جذور للحفظ:

$\sqrt{2} \simeq 1.4$
$\sqrt{3} \simeq 1.7$
$\sqrt{5} \simeq 2.2$
$\sqrt{6} \simeq 2.4$
$\sqrt{7} \simeq 2.6$
$\sqrt{8} \simeq 2.8$
$\sqrt{10} \simeq 3.1 = \pi$
$\sqrt{11} \simeq 3.3$
$\sqrt{12} \simeq 3.4$
$\sqrt{13} \simeq 3.6$
$\sqrt{14} \simeq 3.7$
$\sqrt{15} \simeq 3.8$
$\sqrt{17} \simeq 4.1$
$\sqrt{18} \simeq 4.2$
$\sqrt{19} \simeq 4.3$
$\sqrt{20} \simeq 4.4$
$\sqrt{21} \simeq 4.5$
$\sqrt{22} \simeq 4.6$
$\sqrt{23} \simeq 4.7$
$\sqrt{33} \simeq 5.7$

مراجعة عامة:

النشر: هو تحويل الجداء إلى مجموع
أي (نفك الأقواس)

مثال:
$3(x+5) = 3x+15$
$(x-2)(x+5) = x^2+5x-2x-10$
$= x^2+3x-10$

المتطابقات الشهيرة للنشر:

1. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
4. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3b^2a-b^3$

أمثلة:

1. $(x+3)^2 = x^2+6x+9$
2. $(x-\sqrt{x})^2 = x^2-2x\sqrt{x}+x$
3. $(x-8)(8+x) = x^2-64$
4. $(x-\sqrt{x^2+3})(x+\sqrt{x^2+3}) = x^2-\sqrt{x^2+3}^2$
   $= x^2-(x^2+3)$
   $= x^2-x^2-3 = -3$
5. $(x+3)^3 = x^3+3(x)^2 3+3(3)^2 x+3^3$
   $= x^3+9x^2+27x+27$
6. $(2x-5)^3 = (2x)^3-3(2x)^2(5)$
   $+3(5)^2(2x)-5^3$
   $= 8x^3-60x^2+150x-125$

Note:
$\sqrt{x}^2 = x$
$\sqrt{x^2} = |x|$
$|x|^2 = x^2$

Scanned by CamScanner

التحليل هو تحويل المجموع إلى جداء

إخراج عامل مشترك

١- ع.م.أ الحدود

٢- نفتح قوسين

٣- نقسم جميع الحدود على ع.م.أ

مثال: حلل

$x^3 - x^2 = x^2\left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}\right)$

$= x^2(x-1)$

مثال:

$2(x+3)^2 + 10(x+3)$

$2(x+3)[x+3+5]$

$= 2(x+3)(x+8)$

التجميع إلى فئات

$ab+cd+ac+bd$

$= ab+ac+cd+bd$

$= a(b+c)+d(c+b)$

$= (b+c)(a+d)$

المتطابقات

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
2. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ عكس الإشارة، نفس الإشارة
3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

مثال: حلل:

1. $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$
2. $x^2 - 5 = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
3. $x^3 - 125 = (x-5)(x^2+5x+25)$
   $\Leftarrow x^3 - 5^3$
4. $y^3 + 8 = (y+2)(y^2-2y+4)$
   $\Leftarrow y^3 + 2^3$

التحليل المباشر أمثال $x^2 = 1$

الشكل العام $x^2 + ax + b$

مثال:

1. $x^2 + 10x + 16$
   $(x+8)(x+2)$
2. $x^2 - 10x + 9$
   $(x-9)(x-1)$
3. $x^2 - 4x - 5$
   $(x-5)(x+1)$
4. $x^2 + 6x - 7$
   $(x+7)(x-1)$

مثال $P(x) = +x^3 - x^2 - x + 1$

Note: إذا كانت اشارة الموجبة = الاشارة السالبة فإن الحد 1 هو صفر لكثير الحدود لذلك نقسم على $x-1$

تحليل كثير حدود من الدرجة الثالثة :

الشكل العام: ax^3+bx^2+cx+d

الطريقة العامة: نبحث في قواسم الحد الأخير لـ عن صفر كثير حدود على المقدار $(x-a)$

$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \quad \pm 1$

نلاحظ أن الحد (1) صفر كثير الحدود لذلك نقسم على $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-1 \\ \hline x-1 & x^3-x^2-x+1 \\ & -x^3 \pm x^2 \\ \hline & -x+1 \\ & \pm x \mp 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x^2-1)(x-1)$

$= (x-1)(x+1)(x-1)$

حل ما يلي :

① $x^4 - 1$:

$(x^2+1)(x^2-1) \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)$

② x^3+8

$x^3 + 2^3 \Rightarrow (x+2)(x^2-2x+4)$

③ x^3+x^2

$x^2(x+1)$

④ $2x^3-2x^2+2x-2$

$2(1)^3-2(1)^2+2(1)-2=0$

$2x^3-2x^2+2x-2$

$= (2x^2+2)(x-1)$

⑤ $2x^2-2x+32$

$2(x^2-x+16)$

⑥ $x^2-10x+9$

$(x-9)(x-1)$

⑦ x^2+6x+5

$(x+5)(x+1)$

⑧ $x^2-x-110$

$(x-11)(x+10)$

* انشر ما يلي

① $(x-3)^2(x+1)$

$(x^2-6x+9)(x+1)$

$\Rightarrow x^3-6x^2+9x+x^2-6x+9$

$\Rightarrow x^3-5x^2+3x+9$

② $(x-2)(x+5)^2$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+10x+25)$

$\Rightarrow x^3+10x^2+25x-2x^2-20x-50$

$\Rightarrow x^3+8x^2+5x-50$

③ $(x-1)(x-2)^2$

$\Rightarrow (x-1)(x^2-4x+4)$

$\Rightarrow x^3-4x^2+4x-x^2+4x-4$

x^3-5x^2+8x-4

④ $(2x+5y)(2x-5y)$

$\Rightarrow 4x^2-25y^2$

5) $(3x-2)^3$

$\Rightarrow (3x)^3 - 3(3x)^2(2) + 3(2)^2 3x - 2^3$

$\Rightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

6) $(2y-8)^2(x-2)(x+2)$

$\Rightarrow (4y^2 - 32y + 64)(x-2)(x+2)$

$(4y^2 - 32y + 64)(x^2-4)$

$\Rightarrow 4y^2x^2 - 32yx^2 + 64x^2 - 16y^2 + 128y - 256$

7) $(x+1)(x^2+2x-5)^2$

$\Rightarrow (x+1)(x^2+2x-5)(x^2+2x-5)$

$(x+1)(x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x^3 + 4x^2 - 10x - 5x^2 - 10x + 25$

$\Rightarrow (x+1)(x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 20x + 25)$

$= x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 26x^2 + 5x + 25$

حل المعادلات:

عرف المعادلة: هي مساواة بين طرفين قد تكونا صحيحة وقد تكون خاطئة بتغير قيمة x

مثال: $x - 2 = 5$

$x = 0 \Rightarrow 0 - 2 = 5 \neq \quad -2 \neq 5$ خاطئة

$x = -1 \Rightarrow -1 - 2 = 5 \neq \quad -3 \neq 5$ خاطئة

$x = 7 \Rightarrow 7 - 2 \overset{?}{=} 5 \neq \quad 5 = 5$ صحيحة

عرف حل المعادلة: هي القيم التي تجعل المساواة صحيحة

عرف المتطابقة: هي مساواة صحيحة دائماً مهما كانت x

مثال: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ هل هي معادلة أم متطابقة

صحيح

$x = 0 \Rightarrow 0 - 4 = (-2)(2) \Rightarrow -4 = -4$

$x = 10 \Rightarrow 96 = 8 \times 12$

$96 = 96$

حل المعادلات من الدرجة الأولى:

نطبق ما يلي:

١- نفك الأقواس إذا وجدت

٢- ننقل المعاليم لطرف والمجاهيل لطرف آخر ونغير إشارة المنقول

٣- نجمع الحدود المتشابهة

٤- نقسم على أمثال x

مثال: $2(x+5) = 3x - 4$

$2x + 10 = 3x - 4$

$2x - 3x = -4 - 10$

$-x = -14 \Rightarrow x = 14$

* حل المعادلات من الدرجة الثانية:

١- طريقة المميزة Δ

الشكل العام

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ موجب — للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ — للمعادلة حل مضاعف $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$ سالب — مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$

مثال 1:

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-10)^2 - 4(1)(16) = 100 - 64 = 36 > 0$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) - 6}{2(1)} = \frac{10 - 6}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) + 6}{2a} = \frac{10 + 6}{2} = 8$

مثال 2:

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$= (-10)^2 - 4(1)(25) = 0$

للمعادلة حل وحيد مضاعف

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2(1)} = \frac{10}{2} = 5$

مثال 3:

$x^2 - x + 4 = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4(ac)$

$= (-1)^2 - 4(1)(4) = 1 - 16 = -15 < 0$

المعادلة مستحيلة الحل في R

ثانياً: طريقة التحليل (التحليل المباشر)

1- نحلل إلى $(\quad)(\quad) = 0$

2- نطبق قاعدة إما - أو

مثال:

(1) $x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x - 8)(x - 2) = 0$

إما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

(2) $x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$

إما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

* مجموعات الأعداد:

[1] مجموعة الأعداد الطبيعية N أو IN:

وهي الأعداد الموجبة التي قسمها العشري معدوم إضافة للعدد صفر أي:

$0, 1, 2, 3, 4$

[2] مجموعة الأعداد الصحيحة Z:

وهي مجموعة الأعداد السالبة والموجبة التي قسمها العشري معدوم

$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

[3] مجموعة الأعداد العادية (النسبية) Q:

وهي مجموعة الأعداد التي يكون قسمها العشري منتهي

2.735 , 1.5

أو قسمها العشري غير منتهي ولكنه دوري

$2.\bar{3}$, 2.33333

[4] مجموعة الأعداد غير النسبية Q':

وهي الأعداد التي يكون قسمها العشري غير دوري وغير منتهي

مثل: $\pi = 3.141592$

أو جذور الأعداد التي ليس لها جذور طبيعية

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}$

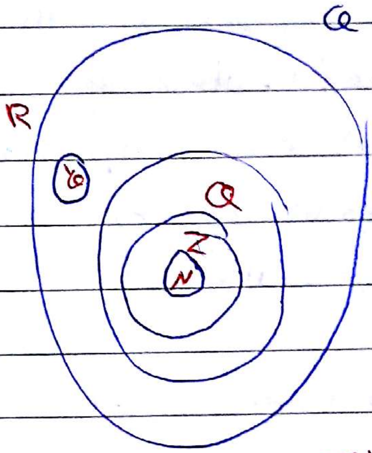
[5] مجموعة الأعداد الحقيقية R:

وهي تضم كل ما سبق R

٦] مجموعة الأعداد الحقيقية (المركبة) $\mathbb{C}$

نتائج:

1. $N \subset Z \subset Q \subset R$
2. $Q \cup Q' = R$



إزالة الجذر من المقام:

1] إذا كان المقام حد وحيد فإننا نضرب البسط والمقام بالجذر الموجود بالمقام

مثال: $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

2] إذا كان المقام ثنائي حد فإننا نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

مثال: $\frac{5}{(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)} = \frac{5\sqrt{x}-10}{x-4}$

Note: مرافق $a+b$ هو $a-b$

* التحويل بين القوة والجذر

- $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$
- $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

دراسة إشارة مقدار: هام

تعني معرفة المجالات التي يكون عندها المقدار موجب والمجالات التي يكون عندها المقدار سالب حيث نطبق ما يلي:

1. نعدم البسط والمقام
2. ننظم جدول إشارة نضع فيه مجموعة التعريف والقيم التي تعدم البسط والمقام
3. نختار قيم تجريبية ونعوض في المقدار فنكتشف الإشارة

مثال: ادرس إشارة المقدار

$2x-5$

1. نعدم المقدار $2x-5=0$

$2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

2. ننظم جدول

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
إشارة المقدار		$-$	0	$+$	

Note: بالدرجة الأولى ما قبل الجذر يخالف إشارة x وبعده يوافق إشارة x

مثال: ادرس إشارة المقدار

$x^2-10x+9$

$\Rightarrow x^2-10x+9=0$

$(x-9)(x-1)=0$

إما $x-9=0 \Rightarrow x=9$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
الإشارة		$+$	0	$-$	0	$+$	

المقدار موجب بالمجالين

$]-\infty,1[\cup]9,+\infty[$

المقدار سالب: $]1,9[$

* حل المعادلات بطريقة Δ :

[1] $x^2+10x+16=0$ — المعادلة حلان

$\Rightarrow \Delta = b^2-4(ac)$

$= 100-4(16) = 100-64 = 36 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10-6}{2} = \frac{-16}{2} = -8$

[2] $x^2-9x+14=0$

$\Rightarrow \Delta = b^2-4(ac)$

$= 81-4(14) = 81-56 = 25 > 0$ — المعادلة حلان

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-5}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+5}{2} = 7$

[3] $x^2-2x+1=0$

$\Rightarrow \Delta = b^2-4(ac)$

$= 4-4(1) = 4-4 = 0$

المعادلة حل وحيد مضاعف

$x_1 = x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2} = 1$

* حل المعادلات بطريقة مناسبة:

[1] $x^2-36=0$

$\Rightarrow (x-6)(x+6)=0$

إما $x-6=0 \Rightarrow x=6$

أو $x+6=0 \Rightarrow x=-6$

[2] $x^2-100x+2500=0$

$\Rightarrow (x-50)(x-50)=0$

إما $x-50=0 \Rightarrow x=50$

[3] $x^2-8x+15=0$

$\Rightarrow (x-5)(x-3)=0$

إما $x-5=0 \Rightarrow x=5$

أو $x-3=0 \Rightarrow x=3$

[4] $x^2-30x+200=0$

$\Rightarrow (x-20)(x-10)=0$

إما $x-20=0 \Rightarrow x=20$

أو $x-10=0 \Rightarrow x=10$

* ادرس إشارة المقادير:

[1] x^2-9 $(x-3)(x+3)$

$\Rightarrow$ إما $x=3$ أو $x=-3$

$x^2-9=0 \Rightarrow$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
إشارة المقدار		$+$	0	$-$	0	$+$	

المقدار موجب $]-\infty,-3[\ \cup\ ]3,+\infty[$

المقدار سالب $]-3,3[$

[2] x^2-5x+4

$\Rightarrow x^2-5x+4=0$

$(x-4)(x-1)=0$

إما $x-4=0 \Rightarrow x=4$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
إشارة المقدار		+	0	−	0	+	

المقدار موجب: $]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$

المقدار سالب: $]1, 4[$

$\boxed{3}$ $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ & \underline{-x^3 + x^2} \\ & x - 1 \\ & \underline{-x + 1} \\ & 0 \end{array} \qquad x^2 + 1$$

$(x-1)(x^2+1)$

إما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

أو $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ مستحيلة الحل في R

x	$-\infty$		1		$+\infty$
الإشارة		−	0	+	

Note: لمعرفة إشارة المقدار نأخذ قيم ونعوض لأن ... الأولى ... من الأسئلة

$\boxed{4}$ $x^2 + 1$

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$ مستحيلة الحل في R

x	$-\infty$		$+\infty$
إشارة المقدار		+	

دراسة إشارة كسر

نتبع ما يلي.

1- نعدم البسط والمقام.

2- ننظم جدول إشارة حيث نضع تحت القيمة التي تعدم البسط (0) وتحت القيمة التي تعدم المقام إشارة عدم التعريف (▨)

3- نختار أعداد من المجالات ثم نعوض في البسط والمقام معاً ونحدد الإشارة.

مثال: ادرس إشارة الكسر:

$$\frac{x}{x^2 - 1}$$

$\Rightarrow x = 0$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow$ إما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

نختار قيمة ونعوض في البسط والمقام معاً

x	$-\infty$	-5	-1		0	$\frac{1}{2}$	1		$+\infty$
إشارة الكسر		−	▨	+	0	−	▨	+	

وظيفة: ادرس إشارة الكسر:

1) $\frac{x + 5}{x + 1}$

$\Rightarrow x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
إشارة الكسر		+	0	−	▨	+	

2) $\frac{x}{x^2 + 10x + 16}$

$\Rightarrow x = 0$

$x^2 + 10x + 16 = 0$

$\Rightarrow (x + 2)(x + 8) = 0$

إما $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

أو $x+8=0 \Rightarrow x=-8$

x	$-\infty$		-8		-2		$+\infty$
الإشارة		$-$	‖	$+$	‖	$-$ 0 $+$	

حل المتراجحات:

تعريفا: تعني إيجاد المجالات التي تكون عندها شرط المتراجحة محققة

١- ننقل جميع الحدود لطرف واحد ونجعل الطرف الثاني صفر

٢- نوحد المقامات

٣- ندرس الإشارة

٤- نختار المجالات التي تكون عندها الإشارة مطابقة لشرط المتراجحة.

مثال: حل المتراجحة التالية:

$$\frac{x-2}{x+4} \geq 0$$ أكبر والمساوي

$x-2=0 \Rightarrow x=+2$

$x+4=0 \Rightarrow x=-4$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
الإشارة		$+$ م	‖	$-$ ع	0	$+$ م	

$\Rightarrow S =]-\infty,-4[\cup [2,+\infty[$ في الجدول

المجالات (عند حل متراجحة)

- الفترة التي تضم الحد: مفتوح عندما $<$ $>$ ، مغلق عندما $\leq$ $\geq$
- الفترة التي تضم المقام دائماً: مفتوح

حل المتراجحة:

$$\frac{x-2}{x+4} > 0$$

$\Rightarrow S =]-\infty,-4[\cup]2,+\infty[$

$$\frac{x-2}{x+4} \leq 0$$

$\Rightarrow S =]-4,2]$

$$\frac{x-2}{x+4} < 0$$

$\Rightarrow S =]-4,2[$

مثال: حل المتراجحة:

$2x-4 \leq 0$

$2x-4=0$

$\Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
الإشارة		$-$ م	0	$+$ ع	

$\Rightarrow S =]-\infty,2]$

واجب: حل المتراجحات التالية:

① $x^2-2x-24>0$

$x^2-2x-24=0$

$\Rightarrow (x-6)(x+4)$

إما $x-6=0 \Rightarrow x=6$

أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
الإشارة		$+$ م	0	$-$ ع	0	$+$ م	

$\Rightarrow S =]-\infty,-4[\cup]6,+\infty[$

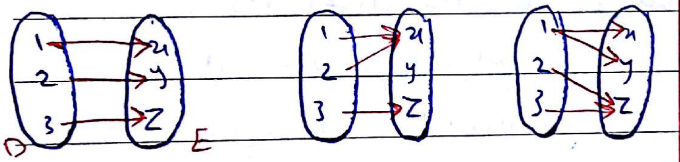
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
		+	0	−	0	+	
		ع		م		ع	

$\Rightarrow S = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

تعريف التابع: هو علاقة بين مجموعتين يرتبط فيه كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من المجموعة الثانية



تابع   تابع   ليس تابع

لأن 1 ارتبط بعنصرين أي لا يجوز أن يكون للعدد صورتين

صورة العدد 1 هي x

y 〃 2 〃 〃

z 〃 3 〃 〃

• نسمي المجموعة الأولى: المنطلق أو مجموعة التعريف ونرمز لها D

• نسمي المجموعة الثانية المستقر أو مجموعة الصور أو مجموعة القيم ونرمز لها E

مثال: لشكل التابع:

$f(x) = x+1$

أوجد $f(-2), f(1), f(0)$

② $-x^2+3x+2 < 0$

$\Rightarrow x^2-3x-2 > 0$

$\Rightarrow x^2-3x-2 = 0$

$\Delta = b^2-4(ac) \Rightarrow \Delta = 9-4(-2) = 17 > 0$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
		+	0	−	0	+	
		م		ع		م	

$\Rightarrow S = \left]-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right[$

③ $x^2+4x+4 \leq 0$

$\Delta = 16-4(+4) = 16-16 = 0$ حل مضاعف

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

أو بالتحليل المباشر $(x+2)^2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
		+	0	+	

نعوض القيم

Note: من الدرجة الأولى قبل خالف وبعد يوافق إشارة x

أما من الدرجة الثانية جذر واحد نعوض قيم

$\Rightarrow S = \{-2\}$

④ $\frac{x-2}{x} < 0$

$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x = 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
		+	‖	−	0	+	
		ع		م		ع	

$\Rightarrow S =]0, 2[$

⑤ $x^2+x-1 \leq 0$

$\Delta = b^2-4(ac)$

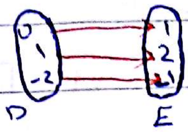
$= 1-4(-1) = 1+4 = 5 > 0$

$f(0) = 0+1 = 1$

$f(1) = 1+1 = 2$

$f(-2) = -2+1 = -1$

٢- مثل التابع بمخطط فن



أنواع التوابع :

1 التابع الصحيح : هو تابع درجة أولى، ثانية، ثالثة... لا يحوي جذر مضمونه مجهول ولا يحوي كسر مقامه مجهول ويسمى أحياناً "تابع حدودي".

- ويكون معرف دائماً على IR

مثال :

$f(x) = x+1$

$f(x) = x^2 - x + 10$

$f(x) = x^3 + 2x - 10$

$f(x) = \sqrt{2}\, x + 10$

$f(x) = 5$

توابع صحيحة $D = R$

٢ تابع الجذر التربيعي :

- شكله العام : $f(x) = \sqrt{x}$

وهو معرف عندما يكون ما تحت الجذر $x \geq 0$

مثال : أوجد مجموعة تعريف التوابع التالية .

(1) $f(x) = \sqrt{x}$

معرف عندما $x \geq 0$

أي $D = [0, +\infty[$

(2) $f(x) = \sqrt{x-2}$

معرف عندما $x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

$\Rightarrow D = [2, +\infty[$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

معرفة عندما $x^2 - 4 \geq 0$

لا ننتقل لأنه ليس من الدرجة الأولى وإنما ندرس الإشارة ونختار المجالات الموجبة من الإشارة .

