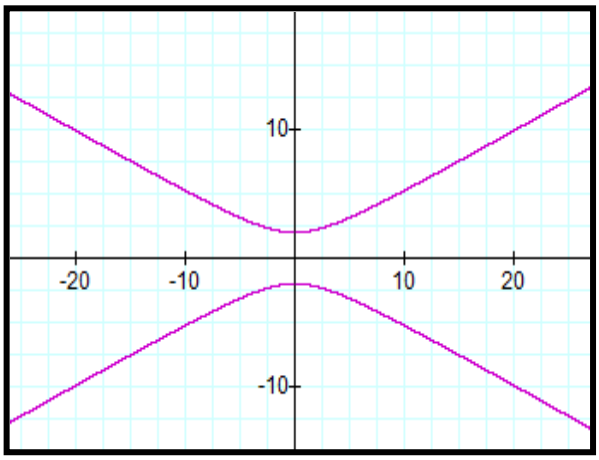
(5) ملاحة بحرية:

$$\frac{x^2}{1600}-\frac{y^2}{8400}=1 \quad (4A)$$

$$(40,0) \quad (4B)$$

تدرب وحل المسائل.

حدد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثل منحناه بيانياً:

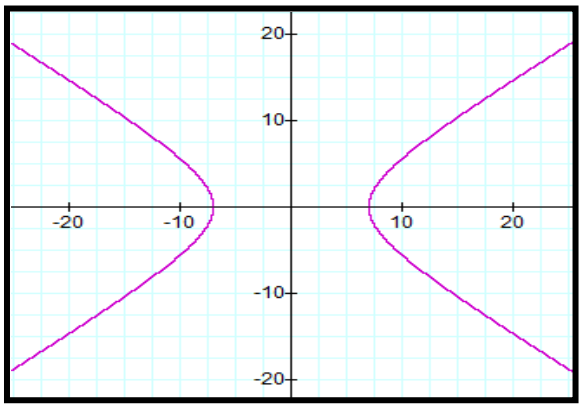


(1) الاتجاه: رأسي، المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,-2)$ ، $(0,2)$

البؤرتان: $(0,-\sqrt{21})$ ، $(0,\sqrt{21})$

خط التقارب: $y=\pm\frac{2\sqrt{17}}{17}x$



(2) الاتجاه: أفقي

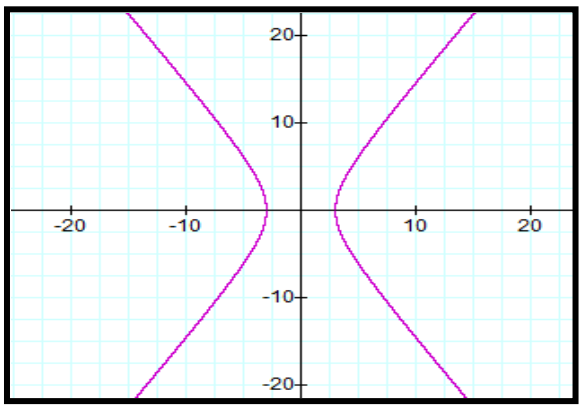
المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(\pm 7,0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{79},0)$

خط التقارب: $y=\mp\frac{\sqrt{30}}{7}x$

(3)



الاتجاه: أفقي

المركز: $(0,0)$

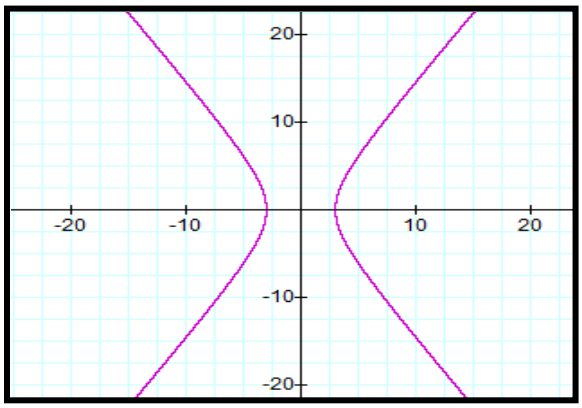
الرأسان: $(\pm 3,0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{30},0)$

خط التقارب: $y = \mp\frac{\sqrt{21}}{3}x$

---

(4) الاتجاه: أفقي



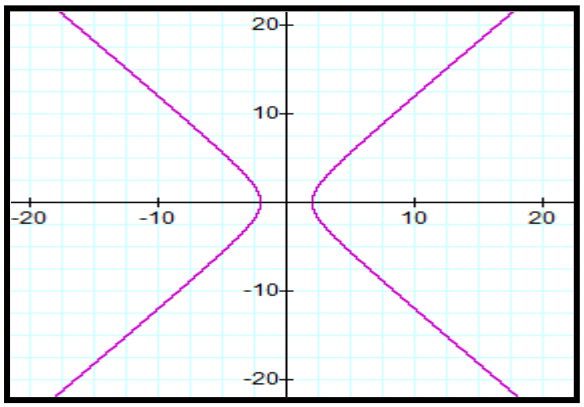
المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,\mp 5)$

البؤرتان: $(0,\pm\sqrt{39})$

خط التقارب: $y = \pm\frac{5\sqrt{14}}{14}x$

(5) الاتجاه: أفقي

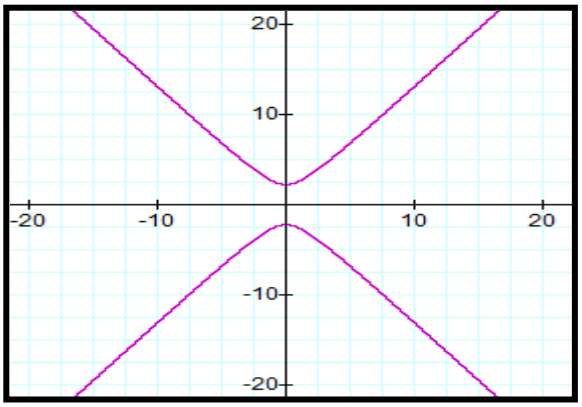


المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(\pm 2,0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{10},0)$

خط التقارب: $y = \mp\frac{\sqrt{6}}{2}x$



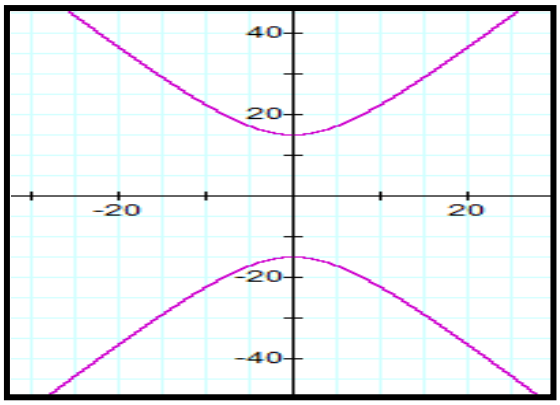
(6) الاتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0,\mp\sqrt{5})$

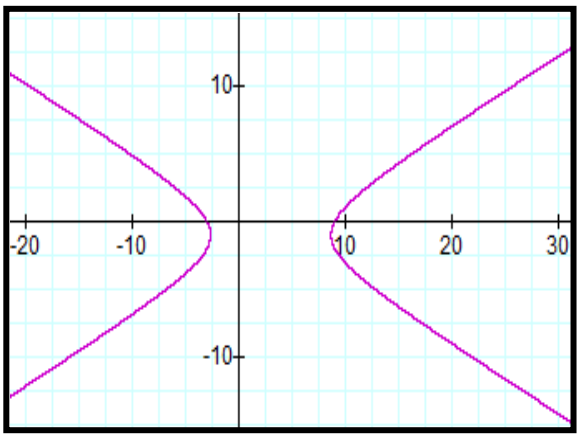
البؤرتان: $(0,\pm 2\sqrt{2})$

خط التقارب: $y=\mp\frac{\sqrt{15}}{3}x$



(7) إضاءة:

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية ثم حدد خصائصه ثم مثل منحناه بيانياً



