التكامل

تكامل غير محدد

$\int f(x)\,dx = F(x)$ تابع أصلي ..

f تابع ، f' مشتق

F تابع أصلي

$F'(x) = f(x)$

يكون F تابع أصلي لـ f إذا وفقط إذا كان $F' = f$

لكل تابع أكثر من تابع أصلي

قواعد

f	F
0	c
a	ax
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos x$	$\sin x$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
e^x	e^x
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$
$g' \cdot e^g$	e^g

$\frac{1}{x}$ — $\ln|x|$

$\frac{g'(x)}{g(x)}$ — $\ln|g(x)|$

$g'(x)\cdot g^r(x)$ — $\frac{g^{r+1}}{r+1}$

$\sin(g(x)) \xrightarrow{\text{اشتقاق}} g'\cos g$ ، $\xleftarrow{\text{تكامل}}$

$\cos(g(x)) \rightleftarrows -g'\sin g$

$\tan x \rightleftarrows 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cot x \longrightarrow -(1+\cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

قوانين

1) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

2) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

تكامل محدد

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حسب القواعد

مثل إيجاد التابع الأصلي وتعويض الحدود العليا - السفلى

خواص التكامل المحدد ...

$\int_a^b \lambda f = \lambda\int_a^b f$

$\int_a^b f = -\int_b^a f$

$\int_a^a f = 0$

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$\int_a^b (f_1+f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$

القيمة المطلقة

يجب أن نجزئ التكامل عند القيمة الصفرية التي تعدم ما داخل القيمة المطلقة وذلك إن وردت ضمن حدود التكامل ونقرر الإشارة من خلال القيمة التجريبية .

$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 |x-1| + \int_1^2 |x-1|$

التجزئة

$\int_a^b u v' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$

صحيح < جذر، $\cos$، $\sin$، e : u = صحيح ، v' = جذر، $\cos$، $\sin$، e

صحيح . $\ln$: $u = \ln$ ، v' = صحيح

كسري < $\sin$، $\cos$: u = $\sin$، $\cos$ ، v' = كسري

أسي + < $\sin$، $\cos$: دائري

$u =$ ، $u' =$

$v' =$ ، $v =$

تكامل بالكسور الجزئية

قوة البسط أكبر أو تساوي قوة المقام ← قسمة

قوة البسط أصغر من قوة المقام ← تفريق

المقام يكتب كجداء توابع ← الكسر يحب التحليل

$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

$\frac{1}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$

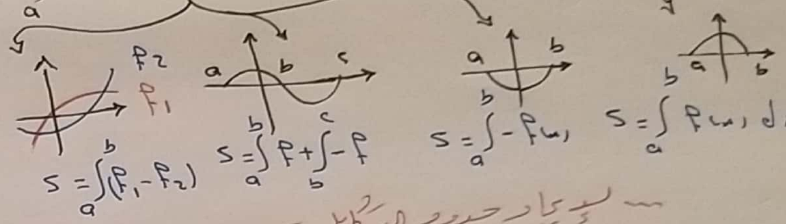
أ. محمد رسول الصباغ
٠٩٢٤١٢١١٠٩

د. محمد رسول الصباغ

٠٩٤٤١٢١١٠٩

المساحة والحجم

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



$$S=\int_a^b f(x)\,dx \qquad S=\int_a^b -f(x) \qquad S=\int_a^b f+\int_b^c -f \qquad S=\int_a^b (f_1-f_2)$$

لإيجاد حدود التكامل ...

تابع واحد: نحل المعادلة $f(x)=0$

تابعين: نحل المعادلة $f_1=f_2$

لمعرفة وضعية السطح ...

تابع: نعوض قيمة تجريبية من ضمن حدود التكامل

الناتج موجب ← فوق

الناتج سالب ← تحت

تابعين: نعوض قيمة تجريبية من ضمن حدود التكامل في التابعين الناتج الأكبر هو الأعلى ..

احسب مساحة السطح المحصور بين xx' و C الخط البياني للتابع $f(x)=x^2-x$

نحل المعادلة $f(x)=0 \Rightarrow x^2-x=0$

$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}<0$ تحت xx'

$$S=\int_0^1 -f(x) = \int_0^1(-x^2+x)$$

احسب مساحة السطح المحصور بين C_1 و C_2

$f_1(x)=x^2$ C_1 ، $f_2(x)=\sqrt{x}$ C_2

نحل المعادلة $f_1=f_2 \Leftrightarrow x^2=\sqrt{x}$

$x^4=x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$

$$\left.\begin{aligned} f_1(\tfrac{1}{4})&=\tfrac{1}{16}\\ f_2(\tfrac{1}{4})&=\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\} f_2>f_1$$

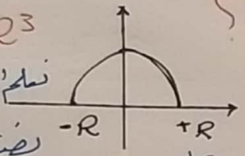
$$S=\int_0^1(f_2-f_1)=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)$$

$$\text{ح}=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

مثال: اثبت أن حجم الكرة التي مركزها O ونصف قطرها R يعطى بالعلاقة

حل

$$\text{ح}=\frac{4}{3}\pi R^3$$



نعلم أن الكرة ناتجة عن دوران نصف دائرة حول قطرها دورة كاملة.

ومعادلة الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها R

$$y^2+x^2=R^2 \Rightarrow y^2=R^2-x^2$$

$$\text{ح}=\pi\int_{-R}^{R}(f(x))^2=\pi\int_{-R}^{R} y^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx$$

$$=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}$$

$$=\pi\left[R^3-\frac{R^3}{3}-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right]$$

$$=\pi\left[R^3-\frac{R^3}{3}+R^3-\frac{R^3}{3}\right]$$

$$=\pi\left[2R^3-\frac{2R^3}{3}\right]=\pi\left(\frac{4}{3}R^3\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3$$