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

نجذر $|x| = 2$

إما $x = 2$

أو $x = -2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
		+ م	0	− ع	0	+ م	

$D =]-\infty, -2] \underbrace{\cup}_{\text{اتحاد}} [2, +\infty[$

(4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

معرف عندما

$\dfrac{x}{x-1} \geq 0$

ندرس الإشارة ونختار المجالات الموجبة

$x = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Note: عندما نتقاطع مجموعتين أحدهما R الجواب هو المجموعة الثانية.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
الإشارة		+ م	0	− ع	‖	+ م	

$D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

أمثلة: أوجد مجموعة التعريف:

(1) $f(x) = \frac{x-4}{5}$

$D = R$

(2) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

ندرس الإشارة $\frac{x-2}{x+3} \geq 0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
الإشارة		+ م	‖	− ع	0	+ م	

$D =]-\infty, -3[\cup [2, +\infty[$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$

ندرس الإشارة $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x-2)$

إما $x-6=0 \Rightarrow x=6$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
الإشارة		+ م	0	− ع	0	+ م	

$D =]-\infty, 2] \cup [6, +\infty[$

(4) $f(x) = x^2 + 4x + 2$

$D = R$ معرف على

٣) تابع الجذر التكعيبي: مجموعة تعريفه هي نفس مجموعة تعريف المضمون

مثال:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8x + 12}$

بما أن مضمون $(x^2 - 8x + 12)$ تابع صحيح معرف على R فإن $f(x)$ معرف على R.

٤) التابع الكسري: هو تابع يحوي في مقامه مجهول ولإيجاد مجموعة تعريفه نتبع ما يلي:

١- نوجد مجموعة تعريف البسط D_1

٢- نوجد مجموعة تعريف المقام D_2

٣- نوجد (القيم التي تعدم المقام) ولتكن S

٤- نوجد مجموعة التعريف وهي

$D = \underbrace{D_1 \cap D_2}_{\text{تقاطع}} / S$ ← ماعدا أو فرق

مثال: أوجد مجموعة التعريف للتابع:

$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

١- البسط x معرف على R

٢- المقام $x^2 - 4$ معرف على R

٣- القيم التي تعدم المقام $S = \{-2, 2\}$

٤- $D = R \cap R / \{-2, 2\}$

$= R / \{-2, 2\}$

$\Rightarrow D =]-\infty, -2[\cup]-2, +2[\cup]2, +\infty[$

Note:

$R/\{a\} \Rightarrow]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$

$R/\{a,b\} \Rightarrow]-\infty, a[\cup]a, b[\cup]b, +\infty[$

مثال: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$$

1) نوجد مجموعة تعريف البسط $x \Leftarrow R$

2) نوجد مجموعة تعريف المقام $\sqrt{x-2}$

$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_2 = [2, +\infty[$

3) نعدم المقام

$\sqrt{x-2} \overset{\text{نربع}}{=} 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

$\Rightarrow S = \{2\}$

4)

$D = R \cap [2, +\infty[\, / \{2\}$

$=]2, +\infty[$

5) تابع القيمة المطلقة:

$|x|$ → x عندما $\Rightarrow x > 0$ (موجب)

مثال: $|5| = 5$

$|x|$ → $-x$ عندما $\Rightarrow x < 0$ (سالب)

مثال: $|-5| = -(-5) = 5$

مثال هام:

$|x-3|$ → $x-3$ عندما $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$|x-3|$ → $-(x-3)$ عندما $x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$

$-x+3$

وظيفة:

1) $f(x) = 3x+5 - \frac{x}{4x+4}$

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

3) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-5x+4}$

4) $f(x) = \left|\frac{x-4}{x+1}\right|$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}}$

Note 1: عندما نجمع تابعين أو نطرح أو نضرب فإننا نأخذ تقاطع مجموعتي التعريف لها.

Note 2 هام: لا تغير شكل التابع قبل إيجاد مجموعة التعريف.

الموضوع: حل الوضعية

1) $f(x) = 3x + 5 - \frac{x}{4x+4}$

$3x+5$ معرف على $\mathbb{R}$

$\frac{x}{4x+4}$ معرف على

البسط x معرف على R : $D_1 = R$

المقام $4x+4$ معرف على R : $D_2 = R$

القيم التي تعدم المقام $4x+4=0$

$\Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{4} = -1$

$S = \{-1\}$

$D = D_1 \cap D_2 \setminus \{S\}$

$= R \cap R \setminus \{-1\}$

$=]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$

$D_1 = x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_1 = [1, +\infty[$

$D_2 = x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_2 = [3, +\infty[$

القيم التي تعدم المقام $\sqrt{x-3} = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

$D = [1, +\infty[\cap [3, +\infty[\setminus \{3\}$

$=]3, +\infty[$

3) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-5x+4}$

1- مجموعة تعريف البسط $D_1 = R$

2- مجموعة تعريف المقام $D_2 = R$

3- القيم التي تعدم المقام

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-4)(x-1) = 0$

إما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$S = \{1, 4\}$

$D = D_1 \cap D_2 \setminus \{S\}$

$= R \cap R \setminus \{1, 4\}$

$D =]-\infty, 1[\cup]1, 4[\cup]4, +\infty[$

4) $f(x) = \left| \frac{x-4}{x+1} \right|$

① $\Rightarrow \frac{x-4}{x+1}$ عندما $\frac{x-4}{x+1} \geq 0$

ندرس الإشارة

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
الإشارة		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

$x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

② $\frac{-x+4}{x+1}$ عندما $\frac{x-4}{x+1} < 0$

ندرس الإشارة

أي $x \in]-1, 4[$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}}$

$D_1 = \mathbb{R}$

$D_2 : x+4 \geq 0$

$x \geq -4$

$[-4, +\infty[$

القيم التي تعدم المقام

مربع

$\sqrt{x+4} = 0 \Rightarrow x+4 = 0 \Rightarrow x = -4$

$D = \mathbb{R} \cap [-4, +\infty[\,/\, \{-4\}$

$D =]-4, +\infty[$

6) $f(x) = \frac{3-x}{x^2+6x+8}$

$D_1 = \mathbb{R}$

$D_2 = \mathbb{R}$

القيم التي تعدم المقام

$x^2+6x+8 = 0$

$(x+4)(x+2) = 0$

$S = \{-4, -2\}$

$D = D_1 \cap D_2 / S$

$= \mathbb{R} / \{-4, -2\}$

$D =]-\infty, -4[\cup]-4, -2[\cup]-2, +\infty[$

1 المتتاليات: 60

- تعريف المتتالية: هي تابع منطلقة ℕ ومستقره R

- نرمز للمتتالية $(U_n)_{n\geq}$ عدد

الدليل — دليل البدء — رمز الحد العام للمتتالية

مثال 1: لتكن المتتالية:

$(U_n)_{n\geq 0}$

المعرفة وفق $U_n = n+2$

1) أوجد الحدود الخمسة الأولى:

$V_0 = 0+2 = 2$

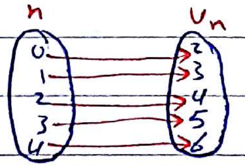
$V_1 = 1+2 = 3$

$V_2 = 2+2 = 4$

$V_3 = 3+2 = 5$

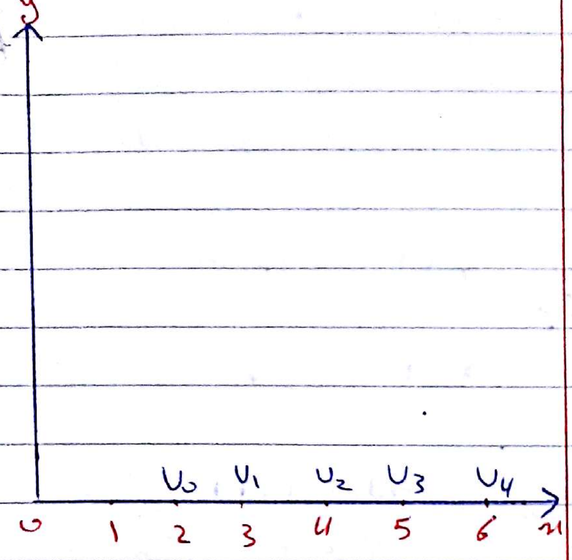
$V_4 = 4+2 = 6$

4) مثل هذه المتتالية كتابع:



Note: الدليل دائماً موجب أي n

2) مثل حدود المتتالية على محور الفواصل



مثال 2: لتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ حيث $V_n = \frac{1}{n}$

1) أوجد الحدود الأربعة الأولى:

$V_1 = \frac{1}{1} = 1$

$V_2 = \frac{1}{2}$

$V_3 = \frac{1}{3}$

$V_4 = \frac{1}{4}$

<= حدود المتتالية

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ......

مثال 3: لتكن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث $y_n = (-1)^n$

1) أوجد الحدود الخمسة الأولى:

$y_0 = (-1)^0 = 1$

$y_1 = (-1)^1 = -1$

$y_2 = (-1)^2 = 1$

$y_3 = (-1)^3 = -1$

$y_4 = (-1)^4 = 1$

Note: قيم حدود المتتالية محدودة

$\{-1, 1\}$

نتيجة هامة: إن عدد قيم حدود المتتالية غير منتهي ولكن مجموعة قيم حدود المتتالية قد يكون منتهي (محدودة)

$(-1)^n \to +1$ الأس زوجي

$(-1)^n \to -1$ الأس فردي

وظيفة: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 2}$

حيث $U_n = \sqrt{n^2-3}$

1) أوجد الحدود الخمسة الأولى:

2) مثل المتتالية كتابع:

3) مثل الحدود على محور الفواصل:

1) $U_2 = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$

$U_3 = \sqrt{9-3} = \sqrt{6} \simeq 2.4$

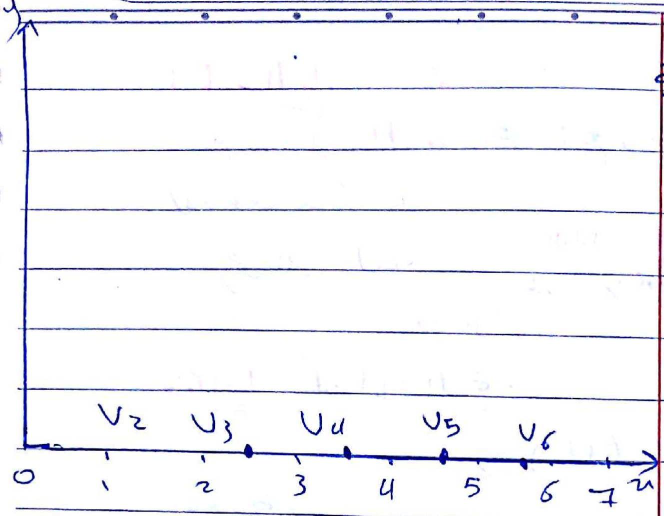
$U_4 = \sqrt{16-3} = \sqrt{13} \simeq 3.6$

$U_5 = \sqrt{25-3} = \sqrt{22} \simeq 4.6$

$U_6 = \sqrt{36-3} = \sqrt{33} \simeq 5.7$

2)

n	U_n
2	1
3	$\sqrt{6}$
4	$\sqrt{13}$
5	$\sqrt{22}$
6	$\sqrt{33}$



Note: جذور للحفظ

$\sqrt{2} \simeq 1.4$

$\sqrt{3} \simeq 1.7$

$\sqrt{5} \simeq 2.2$

$\sqrt{6} \simeq 2.4$

$\sqrt{7} \simeq 2.6$

$\sqrt{8} \simeq 2.8$

$\sqrt{10} \simeq 3.1 , \pi$

$\sqrt{11} \simeq 3.3$

$\sqrt{12} \simeq 3.4$

$\sqrt{13} \simeq 3.6$

$\sqrt{14} \simeq 3.7$

$\sqrt{15} \simeq 3.8$

$\sqrt{17} \simeq 4.1$

$\sqrt{18} \simeq 4.2$

$\sqrt{19} \simeq 4.3$

$\sqrt{20} \simeq 4.4$

$\sqrt{21} \simeq 4.5$

$\sqrt{22} \simeq 4.6$

$\sqrt{23} \simeq 4.7$

$\sqrt{33} \simeq 5.7$

طرق تعريف المتتالية

1 الحد العام:

نعرف U_n بدلالة n

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 2}$ المعرفة وفق

$$U_n = \frac{1}{n-1}$$

* أوجد الحدود الأربعة الأولى:

$U_2 = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$

$U_3 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

$U_4 = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$

$U_5 = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$

2 عن طريق تابع:

أي: $U_n = f(n)$

ونعوض تابع $f(n)$.

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $\boxed{U_n = f(n)}$

حيث $f(n) = n^2 + 1$

* أوجد الحدود الأربعة الأولى:

$U_0 = f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$U_1 = f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$U_2 = f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$U_3 = f(3) = 3^2 + 1 = 10$

⋮

3 علاقة تدريجية:

(U_n بدلالة U_{n+1}) (دائماً يعطى حد البدء)

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حيث $U_{n+1} = U_n - 3$ وحد البدء $U_0 = 5$

* أوجد الحدود الأربعة الأولى.

$U_0 = 5$ (فرضاً)

$U_1 = U_0 - 3 = 5 - 3 = 2$

$U_2 = U_1 - 3 = 2 - 3 = -1$

$U_3 = U_2 - 3 = -1 - 3 = -4$

جهة اطراد المتتالية :

أولاً: المتتالية المتزايدة تماماً:

نقول عن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ أنها متزايدة تماماً إذا تحقق الشرط التالي:

$$\boxed{U_{n+1} > U_n}$$

مثال:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حيث :

$U_n = n^2$

* عين جهة الاطراد.

$U_0 = 0^2 = 0$

$U_1 = 1^2 = 1$

$U_2 = 2^2 = 4$

$U_3 = 3^2 = 9$

نجد أنها متزايدة تماماً.

مثال٢: شرح:

$U_n \leftarrow U_0 = 10$

$U_{n+1} \leftarrow U_1 = 20$

$U_{n+2} \leftarrow U_2 = 30$

$U_{n+3} \leftarrow U_3 = 40$

[كلما كبر الدليل n كبرت قيمة الحد]

ثانياً: المتتالية المتزايدة:

نقول عن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ أنها متزايدة إذا تحقق شرط التالي.

$$\boxed{U_{n+1} \geq U_n}$$

مثال:

عين جهة اطراد المتتالية التي لها الحدود التالية:

$U_0 = 5$

$U_1 = 10$

$U_2 = 10$

$U_3 = 12$

$U_4 = 15$

$U_5 = 15$

$U_6 = 20$

نجد أنها متزايدة.

[كلما كبر الدليل n كبرت قيمة الحد أو بقيت ثابتة في بعض الحدود]

ثالثاً: المتتالية المتناقصة تماماً:

- نقول عن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ أنها متناقصة تماماً إذا تحقق الشرط التالي:

$$\boxed{V_{n+1} < V_n}$$

مثال: لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ حيث: $v_n = \frac{1}{n}$

* عين جهة الاطراد.

$v_1 = 1$

$v_2 = \frac{1}{2}$

$v_3 = \frac{1}{3}$

$v_4 = \frac{1}{4}$

$v_5 = \frac{1}{5}$

- نجد أن المتتالية متناقصة تماماً

Note: كلما كبر المقام صغر الكسر

[كلما كبر الدليل انقصت قيمة الحد]

رابعاً: المتتالية المتناقصة:

- نقول عن المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ أنها متناقصة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\boxed{W_{n+1} \leq W_n}$$

مثال: عين جهة اطراد المتتالية ذات الحدود التالية:

$u_0 = 1$

$u_1 = \frac{1}{2}$ لا يمكن أن يكون الحدين الأوليين متساويين

$u_2 = \frac{1}{2}$ لأنه لكانت المتتالية

$u_3 = \frac{1}{3}$ متناقصة تماماً الأول

$u_4 = \frac{1}{4}$

$u_5 = \frac{1}{4}$

$u_6 = \frac{1}{5}$

- نجد أن المتتالية متناقصة:

[كلما كبر الدليل نقصت قيمة الحد أو بقيت ثابتة في بعض الحدود]

التاريخ 201 / /

الموضوع

خامساً: المتتالية الثابتة:

- نقول عن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ إنها ثابتة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\boxed{U_{n+1} = U_n}$$

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $U_n = (n+2)^0$

* خاصية الاطراد.

$U_0 = (0+2)^0 = (+2)^0 = 1$

$U_1 = (1+2)^0 = (+3)^0 = 1$

$U_2 = (2+2)^0 = 4^0 = 1$

⋮

Note: لا يمكن أن يكون 0^0 في الرياضيات

نجد أن المتتالية ثابتة.

[كلما ~~[illegible]~~ كبرت قيمة الدليل تبقى قيمة الحد كما هي]

المتتالية الحسابية:

نقول عن المتتالية أنها حسابية إذا نتج كل حد عن سابقه بإضافة عدد ثابت يسمى أساس المتتالية ونرمز له r Note: ممكن أن يكون الأساس سالباً

مثال:

3 5 7 9 11 13 ...

(متتالية حسابية أساسها r=2)

قاعدة المتتالية الحسابية:

$$\boxed{U_{\underset{\text{الأكبر}}{\star}} - U_{\underset{\text{الأصغر}}{\heartsuit}} = (\star - \heartsuit) r}$$

دليلين

مثال: لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $U_1 = 5$ و $U_3 = 9$ أوجد الأساس r

$U_3 - U_1 = (3-1) r$

$9 - 5 = 2r$

$4 = 2r$

$r = \frac{4}{2} = 2$

Note: دائماً إذا أعطاني حدين وطلب الأساس نستخدم هذا القانون

مثال 2: لتكن المتتالية الحسابية $(U_n)_{n\geq 0}$

حيث: $r=2$, $U_0=3$

* احسب U_5

Note: دائماً إذا أعطاني الأساس + حد وطلب حد آخر نستخدم هذا القانون السابق

$U_5 - U_0 = (5-0)r$

$U_5 - 3 = 5(2)$

$U_5 = 10+3 = 13$

نتيجة: في المتتالية الحسابية تحقق العلاقة التدريجية التالية

$\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

نكتة 600: مثال هام جداً في الهندسة مع متتالية:

لتكن الشعاع $\vec{n} = (1,5,9)$

برهن أن مركبات الشعاع تؤلف حدود متتالية حسابية.

الحل: ط1:

$5-1=4$

$9-5=4$ ⇐ متتالية حسابية أساسها $r=4$

ط2: نلاحظ أن كل حد ينتج عن سابقه بإضافة العدد 4 ⇐ المتتالية حسابية أساسها $r=4$

حالة خاصة: إذا اعتبرنا * مكان n و ♡ هو 0 يصبح القانون التالي.

$U_n - U_0 = (n-0)r$

أي:

$\boxed{U_n = U_0 + nr}$

نستخدم إذا كان لدينا U_0 فقط.

هام جداً: كتابة U_n بدلالة n في المتتالية الحسابية

أي: $\boxed{U_* - U_♡ = (* - ♡)r}$

n ⇐ * بالبعض — ♡ ⇐ دليل حد معلوم — r ⇐ الأساس

مثال إضافي: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

حيث: $r=2$ و $U_1=8$

المطلوب: اكتب U_n بدلالة n ثم احسب U_{1000}

$U_n - U_1 = (n-1)(2)$

$U_n - 8 = 2n-2$

$\Rightarrow \boxed{U_n = 2n+6}$

$U_{1000} = 2(1000)+6 = 2006$

برهان متتالية حسابية: (هام جداً)

إذا طلب في الامتحان برهان متتالية حسابية فإننا نتبع أحد الطريقين

[1] نبرهن أن: $U_{n+1} - U_n =$ عدد ثابت

[2] نبرهن أن: $U_{n+1} = U_n +$ عدد ثابت

الأفضل الأولى

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $U_{n+1} = 10 + U_n$

برهن أن المتتالية حسابية.

الحل:

$U_{n+1} - U_n = 10 + \cancel{U_n} - \cancel{U_n} = 10 \in R$

فالمتتالية حسابية أساسها

$r = 10$

مثال 2: برهن أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حيث

$U_n = 3n+1$

الحل:

$U_{n+1} - U_n = [3(n+1)+1] - [3n+1]$

$= \cancel{3n} + 3 + \cancel{1} - \cancel{3n} - \cancel{1}$

$= 3 \in R$

فالمتتالية حسابية أساسها

$r = 3$

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حيث $U_n = n^2+1$

السؤال: هل المتتالية (U_n) حسابية

الحل:

$U_{n+1} - U_n$

$= [(n+1)^2+1] - [n^2+1]$

$= \cancel{n^2} + 2n + 2 - \cancel{n^2} - 1$

$= \boxed{2n+1} \notin R$

فالمتتالية ليست حسابية

وظيفة:

(1) المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية

إذا علمت أن $U_n = 105$ و $r = 2$

و $n = 17$ أوجد U_1 و U_2

و U_3

(2) (U_n) حسابية فيها

$U_{10} = -12$ و $U_{20} = -32$

أوجد:

U_0 و r

1

$(U_n)_{n \geq 0}$

$U_n = 105$ ، $r = -2$ ، $n = 17$

* $U_{17} - U_1 = (16)(-2)$

$105 - U_1 = -32$

$\boxed{U_1 = 137}$

* $U_{17} - U_2 = (15)(-2)$

$105 - U_2 = -30$

$\boxed{U_2 = 135}$

* $U_{17} - U_3 = (14)(-2)$

$105 - U_3 = -28$

$\boxed{U_3 = 133}$

م2 :

$U_n = U_0 + n \cdot r$

$105 = U_0 + (17)(-2)$

$105 = U_0 - 34$

$U_0 = 105 + 34 = 139$

$U_1 = \overset{U_0 + r}{139 - 2} = 137$

$U_2 = \overset{U_1 + r}{139 - 4} = 135$

$U_3 = \overset{U_2 + r}{139 - 6} = 133$

2

$U_{10} = -12$, $U_{20} = -32$

احسب r ، U_0

$U_{20} - U_{10} = (20 - 10)r$

$-32 + 12 = 10r$

$-20 = 10r$

$\Rightarrow r = \frac{-20}{10} = -2$

$U_0 - U_{10} = (0 - 10)(-2)$

$U_0 + 12 = 20$

$U_0 = 20 - 12 = 8$

أو م2 :

$U_{10} - U_0 = (10)(-2)$

$-12 - U_0 = -20$

$-U_0 = -20 + 12 = -8$

$\Rightarrow \boxed{U_0 = 8}$

قاعدة مجموع حدود متتالية حسابية:

$$S_{\text{مجموع}} = \text{عدد الحدود} \times \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$$

مثال: لتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$

$\boxed{0, 5, 10, 15, 20, 25}, 30, 35, 40$

* أوجد مجموع الحدود الستة الأولى.