(8) $\frac{(x-3)^2}{32}-\frac{(y+1)^2}{8}=1$

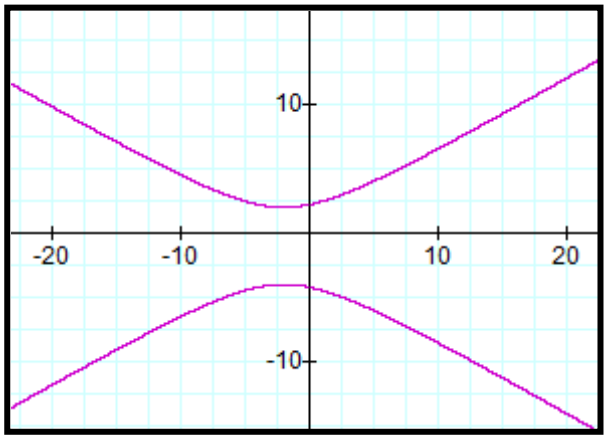
الاتجاه: أفقي

المركز: $(3,-1)$

الرأسان: $(3\pm 4\sqrt{2},-1)$

البؤرتان: $(3\pm 2\sqrt{10},-1)$

خطا التقارب: $y+1=\mp\frac{2\sqrt{19}}{19}(x-3)$



$$\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{27}=1 \quad (9)$$

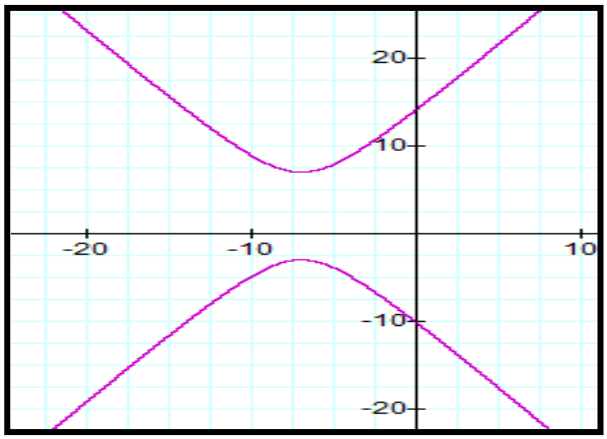
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2,-1)$

الرأسان: $(-2,-4)$ ، $(-2,2)$

البؤرتان: $(-2,-7)$ ، $(-2,5)$

خطا التقارب: $y+1=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$



$$\frac{(y-2)^2}{25}-\frac{(x+7)^2}{10}=1 \quad (10)$$

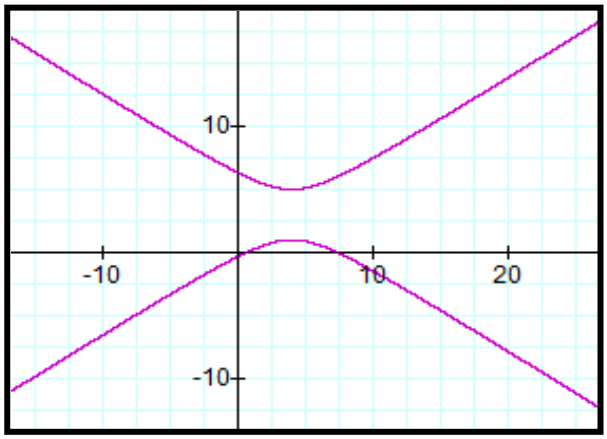
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-7,2)$

الرأسان: $(-7,7)$ ، $(-7,-3)$

البؤرتان: $(-7,2\mp\sqrt{35})$

خطا التقارب: $y+2=\mp\frac{\sqrt{10}}{2}(x+7)$



$$\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x-4)^2}{9}=1 \quad (11)$$

الاتجاه: رأسي

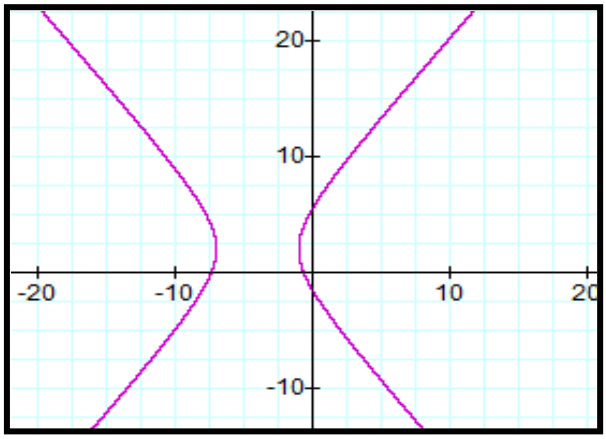
المركز: $(4,3)$

الرأسان: $(4,5)$ ، $(4,1)$

البؤرتان: $(4,3\mp\sqrt{13})$

خطا التقارب: $y-3=\mp\frac{2}{3}(x-4)$

$$\frac{(x+4)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1 \quad (12)$$



الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4,2)$

الرأسان: $(-7,2)$ ، $(-1,2)$

البؤرتان: $(1,2)$ ، $(-9,-2)$

خطا التقارب: $y-2=\mp\frac{4}{3}(x+4)$

أكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

$$\frac{(y-1)^2}{15}-\frac{(x+1)^2}{49}=1 \quad (13)$$

$$\frac{(x-1)^2}{39}-\frac{(y-5)^2}{64}=1 \quad (14)$$

$$\frac{(y-6)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{49}=1 \quad (15)$$

$$\frac{(x+4)^2}{144}-\frac{(y-7)^2}{25}=1 \quad (16)$$

$$\frac{(x+7)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{7}=1 \quad (17)$$

$$\frac{(y-4)^2}{36}-\frac{(x-2)^2}{64}=1 \quad (18)$$

$$\frac{(x-6)^2}{36}-\frac{(y+2)^2}{13}=1 \quad (19)$$

---

(20) **هندسة معمارية:**

(a $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{7(x-5)^2}{225} = 1$

(b 90 ft تقريبا

حدد الإختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاه معادلته في كل مما يأتي:

(21) $e = 1.52$

(22) $e = 1.27$

(23) $e = 1.06$

(24) $e = 1.33$

(25) $e = 1.58$

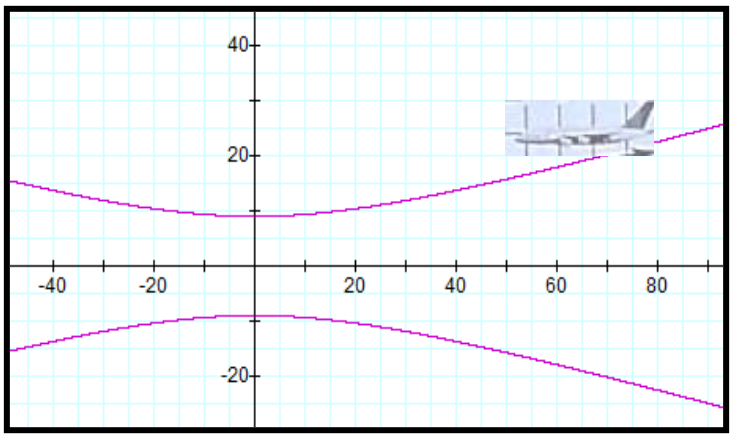
(26) $e = 2.83$

---

(27) **طيران:**

(a $\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{1215} = 1$

(b



(c $(40, 13.7)$

---

(28) **هندسة معمارية :**

(a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5760} = 1$

(b) نصف قطر القمة $4.3\ m$ تقريبا

نصف قطر القاعدة $5.7\ m$ تقريبا

أكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانياً فى كل مما يأتى:

(29) $\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

---

(30) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

---

(31) **طقس:**

$$\frac{x^2}{2722500} - \frac{y^2}{1277500} = 1$$

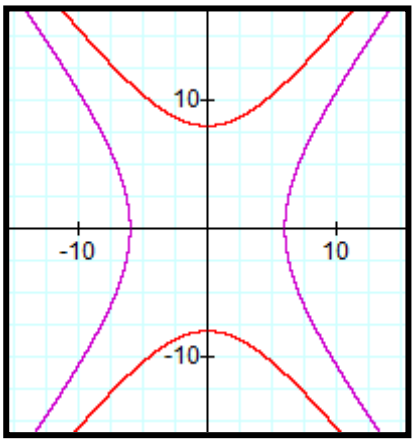
(32)

$$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$$

---

(33) **تمثيلات متعددة:**

(a) **بيانياً:**



---

b) **تحليلياً:**

البؤرتان للمنحنى الأول هما: $(-10,0)$ ، $(10,0)$.والبؤرتان للمنحنى الثاني هما: $(0,-10)$ ، $(0,10)$ ، والرأسان للمنحنى الأول هما: $(-6,0)$ ، $(6,0)$.والرأسان للمنحنى الثاني هما: $(0,-6)$ ، $(0,6)$ والمنحنيان لهما نفس خطي التقارب.