الحل: المتتالية حسابية

$$S = \overset{3}{\cancel{6}} \times \frac{25+0}{\cancel{2}}$$

$$S = 75$$

المتتالية الهندسية: هي متتالية ينتج منها كل حد عن سابقه بضربه بعدد ثابت يسمى أساس المتتالية (q)

مثال:

$2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots$

المتتالية هندسية أساسها $q = 2$

* قاعدة المتتالية الهندسية:

$$\boxed{\frac{u_{*}}{u_{\heartsuit}} = q^{*-\heartsuit}}$$

أساس

معلوم

فائدة هذا القانون:

1- يعطونا الأساس وحد معلوم ويطلب حد آخر

مثال:

لتكن المتتالية الهندسية $(V_n)_{n\geq 0}$

حيث $q = 3$ و $u_3 = 54$

* أوجد u_{100}

المطلوب

$$\frac{u_{*}}{u_{\heartsuit}} = q^{*-\heartsuit}$$

المعلوم

$$\Rightarrow \frac{u_{100}}{u_3} = 3^{100-3}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{100}}{54} = 3^{97}$$

$$\Rightarrow u_{100} = 54 \cdot 3^{97}$$

الموضوع .... التاريخ / / 201

وظيفة: لتكن المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث

u_4 أوجد ، $q = 3$ ، $u_0 = 2$

فائدة ٢- يعطونا حديا معلومين ويطلب الأساس.

مثال:

لتكن المتتالية (u_n) هندسية حيث $u_1 = 4$ ، $u_5 = 64$ أوجد الأساس

الحل:

$$\frac{u_5}{u_1} = q^{5-1} \Rightarrow \frac{64}{4} = q^4$$

$$\Rightarrow 16 = q^4 \Rightarrow^{\text{جذر}} \Rightarrow 4 = q^2$$

$$\Rightarrow^{\text{جذر}} \Rightarrow \boxed{2 = q}$$

فائدة ٣: الأهم: إيجاد u_n بدلالة n

مثال: لتكن المتتالية (u_n) الهندسية:

حيث $u_1 = 5$ و $q = 2$

* أوجد u_n بدلالة n

$$\frac{u_{n}}{u_{\text{معلوم}}} = q^{n-\text{م}} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{\text{م}}} = q^{n-\text{م}}$$

$$\frac{u_n}{u_1} = q^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{5} = 2^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = 5 \times 2^{n-1}}$$

قاعدة مجموع حدود متتالية هندسية:

$$\boxed{S = \text{الحد الأول} \times \frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}}$$

مثال: لتكن المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث

$\boxed{2, 4, 8, 16, 32, 64}, 128$

أوجد مجموع الحدود الستة الأولى

الحل: هندسية أساسها $q = 2$

$$S = 2 \times \frac{1-(2)^6}{1-2}$$

$$= 2 \times \frac{1-64}{-1}$$

$$= 2 \times \frac{-63}{-1} \Rightarrow S = 126$$

كيف نكتشف عدد الحدود في المتتالية.

1) إذا كانت الحدود متعاقبة فإن

$\boxed{\text{عدد الحدود} = \text{الدليل الأخير} - \text{الدليل الأول} + 1}$

مثال:

$U_2 \quad U_3 \quad U_4 \; - - - \; U_{100}$

عدد الحدود $= 100 - 2 + 1$

$= 99$ حد

مثال 2:

$U_0 \quad U_1 \; - - - \; U_{100}$

عدد الحدود $= 100 - 0 + 1 = 101$ حد

مثال 3:

$U_0 \; U_1 \; - - - \; U_n$

عدد الحدود $= n - 0 + 1 = n + 1$ حد

2) إذا كانت الدالة زوجية وتبدأ من U_2 فإن

$\boxed{\text{عدد الحدود} = \frac{\text{الدليل الأخير}}{2}}$

مثال:

$U_2 \; U_4 \; U_6 \; U_8 \; U_{10} \; U_{12} \; U_{14} \; U_{16} \; U_{18}$

عدد الحدود $= \frac{18}{2} = 9$ حد

2) إذا كانت الدالة زوجية وتبدأ من U_0 فإن

$\boxed{\text{عدد الحدود} = \frac{\text{الدليل الأخير}}{2} + 1}$

مثال:

$U_0 \quad U_2 \quad U_4 \quad U_6 \quad U_8 \quad U_{10}$

عدد الحدود $= \frac{10}{2} + 1 = 5 + 1 = 6$ حد

برهان متتالية هندسية

نبرهن أن $\frac{U_{n+1}}{U_n} = const$

عدد ثابت

أو $U_{n+1} = const \cdot U_n$

مثال امتحاني:

برهن أن $U_n = 5^{n+2}$

متتالية هندسية

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5^{(n+1)+3}}{5^{n+3}} = \frac{5^{n+4}}{5^{n+3}}$

$= 5^{n+4} \cdot 5^{-n-3} = 5^{\cancel{n}+4-\cancel{n}-3}$

$= 5 = const \in R$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = 5$

Note: إذا طلع $5n$ نكتب المتتالية ليست هندسية لأنه ليس ثابت

دراسة اطراد متتالية

1] معيار القسمة

[داخل إذا كانت الحدود موجبة]

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}$$

- $=1$ ⇓ المتتالية ثابتة
- <1 ⇓ المتتالية متناقصة تماماً
- الناتج >1 ⇓ المتتالية متزايدة تماماً

2] معيار الطرح

$$U_{n+1} - U_n$$

- $=0$ ⇓ المتتالية ثابتة
- <0 ⇓ المتتالية متناقصة تماماً
- >0 ⇓ المتتالية متزايدة تماماً

3] معيار الاشتقاق

نفرض تابع f ثم نشتقه f'

f'

- <0 ⇓ المتتالية متناقصة تماماً
- >0 ⇓ المتتالية متزايدة تماماً

~~[illegible]~~

مثال 1: ادرس اطراد متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حيث

$U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

نلاحظ

$U_0 = 1$

$U_1 = \frac{2}{3}$

$U_2 = \frac{4}{9}$

بما أن الحدود موجبة نستخدم معيار القسمة

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-n} = \frac{2}{3} < 1$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

مثال 2: ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حيث $U_n = n-3$

بما أن الحدود ليست موجبة نلجأ لمعيار الطرح

$U_{n+1} - U_n = (n+1-3) - (n-3)$

$= \cancel{n} - 2 - \cancel{n} + 3$

$= 1 > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً.

ملاحظة هامة: عندما نستخدم معيار الطرح قد ينتج مقدار يحوي n عندها ندرس إشارة الناتج

مثال 3: ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ حيث $U_n = \frac{n^2+4}{2n}$

الحل:

$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)^2+4}{2(n+1)} - \frac{n^2+4}{2n}$
$(n) \qquad (n+1)$

$= \frac{n[(n+1)^2+4] - (n+1)(n^2+4)}{2n(n+1)}$

$= \frac{n[n^2+2n+1+4] - (n^3+4n+n^2+4)}{2n(n+1)}$

$= \frac{\cancel{n^3}+2n^2+5n-\cancel{n^3}-n^2-4n-4}{2n(n+1)}$

$= \frac{n^2+n-4}{2n(n+1)}$

موجب

موجب

ندرس إشارة البسط

$n^2+n-4=0$

$\Delta = 1-4(1)(-4) = 17 > 0$

$n_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$n_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

Note: نقدم كر عندما نقدم سطر

الموضوع .... التاريخ / / 201

n	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
		+	0	−	0	+	

$\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 1.6$

Note: بالمتتاليات نأخذ المجال القريب من $+\infty$ ونأخذ عدد صحيح للعدد الموجود بالجدول

المتتالية متزايدة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل ② أي نعوض ""

$u_1 = \frac{5}{2} = 2.5$

$u_2 = 2$

$u_3 = \frac{13}{6} = 2.3$

أي يزداد بدءاً من 2

ندرس الإشارة

$2n^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2n^2 = 8$

$\Rightarrow n^2 = 4$

$\Rightarrow$ إما $n = 2$

أو $n = -2$

n	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
		+	0	−	0	+	

f متزايدة بدءاً من العدد 2

ما لمتتالية متزايدة تماماً بدءاً من العدد 2

مثال 4: ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث $u_n = \frac{n^2+4}{2n}$

الحل: نستخدم معيار الاشتقاق نفرض تابع وندرس الاطراد

$$f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$$

نشتق

$$f'(x) = \frac{2x(2x) - 2(x^2+4)}{(2x)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 2x^2 - 8}{4x^2} = \frac{2x^2-8}{4x^2}$$

وظيفة: ص18

الأول + الثاني + الرابع كاملاً

الموضوع الدرس ... / التاريخ / / 201

الوظيفة:

$(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية

$q=3$ ، $U_0=2$ أوجد U_4

$\frac{U_4}{U_0}=q^{4-0}$

$\frac{U_4}{2}=3^4$

$\Rightarrow U_4=2.3^4=162$

أو: $U_4=U_0 . q^4$

$=2.3^4$

$=2.81=162$

تدريب 18

1) $U_n=\frac{2^n}{3^{n+1}}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}}$

Note: نضع بجانب خط الكسر

$=\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}.\frac{3^{n+1}}{2^n}$

دائماً نقلب ER

ER

$\Rightarrow \frac{\cancel{2^n}.2}{\cancel{3^{n+1}}.3}.\frac{\cancel{3^{n+1}}}{\cancel{2^n}}=\frac{2}{3}=const$ أو

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية

أساسها $q=\frac{2}{3}$

---

2)

1) $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية

$U_5=-13$ ، $U_2=41$

$U_5-U_2=(5-3)r$

$-13-41=3r$

$-54=-3r$

$\Rightarrow r=\frac{-54}{3}=-18$

$U_{20}=?$

$U_{20}-U_5=(20-5)r$

$U_{20}+13=(15)(-18)$

$U_{20}+13=-270$

$U_{20}=-283$

2) $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية

$U_{10}=\frac{25}{2197}$ ، $U_7=\frac{1}{1080}$

$\frac{U_{10}}{U_7}=q^{10-7}$

$\frac{25}{2197}\times\frac{1080}{1}=q^3$

$\frac{5^3.6^3}{13^3}=q^3\Rightarrow\frac{30}{13}=q$

$U_{30}=U_{10}.q^{30-10}$

$\Rightarrow U_{30}=\frac{25}{2197}.\left(\frac{30}{13}\right)^{20}$

$U_{30}=\frac{5^2.(30)^{20}}{13^{23}}$

(٣) متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$
$u_1 = -2$ ، $r = 3$
احسب u_n بدلالة n
و $u_{30} + u_{31} + u_{32}$
$u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

الحل:

$u_n - u_1 = (n-1)r$
$u_n + 2 = (n-1)3$
$u_n + 2 = 3n - 3$
$\Rightarrow \boxed{u_n = 3n - 5}$

$u_{30} + u_{31} + u_{32}$
$\Rightarrow u_{30} = 3(30) - 5 = 85$
$u_{32} = 3(32) - 5 = 91$
عدد الحدود $= 32 - 30 + 1$

$S_1 = \frac{3}{2} \times (85 + 91)$
$= \frac{3}{\cancel{2}} \times (\overset{88}{\cancel{176}}) = \boxed{264}$

$u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$
$\Rightarrow u_1 = 3(1) - 5 = -2$
$u_{20} = 3(20) - 5 = 55$
عدد الحدود $20 - 1 + 1$

$S_2 = \frac{20}{2} \times (-2 + 55)$
$= 10(53) = \boxed{530}$

(٤) متتالية هندسية $(u_n)_{n\geq 0}$
$u_1 = -2$ ، $q = 3$
احسب u_n بدلالة n
$u_1 + u_2 + \dots + u_7$
$u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n}$

الحل:

$\frac{u_n}{u_1} = q^{n-1}$
$\frac{u_n}{-2} = 3^{n-1}$
$\Rightarrow \boxed{u_n = -2 \cdot 3^{n-1}}$

$S =$ الحد الأول $\times \frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}$

$u_1 = -2 \cdot 3^0 = -2$
عدد الحدود = الدليل الأصغر − الدليل الأكبر + 1
$= 7 - 1 + 1 = 7$

$S = -2 \times \frac{1 - 3^7}{1 - 3}$
$= \cancel{-2} \times \frac{1 - 2187}{\cancel{-2}}$
$= -2186$

الاساس = $\frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الاول}}$

$\frac{U_4}{U_2} = q$

$U_4 = -2 \cdot 3^{4-1}$

$U_4 = -2 \cdot 3^3 = -54$

$U_2 = -2 \cdot 3 = -6$

$\frac{U_4}{U_2} = \frac{-54}{-6} = 9$

عدد الحدود : $\frac{2n}{2} = n$

$\Rightarrow S = -6 \times \frac{1-9^n}{1-9}$

$S = -6 \times \frac{1-9^n}{-8} = \frac{3}{4}(1-9^n)$

5) $(U_n)_{n \geq 0}$ حسابية

$U_0 = -3 \quad , \quad r = -2$

احسب

$U_{25} + U_{26} + \dots + U_{125}$

عدد الحدود $= 125 - 25 + 1 = 101$

من القانون

$\boxed{U_n - U_p = (n - p)r}$

نكتب

$U_{25} - U_0 = (25) \cdot -2$

$U_{25} + 3 = -50$

$\Rightarrow U_{25} = -53$

$U_{125} - U_0 = (125) - 2$

$U_{125} + 3 = -250$

$U_{125} = -253$

$\Rightarrow S = 101 \times \frac{(-53 - 253)}{2}$

$= -15453$

(6): $(U_n)_{n \geq 0}$ هندسية

$U_0 = 1$, $q = 2$

احسب

$U_3 + U_4 + \dots + U_{10}$

الحل:

عدد الحدود $= 10 - 3 + 1 = 8$

$\frac{U_3}{U_0} = q^3$

$\frac{U_3}{1} = 2^3 \Rightarrow U_3 = 8$

$S = 8 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2}$

$\Rightarrow = -8(\overbrace{1 - 256}^{-255})$

$= 2040$

Note: عن تمرين (7)

في المتتالية الحسابية إذا ازداد كل حد عن سابقه بالمقدار $\frac{1}{*}$ فإن عدد الحدود عند الوصول إلى الحد ذي الصفة الرتبية a هو $a \times *$

Note: إذا لم يطلع الطرح مساوي نقسم فيطلع متتالية هندسية.

مثال 1:

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3 \dots 10$

$\frac{1}{3} \to *$

$\Rightarrow 3 \times 10 = 30$

مثال 2:

$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, 2 \dots 10$

$\frac{1}{4} \to *$

$\Rightarrow 4 \times 10 = 40$

(7)

$S = \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 \dots 10$

الحل:

$\left.\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ حسابية $r = \frac{1}{2}$

نلاحظ أن الحدود هي حدود متتالية حسابية لأن كل حد ينتج من سابقه بإضافة العدد $\frac{1}{2} \to *$

$S =$ عدد الحدود $\times \frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}$

$\Rightarrow 20 \times \frac{\frac{1}{2} + 10}{2} = 105$

Note: إذا كانت متتالية حسابية : حدود متتالية a, b, c
$$b = \frac{a+c}{2}$$

الموضوع .... التاريخ / / 201

3 ص 18

لوحدها.

(8) a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية

① $abc = 343$

② $a+b+c = 36.75$

الحل: قاعدة a, b, c حدود متعاقبة من متتالية هندسية

$\Rightarrow \boxed{b^2 = ac}$

$\Rightarrow$ ① في $\Rightarrow b^2 \cdot b = 343$

$b^3 = 7^3 \Rightarrow b = 7$

نعوض في ①

$7 \cdot a \cdot c = 343 \Rightarrow c = \frac{343}{7a}$

$c = \frac{49}{a}$ ونعوض

نعوض في ②

$a + 7 + \frac{49}{a} = 36.75$

$a^2 - 29.75a + 49 = 0$

~~(a - 1.75)(a - c)~~

$(a - 1.75)(a - 28)$

إما $a = 1.75$

$\Rightarrow c = \frac{49}{1.75} = 28$

أو $a = 28$

$\Rightarrow c = \frac{49}{28} = 1.75$

إذن الأعداد $1.75, 7, 28$

Note: a, b, c

الوسط الحسابية $b = \frac{a+c}{2}$

الهندسية $b^2 = a \cdot c$

Note: عند دراسة الاطراد.

إذا كان البسط والمقام موجبان فإن $0 <$ النسبة حتماً.

أما إذا كان المقام أكبر من البسط فإن $1 >$ النسبة حتماً.

4 حل

① $U_n = \frac{3}{n^2}$

الحدود موجبة

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$$

فالمتتالية متناقصة تماماً

② $U_n = \sqrt{3n+1}$

نفرض تابع

$f(n) = \sqrt{3n+1}$ $\qquad D = [0, +\infty[$

$$f' = \frac{3}{2\sqrt{3n+1}} > 0$$

فالتابع متزايد تماماً على

فالمتتالية متزايدة تماماً

ب :

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3(n+1)+1} - \sqrt{3n+1}$$

$$= \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1} > 0$$

فالمتتالية متزايدة تماماً ،

③ $U_n = \frac{2n-1}{n+4}$

نفرض تابع

$f(n) = \frac{2n-1}{n+4}$ $\qquad D = R\setminus\{-4\}$

$$f' = \frac{2(n+4)-(2n-1)}{(n+4)^2}$$

$$= \frac{9}{(n+4)^2} > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً ،

فالمتتالية متزايدة تماماً .

Note : يصح معيار الطرح.

④ $U_n = \frac{1}{n^2+1}$ $\qquad D = R$

نفرض تابع

$$f(n) = \frac{1}{n^2+1}$$

$$f' = \frac{-2n}{(n^2+1)^2} \Rightarrow f' = 0$$

$$\Rightarrow n = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = 1$$

إشارة $f'(n)$ من إشارة $-2n$

n	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$

f متناقص تماماً على $[0, +\infty[$

فالمتتالية متناقصة تماماً

Note : يصح معيار القسمة.

Note : المقدار الموجب لا تدرس الإشارة

الموضوع .... التاريخ / / 201

وظيفة ص 33

ص 18 (8، 7، 8) أسئلة 1 + 3 و 2 و 1

(7) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

المتتالية حسابية

$U_{n+1} - U_n = -3 < 0$

فالمتتالية متناقصة تماماً.

(8) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \end{cases}$

المتتالية هندسية

لكن: الحدود موجبة

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$

المتتالية متناقصة تماماً

(9) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n \end{cases}$

المتتالية هندسية

الحل: الحدود موجبة

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 > 1$

فالمتتالية متزايدة تماماً

Note : تمارين ص 18 (11) 8، 7، 9، 10: إذا كانت U_{n+1} علاقة هي أصح نأخذ معيار الطرح أما إذا كانت U_{n+1} علاقة جداء نأخذ معيار القسمة.

(5) $U_n = \frac{3n+1}{n-2}$

$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f'(x) = \frac{3x - 6 - 3x - 1}{(x-2)^2}$

$= \frac{-7}{(x-2)^2} < 0$

* التابع f متناقص تماماً

فالمتتالية متناقصة تماماً

(6) $U_n = \frac{n}{10^n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{10^{n+1}} - \frac{n}{10^n}$

$= \frac{n+1-10n}{10^{n+1}} = \frac{-9n+1}{10^{n+1}}$

$U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow -9n + 1 = 0$

$\Rightarrow n = \frac{1}{9}$

n	$-\infty$	$\frac{1}{9}$	$+\infty$
	+	0	−

فالمتتالية متناقصة تماماً بدءاً من العدد 1

Note : إذا كان الأساس موجب ⇐ فالمقدار موجب

Note: ندرس الاشارة عند مانقارن مع الصفر فقط وليس مع الواحد (معيار الطرح فقط)

الموضوع

التاريخ / / 201

① * خواص العاملة (!*)

① $x! = x(x-1)(x-2)\cdots 3\times 2\times 1$

مثال:

$6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$
$= 720$

$1! = 1$

$2! = 2\times 1 = 2$

$0! = 1$

② ما قبله عاملي × نفسه = كل مقدار عاملي

$x! = x(x-1)!$

$6! = 6\times 5!$

أو $6! = 6\times 5\times 4!$

أو $6! = 6\times 5\times 4\times 3!$

مثال:

$\frac{100!}{99!} = \frac{100\times \cancel{99!}}{\cancel{99!}} = 100$

$(x+1)! = (x+1)\,x!$

22p

① $u_n = -3(n+1)+1-(3n+1)$
$= -3 < 0$

متناقصة تماماً $(u_n)_{n\geq 0}$.

② $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

نفرض تابع

$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

$f'(x) = \frac{1(x+2)-1(x+1)}{(x+2)^2}$

$= \frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً

③ $u_n = 2^n$

نلاحظ أن الحدود موجبة

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n\cdot 2}{2^n} = 2 > 1$

فالمتتالية متزايدة تماماً

Note: كل متتالية أساسها سالب هي متتالية غير مطردة.

التاريخ 201 / /

الموضوع

4] $U_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

غير مطردة لأن:

n: زوجي: $U_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}$

فردي: $U_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n = -\frac{1}{n}$

5] $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ نفضل معيار الفرق

$U_{n+1} - U_n = \cancel{1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \cancel{1} - \frac{1}{n^2}$

$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

$= \frac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} - 2n - 1}{n^2(n+1)^2} = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}$

ندرس الإشارة

$-2n - 1 = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$

n	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
	$+$	0	$-$	

المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل 1

او f نعرف تابع

$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ معرف على

$f'(x) = \frac{-2x}{x^4}$ $[1, +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
	$+$		$-$

متناقصة بدءاً من الحد ذي الدليل 1

6] $U_n = \frac{n^2}{n!}$

الحدود موجبة (معيار القسمة)

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}$

$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2}$

$= \frac{\cancel{(n+1)^2}}{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2}$

$= \frac{n+1}{n^2} < 1$

المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل 2 نعوض لنتأكد

Note: سابقاً على

$n^2 > n+1$

هام جداً

$\boxed{7}$ $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

نستخدم معيار الطرح لأن الحدود عبارة عن مجاميع.

$U_{n+1} - U_n =$

$\left[\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right] - \left[\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{2^n}}\right]$

$= \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

فالمتتالية متزايدة تماماً

$\boxed{8}$ $\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2 \end{cases}$

Note: عند دراسة إطراد متتالية بالتدريج ولا نعلم متزايدة إما متناقصة نحسب أول أربع أو خمس حدود لنكتشف الإطراد وبعدها نبرهن تزايد أم تناقص

~~Ho...~~

~~...~~

$\boxed{2}$ $U_{n+1} = 2U_n - 3$, $U_0 = 2$

① $U_1 = 2U_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$

$U_2 = 2U_1 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$

$U_3 = 2U_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$

$U_4 = 2U_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -10 - 3$
$= -13$

$U_5 = 2 \cdot U_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$

(التمرين لاحقاً)

لنفرض الجواب

Note: لبرهان مساواة $f_1 = f_2$ ننطلق من أحد الطرفين حتى نصل للآخر أو نشتغل على الطرفين سوا حتى نصل

الموضوع .... التاريخ / / 20

البرهان بالتدريج (الاستقراء الرياضي)

نتبع ما يلي:

1) نبرهن صحة العلاقة من أجل أصغر عدد في المجموعة المعطاة

2) نفرض صحة العلاقة من أجل العدد n ونرمز لذلك بالرمز $E(n)$

3) نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ ونرمز لذلك بالرمز $E(n+1)$

مثال:

برهن صحة العلاقة التالية من أجل العدد n أياً كان موجباً تماماً بالتدريج

Note: موجب تماماً ⇐ يبدأ من 1

الحل: 1) نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=1$ أي نبرهن:

$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1 = \frac{1(4)}{4} \Rightarrow 1=1$ محققة

2) نفرض صحة العلاقة من أجل العدد n أي:

$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ محققة ★

3) نبرهن صحة العلاقة من أجل $(n+1)$ أي نبرهن أن:

$1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

توضيح مسودة:

$1^3 = \frac{1(4)}{4} \Rightarrow 1=1$ محققة

$1^3+2^3 = \frac{4(9)}{4} = 9$

البرهان:

$f_1 = \underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3}_{\text{حسب } \star} + (n+1)^3$

$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + \frac{(n+1)}{1}\right]$

$= (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right]$

$= (n+1)^2\left[\frac{(n+2)(n+2)}{4}\right]$

$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = f_2$

Note: دائماً في الخطوة الثالثة يجب أن نستفيد من * ونستخدمه.

مثال 2: أثبت أن مهما كان العدد الطبيعي n فإن * 4^n+2 مضاعف للعدد 3

الحل:

1) نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$ أي نبرهن

$4^0+2=1+2=3$

مضاعف للعدد 3 (محقق)

2) نفرض صحة العلاقة من أجل n: أي 4^n+2 * (محققة) (مضاعف للعدد 3)

3) نبرهن صحة العلاقة من أجل (n+1) أي نبرهن $4^{n+1}+2$ (مضاعف للعدد 3)

$4^{n+1}+2$

$=4^n.4+2$

نضرب بـ 8 نضيف ونطرح

$=4^n.4+2+8-8$

$=4^n.4+8+2-8$

$=4(4^n+2)-6$

مضاعف لـ 3 * مضاعف لـ 3

فهو مضاعف العدد 3 أي مضاعف لـ 3

Note: نرمز لمضاعف العدد * بالرمز (*m) حيث m عدد طبيعي

طريقة 2: الخطوة الأولى نفسها.

2) نفرض صحة العلاقة من أجل n أي $4^n+2=3m$ * حيث m عدد طبيعي

3) نبرهن صحة العلاقة من أجل (n+1) أي نبرهن $4^{n+1}+2=3m$

$4^{n+1}+2$

$4^n.4+2$

ويكون من * ⟸ $4^n=3m-2$

$\Rightarrow (3m-2)4+2$

$=12m-8+2$

$=12m-6$

وهو مضاعف لـ 3 وهو المطلوب.

حل تمارين ووظيفة ص35 ~~تمرين~~

11، 12، 13، 14، 15

+ تدرب ص21

Note: بـ الخطوة الثالثة نفرض دائماً نكتب مضاعف لعدد أو m عدد صحيح

ص 25 | 13

1)

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل n=0

محققة $4^0+5=1+5=6$

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$\boxed{4^n+5=3m}$ ★

حيث m عدد صحيح.

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل n+1 :

$4^{n+1}+5=4^n\cdot4+5$

ولكن من ★ $4^n=3m-5$

$=(3m-5)4+5$

$12m-20+5 \Rightarrow 12m-15 \Rightarrow$ وهو من مضاعف (3)

3) $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل n=0 أي

$2^{3(0)}-1=2^{(0)}-1$

محققة $1-1=0$

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n أي

حيث m عدد صحيح $2^{3n}-1=7m$ ★

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل n+1 أي

سنبرهن :

$\boxed{2^{3(n+1)}-1=7m}$

$2^{3n+3}-1=$

$2^{3n}\cdot2^3-1=2^{3n}\cdot8-1$

ونعلم من العلاقة ★ أن :

$2^{3n}=7m+1$

نعوض $(7m+1)\cdot8-1$

$56m+8-1=56m+7$ وهو مضاعف للعدد (7)

2) n^3+2n

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل n=0

أصغر عدد طبيعي

$(0)^3+2(0)$

محقق $0+0=0=3m$ ★

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n عدد طبيعي

محققة $n^3+2n=3m$ ★

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل n+1

$(n+1)^3+2(n+1)=3m$

$n^3+3n^2+3n+1+2n+2$

حسب ★

$=3m+3n^2+3n+3 \Rightarrow$

مضاعف لـ 3

4) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف لـ 7

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل n=0

أي سنبرهن

$3^{2(0)+1}+2^{0+2}=3+4=7$ مضاعف للعدد 7

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n أي

$3^{2n+1}+2^{n+2}=7m$ ★

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل n+1 أي

سنبرهن

$3^{2n+3}+2^{n+3}=3^{2n+1}\cdot3^2+2^{n+2}\cdot2^1$

$=3^{2n+1}(7+2)+2^{n+2}\cdot2$

Note: إذا كانت العلاقة التي سنبرهنها متراجحة فإننا ننطلق من * طبعاً

الموضوع

التاريخ / / 201

(2) $= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

$= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2(\underbrace{3^{2n+1} + 2^{n+2}}_{\text{فرض } *})$

$= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2(7m) \Rightarrow$ مضاعف لـ 7

Note عن تمرين 3 ص18 :

في الصيغة التدريجية إذا كان لدينا u_n بالبسط والمقام نبسط البسط على المقام ونطبق إقليدس عليه (مشان تصير u_n مرة واحدة)

مثال:

$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

نعمل قسمة إقليدية

$$\begin{array}{r|l} n & n+1 \\ \underline{n+1} & 1 \\ -1 & \end{array}$$

قانون إقليدس

Note: إقليدس صاحب الكرة

ناتج القسمة + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$\frac{n}{n+1} = 1 + \frac{-1}{n+1}$

وذلك القسمة الإقليدية عالطريقة بالورقة.

تدريب 3 ص18 .

$v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$

(1) تحقق $v_n > 0$ أياً كانت n

إذا برهن أن جميع الحدود موجبة

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل أصغر عدد وهو 0 :

أي سنبرهن

$v_0 > 0$

$1 > 0$ محقق

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n أي

* $v_n > 0$ محقق

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي سنبرهن:

$v_{n+1} > 0$

أي سنبرهن:

$v_{n+1} = 1 + \frac{-1}{1+v_n} > 0$

البرهان: ننطلق من * لدينا

$v_n > 0$

نضيف 1 $\Rightarrow 1 + v_n > 1$

نقلب ونغير الجهة $\Rightarrow \frac{1}{1+v_n} < 1$

نضرب بـ - ونغير الجهة $\Rightarrow \frac{-1}{1+v_n} > -1$

نضيف 1 $\Rightarrow 1 + \frac{-1}{1+v_n} > 0$

$\Rightarrow v_{n+1} > 0$

وهو المطلوب

الموضوع .... التاريخ / / 201

ط٢: الخطوة الثالثة: هي طريقة عامة لجميع التمارين

الفكرة: نفرض u_{n+1} تابع ونبرهن أنه متزايد أو متناقص تماماً ثم نذهب للخطوة الثالثة و نضرب الأطراف حيث يكون:
حيث:

$f(x_n) = x_{n+1}$

$f(x_{n+1}) = x_{n+2}$

ولكن عند التصوير نميز حالتين

١- إذا كان التابع متزايد تماماً فلا نغير جهة المتراجحة.

٢- إذا كان التابع متناقص تماماً نغير جهة المتراجحة.

③ نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$
أي سنبرهن:

$\boxed{x_{n+1} > 0}$

نفرض $f(x) = \frac{x}{1+x}$

نشتق

$f'(x) = \frac{1(1+x)-1(x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$

⇐ التابع متزايد تماماً

* ننطلق من: $x_n > 0$

نضرب $f(x_n) > f(0)$

$x_{n+1} > 0$ ولا نغير الجهة لأن التابع متزايد تماماً

وهو المطلوب.

~~[illegible]~~

عندما نفرض تابع فإننا نفرض: $u_{n+1} = f(u_n)$

٣ نثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية

المعرفة $u_n = \frac{1}{v_n}$

الحل: برهان حسابية

$u_{n+1} - u_n =$ عدد ثابت

$$= \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{v_n}{1+v_n}} - \frac{1}{v_n}$$

$$= \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1$$

المتتالية حسابية أساسها العدد ١

٢ استنتاج v_n بدلالة n (فرعي)

نوجد أولاً u_n بدلالة n

ثم v_n بدلالة n

لأن u_n هي الحسابية وليست v_n

$u_n - u_0 = (n-0)r$

$n \leftarrow$ مجهول

$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{1} = 1$

$u_n - u_0 = (n-0)(1)$

$u_n - 1 = n \Rightarrow \boxed{u_n = n+1}$

لإيجاد v_n بدلالة n نستفيد من علاقة

تربط u_n بـ v_n ⇐

$$u_n = \frac{1}{v_n}$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{1}{u_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_n = \frac{1}{n+1}}$$

انتهى التمرين

ص ٢٣ تمرين الأول رقم 8

$$\begin{cases} U_0 = 8 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2 \end{cases}$$

نجرب:

$U_0 = 8$ فرضًا

$U_1 = \frac{3}{4} U_0 + 2$

$= \frac{3}{4} \cancel{8} + 2 = 8$

$U_2 = \frac{3}{4} U_1 + 2 = \frac{3}{4}(8) = 8$

نجد أن المتتالية ثابتة

⇐ سنحاول برهان ثابتة ⇐ معيار الثابتة

$\Rightarrow \boxed{U_{n+1} = U_n}$

سنبرهن بالتدريج

١- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 0$

أي سنبرهن

محققة $U_{0+1} = U_0 \Rightarrow U_1 = U_0 \Rightarrow 8 = 8$

٢- نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n

أي

$U_{n+1} = U_n$ ★

٣- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$U_{n+2} = U_{n+1}$

ننطلق من ★

$U_{n+1} = U_n$

نضرب بـ $\frac{3}{4}$ $\Rightarrow \frac{3}{4} U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n$

نضيف 2 $\Rightarrow \frac{3}{4} U_{n+1} + 2 = \frac{3}{4} U_n + 2$

$U_{n+2} = U_{n+1}$

ط٢: الخطوة الثالثة:

نفرض تابع

$f(x) = \frac{3}{4} x + 2$

نشتق

$f'(x) = \frac{3}{4} > 0$

⇐ f متزايد تمامًا

$U_{n+1} = U_n$

⇐

$f(U_{n+1}) = f(U_n)$

$U_{n+2} = U_{n+1}$

الموضوع .... التاريخ / / 201

ص 22 تمرين الأول رقم 9

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + 2 \end{cases}$$

$u_0 = 2$

$u_1 = \frac{3}{4} u_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2$

$= \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} = 3.5$

$u_2 = \frac{3}{4} u_1 + 2$

$= \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2 = \frac{21}{8} + 2 = \frac{37}{8}$

$= 4.6$

نخمن أن المتتالية متزايدة تماماً

⟸ سنحاول نبرهان ذلك.

⟸ نبرهن $u_{n+1} > u_n$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 0$

$\Rightarrow u_1 > u_0$

$3.5 > 2$ محققة

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n أي:

$\star$ $u_{n+1} > u_n$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$ أي نبرهن

$u_{n+2} > u_{n+1}$

نفرض تابع.

$f(x) = \frac{3}{4} x + 2$

نشتق

$f'(x) = \frac{3}{4} > 0$

f متزايد تماماً.

$u_{n+1} > u_n$

بضرب الأطراف $f(u_{n+1}) > f(u_n)$

ولا نغير الجهة $u_{n+2} > u_{n+1}$

لأن f متزايد

تدرب ص 21:

1) $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

مجموع

S_1, S_2, S_3

$S_1 = 1^2 = 1$

$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 = S_1 + 2^{2}$ الدليل

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = S_3 = S_2 + 3^{2}$ الدليل

$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = S_4 = S_3 + 4^{2}$ الدليل

$$\boxed{S_{n+1} = S_n + (n+1)^2}$$

2) $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الحل: 1- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 1$

$\Rightarrow S_1 = \frac{1(2)(3)}{6}$

$\Rightarrow 1 = 1$ محققة

٢- نفرض صحة العلاقة من أجل n

$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ ★

٣- نبرهن صحة العلاقة من أجل (n+1)

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

أي سنبرهن:

$S_n + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$f_1 = S_n + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$

$= (n+1)\left[\frac{2n^2+7n+6}{6}\right]$

$= (n+1)\left[\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right]$

رياضية 15، 16 صفر 24

ص 22

$\boxed{4}$

① $1 + 2\times 2! + 3\times 3! + \dots + n\times n! = (n+1)! - 1$

١- نبرهن صحة العلاقة من أجل n=1

$1 = (1+1)! - 1$

$1 = 1$ محققة

٢- نفرض صحة العلاقة من أجل n:

★ $\boxed{1+2\times2!+3\times3!+\dots+n\times n! = (n+1)!-1}$

٣- نبرهن صحة العلاقة من أجل n+1

$1+2\times2!+3\times3!+\dots+(n+1)\times(n+1)! = (n+2)!-1$

$f_1 = \underbrace{1+2\times2!+3\times3!+\dots+n\times n!}_{\star} + (n+1)(n+1)!$

$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$

$(n+1)!\,[1+(n+1)] - 1$

$(n+1)!\,[n+2] - 1 = (n+2)! - 1$

قاعدة: $(n+2)! = (n+2)(n+1)!$ ★

Note : لا يجوز أن نفرض تابع بالعاملي . فقط نفرض تابع للصور الأطراف لأنه لا نستطيع أن نشتق العاملي

الموضوع Note : تمارين العاملي تبدأ من الواحد حتماً .

التاريخ / / 201

②

$n! \geq 2^{n-1}$:

١- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=1$

$1! \geq 2^{1-1}$

$1 \geq 1$ محققة

٢- نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$\boxed{n! \geq 2^{n-1}}$ *

٣- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$\boxed{(n+1)! \geq 2^{n}}$

ننطلق من * :

$n! \geq 2^{n-1}$

نضرب بـ $(n+1)$ $\Rightarrow$ $(n+1)n! \geq 2^{n-1}(n+1)$

نستبدل بـ ٢

$(n+1)! \geq 2^{n-1} \times 2$

$(n+1)! \geq 2^{n}$

لأن $n \geq 1$

$\Rightarrow n+1 \geq 2$

قاعدة : في تمارين العاملي يجوز استبدال $(n+1)$ من الطرف الصغير بـ العدد ٢ لأن $n+1 \geq 2$

Note : بالمتراجحات يجوز تصغير الصغير أو تكبير الكبير .

مثال :

$8 \geq 3 \times 2$ نصغر

$8 \geq 3 \times 1$

لا تتغير بشيء

قاعدة : $(n+1)! = (n+1)n!$

تدرب ح ص ٢ :

الحل : ١- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$(1+x)^0 \geq 1+(0)x$

$1 \geq 1$ محققة

$\Leftarrow$ $\mathcal{E}(1)$ محققة

٢- نفرض صحة العلاقة من أجل n :

$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx}$ *

٣- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

ننطلق من * :

$(1+x)^n \geq 1+nx$

نضرب بـ $(1+x)$:

$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$

نهمله لأنه موجب

$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+x(n+1)$

وهو المطلوب .

Note : إذا أعطونا عدد طبيعي نبدأ من الصفر أما إذا قال لنا عدد طبيعي موجب تماماً نبدأ من الواحد .

Note : بالمتراجحات دائماً ننطلق من *

Note : يجوز إهمال المقادير الموجبة من الطرف الصغير

تمرين 15 ص 25

$(u_n)_{n\ge 0}$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

جميع الحدود محصورة بين 0 و 2 (محدودة)

① $\boxed{0 \le u_n \le 2}$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$0 \le u_0 \le 2$

$0 \le 1 \le 2$ محققة

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n

$\boxed{0 \le u_n \le 2}$ *

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$0 \le u_{n+1} \le 2$

البرهان: ننطلق من * $0 \le u_n \le 2$

نضيف 2 $\Rightarrow 2 \le 2+u_n \le 4$

نجذر $\Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{2+u_n} \le \sqrt{4}$

إذا صغرنا الصغير $0 \le \sqrt{2+u_n} \le 2$

$0 \le u_{n+1} \le 2$

لأن $0 < \sqrt{2}$

② نثبت أن $(u_n)_{n \ge 0}$ متزايدة تماما

نثبت بالتراجع أن

$u_{n+1} > u_n$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل

$n=0$

$u_1 > u_0$

$\sqrt{3} > 1$ محققة

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n

$\boxed{u_{n+1} > u_n}$ *

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$u_{n+2} > u_{n+1}$

البرهان:

ننطلق من * $u_{n+1} > u_n$

نضيف 2 $\Rightarrow 2+u_{n+1} > 2+u_n$

نجذر $\Rightarrow \sqrt{2+u_{n+1}} > \sqrt{2+u_n}$

$u_{n+2} > u_{n+1}$

وهو المطلوب

Note: إذا كانت f متزايدة والمطلوب إثبات u_n متناقصة لا نغير الجهة لأن f متزايدة.

Note: المتتاليات التي بالصيغة التراجعية أي u_{n+1} نستخدم البرهان بالتراجع في إثبات العلاقات.

Note: عندما نشتق كسر لا نفك التربيع بالمتمام.

Note: عندما نرى $x \rightarrow$ معناها $f(x) =$

الموضوع ....

التاريخ / / 201

16 ص 25 — حلم متوقع جداً

$U_0 = 1$

$$U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 6}$$

① لنثبت أن التابع متزايد نشتق

$$f(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{6x + 18 - 6x - 4}{(2x+6)^2}$$

$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

فالتابع متزايد تماماً.

②

$$\frac{1}{2} < U_n \leq 1$$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$$\frac{1}{2} < 1 \leq 1$$

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$* \boxed{\frac{1}{2} < U_n \leq 1}$$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$$

البرهان: ننطلق من *

$$\frac{1}{2} < U_n \leq 1$$

نطبق التابع على الأطراف ولا نغير الجهة.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(U_n) \leq f(1)$$

~~$\frac{1}{2} < \frac{3U_n+2}{2U_n+6} \leq \frac{5}{8}$~~ نختصر ب...

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq \frac{5}{8}$$

نكبر الكبير $1 > \frac{5}{8}$ لأن

$$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$$

③ شرط التناقص تماماً

$$U_{n+1} < U_n$$

1- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=0$

$$U_1 = \frac{3(1)+2}{2(1)+6} = \frac{5}{8}$$

$U_1 < U_0$

$\frac{5}{8} < 1$ محققة

2- نفرض صحة العلاقة من أجل n

$$\boxed{U_{n+1} < U_n} *$$

3- نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$U_{n+2} < U_{n+1}$$

البرهان: ننطلق من * $U_{n+1} < U_n$

نضع التابع على الأطراف ولا نغير الجهة.

$$f(U_{n+1}) < f(U_n)$$

$$U_{n+2} < U_{n+1}$$

محققة والمتتالية متناقصة تماماً.

Note: تابع متزايد تماماً
هام ‼ تابع متناقص تماماً / وسيتغير

يعني نضع الأطراف (حصراً).