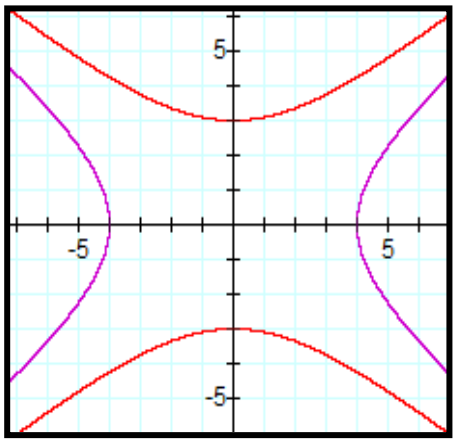
---

c) **تحليلياً:**

معادلة القطع الزائد المرافق له هو $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

---

d) **بيانياً:**



---

e) **لفظياً:**

القطعان الزائدان المرافقان لهما نفس خطي التقارب ولهما نفس البعد بين المركز والبؤرتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

(34) مسألة مفتوحة:

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{15} = 1$$

---

(35) تبرير:

(a

قطع مكافئ، إذا كان $rs = 0$ فإن $r = 0$ أو $s = 0$. لذا فإما أن الحد x^2 يساوي صفر، أو أن الحد y^2 يساوي صفر. وبما أن المعادلة لها فقط حد مربع وحيد فإنها ستكون معادلة قطع مكافئ.

(b

قطع ناقص، إذا كان $rs > 0$ فإن r و s كلاهما أكبر من صفر أو كلاهما أقل من صفر. وفي كلتا الحالتين فإن الحدين المربعين لهما نفس الإشارة. لذا ستكون معادلة قطع ناقص.

(c

دائرة؛ إذا كان $r = s$ فإن معاملي الحدين التربيعيين المضافين متساويان، ويمكن إعادة كتابة المعادلة بحيث يصبح معامل كل منها هو 1 ، لذا فالمعادلة تمثل دائرة.

(d

قطع زائد، إذا كان $rs < 0$ فإن r و s مختلفان في الإشارة. أي أن الحدين التربيعيين مختلفان في الإشارة. لذا فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً.

---

(36) تبرير:

أحيانا، ومثال ذلك عندما تكون إحداثيات الرأسين والبؤرتين معلومة فإنة يمكن كتابة معادلة القطع الزائد، وعندما يكون كل من الرأسين والمحور القاطع معلوماً فقط فإن من غير الممكن كتابة معادلة القطع الزائد.

---

(37) تحد:

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{72}=1$$

---

(38) برهان:

بما أن القطع الزائد متساوي الساقين فإن $a=b$ وبما أن

$$\because c^2=a^2+b^2$$

$$\therefore c^2=a^2+a^2 \qquad a=b$$

$$\therefore c^2=2a^2$$

$$\therefore c=a\sqrt{2}$$

$$\because e=\frac{c}{a}$$

$$\therefore e=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$$

لذا فإن الإختلاف المركزي للقطع الزائد متساوي الساقين هو $\sqrt{2}$.

---

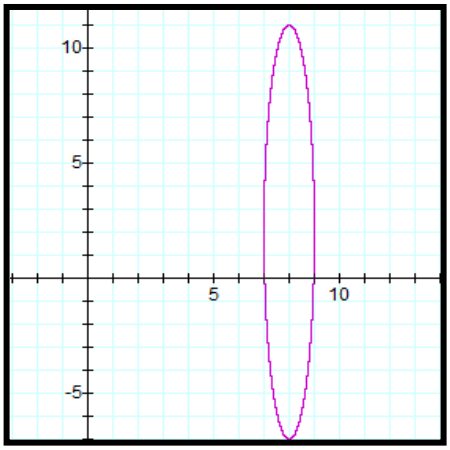
(39) اكتب:

إجابة ممكنة: أولا حدد إن كان اتجاة القطع الزائد رأسياً أو أفقياً. ثم استعمل البؤرتين لتعيين مركز القطع الزائد وتحديد قيم h,k. واستعمل طول المحور القاطع لإيجاد a^2 ، ثم أوجد c المسافة بين المركز وإحدى البؤرتين، ثم استعمل المعادلة $b^2=c^2-a^2$ لتجد b^2. وأخيراً استعمل الصورة القياسية لكتابة المعادلة بالاعتماد على المحور القاطع إن كان موازياً للمحور x أو المحور y.

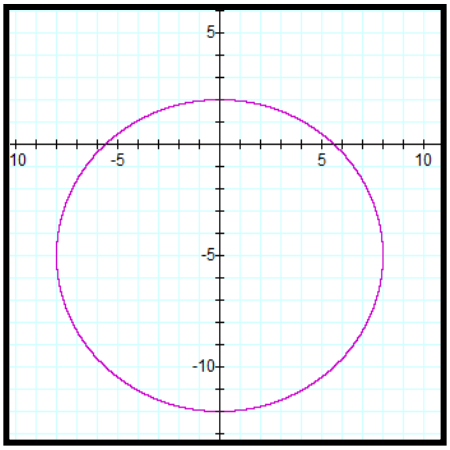
مراجعة تراكمية

مثل معادلة القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

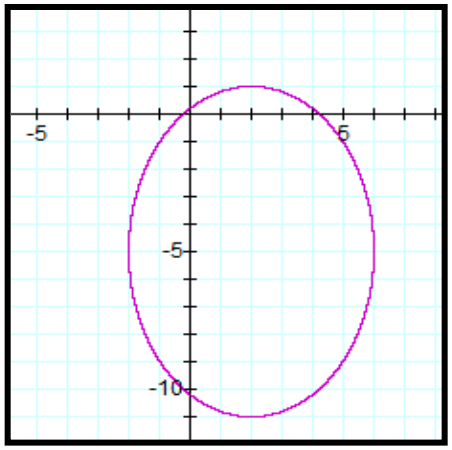
(40)



(41)



(42)



(a) $105\ ft$

(b) $5\ s$

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ :

(44) $2n\pi\ ,n\in Z$

---

(45) $\frac{3\pi}{2}+n\pi\ ,n\in Z$

---

(46) ليس لها حل.