Note هامة: إذا كان U_{n+1} متزايد ليس شرط أن يكون U_n متزايد من الدليل على هذا الحكي هذا التمرين.

15 ص25

1) ط2 :

Note: الجذر التربيعي دائماً موجب

Note:

$$\left[\sqrt{*}\right]' = \frac{*'}{2\sqrt{*}}$$

الحل:

نفرض تابع :

$$f(x) = \sqrt{2+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$$

موجب

موجب

موجب

فالتابع متزايد تماماً.

~~الخطوة~~ بالخطوة الثالثة

ننطلق من *

$$\boxed{0 \leq U_n \leq 2}$$

نضع الأطراف ولا نغير الجهة

لأن التابع متزايد تماماً

$$f(0) \leq f(U_n) \leq f(2)$$

$$\sqrt{2} \leq U_{n+1} \leq 2$$

بالصفر

$$\boxed{0 \leq U_{n+1} \leq 2}$$

« النهايات » السعيدة

« نهاية تابع من اليمين »

★ إذا كان: $\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = l_1$ ⇐

أو

$\lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$

عندها نقول أن نهاية التابع عندما x تسعى إلى a من اليمين هي l_1

« نهاية تابع من اليسار »

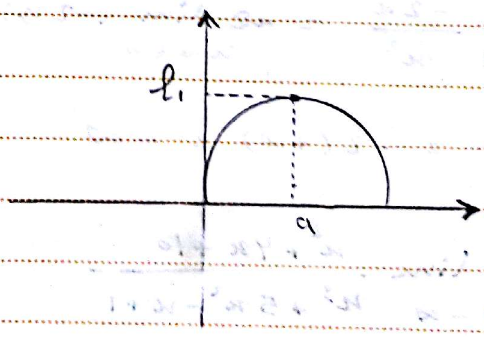
★ إذا كان: $\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = l_2$

أو

$\lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$

عندها نقول أن نهاية التابع عندما x تسعى إلى a من اليسار هي l_2

نتيجة: إذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإنه يوجد للتابع نهاية هي: $l_1 = l_2$ والعكس صحيح ...



★ تعريف من الكتاب ص 32 ...

« قواعد النهايات » « المتممة »

1. $\boxed{\frac{\infty}{\infty} = \text{عدم التعيين}}$
2. $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \pm\infty$
3. $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$
4. $\boxed{\frac{0}{0} = \text{عدم التعيين}}$
5. $\frac{\infty}{0} = \pm\infty$
6. $\frac{0}{\infty} = 0$
7. $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$
8. $\frac{\text{عدد}}{0} = \pm\infty$

« الجمع »

1. $+\infty + \infty = +\infty$
2. $-\infty - \infty = -\infty$
3. $\boxed{-\infty + \infty = \text{عدم التعيين}}$

يقصد بعدم التعيين الجواب موجود لكن لم نستطع تعيينه

« الضرب »

1. عدم التعيين = $0.(\infty)$

2. $-\infty(+\infty) = -\infty$

3. $-\infty(-\infty) = +\infty$

4. $\pm\infty(\text{عدد}) = \pm\infty$

« مع مراعاة الإشارة »

« النهاية عند $\pm\infty$ عند عدة حالات »

1] إذا كان التابع صحيح فإننا نعوض $\pm\infty$ في الحد الرئيسي (المسيطر) « صاحب أكبر أس مع أمثلة »

مثال

$$f(x) = x^2 - 2x + 10$$

أوجد نهاية التابع f عند $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

مثال $f(x) = -2x^3 + 5x + 10$

أوجد نهاية التابع f عند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^3) = -2(+\infty)^3 = -\infty$$

2] نهاية كسر عند $\pm\infty$ « البسط والمقام صحيحان »

نأخذ الحد المسيطر في البسط والحد المسيطر في المقام ثم نختصر ثم نعوض.

مثال $\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3 + 5x}{x^2 + 4x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} (-2x)$$

$$= -2(+\infty) = -\infty$$

مثال $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 4x + 10}{x^3 + 5x^2 - x + 1}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

« النهاية عند عدد حقيقي »

لإيجاد النهاية عند عدد نعوض العدد في التابع

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad a = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{0}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

الصفر تحت الجذر دائماً صفر موجب

مثال

$$f(x) = x^2 + 5x + 1 \qquad a = -2$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = (-2)^2 + 5(-2) + 1$$

$$4 - 10 + 1 = -5$$

لما منعوض النهاية أو العدد منشيل lim ...

lim (العدد) = العدد نفسه

مثال: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+10x+1}{-x^2+5x}$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} -2 = -2$

نتيجة:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^m+\cdots}{bx^n} = \begin{cases} \infty ; & m>n \\ 0 ; & m<n \\ \frac{a}{b} ; & m=n \end{cases}$$

«المقاربات»

1] المقارب الأفقي الموازي للمحور xx'

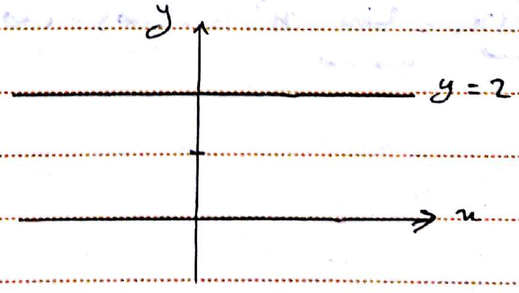
نقول عن المستقيم $y=l$ أنه مقارب أفقي يوازي المحور xx' إذا تحقق الشرط:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \underset{\text{عدد}}{l}}$$

مثال: $\lim_{x\to \boxed{-\infty}} \dfrac{2x^2+5}{x^2+1}$

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$

$y=2$ مقارب أفقي $// \; xx'$ في جوار $-\infty$



«الوضع النسبي للمقارب الأفقي»

$y = l$

1] نوجد $f(x) - y_\Delta$

2] ندرس إشارة الناتج $(f(x) - y_\Delta)$

3] ننظم جدول إشارة الوضع النسبي

4] إذا كان إشارة الناتج (موجب) فإن الخط c_f فوق المقارب Δ

5] إذا كان إشارة الناتج (سالب) فإن الخط c_f تحت المقارب Δ

مثال: ادرس الوضع النسبي للمقارب $y_\Delta = 2$ للتابع

$f(x) = \dfrac{2x^2+5}{x^2+1}$

الحل

1) $f(x) - y_\Delta$

$= \dfrac{2x^2+5}{x^2+1} - \dfrac{2}{1}_{(x^2+1)}$

$= \dfrac{\cancel{2x^2}+5-\cancel{2x^2}-2}{x^2+1} = \dfrac{3}{x^2+1} > 0$

الخط c فوق المقارب Δ

ط جدول الوضع النسبي ...

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
إشارة $f(x)-y_\Delta$	$+$
الوضع النسبي	الخط c فوق Δ

2) المقارب الشاقولي الموازي لمحور yy'

نقول عن المستقيم $x = l$ أنه مقارب يوازي محور التراتيب yy' إذا تحقق الشرط

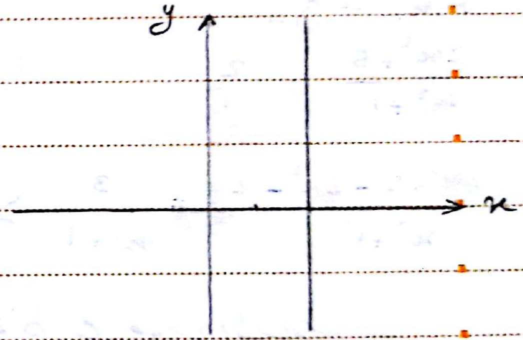
$$\boxed{\lim_{x \to l} f(x) = \pm \infty}$$

عندها $x = l$ مقارب شاقولي ...

مثال:

$$\lim_{x \to 2} \frac{5}{\sqrt{x-2}} = \frac{5}{\sqrt{2-2}} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي $\parallel yy'$



$x = 2$

((الوضع النسبي للمقارب الشاقولي $x = l$))

1] إذا كان $x \to l^+$ من اليمين فإن الخط C على يمين المقارب

2] إذا كان $x \to l^-$ من اليسار فإن الخط C على يسار المقارب

مثال: أوجد المقارب الشاقولي وادرس الوضع النسبي للمقارب

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x-5}$$

عند $a = 5$ من اليمين واليسار ...

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \frac{30}{0^+} = +\infty$$

$x = 5$ مقارب شاقولي يوازي yy' والخط C على يمينه

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \frac{30}{0^-} = -\infty$$

$x = 5$ مقارب شاقولي يوازي yy' والخط C على يساره

((تدريب ص 34))

احسب النهايات للتوابع الآتية عند $+\infty$ و $-\infty$

توابع هذا التمرين كثيرة حدود نأخذ الحد المسيطر ...

1] $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -(+\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^3 = -(-\infty) = +\infty$$

«تدرب ص 34»

[1] احسب النهايات الآتية :

[2] $f(x) = -3x^4 + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^4 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3(+\infty) = -\infty$

[3] $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 8x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 8(+\infty) = +\infty$

[4] $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5(-\infty) = -\infty$

[5] $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 7x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 7(-\infty) = -\infty$

[6] $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^4 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2(+\infty) = -\infty$

«تدرب ص 38» نهاية كسر عند $+\infty$ و $-\infty$ نأخذ المسيطر في البسط والمسيطر في المقام.

[1] احسب نهايات التوابع عند $+\infty$ و $-\infty$ وعند النقطة a

[1] $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ $\quad a = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\quad D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

[2] $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$ $\quad a = 2$

$D =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{6}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{6}{0^-} = -\infty$

[3] $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ $\quad a = -1$

$D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

[1] « تدرب ص 38 »

[4] $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+1}$ $a = -1$

بالامتحان لا نقبل

$\lim\limits_{x \to \boxed{\pm\infty}} f(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{5x}{x} = 5$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \dfrac{-4}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

[5] $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ $a = 2$

$\Rightarrow$ الحد موجب

$f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4x + 4}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

[6] $f(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$ $a = -2$

نوزع الـ lim على الجمع

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 5 + 0 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty - 5 + 0 = -\infty$

[6] $f(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$ $a = -2$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -11 + \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -11 + \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

[1] « تدرب ص 42 »

احسب نهايات التابع عند $+\infty$ و $-\infty$

[1] $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$ $a = 1 , 2$

$D =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

$f(x) = \dfrac{2x^2}{-x^2 + 3x - 2}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{-x^2} = -2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{8}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{8}{0^+} = +\infty$

ملاحظة:

★ lim يتوزع على الجمع والطرح والضرب والقسمة

مثال (6)

ولكي نعرف بأن الحد موجب أو سالب نعوض في المقام فقط.

Class

[1] « تدرب ص 42 »

[2] $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$ $a = 2 , -2$

$D =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

[3] $f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$ $a = 1$

$D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ $(1-x)^2 , (-x+1)^2$

$(1-x)(1-x)$

$f(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 2 + \frac{1}{(+\infty)} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - 2 + \frac{1}{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} - 1 = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} - 1 = +\infty$

[4] $f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}$ $a = 1, 2$

$D =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 - 0 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} + 1 = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 - 1 - \frac{1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$

lim يوزع على الجمع والطرح
والضرب والقسمة

«قواعد هامة»

[1] $\lim\limits_{\star \to 0} \frac{\sin \star}{\star} = 1$

[2] $\lim\limits_{\star \to 0} \frac{\star}{\sin \star} = 1$

[3] $-1 \le \cos \star \le 1$

[4] $-1 \le \sin \star \le 1$

[5] $0 \le \sin^2 \star \le 1$

[6] $0 \le \cos^2 \star \le 1$

مثال: عدم التعيين

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

نحلل البسط

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x-1)}{\sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} 1(x-1) = 1(0-1) = -1$$

مثال:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sin(x-5)}{(x-5)}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sin(x-5)}{(x-5)} = 1$$

لأن

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

مثال 3:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثال 4:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5\,\boxed{\sin 5x}}{\boxed{5x}} = 5(1) = 5$$

لأن

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

إذا كان الشكل غير شكل قاعدتنا [1] و [2]
نحل بنفس الشكل [1] و [2]. مثال
رقم 2 و 4 .

«إزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$»
لدينا عدة طرق.

[1] نحلل البسط والمقام ثم نختصر ثم نعوض النهاية.

مثال:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+2x-8} = \frac{0}{0}$$

عدم التعيين

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{(x+4)\cancel{(x-2)}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x+4)} = \frac{1}{6}$$

[2] في حالة الجذور التربيعية لدينا طريقتين .

[أ] نخرج x أو x^2 عامل مشترك لكي نختصر .

[ب] نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر .

مثال : عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x}$$

ولا نستطيع الإكمال لأنو الصفر مامنعرف صفر موجب ولا سالب .

داخل الجذر نخرج فقط x^2 عامل مشترك .

$$\sqrt{\star \cdot \heartsuit} = \sqrt{\star} \cdot \sqrt{\heartsuit}$$

مرافق $a+b$ هو $a-b$

$$(\star - \heartsuit)(\star + \heartsuit) = \star^2 - \heartsuit^2$$

$|x|$:
- $x \to +\infty$, $x \to 0^+$ } $\to x$
- $x \to -\infty$, $x \to 0^-$ } $\to -x$

ط : نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر .

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{1}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$\sqrt{x + \heartsuit} \pm \sqrt{\heartsuit}$

$\sqrt{x^2 + \text{عدد}} \pm \sqrt{\text{عدد}}$

نضرب ونقسم للمرافق

$\sqrt{x + 9} \pm 3$

$\sqrt{x^2 + 4} \pm 2$

جذر:
- نخرج x^2 من داخل الجذر عامل مشترك
- نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر

" تمرينات ومسائل ص 67 "

[1] ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ، وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين واليسار

[1] $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $D = R =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim \dfrac{x^3}{x^2} = \lim x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim x = -\infty$

[2] $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x^2}$ $D = R \setminus 0$

$D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 - \dfrac{4}{0^+} = 2 - (+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2 - \dfrac{4}{0^+} = -\infty$

[3] $f(x) = x^2 + 3x - \dfrac{1}{x+3}$ $R \setminus -3$

$D =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \infty - 0 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim x^2 - \lim \dfrac{1}{x+3} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 9 + (-9) - \dfrac{1}{0^-} = +\infty$

[3] $f(x) = x^2 + 3x - \dfrac{1}{x+3}$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 9 - 9 - \dfrac{1}{0^+} = -\infty$

[4] $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x+2}$ 24

$D =]-\infty, -2[\cup]-2, -1[\cup]-1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 - 0 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -2 + \dfrac{1}{-1} - \dfrac{1}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -2 - 1 - \dfrac{1}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1 + \dfrac{1}{0^+} - \dfrac{1}{+1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1 + \dfrac{1}{0^-} + 1 = -\infty$

[5] $f(x) = (2x-3)(5-\sqrt{x})$

$D = [0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = (-3)(5) = -15$

[8] $f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 0 - \frac{1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 + 0 - \frac{1}{0^-} = +\infty$

[9] $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$

$D = [0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty + 3 =$ عدم التعيين

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left[\sqrt{x} - 2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right]$

$= +\infty(+\infty - 2 + 0) = +\infty$

أو

$\lim_{x \to +\infty} x\left[1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}\right]$ $\quad \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$

$= +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

[10] $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ مهم جداً

$D =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - \infty =$ عدم التعيين

$\lim \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{(\sqrt{x^2+1} - x)}$

$= \lim \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - 2} = 0$

[6] $f(x) = \cos x + \frac{1}{x}$

$R \setminus 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \cos x =$ تابع دوري غير ثابت ليس له نهاية عند $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ لا يوجد نهاية

$\lim_{x \to -\infty} \cos x =$ تابع دوري غير ثابت ليس له نهاية عند $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$ لا يوجد نهاية

[7] $f(x) = 2x + \sin x$ $\quad x \to +\infty$ $\quad \boxed{\cancel{\text{مهم}}}$

$-1 \le \sin x \le +1$

$-1 + 2x \le 2x + \sin x \le +1 + 2x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim x = +\infty$ بالمقارنة

$\lim_{x \to +\infty} -1 + 2x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} 2x + \sin x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim x = -\infty$

$\lim +1 + 2x = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} 2x + \sin x = -\infty$

[8] $f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ $\quad R \setminus 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \infty - 0 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - \infty - 0 =$ عدم التعيين

$\frac{x^2}{1} + \frac{2x}{1} - \frac{1}{x} = \lim \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x} = \lim \frac{x^3}{x} = x^2$

$= +\infty$

٥ " تمرينات ومسائل صـ 69 "

★ ادرس نهايات التوابع الآتية :

[1] $\dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$ $a = -\infty, 1, 5, +\infty$

$x^2-6x+5=0 \Rightarrow (x-5)(x-1)=0$

$D =]-\infty, 1[\cup]1, 5[\cup]5, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim \dfrac{x}{x^2} = \lim \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

[2] $f(x) = \dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}$ $a = -\infty, -2, +2, +\infty$

$D =]-\infty, -2[\cup]-2, +2[\cup]2, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to+2^+} f(x) = \dfrac{-16}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+2^-} f(x) = \dfrac{-16}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}$

$\lim \dfrac{(x-6)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \lim \dfrac{x-6}{x-2}$

$= \dfrac{-8}{-4} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-2} f(x) = 2$

[3] $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $a = -\infty, -2, +1, +\infty$

$(x+2)(x-1)=0$

$D =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim 2x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \dfrac{-16-4-1}{0} = \dfrac{-21}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \dfrac{-21}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \dfrac{2-1-1}{1+1-2} = \dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$+1 \rightarrow$ يصفر عبارة البسط ، -1

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$

نحلل البسط والمقام :

$2x^2+x+1$
$x-1 \,|\, 2x^3 - x^2 - 1$
$-2x^3 + 2x^2$
$0 \quad x^2 - 1$
$-x^2 + x$
$0 \quad x - 1$
$-x + 1$
0

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(2x^2+x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}$

$= \dfrac{2+1+1}{1+2} = \dfrac{4}{3}$

Class

[6] $f(x) = 2x + \sin^2 x \quad a = \pm\infty$

$0 \le \sin^2 x \le 1$

$+2x \Rightarrow 2x - 1 \le 2x + \sin^2 x \le 2x + 1$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$\lim_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} 2x + 1 = +\infty$

$\Bigg\} \lim_{x \to +\infty} 2x + \sin^2 x = +\infty$

$2x - 1 \geqslant 2x + \sin^2 x \geqslant 2x + 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty$ حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x \to -\infty} 2x + 1 = -\infty$

$\Bigg\} \lim_{x \to -\infty} 2x + \sin^2 x = -\infty$

[7] $f(x) = x^3(2 + \cos x) \quad a = \pm\infty$

$-1 \le \cos x \le +1$

$+2 \Rightarrow 1 \le +2 + \cos x \le 3$

نضرب $\times\ x^3 > 0 \quad x^3 \le x^3(2 + \cos x) \le x^3(3)$

حسب مبرهنة الإحاطة،

$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$

$\Bigg\} \lim_{x \to +\infty} x^3(2 + \cos x) = +\infty$

وإذا كان سالب $x^3 < 0$

$x^3 \geqslant x^3(2 + \cos x) \geqslant 3x^3$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$

$\Bigg\} \lim_{x \to -\infty} x^3(2 + \cos x) = -\infty$

[9] « تمرينات ومسائل ص 63 »

[4] $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-9} \quad a = \mp\infty,\ \mp 3$

$D =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\dfrac{1}{x-3}_{(x+3)} - \dfrac{2}{x^2-9} = \dfrac{x+1}{x^2-9}$

$\lim_{x \to 3^+} \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 3^-} \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} - \dfrac{2}{0^+} = +\infty - \infty$ عدم التعيين

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} - \dfrac{2}{0^-} = -\infty + \infty$

$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \dfrac{1}{-6} - \dfrac{2}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \dfrac{1}{-6} - \dfrac{2}{0^+} = -\infty$

[5] $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1} \quad a = \mp\infty,\ 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim \dfrac{x^4}{x^3} = \lim x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim x = +\infty$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{0}{0}$ عدم التعيين نحلل البسط والمقام

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 1 \\ x - 1 & x^3 - 1 \\ & -x^3 + x^2 \\ \hline & 0 \quad x^2 - 1 \\ & -x^2 + x \\ \hline & 0 \quad x - 1 \\ & -x + 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ تغير المعادلة $-1 \to +1$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)} \quad (\cancel{x-1})(x+1)$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{(x^2+1)(x+1)}{(x^2 + x + 1)} = \dfrac{(2)(2)}{1+1+1} = \dfrac{4}{3}$

‹‹ تمرينات ومسائل محلولة ››

[8] $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ $\quad a = +\infty , 1$

$D =]1, +\infty[$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$= \frac{1}{+\infty} = 0$

★ ‹‹ إزالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ››

إذا كان البسط والمقام كثيرين

نطبق قاعدة m و n

مثال: احسب نهاية التابع عند $+\infty$

ط١

$f: x \to \frac{x + \sqrt{x}}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(1 + \frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1 + \frac{1}{x})}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

ط٢ نوزع البسط على المقام

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x(1+\frac{1}{x})} + \lim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\infty} = 1 + 0 =$

‹‹ مبرهنة المقارنة { الإحاطة } ››

$h \le f \le g$

$\Downarrow$ ℓ عدد حقيقي

أي إذا كان:

$\lim\limits_{x \to *} h(x) = \ell$ (أو ∞)

$\lim\limits_{x \to *} g(x) = \ell$ (أو ∞)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to *} f(x) = \ell$ عدد أو لانهاية.

ملاحظة: ★ حيث ‹‹ $+\infty$ أو $-\infty$ أو عدد ››

■ في كل التمارين وتحتوي الـ $\sin$ أو $\cos$ لانهاية (∞) نستخدم الإحاطة.

مثال: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

$-1 \le \sin x \le +1$

نقسم على x الموجب ولا نغير الجهة.