تدرب على إختبار

(47) **مراجعة:**

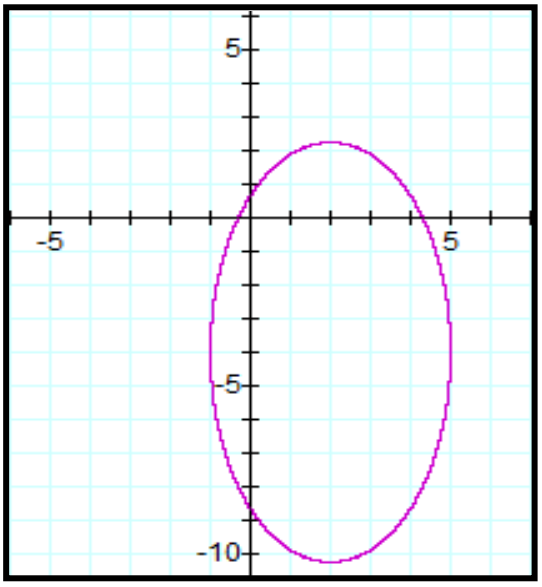
$H \leftarrow\leftarrow\leftarrow y=\frac{5}{4}x\ ,y=-\frac{5}{4}x$

---

(48) **سؤال ذو إجابة قصيرة:**

$$y - 1 = \pm\frac{1}{2}(x + 1)$$

(4 – 4) تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها



■ تحقق من فهمك:

(1)

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{39}=1$$

قطع ناقص

■ تحقق من فهمك:

(2)

(2A) قطع زائد

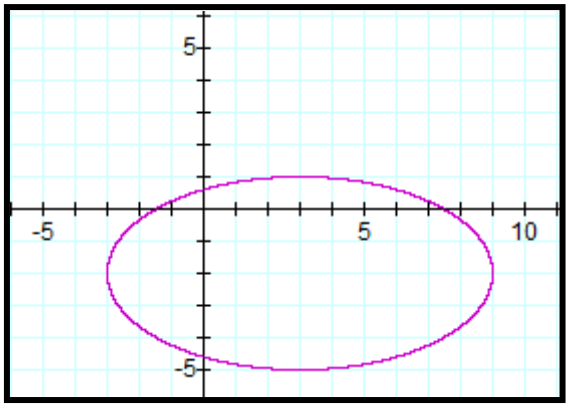
(2B) قطع زائد

(2C) قطع ناقص

تدرب وحل المسائل.

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثلة ومثّل منحناه بيانياً:

(1)

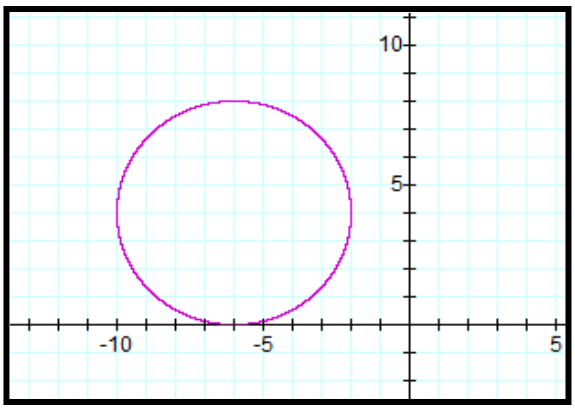


$$\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

قطع ناقص

---

(2)

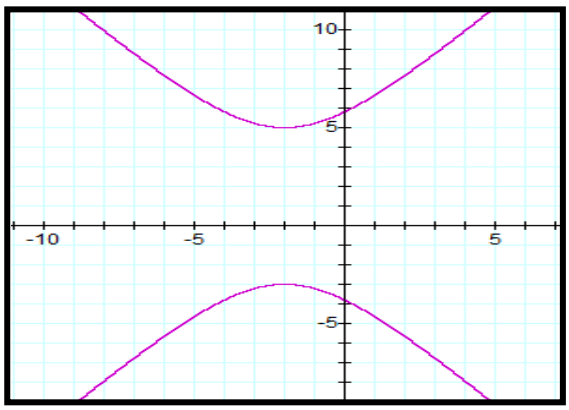


$$(x+6)^2+(y-4)^2=16$$

دائرة

---

(3)

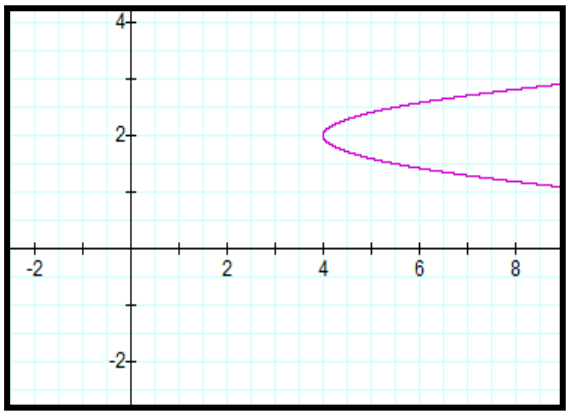


$$\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$$

قطع زائد

---

(4)



$$x = 6(y-2)^2 + 4$$

قطع مكافئ

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثلة كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية :

(5) قطع مكافئ

(6) قطع زائد

(7) دائرة

(8) قطع مكافئ

(9) قطع زائد

(10) قطع زائد

(11) قطع ناقص

---

(12) طيران:

(a $$(x-660)^2 = \frac{-125}{3}(y-10500)$$

قطع مكافئ

(b $x = 1320ft$

(c $y = 10500ft$

قابل بين المنحنيات أدناة والمعادلة التى تمثل كل منها:

(13) $9x^2+16y^2=72x+64y$ (c

---

(14) $x^2+y^2-8x-4y=-4$ (a

---

(15) $9x^2-16y^2-72x+64y=64$ (b

قابل بين كل حالة فى التمارين(16 – 19) مع المعادلة التى تمثل (a – d) :

(16) **حاسوب:**

$x^2+y^2-18x-30y-14094=0$ ←←← (d)

(17) **لياقة:**

$25x^2+100y^2-1900x-2200y+45700=0$ ←←← (b)

(18) **إتصالات:**

$47.25x^2+9y^2+18y+33.525=0$ ←←← (a)

---

(19) **رياضة:**

$16x^2-90x+y-0.25=0$ ←←← (c)

(20) تمثيلات متعددة:

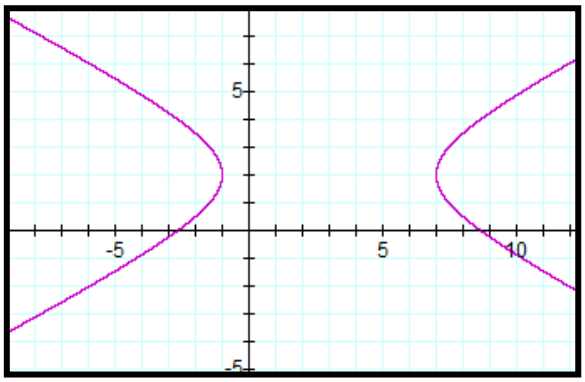
a) **تحليلياً:**

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

b) **جبرياً:**

$$x^2+4y^2-6x+16y+9=0$$

c) **بيانياً:**



مسائل مهارات التفكير العليا

(21) تبرير:

صحيحة دائما، إذا كان القطع رأسياً فإن $B=0$ ولذا تصبح المعادلة معادلة دائرة حيث $A=C$

---

(22) مسألة مفتوحة:

$$9x^2+y^2+6xy+2x+2y+8=0$$

---

(23) اكتب:

هندسياً:

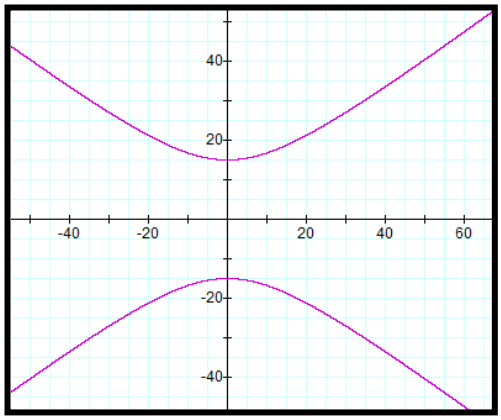
القطع الناقص عبارة عن دائرة مضغوطة طولياً أو عرضيا، وكلاهما منحنيان مغلقان بعكس القطعان المكافئ والزائدفهما منحنيان مفتوحان وممتدان، لكن الفرق بينهما أن القطع المكافئ يتكون من فرع واحد، بينما القطع الزائد يتكون من فرعين كل منهما تماثل للآخرى.

جبرياً:

إذا كتبت المعادلة في الصورة القياسية بشرط $B=0$ ، فمعادلة القطع المكافئ تحوي حداً تربيعياً واحداً (إما Ax^2 أو Cy^2) أما معادلة الدائرة فتتصف بأن $A=C$ ، أما بالنسبة للقطع الناقص فأن لكل من $A\ ,C$ الإشارة نفسها و $A\neq 0\ ,C\neq 0$ ، أما في حالة القطع الزائد $A\ ,C$ متعاكستان و $A\neq 0\ ,C\neq 0$.