$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le +\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} +\frac{1}{x} = 0$

$\Big\} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

حسب الإحاطة.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} =$ نستخدم الإحاطة

« مبرهنة الإحاطة { مبرهنة المقارنة 2 و 3 } »

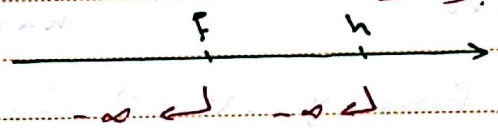
« مبرهنة $\boxed{2}$ » $g \le f$

وكان $\lim_{x \to *} g(x) = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to *} f(x) = +\infty$$

الصغيرة $\to +\infty \Rightarrow$ الكبيرة $\to +\infty$

« مبرهنة $\boxed{3}$ » $f \le h$



وكان $\lim_{x \to *} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to *} h(x) = -\infty$

$-\infty \leftarrow$ الصغيرة $\Leftarrow$ $-\infty \leftarrow$ الكبيرة

مثال: أوجد $\lim_{x \to +\infty} x + \cos x$

لما أن مضمون الـ $\cos$ هو ∞ ⇐ نستخدم الإحاطة.

$$-1 \le \cos x \le +1$$

$$+x \quad -1+x \le +x+\cos x \le +1+x$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} -1+x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} +1+x = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} x+\cos x = +\infty$$

مثال: ادرس سلوك التابع عند $+\infty$

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2\sin x$$

$$-1 \le \sin x \le +1$$

$$\times 2 \Rightarrow -2 \le 2\sin x \le 2$$

$$+\frac{x}{2} \Rightarrow -2 + \frac{x}{2} \le +\frac{x}{2} + 2\sin x \le 2 + \frac{x}{2}$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -2 + \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2 + \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} 2\sin x + \frac{x}{2} = +\infty$$

$\sin x$ $\cos x$	مقدار نهايته محدود	$\Rightarrow$	ليس له نهاية

مثال: ادرس نهاية $x \sin\frac{1}{x}$ عند الـ 0

حـ: $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

لأن لا نستطيع الـ sin لانهائية ⇐ الاحاطة.

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq +1$

نضرب بـ x ونميز حالتين

$x \to 0^+$ ⇐ x موجب ولا تنعكس الجهة

$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$

حسب مبرهنة الاحاطة

$\lim_{x\to 0^+} -x = 0$

$\lim_{x\to 0^+} x = 0$

$\Big\}\ \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$

$x \to 0^-$ ⇐ x سالب تتغير الجهة

$-x \geq x\sin\frac{1}{x} \geq x$

حسب مبرهنة الاحاطة

$\lim_{x\to 0^-} -x = 0$

$\lim_{x\to 0^-} x = 0$

$\Big\}\ \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x} = 0$

حسب الاحاطة فإن النهاية من اليمين = النهاية من اليسار.

مرة لإقليدس قال كانت مسكة قالتلو لإقليدس قبل ما يموت قول أشهد أن لا إله إلا الله يا رجل ما كان يقول ولك يا رجل قول لا إله إلا الله ما كان يقول ولك إقليدس بدال ما يردد الشهادة شو كان عم يردد ؟؟
... الكسر تساوي الناتج زائد الباقي على المقسوم عليه .

^^

$$\text{الكسر} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

والاعقاف بدنا نقلد لإقليدس شو منكتب
لا إله إلا الله ... ^^

« إثبات المقارب المائل »

* لإثبات أن $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل نطبق ما يلي.

١- نوجد $f(x) - y_\Delta$

٢- نوجد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_\Delta$

٣- الجواب لازم يكون صفر.

مثال: بيّن أن المستقيم $y = x+1$ مقارب للخط البياني للتابع $f(x)$ في جوار الـ $+\infty$

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+2}$$

① $f(x) - y_\Delta = \frac{x^2+3x+1}{x+2} - \frac{x+1}{1}{\scriptstyle (x+2)}$

$$= \frac{\cancel{x^2}+\cancel{3x}+1-\cancel{x^2}-x-2x-2}{x+2} = \frac{-1}{x+2}$$

② $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$

⇐ $y = x+1$ مقارب مائل.

طـ٢:

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x+2 & x^2+3x+1 \\ & -x^2 \mp 2x \\ \hline & 0 \quad x+1 \\ & -x \mp 2 \\ \hline & 0 \quad -1 \end{array}$$

$$\text{الكسر} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$f(x) = x+1 + \frac{-1}{x+2}$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \cancel{x+1} + \frac{-1}{x+2} - (\cancel{x+1})$$

$$= \frac{-1}{x+2}$$

« دراسة الوضع النسبي للمقارب المائل »

• ندرس إشارة الفرق ثم نستعمل جدول ...

• التي تنعدم البسط والمقام ونستعمل جدول.

طلب إضافي للمثال السابق:

• ادرس الوضع النسبي للخط c و Δ ندرس إشارة $\frac{-1}{x+2}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
الإشارة	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	الخط c فوق Δ	‖	الخط c تحت Δ

« تدرب حسك »

السؤال: بيّن إذا كان المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني c للتابع f عند $\pm\infty$ ثم ادرس بعدئذ الوضع النسبي.

[1] $f(x) = 2x+3+\frac{10}{x+1}$ $\quad \Delta : y = 2x+3$

$f(x) - y_\Delta =$

$= \cancel{2x} + \cancel{3} + \frac{10}{x+1} - \cancel{2x} - \cancel{3} = \frac{10}{x+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{x+1} = 0$

$y = 2x+3$ مقارب مائل في جوار ال $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $f(x) - y_\Delta$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	الخط c تحت Δ	‖	الخط c فوق Δ

[2] $f(x) = -x+1-\frac{1}{x^2}$ « تدرب حسك »

$\Delta : y = -x+1$

$f(x) - y_\Delta = -\cancel{x} + \cancel{1} - \frac{1}{x^2} + \cancel{x} - \cancel{1} = \frac{-1}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$

$y = -x+1$ مقارب مائل في جوار ال $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$ الإشارة	$-$	‖	$-$
الوضع النسبي	الخط c تحت Δ	‖	الخط c تحت Δ

[3] $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$ $\quad \Delta : y = x$

$f(x) - y_\Delta = \cancel{x} + \frac{\sin x}{x} - \cancel{x} = \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

نستخدم الإحاطة

$-1 \leq \sin x \leq +1$

$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

★ الوضع النسبي لا أطلبها ... ★

" تدريب صفحة 31 "

[4] $f(x) = 3x + 7 - \frac{5}{\sqrt{x+1}}$

$\Delta : y = 3x + 7$

$f(x) - y_\Delta = \cancel{3x} + 7 - \frac{5}{\sqrt{x+1}} - (\cancel{3x} + 7)$

$f(x) - y_\Delta = \frac{-5}{\sqrt{x+1}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = \lim \frac{-5}{\sqrt{x+1}} = \frac{-5}{+\infty} = 0$

$y = 3x + 7$ مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f(x) - y$	$-$		$-$
الوضع النسبي	الخط C تحت Δ		الخط C تحت Δ

[5] $f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$ $\quad y = 2x + 1$

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 1 \\ x - 4 & 2x^2 - 7x - 3 \\ & -2x^2 + 8x \\ \hline & x - 3 \\ & -x + 4 \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-4}$

$f(x) - y_\Delta = \cancel{2x+1} + \frac{1}{x-4} - (\cancel{2x+1})$

$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-4}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-4} = 0$

$y = 2x + 1$ مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
إشارة	$-$		$+$
الوضع النسبي	الخط C تحت Δ		الخط C فوق Δ

[6] $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2}$ $\quad \Delta : y = x - 2$

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ x^2 + 2x + 1 & x^3 - 3x - 5 \\ & -x^3 \mp 2x^2 \mp x \\ \hline & 0 - 2x^2 - 4x - 5 \\ & +2x^2 + 4x + 2 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad -3 \end{array}$$

$f(x) = x - 2 + \frac{-3}{x^2 + 2x + 1}$

$f(x) - y_\Delta = \cancel{x-2} + \frac{-3}{x^2 + 2x + 1} - (\cancel{x-2})$

$f(x) - y_\Delta = \frac{-3}{x^2 + 2x + 1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-3}{+\infty + \infty + 1} = \frac{-3}{+\infty} = 0$

$y = x - 2$ مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة	$+$		$+$
الوضع النسبي	الخط C فوق Δ		الخط C فوق Δ

[7] $f(x) = \frac{-x^2 - 4x + \sin x}{x}$ $\quad \Delta : y = -x - 4$

~~$f(x) - y_\Delta =$~~

$f(x) - y_\Delta = \frac{-\cancel{x^2} - 4x + \sin x}{x} - (-x - 4)$ $\quad + \cancel{x^2} + 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ......

$-1 \le \sin x \le +1$

$-4x \Rightarrow -4x - 1 \le -4x + \sin x \le -4x + 1$

$+4 \Rightarrow \frac{-4x + 4 - 1}{x} \le \frac{+4 - 4x + \sin x}{x} \le \frac{-4x + 1}{x}$

~~$\lim \frac{-4x - 1}{x}$~~ $\lim\limits_{x \to \infty} 4x + 3 = +\infty$??

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4x + 5}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

"استعمال x في نهاية الأكبر" $x \to +\infty$

تعريف: إذا كان لدينا تابع $f(x)$ وكانت نهايته ℓ عندئذ ينتمي $f(x)$ إلى المجال المفتوح $]\ell - \varepsilon , \ell + \varepsilon[$

إذا تحقق الشرط:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

الإبسيلون "أو نصف القطر" ، ℓ النهاية ، مركز المجال

مثال: دورة 2019

ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$ وفق الصيغة

$$f(x) = \frac{4x - 5}{2x + 3}$$

والمطلوب:

★ عيّن العدد A الذي يحقق الشرط إذا $x > A$ لينتمي $f(x)$ إلى المجال I الذي مركزه 2 ونصف قطره $0{,}05$

الجواب

★ صيغة امتحانية للسؤال:

عيّن عدداً A يحقق $x > A$ حيث $f(x)$ في المجال $]1{,}95 , 2{,}05[$

الحل:

$$|f(x) - \text{النهاية}| < \text{نصف القطر}$$

$$\Downarrow$$

$$\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

أو من المجال $\Leftarrow$

$$\ell = \frac{\text{الحد السفلي} + \text{الحد العلوي}}{2}$$

$$\ell = \frac{2{,}05 + 1{,}95}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

حساب ε نصف القطر

$$\varepsilon = \frac{\text{الحد السفلي} - \text{الحد العلوي}}{2}$$

$2{,}05 - 1{,}95 = 0{,}10$

$$\varepsilon = \frac{2{,}05 - 1{,}95}{2} = \frac{0{,}10}{2} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$$

أو

$$\varepsilon = \text{المركز} - \text{الحد العلوي}$$

$$= 2{,}05 - 2 = 0{,}05$$

نعوض بالقانون:

$$\left| \frac{4x - 5}{2x + 3} - \frac{2}{1}_{(2x+3)} \right| < \frac{1}{20}$$

$$\left| \frac{\cancel{4x} - 5 - \cancel{4x} - 6}{2x + 3} \right| < \frac{1}{20}$$

$$\left| \frac{-11}{2x + 3} \right| < \frac{1}{20}$$

$|2x + 3|$:
- $2x + 3$ عندما $2x + 3 > 0$ ، $2x > -3$ ، $x > \frac{-3}{2}$
- $-(2x + 3)$ عندما $2x + 3 < 0$ ، $-2x < 3$ ، $x < \frac{-3}{2}$

$$\left| \frac{\text{صار}}{\text{زرافة}} \right| = \frac{|\text{حمار}|}{|\text{زرافة}|}$$

$$\frac{11}{2x + 3} < \frac{1}{20}$$

نقلب ونغير الجهة

$$\frac{2x + 3}{11} > 20 \Rightarrow 2x + 3 > 220$$

$$2x > 217$$

$$x > 108{,}5 = A$$

« تدريب ص 34 »

[2] احسب نهاية التابع f المعطى $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$

عند $+\infty$ ثم أعط عدداً A

يحقق الشرط إذا كان $x>A$ في المجال

$4,9 < f(x) < 5,1$]4,9 , 5,1[

$4,9 < \frac{5x-1}{x-1} < 5,1$

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ x-1 & 5x-1 \\ & -5x+5 \\ \hline & 0+4 \end{array}$$

$4,9 < 5+\frac{4}{x-1} < 5,1$

$-0,1 < \frac{4}{x-1} < 0,1$ نطرح 5 $\begin{array}{r} -5,0 \\ 4,9 \\ \hline -0,1 \end{array}$

$\frac{-0,1}{4} < \frac{1}{x-1} < \frac{0,1}{4}$ نقسم على 4

نقلب ونغير الجهة

X $\frac{-4}{0,01} > x-1 > \frac{4}{0,1}$

$x > \frac{4}{0,1}+1$

$x > \frac{40}{1}+1$

$x > 40+1 \Rightarrow x > 41$

ط ب المركز $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5x}{x} = 5 = \ell$

المركز الحد الفاصل

$\varepsilon = 5,1 - 5 = 0,1$

$\left|\frac{5x-1}{x-1} - \frac{5}{1}\right| < 0,1$ $(x-1)$

$\left|\frac{5x-1-5x+5}{x-1}\right| < 0,1 \Rightarrow \left|\frac{4}{x-1}\right| < 0,1$

$\Rightarrow \frac{4}{x-1} < \frac{1}{10} \Rightarrow x-1 > 40$ لأن x كبيرة

$x > 41$

$A < 41 < x$

ط ج : ننطلق من المجال المعطى لـ f(x) حتى نصل إلى x .

$1,95 < f(x) < 2,05$

$1,95 < \frac{4x-5}{2x+3} < 2,05$

لا

نرتب عن طريق عملية إقليدس.

$1,95 <$ الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$ $< 2,05$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2x+3 & 4x-5 \\ & -4x+6 \\ \hline & 0 \ -11 \end{array}$$

$\Rightarrow 1,95 < 2+\frac{-11}{2x+3} < 2,05$

نعمل عمليات عكسية حتى نصل إلى x

« من الأبعد عن x إلى الأقرب »

$\begin{array}{r} -2,00 \\ 1,95 \\ \hline -0,05 \end{array}$

$\Rightarrow -0,05 < \frac{-11}{2x+3} < 0,05$ نطرح 2

$\frac{-0,05}{-11} > \frac{1}{2x+3} > \frac{0,05}{-11}$ نقسم على -11 ونغير الجهة

ونقلب ثم نغير الجهة مرة أخرى

$\frac{11}{0,05} < 2x+3 < \frac{-11}{0,05}$ نهمله X

$\frac{11}{0,05} - 3 < 2x$

$x > \frac{\frac{11}{0,05}-3}{2} \Rightarrow x > \frac{1100}{5} - 3 \times \frac{1}{2}$

$x > 220 - 3 \times \frac{1}{2}$

$x > 217 \times \frac{1}{2}$

$x > 108,5$

نقلب المتراجحة عندما تكون الأطراف من نفس النوع « موجبة أو سالبة »

$<$ $<$

$>$ $>$

2 « تدرب ص42 »

[1] $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$. لا نأخذ السطر لأنه غير صحيح

$R = [0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim \sqrt{x} = +\infty$ ✗

لأن الناتج ليس صحيح

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim \dfrac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{+\cancel{x}(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x})} = \dfrac{1+0}{0} = +\infty$

[2] $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$

$R = [0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 + 0 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty + \infty - 1 = +\infty$

[3] $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

$R =]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 + \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty + \dfrac{1}{+\infty} = +\infty + 0 = +\infty$

[4] $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ $R_1 = [0,+\infty[$

$R_2 =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$R = [0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{1+0}{1+0} = 1$

[5] $f(x) = \dfrac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ $R = [0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x^2})}{+\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})}$

$\dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{x.x} = \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}}{x.\sqrt{x}.\cancel{\sqrt{x}}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}})}{(1+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{1+0-0}{1+0} = 1$

[6] $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$ $D = [1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim \dfrac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = \dfrac{-1}{+\infty} = 0$

Class

[3] "تدرب صـ 42"

أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$ عند $+\infty$

ثم أوجد عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x > A$ كان

$f(x)$ في المجال $]-2{,}05 \; -1{,}95[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{-2x}{x} = -2$$

$$-2{,}05 < f(x) < -1{,}95$$

$$-2{,}05 < \frac{-2x+1}{x+3} < -1{,}95$$

$$\begin{array}{r|l} x+3 & -2x+1 \\ & \underline{+2x+6} \\ & 7 \end{array} \quad -2$$

$$-2{,}05 < -2 + \frac{7}{x+3} < -1{,}95$$

$$-0{,}05 < \frac{7}{x+3} < 0{,}05 \quad \text{فنجمع } 2$$

نقسم على 7

$$\frac{-0{,}05}{7} < \frac{1}{x+3} < \frac{0{,}05}{7}$$

نقلب ونغير الجهة

$$\cancel{-\frac{7}{0{,}05}} > x+3 > \frac{7}{0{,}05}$$

نهمل الصغير

$$x > \frac{7}{0{,}05} - 3$$

$$x > \frac{700}{5} - 3 \Rightarrow x > 140 - 3$$

$$x > 137$$

ط٢ . بطريقة

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$$

$\varepsilon =$ الحد الأعلى $-$ المركز $= -1{,}95 - (-2)$

$$\varepsilon = 0{,}05 \Rightarrow \left|\frac{-2x+1}{x+3} - \frac{-2}{1}_{(x+3)}\right| < 0{,}05$$

$$\left|\frac{\cancel{-2x}+1+\cancel{2x}+6}{x+3}\right| \Rightarrow \left|\frac{7}{x+3}\right| < 0{,}05$$

$$\frac{|7|}{|x+3|} < 0{,}05 \Rightarrow \frac{7}{x+3} < \frac{5}{100} \Rightarrow 700 < 5x+15$$

لأن x كبيرة

$$700_{-15} < 5x$$

$$685 < 5x$$

$$\Rightarrow x = 137$$

[4] أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ عند 4

ثم أوجد مجالاً I مركزه 4 يحقق الشرط إذا

انتمى x إلى المجال I انتمى $f(x)$ إلى المجال

$]3{,}95 \, , \, 4{,}05[$

[1] تدرب صفحة 46

① $\dfrac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \dfrac{3x+7}{x-1}$

أثبت أن f نهاية عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{x-1} = 3$$

حساب نهاية $\dfrac{3x+\cos x}{x}$ عند $+\infty$

$$-1 \le \cos x \le +1$$

نضيف $3x$: $\quad 3x-1 \le 3x+\cos x \le 3x+1$

نقسم على x: $\quad \dfrac{3x-1}{x} \le \dfrac{3x+\cos x}{x} \le \dfrac{3x+1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x} = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x} = 3 \end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\cos x}{x} = 3$$

② $\dfrac{-1}{x+1} \le \dfrac{\cos x}{x+1} \le \dfrac{1}{x+1}$

$x>-1$ استنتج نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

$$-1 \le \cos x \le 1$$

نقسم على $x+1$ الموجب: $\quad \dfrac{-1}{x+1} \le \dfrac{\cos x}{x+1} \le \dfrac{1}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$$

(3) $|f(x)-3| \le \dfrac{1}{x+1}$

أثبت أن f نهاية عند $+\infty$.

$$3-\frac{1}{x+1} \le f(x) \le 3+\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 3 & \to 3 \leftarrow & 3 \end{array}$$

(4) $f(x) \ge \frac{1}{4}x^2$

أثبت أن $x<0$ نهاية f عند $-\infty$.

$\frac{1}{4}x^2 \to +\infty \qquad f(x) \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}(\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$ حسب مبرهنة المقارنة

(5) $x^2 - 5\sin x \ge x^2 - 5$

استنتج نهاية $x^2-5\sin x$ عند $+\infty$ و $-\infty$

$$-1 \le \sin x \le +1$$

نضرب -5: $\quad +5 \ge -5\sin x \ge -5$

نضيف x^2: $\quad x^2+5 \ge x^2-5\sin x \ge x^2-5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2-5 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2+5 = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x\to\pm\infty} x^2-5\sin x = +\infty$$

حل

« تدرب صـ 46 »

[2]

$f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

$D = [0, +\infty[$ عدم التعيين $+\infty - \infty$ جـ

(1) تحقق أن $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$ أيًا كان $x \geq 0$

نضرب ونقسم على المرافق: $f(x) = \dfrac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$

$f(x) = \dfrac{1+x-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$

تحققت:

« الحالة جـ أ »

(2) استنتج أن $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ في حالة $x > 0$

ننطلق من القانون $x+1 \geq x$

[1] $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$ * بجذر

نضيف للطرفين $\sqrt{x}$: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 2\sqrt{x}$

نقلب: $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

[2] نضيف للطرفين $\sqrt{x+1}$ لـ *

$2\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

نقلب.

$\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

من G و ⓒ نجد:

$\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) نهاية f عند $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

$\Big\}\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

« إيجاد معادلة المماس للتابع في نقطة »

1. نتأكد أن النقطة تنتمي للتابع بأن نعوض في التابع.

2. إذا كانت الفاصلة x أو الترتيب y مفقود فإننا نعوض في التابع ونوجد المقدار المفقود.

3. نشتق التابع.

4. نعوض نقطة التماس في علاقة المشتق ونضع عوضاً عن f' الميل m

5. نعوض في معادلة المماس العامة.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

إحداثيات نقطة التماس

مثال:

ليكن التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

أوجد معادلة المماس T في النقطة M التي فاصلتها 2

وعين α فاصلة تقاطع T مع محور الفواصل.

$y = f(2) = 2^3 - 2(2)^2 - 1 = 8 - 8 - 1 = -1$

نقطة التماس $(2, -1)$

نشتق التابع: $f'(x) = 3x^2 - 4x$

$m = 3(2)^2 - 4(2) = 4$

نعوض في معادلة المماس.

$y - (-1) = 4(x - 2)$

$y = 4x - 9$

وهي معادلة المماس.

إيجاد معادلة مستقيم (المماس) يمر من النقطتين

١- نوجد الميل $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

٢- نعوض في المعادلة العامة : $y - y_1 = m(x - x_1)$

← إحداثيات ما

نقطة من المستقيم .

مثال: أوجد معادلة مماس (مستقيم) يمر بالنقطتين

$A(2,3)$ $\boxed{B(1,8)}$

نحتاج إلى ميل :

$$M = \frac{8-3}{1-2} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$y - 8 = -5(x - 1)$$

$$y = -5x + 5 + 8$$

$$y = -5x + 13$$

تعيين مجال

نهدف في هذه الفقرة إلى إيجاد مجال تنتمي إليه x حيث ننطلق من مجال $f(x)$ المعطى في السؤال حتى نصل إلى x بعمليات عكسية .

مثال: $f(x) = \sqrt{4x+1}$ عين مجال I ينتمي إليه x مركزه 2 ويحقق الشرط

إذا كان x من I فإن

$f(x) \in]2.99 , 3.01[$

الحل : $2.99 < f(x) < 3.01$

$$2.99 < \sqrt{4x+1} < 3.01$$

$$(2.99)^2 < 4x+1 < (3.01)^2$$

-1: $(2.99)^2 - 1 < 4x < (3.01)^2 - 1$

$\div 4$: $\frac{(2.99)^2 - 1}{4} < x < \frac{(3.01)^2 - 1}{4}$

$$\Rightarrow 1.98 < x < 2.015$$

$$x \in]1.98 , 2.015[$$

تركيب تابعين

$f \circ g = f[g(x)]$

← تركيب

← يلي

مثال: ليكن التابع

$f(x) = x^2$

$g(x) = \frac{1}{x}$

أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$

$$f \circ g = f[g(x)] = f[\tfrac{1}{x}] = (\tfrac{1}{x})^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$g \circ f = g[f(x)] = g[x^2]$$

$$g = \frac{1}{x^2}$$

ملاحظة : تركيب تابعين ليس تبديلي .

« تمرينات ومسائل صفحة 67 »

[2] أوجد نهايات $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ عند 1 ، $+\infty$ و $-\infty$

ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وتبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

الحل:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي $/\!/ \ yy'$ والخط C على يمينه

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي $/\!/ \ yy'$ والخط C على يساره.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

$y = 2$ مقارب أفقي $/\!/ \ xx'$ في جوار الـ $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

$y = 2$ مقارب أفقي $/\!/ \ xx'$ في جوار الـ $-\infty$.

الوضع النسبي للمقارب $y = 2$

$$f(x) - y_0 = \frac{2x+1}{x-1} - \frac{2}{1}_{(x-1)}$$

$$\frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}+2}{x-1} = \frac{3}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
الإشارة $f(x)-y_0$	$-$		$+$
الوضع النسبي	الخط C تحت المقارب		الخط C فوق المقارب

[3] أوجد نهايات التابع $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$ عند $-\infty$ ، $+\infty$ و -1 ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة.

$$f(x) = \frac{-2x}{x+1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي $/\!/ \ xx'$ في جوار الـ $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي $/\!/ \ xx'$ في جوار الـ $+\infty$.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{+2}{0^+} = +\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي $/\!/ \ yy'$ والخط C على يمينه

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{+2}{0^-} = -\infty$$

$x = -1$ مقارب شاقولي $/\!/ \ yy'$ والخط C على يساره

الوضع النسبي للمقارب $y = -2$

$$f(x) - y_0 = \frac{-2x}{x+1} + \frac{2}{1}_{(x+1)}$$

$$\frac{-\cancel{2x}+\cancel{2x}+2}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
الإشارة	$-$		$+$
الوضع النسبي	الخط C تحت المقارب		الخط C فوق المقارب

" تمرينات ومسائل ص 67 "

$f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x-1}$ $\quad D =]1, +\infty[$ [4]

(1) أثبت أن $\dfrac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{2x+1}{x-1}$

$\boxed{x > 1}$

$-1 \le \sin x \le +1$

$2x - 1 \le 2x + \sin x \le 2x + 1$

$\dfrac{2x-1}{x-1} \le \dfrac{2x+\sin x}{x-1} \le \dfrac{2x+1}{x-1}$

$\dfrac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{2x+1}{x-1}$

(2) استنتج نهاية f عند $+\infty$.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-1} &= 2 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} &= 2\end{aligned}\right\} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

من مبرهنة الإحاطة .

الإحاطة $\Leftarrow$ المضروب ∞

$\sin <$

المضروب 0 $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

أو $= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

الإحاطة $\Leftarrow$ المضروب ∞

$\cos <$

المضروب 0 $\Leftarrow$ نستخدم قانون ١٠ أو ١١ لتحويله الى sin

[14] أوجد نهاية f .

(1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $\quad a = 0, +\infty$

$D =]0, +\infty[$

$-1 \le \sin x \le +1$

نقسم على $\sqrt{x}$ الموجب

$\dfrac{-1}{\sqrt{x}} \le \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} &= 0\end{aligned}\right\} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم التعيين

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}\,\sin x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}\,\sin x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} \cdot 1 = \sqrt{0} \cdot 1 = 0$

(2) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ $\quad a = 0$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{\sin x}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1-1} + 2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

فكينا التربيع

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{x}{2}}{\cancel{2\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{x}{2}}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{0}{1} = 0$

① $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ [17]

$D =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$y = 1$ مقارب أفقي // xx' في جوار الـ $-\infty$ و $+\infty$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$

$x = 3$ مقارب شاقولي // yy' والخط على يمينه ويساره

بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام فلا يوجد مقارب مائل.

التكملة لاحقاً

③ $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ $a = 0$ [14]

$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x\,(\cancel{2} \sin\cancel{\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{x}{2})}{\cancel{2} \sin^{\cancel{2}} \frac{x}{2}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{2\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

$= 2(1) \cdot \cos\frac{x}{2} = 2\cos(0)$

$= 2(1) = 2$

مثال على الاستنتاج لي:

$\lim 1 - x + \frac{3x}{x^2+2}$

بما أن لا نهايته

$\lim \frac{3x}{x^2+2} = 0$

$\Rightarrow y = 1 - x$ مقارب مائل ثان

$\lim_{x \to \pm\infty} 1 - x + \frac{3}{x^2+2} - (1-x) = 0$

④ $f(x) = \frac{2 - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5} - 3}$ $a = 2$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{0}{0}$ عدم التعيين

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط والمقام

$\lim_{x \to 2} \frac{(2-\sqrt{3x-2})(2+\sqrt{3x-2})(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(2+\sqrt{3x-2})}$

مرافق المقام — مرافق البسط

متطابقة مربع

$\lim_{x \to 2} \frac{(4 - 3x + 2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(2+\sqrt{3x-2})}$

متطابقة مربع

$\lim_{x \to 2} \frac{(6-3x)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(2+\sqrt{3x-2})}$

عامل مشترك

$\lim_{x \to 2} \frac{-3(-2+\cancel{x})(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\cancel{x}-2)(2+\sqrt{3x-2})}$

$\lim_{x \to 2} \frac{-3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(2+\sqrt{3x-2})}$ نعوض

$= \frac{-3(6)}{2(4)} = \frac{-18}{8} = \frac{-9}{4}$

⑥ $f(x) = \frac{x^2 + 2 + \sin x}{x}$ $D = R \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{2}{x} + \boxed{\frac{\sin x}{x}}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + 0 + 0$ الإضافة:

$-1 \le \sin x \le +1$

نقسم على x السالب: $\frac{-1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\Big\}\ \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ لا يوجد مقارب

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ نفس النهاية عند $-\infty$ الجواب هو $+\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 + \frac{2}{0^-} + 1 = -\infty$

Class

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + +\infty + 1 = +\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي // yy' والخط على يمينه ويساره

$\Rightarrow$ المقارب المائل هو $y = x$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - y_a = \lim \frac{\sin x}{x} + \frac{2}{x} = 0$

$x + \left(\frac{\sin x}{x}\right) + \frac{2}{x}$ نهايتهما $y = x$

[10] " دورة 2017 "

$$g(x) = \frac{1}{3+2\sin x}$$

1) أثبت أن g محدود محصور بين عددين...

بالإحاطة: $-1 \leq \sin x \leq +1$

$-2 \leq 2\sin x \leq 2$

$+3 \quad 1 \leq 3+2\sin x \leq 5$

نقلب ونغير الجهة $\quad 1 \geq \frac{1}{3+2\sin x} \geq \frac{1}{5}$

2) استنتج كلاً من النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x}$

نضرب المتراجحة بـ x^2 $\quad x^2 \geq \frac{x^2}{3+2\sin x} \geq \frac{x^2}{5}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} = +\infty$$

* وجدنا أن $\quad 1 \geq \frac{1}{3+2\sin x} \geq \frac{1}{5}$

نضرب بـ $x+\sin x$ الموجب لأن $x \to +\infty$

$$x+\sin x \geq \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} \geq \frac{x+\sin x}{5}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{5}$ حسب الإحاطة

$-1 \leq \sin x \leq +1$

$+x \Rightarrow x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$

$\div 5 \Rightarrow \frac{x-1}{5} \leq \frac{x+\sin x}{5} \leq \frac{x+1}{5}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{5} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{5} = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{5} = +\infty$$

حسب المقارنة

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} = +\infty$$

---

[13] ① $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{(\sqrt{x^2+2x}+x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim \frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x} = \lim \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)}$$

موجب لأن

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$$|x| \begin{cases} +x \Rightarrow x\to+\infty,\ x\to 0^+ \\ -x \Rightarrow x\to 0^-,\ x\to-\infty \end{cases}$$

Subject

$\lim \sqrt{*} = \sqrt{\lim *}$

$\lim \sin * = \sin \lim *$

④ $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1} - 1}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

نضرب بالمرافق

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2\cancel{x})(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}+\cancel{1}-\cancel{1}} =$

$\lim\limits_{x \to 0} 2\sqrt{x+1}+2 = 4$

⑤ $f(x) = \dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(-x+\sqrt{x})(-x-\sqrt{x})}{(x-1)(-x-\sqrt{x})}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-x}{(x-1)(-x-\sqrt{x})} = \lim \dfrac{x(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(-x-\sqrt{x})}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{-x-\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{-1}{1} = -1$

② $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x$ [13]

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - \infty$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(\sqrt{4x^2+x}+2x)(\sqrt{4x^2+x}-2x)}{(\sqrt{4x^2+x}-2x)}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{4x^2}+x-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2)}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2} = \dfrac{1}{-2-2} = -\dfrac{1}{4}$

③ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{0}{0}$ عدم التعيين

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+1-4}{(\sqrt{x+1}+2)(\cancel{x-3})} = \cancel{x-3}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \dfrac{1}{4}$

ملاحظة: إذا كان أمثال x^2 داخل الجذر يساوي مربع أمثال x خارج الجذر نضرب البسط والمقام بالمرافق

Class

④ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad a=1$

$D =]-1, 1[$

$\lim\limits_{x \to +1} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

⑤ $f(x) = \cos \pi x + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\quad a=1$

$D = R / 1$

$\lim \cos \pi x + \lim \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$\cos \lim \pi x + \dfrac{1}{0^+}$

$-1 + \infty = +\infty$

⑥ $f(x) = \cos \left[\dfrac{\pi x + 1}{x+2}\right]$ $\quad a = +\infty$

$D = R / -2$

$\cos \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi \cancel{x} + 1}{\cancel{x} + 2} = \cos \lim\limits_{x \to +\infty} \pi$

$= -1$

⑦ $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$ $\quad a = 1, -\infty$

$D =]-\infty, 1[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{\lim \dfrac{2x^2}{1-x}} = \sqrt{\lim \dfrac{2x^{\cancel{2}}}{-\cancel{x}}}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} -2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{0}} = \dfrac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$

⑧ $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad a = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sin \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sin 0$

$= 0$

[13]

⑥ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\lim \dfrac{x+1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+1} \cdot \cancel{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x-1} \cdot \cancel{\sqrt{x+1}}}$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$\sqrt{\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x-1}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -1} 1} = 1$

« تمارين منزلية »

① $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$ $\quad a = 5$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \sqrt{\dfrac{8}{0}}$ $\quad D =]5, +\infty[$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$

② $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ $\quad a = -\infty$

$\left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

③ $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$ $\quad a = -\infty$

$]-\infty, 1[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{\lim \dfrac{-x+1}{x^2+1}} = \sqrt{\lim \dfrac{-x}{x^2}}$

$= \sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{x}} = \sqrt{0} = 0$

[1] "تدريب ص49"

9) $f(x) = \left[x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right]^2$

الحل: $\lim_{x \to +\infty} \left[x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right]^2$

$= +\infty - \infty + 0 =$ عدم التعيين

$\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)^2$

$= +\infty\,(1 - 0 + 0)^2 = +\infty$

10) $f(x) = \cos^2\left(\pi \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \cos^2\left(\pi \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

$= \cos^2\left(\lim \pi \times \sqrt{\lim \frac{x-1}{x+1}}\right)$

$= \cos^2(\pi \times 1)$

$= \cos^2 \pi = \cos\pi \cdot \cos\pi = 1$

[2] ص24 دورة 2019

$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$; $]-5,+\infty[$

"(1) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x \to +\infty} f(f(x))$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = f(\lim f(x))$

$f(1)$

$f(1) = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

"(2)" أعد حساب $\lim_{x \to +\infty} f(f(x))$ بكتابة $f(f(x))$ بدلالة x.

$$f\left(\frac{x-3}{x+5}\right) = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5}$$

نوحد المقامات ثم الأول بمقلوب الثاني

$$\frac{\frac{x-3-3x-15}{\cancel{x+5}}}{\frac{x-3+5x+25}{\cancel{x+5}}} = \frac{-2x-18}{6x+22}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

"الاستمرار" دورة 2019

"الاستمرار عند نقطة "عدد""

نقول عن التابع f أنه مستمر عند ☆ إذا حقق الشرط التالي:

$\lim_{x \to ☆} f(x) = f(☆)$

النهاية عند ☆ = صورة ☆.

$\lim_{x \to ☆^+} f(x) = \lim_{x \to ☆^-} f(x)$

مثال: هل التابع مستمر عند $x=1$ ، $f(x) = -3x+1$

شرط الاستمرار

$\lim f(x) \overset{?}{=} f(1)$

$-3(1)+1 \overset{?}{=} -3(1)+1$

$-2 = -2$ محققة

فالتابع مستمر عند $x=1$

"دراسة تابع" "دراسة تغيرات التابع" 100 علامة

نطبق ما يلي :

1- نوجد مجال الاستمرار والاشتقاق .

"نكتب التابع مستمر واشتقاقي على D" في كل التوابع ماعدا التابع الجذري ندرس الاشتقاق عند الأطراف العددية

2- نوجد النهايات عند أطراف المجال المفتوح لـ D وقيمة التابع عند الأطراف المغلقة .

3- نوجد المقاربات

4- نشتق التابع ونعدم المشتق إن أمكن ذلك

5- ننظم جدول التغيرات .

مثال : ادرس تحولات التابع : $f(x)=x^3-2x^2-1$

التابع مستمر واشتقاقي على R ، $D=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)^3 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2-4x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4x=0$

$x(3x-4)=0$

$\Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

مجموعة التعريف x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
نأخذ الإشارة من المشتق $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
قيم الأعداد نأخذه من التابع $f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\frac{59}{27}$	↗	$+\infty$

$f(0)=-1 \qquad f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{59}{27}$

[28] $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ لـ نطلع منه السؤال

لـ نطلع منه الصورة .

1] استمرارية f عند 0

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$

بما أن محصور cos هو ∞ ⇐ الإحاطة .

$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$

نضرب بـ x^2 الموجب $-x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$

$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$

$\lim_{x\to 0}(x^2) = 0$ $\Big\}$ $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$

2] هل f مستمر عند 0 ؟ هل هو مستمر على R ؟

علل : شرط الاستمرار

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

من الطرف الأول = من السطر الثاني

$0 = 0$

⇐ التابع مستمر عند العدد 0

وعند R

x^2 مستمر على R

$\frac{1}{x}$ مستمر على R لأنه مستمر عنده

⇐ $\cos\frac{1}{x}$ مستمر على R

⇐ التابع مستمر على R .

« مبرهنة الحل الوحيد »

* لبرهنة للمعادلة $f(x) = k$ حل وحيد.

[1] التابع مستمر و متزايد تماماً أو متناقص تماماً على المجال (مأخوذ من منحنى)

[2] العدد k ينتمي لصورة المجال السابق وهو (مأخوذ من قت)

حالة خاصة: « طريقة c »

إذا كانت $k = 0$ برهن للمعادلة حل وحيد $f(x) = 0$ للمجال $]a, b[$

[1] تقع (الخطوة الأولى)

[2] يجب أن يكون $f(a) \times f(b) < 0$

« تابع التقابل العكسي » f^{-1}

مثال: أوجد تابع التقابل العكسي للتابع $y = x^2$

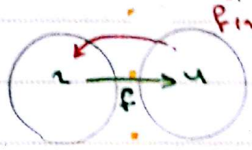
1- نوجد x بدلالة y

2- نبدل الرموز المألوفة « نبدل بين x و y »

[1] $x = \sqrt{y}$ نجذر

[2] $y = \sqrt{x}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

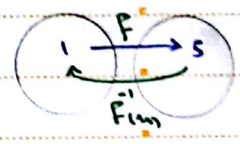


مثال 2: أوجد تابع التقابل العكسي للتابع $y = 3x+2$

$3x = y-2$

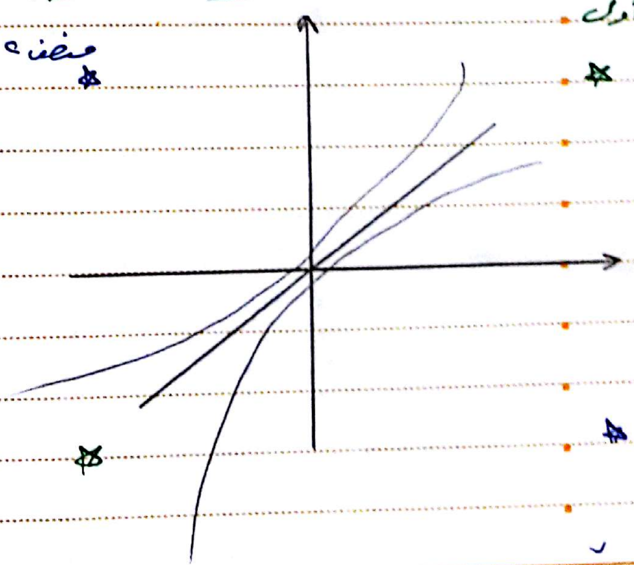
$x = \frac{y-2}{3} \Rightarrow y = \frac{x-2}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$



نتيجة: الخطان البيانيان للتابع التقابل العكسي متناظران بالنسبة للمنصف الأول $y=x$

منصف أول



« تدريب ص 61 »

[1] $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

علل لماذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]1,2[$

* ننظم جدول التغيرات لأنه يعرف أن التابع متزايد أو متناقص.

الحل: التابع مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(3)(1) = 4 - 12$

$\Delta = -8 < 0$ مستحيلة الحل

وبالتجريب نجد $f'(x) > 0$ المجال $]1,2[$

x	$-\infty$		1	حل	2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗ 0 ↗	4	↗	$+\infty$

التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,2[$

لأنه مستمر ومتزايد على R

$f(1) = -1 \qquad f(2) = 4$

$f(1) \times f(2) < 0$

$-1 \times 4 < 0$

$-4 < 0$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

إذا ما فكتب المجال على الجدول $]1,2[$ نقول التابع مستمر ومتزايد تماماً على R فهو مستمر ومتزايد تماماً على $]1,2[$ لأنه محتوى في R.

عندما نعدم المشتق إذا كان به سالب فإن التابع إما تزايد تماماً أو متناقص تماماً
« مناطق عدد ومضمون في المشتق »

« تدرب جيداً »

[2] $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

علل لماذا تكون للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول حقيقية

$f(x) = \boxed{-1}$ ونبحث عن العدد 1- في السطر الأخير.

التابع مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = 2$

x	$-\infty$	$\boxed{\text{حل}}$	0	$\boxed{\text{حل}}$	2	$\boxed{\text{حل}}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 1$ { مناظر 1- في السطر الأخير }

$f(2) = -3$

- التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, 0]$ العدد 1- ينتمي لصورة هذا المجال هي $]-\infty, 1]$ لا حل وحيد
$1 \in f]-\infty, 0[=]-\infty, 1[$
- التابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $[0, 2]$ العدد 1- ينتمي لصورة هذا المجال وهي $[-3, 1]$ لا حل وحيد.
- التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]2, +\infty[$ والعدد 1- ينتمي لصورة هذا المجال $]-3, +\infty[$ لا حل وحيد.

$\Leftarrow$ للمعادلة $f(x) = -1$ ثلاث حلول.

صورة مجال تعني صورة جميع الأعداد الواقعة في المجال.

[3] « توقع 2020 » وسؤال دورة ...

$f(x) = x^2 + 1$ المعرف على المجال $I = [-3, 2[$

ارسم خطه البياني C_f واحسب $f(I)$

التابع مستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

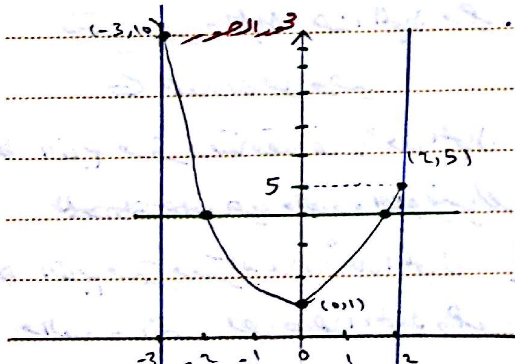
$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$I =]-3, 2[$

x	$-\infty$		-3	من المجال	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	10	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 1$ و $f(2) = 5$ و $f(-3) = 10$

★ لإيجاد عدد حلول المعادلة ★ = $f(x)$ من الرسم
1- نرسم مستقيم ★ = y الأفقي ثم نحصي عدد نقاط التقاطع مع الخط البياني للتابع ولمعرفة الحلول نسقط على xx'.