مراجعة تراكمية

(24) فلك:



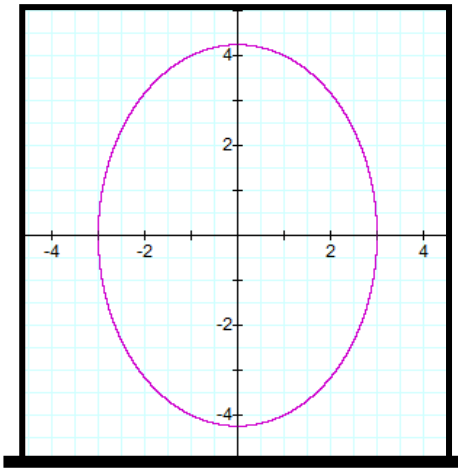
الرأسان: $(0,-15)$ ، $(0,15)$

البؤرتان: $(0,-25)$ ، $(0,25)$

خطا التقارب: $y=\pm\frac{3}{4}x$

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلتة في كل مما يأتي ، ثم مثّل منحناه بيانياً:

(25)



الإتجاه: رأسي

المركز: $(0,0)$

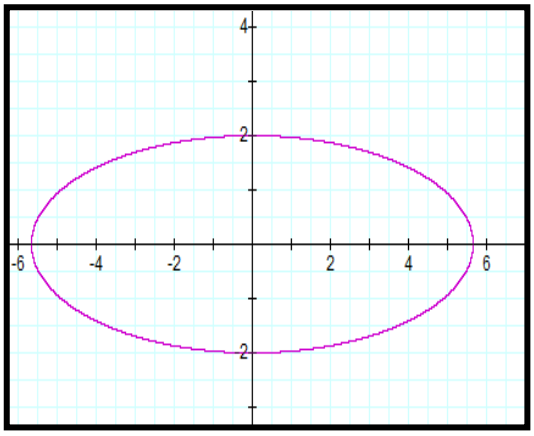
الرأسان: $(0,-3\sqrt{2})$ ، $(0,3\sqrt{2})$

البؤرتان: $(0,-3)$ ، $(0,3)$

الرأسان المرافقان: $(-3,0)$ ، $(3,0)$

---

(26)



الإتجاه: أفقي

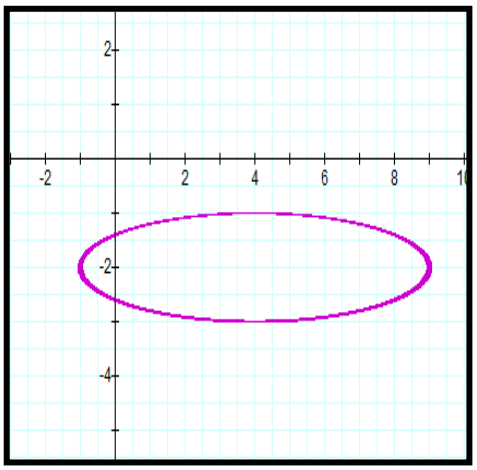
المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(2\sqrt{2},0)$ ، $(-2\sqrt{2},0)$

البؤرتان: $(-2,0)$ ، $(2,0)$

الرأسان المرافقان: $(0,-2)$ ، $(0,2)$

(27)



الإتجاه: أفقي

المركز: $(4,-2)$

الرأسان: $(-1,-2)$ ، $(9,-2)$

البؤرتان: $(4+2\sqrt{6},-2)$ ، $(4-2\sqrt{6},-2)$

الرأسان المرافقان: $(4,-1)$ ، $(4,-3)$

---

(28) فلك:

$$\frac{x^2}{9.006\times10^{15}}+\frac{y^2}{8.427\times10^{15}}=1$$

تدرب على إختبار

حل كل معادلة من المعادلتين الآتيتين :

(29)

$$8n(n-1)=4^2=16$$

$$8n^2-8n=16$$

$$n^2-n-2=0$$

$$n=2$$

---

(30)

$$9p\,(p+8) = 8^2 = 81$$
$$9p^2 + 72p = 81$$
$$p^2 + 8p = 9$$
$$p^2 + 8p - 9 = 0$$
$$p = 1$$

---

(31) قطع مكافئ

---

(32) $A \leftarrow\leftarrow\leftarrow y = x^2 - 4x + 6$

معمل الحاسبة البيانية أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية

حل بيانياً كل نظام معادلات فيما يأتى مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة:

(1) $(-2,-1)$ ، $(2,1)$

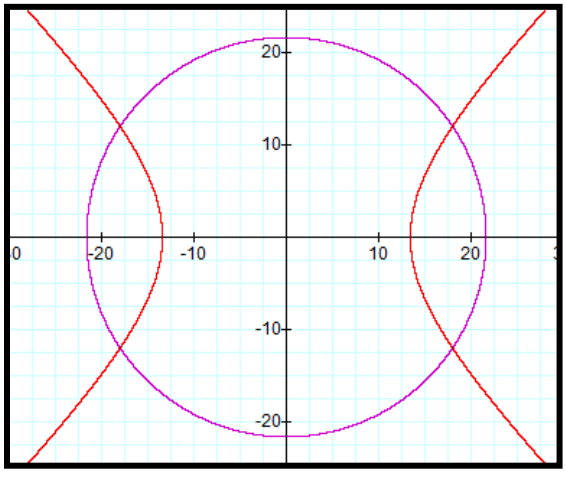
(2) $(1,-6.9)$ ، $(1,6.9)$

(3) $(-6,-8)$ ، $(6,8)$

(4) $(-2,3)$ ، $(1.5,-4)$

(5) $(-1.3,-2)$ ، $(1.3,-2)$ ، $(-1.3,2)$ ، $(1.3,2)$

(6) $(-3,2)$ ، $(0,-1)$



(7) تحد:

(a

$$x^2 + y^2 = 468$$
$$x^2 - y^2 = 180$$

(b

حل كل نظام متباينات فيما يأتى بيانياً:

(8) $(1.8, 2.4)$
(9) $(1, 6.9)$
(10) $(2.5, 2.5)$

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتى:

1) القطع المخروطي

2) المحل الهندسي

3) دليل

4) القطع الناقص

5) البؤرتين

6) الاختلاف المركزي

7) مركز

8) القطع الزائد

مراجعة الدروس

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاه معادلته فى كل مما يأتى:

(9

منحنى القطع مفتوح إلى الأعلى

الرأس: $(2\ ,\ -3)$ **والبؤرة** $(1\ ,\ -3)$

ومحور التماثل: $x=-3$ **والدليل** $y=-5$

وطول الوتر البؤري 2

(10

منحنى القطع مفتوح إلى الأسفل

الرأس: $(-1\ ,\ 2)$ **والبؤرة** $(-2\ ,\ 2)$

ومحور التماثل: $x=2$ **والدليل** $y=0$

وطول الوتر البؤري 4

(11

منحنى القطع مفتوح إلى اليمين

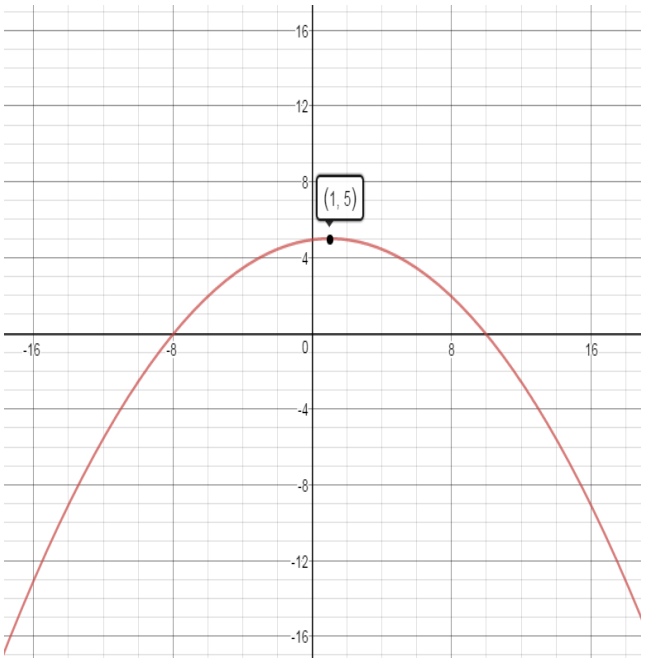
الرأس: $(3\ ,\ 5)$ **والبؤرة** $(3\ ,\ \frac{241}{48})$

ومحور التماثل: $y=3$ **والدليل** $x=\frac{239}{48}$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته فى كل مما يأتى ثم مثل منحناه بيانيا

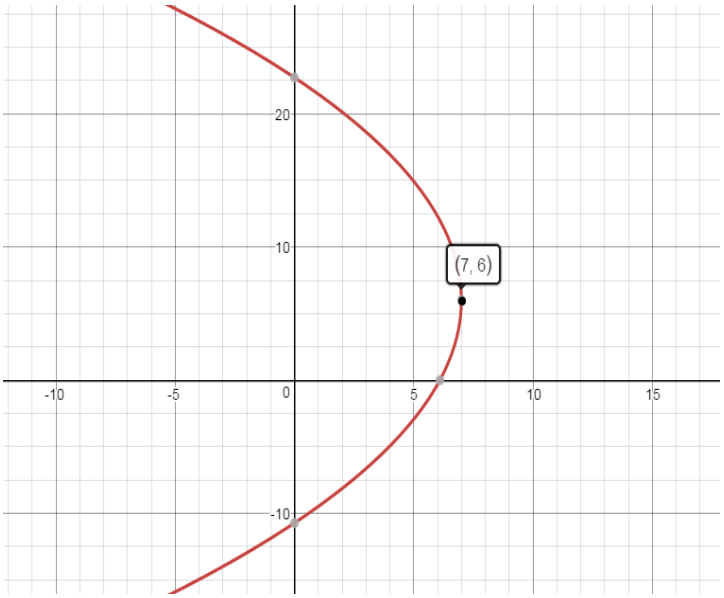
(12

$$(x-1)^2=-16(y-5)$$



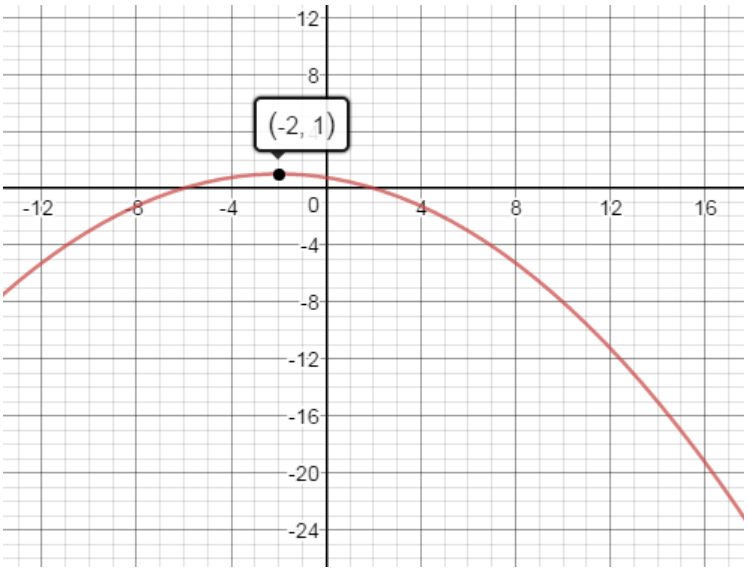
(13

$$(y-6)^2 = -40(x-7)$$



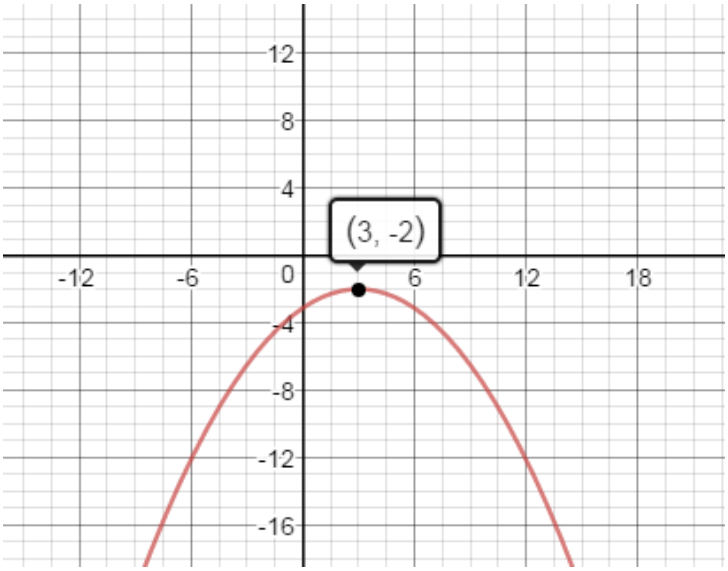
(14

$$(x+2)^2 = -16(y-1)$$



(15

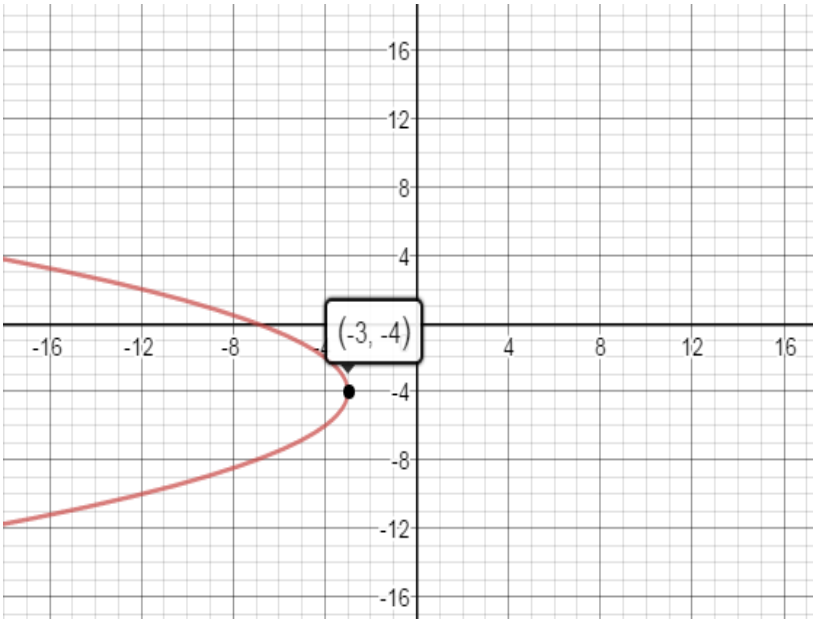
$$(x-3)^2 = -8(y+2)$$



اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاه فى كل مما يأتى ثم مثل منحناه بيانياً:

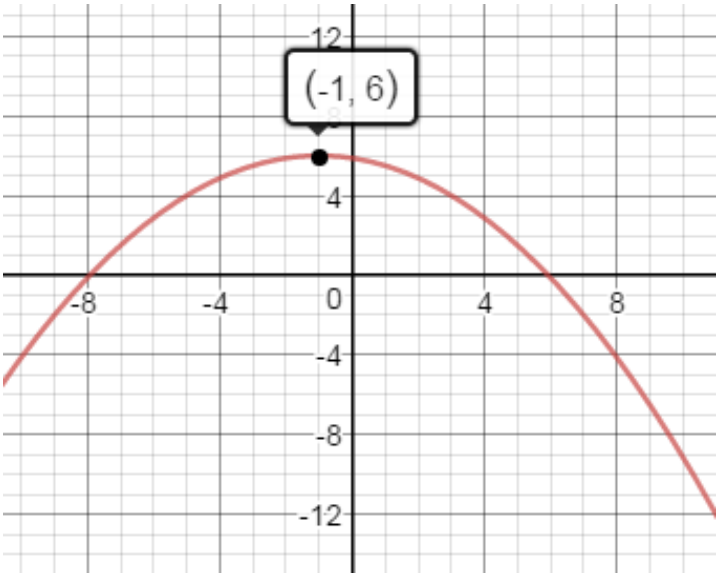
(16

$$(y+4)^2 = -4(x+3)$$



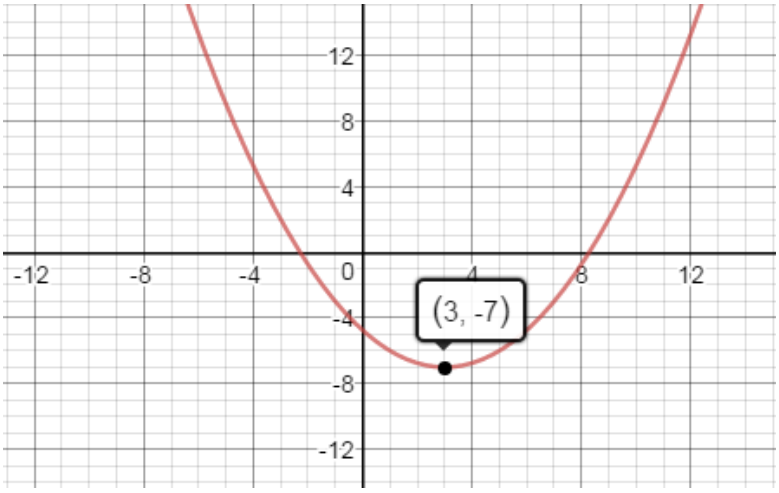
(17

$$(x+1)^2 = -8(y-6)$$



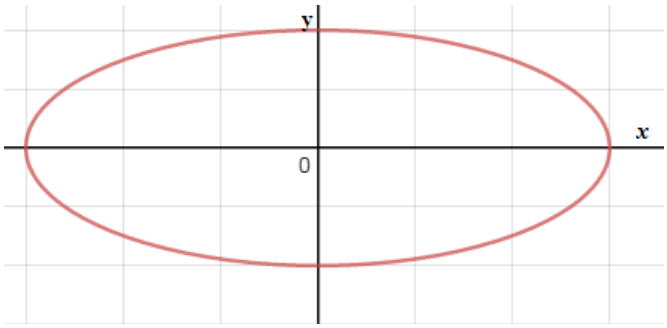
(18

$$(x-3)^2 = 4(y+7)$$

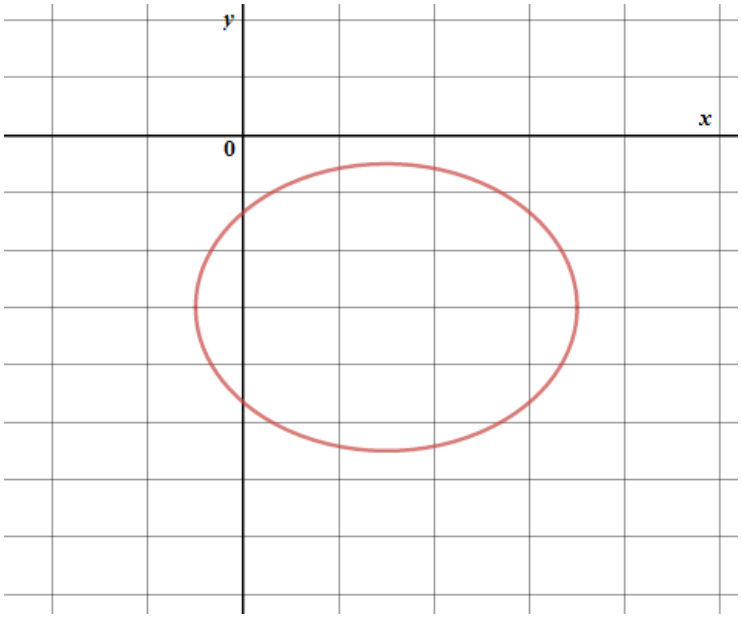


حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته فى كل مما يأتى ثم مثل منحناه بيانياً:

(19



(20



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

(21

$$\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$$

(22

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

(23

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحلات الآتية:

(24

$$(x+1)^2+(y-6)^2=9$$

(25

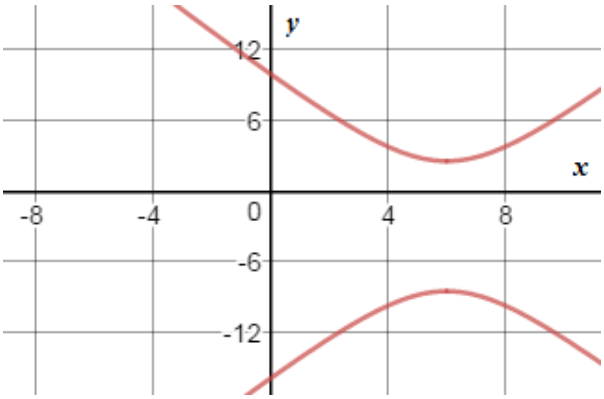
$$(x-1)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{29}{4}$$

(26

$$(x-1)^2+(y+4)^2=13$$

حدد خصائص القطع الزائد المعطاه معادلته فى كل مما يأتى ثم مثل منحناه بيانياً:

(27



الاتجاه: رأسي

المركز $(6,-3)$ ، الرأس: $\left(6\ ,\ -3\pm\sqrt{30}\right)$

البؤرتان: $\left(6\ ,\ -3\pm\sqrt{30}\right)$

محور التماثل: $x=6$

خطا التقارب: $y+3=\pm\frac{2\sqrt{15}}{15}(x-6)$

(28

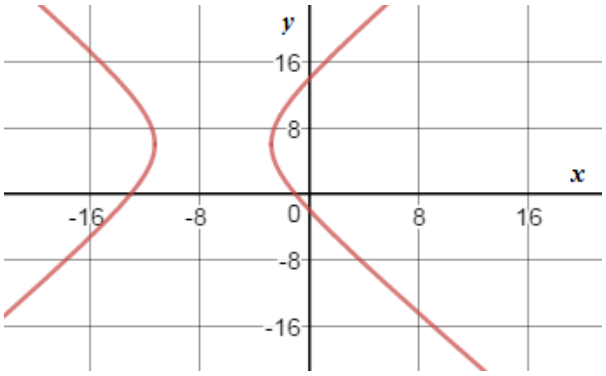
الاتجاه: أفقي

المركز $(-7, 6)$ ، الرأس: $(-7 \pm 3\sqrt{2}\ ,\ 6)$

البؤرتان: $(-7 \pm 3\sqrt{2}\ ,\ 6)$

محور التماثل: $y = 6$

خطا التقارب: $y - 6 = \pm\sqrt{2}(x + 7)$



(29

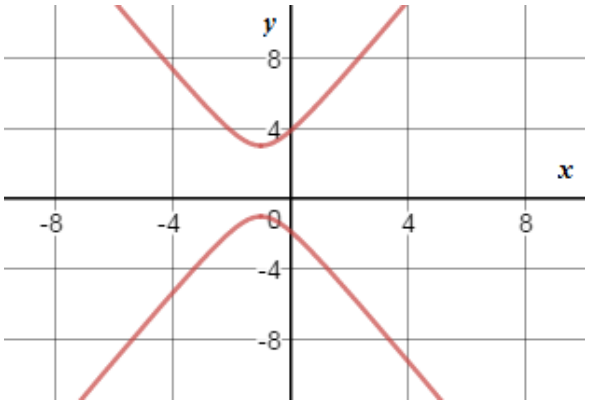
الاتجاه: رأسي

المركز $(-1\ ,\ 1)$ ، الرأسان: $(-1\ ,\ 3)$ و $(-1\ ,\ -1)$

البؤرتان: $(-1\ ,\ 1 \pm \sqrt{5})$

محور التماثل: $x = -1$

خطا التقارب: $y - 1 = \pm\ 2(x + 1)$



(30

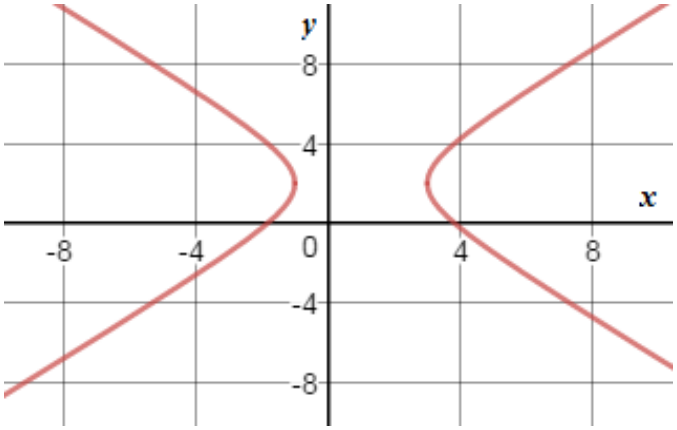
الاتجاه:أفقي

المركز $(1, 2)$ ، الرأس:$(-1, 2)$, $(3, 2)$

البؤرتان: $\left(1 \pm 2\sqrt{2}\ ,\ 2\right)$

محور التماثل: $y = 2$

خطا التقارب: $y - 2 = \pm\left(x - 1\right)$



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة فى كل مما يأتى:

(31

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(32

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

(33

$$\frac{(y-5)^2}{64} - \frac{(x-1)^2}{36} = 1$$

(34

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

35) قطع زائد

36) قطع مكافئ

37) قطع ناقص

تطبيقات وحل المسألة

38) أقواس:

a) $x^2 = -81y + 2025$

b) موقع البؤرة $= 4.75$ أقدام فوق سطح الأرض

39) حركة الماء:

a) $x^2 + y^2 = 900$

b) عدد الثواني $= 5$ ثواني

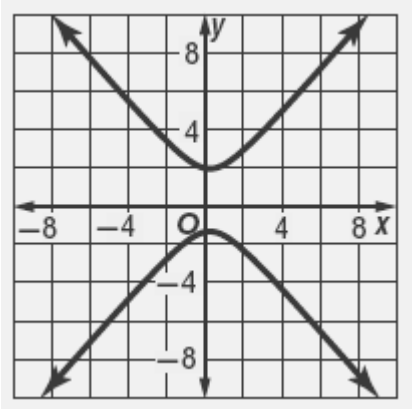
40) طاقة:

a) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{625} = 1$

b) ستزداد نسبة المقام المرتبط بـ y إلى المقام المرتبط بـ x

41) ضوء:

قطع زائد



اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

(1)

بما أن الرأسان $(h+a,k)=(7,-4)$ ، $(h-a,k)=(-3,-4)$

لذا فإن $k=-4$ ، $h=2$ ، $a=5$

بما أن البؤرتان $(h+c,k)=(6,-4)$ ، $(h-c,k)=(-2,-4)$

لذا فإن $c=4$ وبالتالي فإن $b=\sqrt{25-16}=3$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

---

(2)

بما أن البؤرتان $(h,k+c)=(-2,1)$ ، $(h,k-c)=(-2,-9)$

لذا فإن $h=-2$ ، $k=-4$ ، $c=5$

بما أن طول المحور الأكبر $2a=12$ فإن $a=6$

وبالتالي فإن $b=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$

وبالتالي فإن معادلة القطع الناقص تكون $\frac{(x+2)^2}{11}+\frac{(y+4)^2}{36}=1$

---

(3) اختيار من متعدد:

$C\leftarrow\leftarrow\leftarrow 4$

---

(4) جسور:

$$x^2=1492(y-5)$$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة فى السؤالين الآتيين:

(5)

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

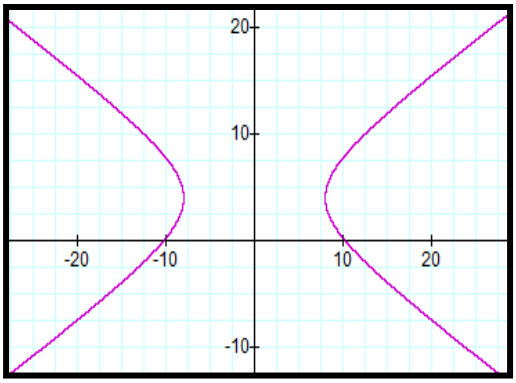
---

(6)

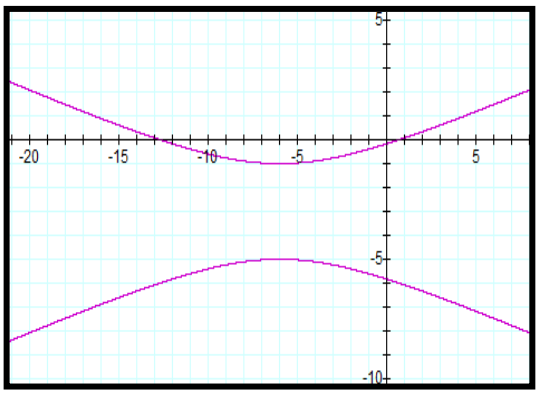
$$\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-8)^2}{12}=1$$

مثل بيانياً منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته فى السؤالين 11 و 12:

(7)



(8)



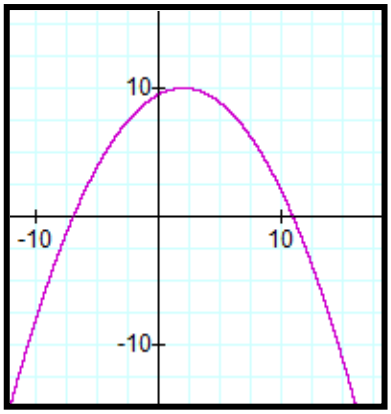
---

(9) اختيار من متعدد:

مستعملاً البؤرة F والرأس V ، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين ، ثم مثل منحنييهما بيانياً:

(10)

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي x فإن المنحني مفتوح رأسياً



البؤرة $(2,8)$ ، الرأس $(h,k)=(2,10)$ $(h,k+p)$

لذا فإن $h=2$ ، $k=10$ ، $p=8-10=-2$

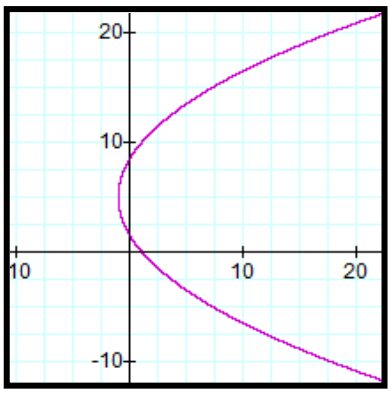
إذن معادلة القطع المكافئ $(x-h)^2=4p(y-k)$

هي $(x-2)^2=-8(y-10)$

---

(11)

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y فإن المنحني مفتوح أفقياً



البؤرة $(2,5)$ ، الرأس $(h,k)=(-1,5)$ $(h+p,k)$

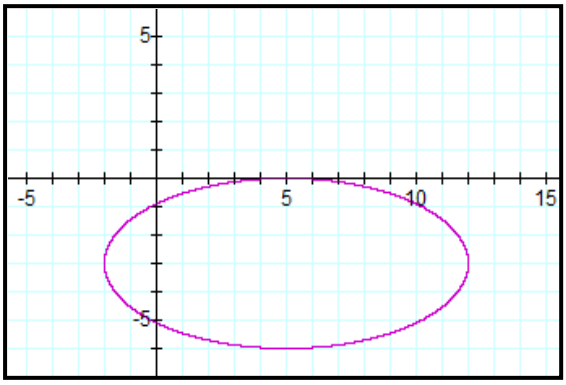
لذا فإن $h=-1$ ، $k=5$ ، $p=2+1=3$

إذن معادلة القطع المكافئ $(y-k)^2=4p(x-h)$

هي $(y-5)^2=12(x+1)$

مثل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته فى السؤالين الآتيين:

(12)



(13)