من الرسم 1
$(-3, 10)$
$(2, 5)$
$(0, 1)$

محور الحلول

لإيجاد صورة مجال نرسم مستقيمين شاقوليين لطرفي هذا المجال ثم نحصر الخط البياني من الأسفل والأعلى فتكون الصورة من أدنى نقطة (ترتيب) إلى أعلى نقطة في الرسم

عدد الحلول: نرسم المستقيم الأفقي $y = 6$ $\Leftarrow$ للمعادلة $f(x) = 6$

حلان .

$f(I) = f[-3, 2] = [1, 10]$

صورة المجال المستقر الفعلي.

★ « من أصغر ترتيب إلى أعلى ترتيب »

صورة مجال من الجدول نذهب إلى السطر الأخير نأخذه من أصغر رقم لأكبر رقم .

« التدرب جيداً »

[5] : $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

احسب $f(-1)$ و $f(-\frac{1}{2})$ و $f(0)$ و $f(1)$

* $f(0) = -\frac{1}{2}$
* $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
* $f(-1) = -\frac{3}{2}$
* $f(1) = \frac{1}{2}$
* $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1, 1]$

$f'(x) = 12x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	0 ↗	$\frac{1}{2}$	↘ 0	$-\frac{3}{2}$	0 ↗	$\frac{1}{2}$

* التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-1, -\frac{1}{2}[$ والعدد 0 ينتمي للصورة هذا المجال وهي $]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$

$\Leftarrow$ للمعادلة حل وحيد .

* التابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ والعدد 0 ينتمي للصورة هذا المجال وهي $]\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}[$

* التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]\frac{1}{2}, 1[$ والعدد 0 ينتمي للصورة هذا المجال وهي $]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$ للمعادلة حل وحيد .

$\Leftarrow$ للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاث حلول.

ملاحظة: حتى نأخذ صورة المجال من الجدول حيث نأخذ العدد من السطر الأخير ونأخذ عدد

« توقع 2020 »

« اكتشاف المقارب المائل »

نرمز للمقارب المائل بـ $y = ax + b$

1 - نكتشف a بحساب نهاية

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

2 - نكتشف b بحساب نهاية

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b$$

مثال: أوجد المقارب المائل عند $+\infty$

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$$

الحل:

$y = ax + b$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2+1}{x+3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+3x} = 2 = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2+1}{x+3} - 2x\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2x^2}+1-\cancel{2x^2}-6x}{x+3} =$$

$$\lim \frac{-6x+1}{x+3} = -6 = b$$

$y = 2x + (-6)$

$y = 2x - 6$ معادلة مقارب مائل.

Class

Scanned by CamScanner

مثال: أوجد المقارب المائل عندما $x \to +\infty$

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad y = ax + b$

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1+0 = 1 = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$$

$$\lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2+1} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow y = x + 0 \Rightarrow y = x$$

مثال ط:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x - 6 \\
x+3 & 2x^2 + 1 \\
 & -2x^2 \mp 6x \\
\hline
 & -6x + 1 \\
 & +6x + 18 \\
\hline
 & 19
\end{array}$$

بإقليدس: الكسر = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$:

$$f(x) = 2x - 6 + \frac{19}{x+3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{19}{x+3} = 0 \Rightarrow y = 2x - 6$$

مقارب مائل

"توقع 2020"

| مبرهنة القيمة المطلقة |

$$\lim_{x \to *} |f(x) - a| \le g(x)$$

أي إذا كان.

$$\lim_{x \to *} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to *} f(x) = a$$

مثال: $\lim_{x \to +\infty} |f(x) - 3| \le \frac{1}{x+1}$

أوجد $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$ عاكس بالإشارة

الصيغة القانونية لكثير الحدود $(x \mp \text{عدد})^2 \pm \text{عدد}$

[1] $\sqrt{x \pm \text{عدد}} \pm \infty \Rightarrow \sqrt{x \pm \text{عدد}}$
ونهمل هذا العدد

[2] مقارب مائل $y = x \pm \text{عدد} \Leftarrow x \to +\infty$
مقارب مائل. $y = -(x \pm \text{عدد}) \Leftarrow x \to -\infty$

« توقع 2020 »

[19] $\sqrt{x^2+4x+5}$

احسب نهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} x^2+4x+5} = +\infty$

نتوقع وجود مقارب مائل.

اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية (متمماً إلى مربع كامل)

* الإتمام إلى مربع كامل.

١- نخرج أمثال x^2 عامل مشترك

٢- نضيف ثم نطرح مربع نصف أمثال x

٣- نطبق (جذر الأول إشارة الثاني جذر الثالث)^2

الحل: x^2+4x+5

نصفه $2 \xrightarrow{\text{تربيع}} 4 \to +4 \to -4$

$x^2+4x+4-4+5$

الصيغة القانونية هي: $(x+2)^2+1$

من خلال الصيغة القانونية.
استنتج وجود مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار الـ $+\infty$

اكتب معادلته. بما أن $x \to +\infty$

مقدار كبير جداً $(x+2)^2$ ومنه نهمل الـ $+1$

أما القوس $(x+2)^2$ ⇐ يصبح التابع

$f(x) = \sqrt{(x+2)^2}$

$|x+2| = x+2 \Rightarrow y = x+2$

لذلك نتوقع أن المقارب مائل.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$

[20] « هامة »

$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

ادرس نهاية f عند $-\infty$ ،

اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

« اذكر المقارب ونوعه أو المماس ونوعه »

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \sqrt{\lim_{x\to-\infty} x^2+1}$

$= -\infty + \infty$ عدم التعيين

نضرب البسط والمقام بمرافق البسط:

$\lim \frac{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}{(x-\sqrt{x^2+1})}$ $\quad x-(x^2+1) = x-x^2-1$

$\lim \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = \lim \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

المستقيم $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار الـ $-\infty$.

$y = 2x$

$f(x) - y_\Delta = x + \sqrt{x^2+1} - 2x$

$= -x + \sqrt{x^2+1}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = -\infty + \infty$ عدم التعيين

نضرب بالمرافق.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(-x-\sqrt{x^2+1})}{-x-\sqrt{x^2+1}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

$y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$

الوضع النسبي: $f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} > 0$

الخط فوق Δ

Class

عندما نقدم المقدار وتكون المعادلة مستحيلة الحل فالمقدار إما موجب دوماً أو سالب دوماً.

{ توقع 2020 }

[26] $f(x) = x^2 - 2x - 3$

أثناء دراسة التغيرات إذا كانت المجالات مغلقة نأخذ الصور

التابع مستمر واشتقاقي على R فهو مستمر واشتقاقي على $[0,3]$

$f(0) = -3 \qquad f(3) = 0$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$\boxed{0}$

عندما $f(x) = 0 \Leftarrow x = 3$ (من الجدول)

نبحث عن الصفر في السطر الأخير فيكون الحل الوحيد عند السطر الأول.

$f[0,3] = [-4, 0]$

للمستقر الصفر

صورة المجال $[0,3]$

[صورة المجال]

1) قاعدة: نأخذ أصغر قيمة وأكبر قيمة من السطر الأخير والجواب

2) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + \text{عدد موجب}}} - 1 < 0$

3) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + \text{عدد موجب}}} + 1 > 0$

[23] $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} \qquad D = R$

في جوار الـ $+\infty$ وادرس الوضع النسبي $y = x + 1$

$f(x) - y_a = \cancel{x} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \cancel{x} - 1$

$= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_a = \dfrac{\infty}{\infty}$ عدم التعيين

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1 = \lim \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1 = \dfrac{1}{1} - 1 = 0$

المستقيم $y = x+1$ مقارب مائل للخط c في جوار الـ $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس $f(x) - y_a$

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$ البسط أصغر من المقام

* لذلك أصغر من الواحد $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

أو

*

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 < 0$

لأن $x < \sqrt{x^2+9}$

$\Leftarrow$ الخط c تحت Δ

ملاحظة: $x < \sqrt{x^2 + \text{عدد موجب}}$

Class

"تابع الجزء الصحيح" (حصة 30)

تعريف الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x:

هو عدد صحيح وحيد n أصغر من x ويمين $n+1$

أي تحقق الشرط: $n \leq x \leq n+1$

مثال: أوجد $E(\pi)$

$$3 \leq \pi \leq 4$$

$3{,}14$ (صحيح $\underline{3}$، عشري $\underline{14}$)

$$\Rightarrow E(\pi) = 3$$

مثال: أوجد $E(-3{,}5)$

$$-4 \leq -3{,}5 \leq -3$$

$$E(-3{,}5) = -4$$

إذا كان العدد سالب نأخذ n أصغر من x

يأتي في الامتحان قانون تابع الجزء الصحيح

فائدة: $x-1 \leq E(x) \leq x$

مثال: أوجد $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x}$

الحل: نعلم أن $x-1 \leq E(x) \leq x$

نقسم على x الموجب $\frac{x-1}{x} \leq \frac{E(x)}{x} \leq 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

$$\left\{ \lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1 \right.$$

[27] $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

تعريف العدد المشتق :

هو عدد l نحسب بأحد الطريقتين :

[1] $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ عدد حقيقي

[2] $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$

نتيجة ١ : $f'(a) = l$

[الميل m]

نتيجة ٢ : نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق إذا كان [l = عدد حقيقي] أما إذا كان $l = \pm\infty$ فإن التابع غير قابل للاشتقاق.

مثال : ادرس قابلية الاشتقاق عند $a=0$

1] $f(x) = \sqrt{x}$

$f(a) = f(0) = \sqrt{0} = 0$

نعوض بالقانون ١

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot\cancel{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

التابع غير قابل للاشتقاق عند 0.

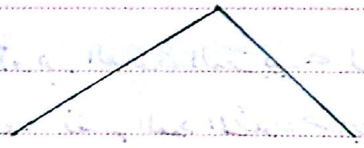
2] فسر النتيجة هندسياً : يوجد مماس شاقولي

معادلته ⟸ $x = 0$ ⟸ $x = a$

نتيجة ٣ : نقول عن التابع f أنه اشتقاقي على I إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة من هذا المجال.

l «العدد المشتق» « $f'(a)$ » « m » «الميل»

«لاحظ»



عدد ⟸ التابع قابل للاشتقاق «اشتقاقي»

0 ⟸ يوجد مماس أفقي

$\neq 0$ ⟸ يوجد مماس مائل

معادلته

$y - y_1 = m(x - x_1)$

أو

$y - f(a) = f'(a)[x - a]$

$\pm\infty$ ⟸ التابع غير قابل للاشتقاق ⟸ يوجد مماس شاقولي ⟸ معادلته

$x = x_1$

أو $x = a$

«متوقع» «التقريب الخطي والتقريب التآلفي المحلي»

لإيجاد القيمة التقريبية لتابع ما نستخدم الدستور التالي:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$$

مثال: أوجد القيمة التقريبية لـ $\sin(0,1)$

فكرة الحل: نقسم العدد المطلوب حسابه [صورته التقريبية] أو [قيمته] إلى عددين أحدهما نرمز له [a] وهو عدد نستطيع حساب صورته دون تقريب وإلى عدد آخر h وهو عدد صغير جداً نحصل عليه بطرح a من العدد المعطى.

$\sin(0,1)$

$0,1$

$a = 0$ ، $h = 0,1 - 0 = 0,1$

الحل: ① نفرض تابع $f(x) = \sin x$

② $f(a) = f(0) = \sin(0) = 0$

③ $f'(x) = \cos x$

$f'(a) = f'(0) = \cos 0 = 1$

④ نعوض بالقانون

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$$

$$f(0,1) \approx 0 + 1(0,1)$$

$$\Rightarrow \sin(0,1) \approx 0,1$$

«ربط الرياضيات بالفيزياء»

$\theta \le 14^\circ$ أو $\theta \le 0,24\ rad$

$\sin\theta = \theta$

$\tan\theta = \theta$

$\cos\theta = 1$

«سؤال هام»

أوجد القيمة التقريبية لـ $f(8,1)$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

عدد تقريبي لحساب a من التابع $\Rightarrow a = 8$

$8,1$

$h = 8,1 - 8 = 0,1$

$$\Rightarrow f(a) = f(8) = \sqrt{9} = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(8) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

$$f(8,1) \approx 3 + \frac{1}{6}(0,1)$$

$$f(8,1) \approx \frac{18 + 0,1}{6} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} = 0,3$$

« قواعد الاشتقاق »

(1) مشتق الثابت (العدد) = 0

$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$

(2) مشتق الدرجة الأولى = أمثال x

$f(x) = 10x \Rightarrow f'(x) = 10$

(3) مشتق المجموع = مجموع المشتقات.

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(2x+8)' = 2 + 0 = 2$

(4) مشتق القوة = الأس (الأساس)^الأس-1 × مشتق الأساس

$(g^n)' = n g^{n-1} \cdot g'$

$[(3x+4)^2]' = 2(3x+4)(3)$
$= 6(3x+4)$

$(x^6)' = 6x^5(1) = 6x^5$

$(x^3)' = 3x^2(1) = 3x^2$

$(x^2)' = 2x(1) = 2x$

(5) مشتق الجذر التربيعي = $\dfrac{\text{مشتق ما تحت الجذر}}{\text{ضعفي الجذر}}$

$(\sqrt{\star})' = \dfrac{\star'}{2\sqrt{\star}}$ $\qquad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt{5x+1})' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$

(6) مشتق الجداء = مشتق الأول بالثاني + مشتق الثاني بالأول

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

$(x\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x$
$= \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

(7) مشتق الكسر = $\dfrac{\text{مشتق البسط بالمقام - مشتق المقام بالبسط}}{\text{مربع المقام}}$

$\left(\dfrac{5}{x}\right)' = \dfrac{0 \cdot x - (1)(5)}{x^2} = \dfrac{-5}{x^2}$

(8) $(\sin \star)' = \star' \cos \star$

زاوية مركبة

$(\sin(2x+\pi))' = 2\cos(2x+\pi)$

(9) $(\cos \star)' = -\star' \sin \star$

$[\cos(4x+8)]' = -4\sin(4x+8)$

(10) $(\tan \star)' = \dfrac{\star'}{\cos^2 \star}$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

أو $1 + \tan^2 x$

أو $\star'(1 + \tan^2 \star)$

(11) $(\cot \star^2)' = \dfrac{-\star'}{\sin^2 \star}$

Scanned by CamScanner

(12) ((2 ع))

$$\left(\frac{1}{*}\right)' = \frac{-*'}{*^2}$$

مثال

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

مثال

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

---

(13) $(\text{عدد } f)' = \text{عدد } f'$

$$(4\sin x)' = 4\cos x$$

$$(4x^2)' = 4(2x) = 8x$$

---

(14) مشتق الجذر الغير التربيعي والتربيعي

نحول الجذر إلى قوة ثم نعود للقاعدة

رقم (4) «مشتق القوة»

مثال $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ملاحظة:

$$\sqrt[6]{x^9} = x^{\frac{9}{6}}$$

مثال $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

مثال $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

مثال $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

أوجد معادلة المماس للتابع في النقطة فالمشتق

$f(x) = x^2 + 3$ حيث $x = 2$

معادلة المماس $y - y_1 = \overset{f'(x)}{m}(x - x_1)$

إحداثيات نقطة التماس.

نحتاج ترتيب نقطة التماس

$$f(2) = 4 + 3 = 7$$

$$f'(x) = 2x$$

$$m = f'(2) = 2(2) = 4$$

نعوض بالقانون.

$$y - 7 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 1$$

[1] « تدرب ص 84 » $\boxed{x = 4}$

أوجد معادلة المماس :

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

$f(4) = \frac{1}{4} \rightarrow y$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$\underline{\underline{m}} = f'(4) = \frac{-1}{16}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{1}{4} = \frac{-1}{16}(x - 4)$

$y - \frac{1}{4} = \frac{-1}{16}x + \frac{4}{16}$

$y = \frac{-1}{16}x + \frac{4}{16} + \frac{1}{4}$

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{-1}{16}x + \frac{1}{2}$

2) $f(x) = x^2$

$y \leftarrow f(4) = 16$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(4) = 8 = m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 16 = 8(x - 4)$

$y = 8x - 32 + 16$

$y = 8x - 16$

3) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

$f(4) = \sqrt{9} = 3$

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \Rightarrow f'(4) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 4)$

$y - 3 = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} + \frac{3}{1}_{(3)}$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

4) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$f(4) = \frac{1}{5}$ $\quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

$m = f'(4) = \frac{-1}{25}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{1}{5} = \frac{-1}{25}(x - 4)$

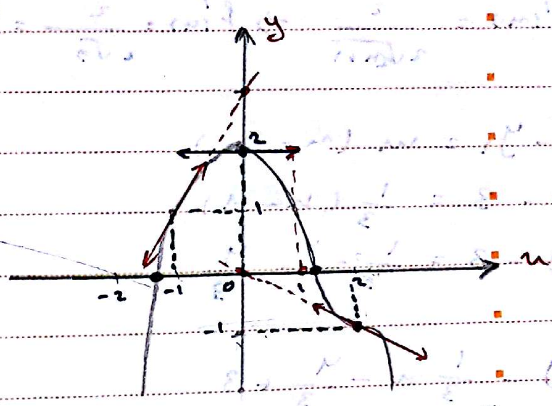
$y - \frac{1}{5} = \frac{-1}{25}x + \frac{4}{25}$

$y = \frac{-1}{25}x + \frac{4}{25} + \frac{1}{5}_{(5)}$

$y = \frac{-1}{25}x + \frac{9}{25}$

[2] " تدرب ص 84 "

هام جداً : C_f هو الخط البياني لتابع f



(1.) عيّن $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(-1)$

$f(*) = *$
1- نحدد العدد * على محور الفواصل
2- نسقط على الخط البياني للتابع
3- نسقط على محور التراتيب

$f(0) = 2$

$f(2) = -1$

$f(-1) = 1$

(1.) عيّن $f'(0)$ ، $f'(2)$ ، $f'(-1)$

$f'(*) = *$ ← ميل المماس في النقطة التي فاصلتها * (M)
1- نحدد العدد * على محور الفواصل
2- نسقط على نقطة التماس فينتج نقطة التماس
3- نوجد نقطة أخرى يمر منها المماس .
4- نطبق القانون $M = f'(*) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$f'(-1)$

$(-1, 1)$: $x_1 \; y_1$

$(0, 3)$: $x_2 \; y_2$

$f'(-1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$f'(-1) = \frac{3-1}{0-1} = \frac{-2}{-1} = 2$

$f'(2) = \frac{-1-0}{2-0} = \frac{-1}{2}$

$(2, -1)$ $(0, 0)$: $x_1 \; y_1$ $x_2 \; y_2$

$f(0) = \frac{2-2}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$

$(0, 2)$ $(1, 2)$: $x_1 \; y_1$ $x_2 \; y_2$

(2) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

أعطِ عددين صحيحين متتاليين يحيزان كلاً من حلول المعادلة $f(x) = 0$. $f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$

لإيجاد عدد حلول المعادلة $f(x) = *$
1- نرسم المستقيم الأفقي $y = *$
2- نحصي عدد نقاط تقاطعه مع الخط البياني فينتج عدد الحلول ولإيجاد هذه الحلول نسقط نقاط تقاطعه على محور الفواصل .

للمعادلة $f(x) = 0$ حلان

أحدهما محصور بين العددين -1 و -2

والثاني محصور بين العددين 1 و 2

[3] احسب المشتقات التالية :

1) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{\sqrt{2}}{3}$

$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x + 1 - 0$

$f'(x) = 2x^2 - x + 1$

2) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{4}$

$f'(x) = \frac{1}{4}(2x + 3)$

$f'(x) = \frac{2x + 3}{4}$

7) $f(x) = x\cos x$

$f'(x) = \cos x + (-\sin x)(x)$

$f'(x) = \cos x - x\sin x$

8) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f'(x) = \frac{\cos x\,(x) - \sin x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

9) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2}$

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}$

$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

أو

$f(x) = \tan x$

$f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10) $f(x) = \sin x\cos x$

$f'(x) = \cos x(\cos x) + (-\sin x)(\sin x)$

$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

ملاحظة:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x - \cos^2 x \neq 1$

[3] «تدرب ص 84»

3) $f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x}$

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$

$f'(x) = 4x^3 - 2\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x\right)$

$f'(x) = 4x^3 - 2\sqrt{x} - \sqrt{x}$

$f'(x) = 4x^3 - 3\sqrt{x}$

4) $f(x) = \frac{2}{x+1} - x$

$f(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\right) - x$

$f'(x) = 2\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) - 1$

$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} - 1$

5) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

$f'(x) = \frac{x^2-4-(2x)(x-1)}{(x^2-4)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2-4-2x^2+2x}{(x^2-4)^2}$

$f'(x) = \frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$

6) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{x}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}$

"التدريب رقم 4"

[1] اوجد المشتقات الآتية:

1) $f(x) = (2x^3-1)^5$

$f'(x) = 5(2x^3-1)^4 \cdot (6x^2)$

$f'(x) = 30x^2(2x^3-1)^4$

2) $f(x) = \left[\frac{x+1}{x+2}\right]^3$

$f'(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'$

$f'(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1}{(x+2)^2}\right)$

$f'(x) = 3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)$

3) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ $\frac{1}{2}x$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

4) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

$f'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x)$

$f'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}$

5) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}(x+1)}{x^2+x+1}$

$3x$

$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{(2x^2+2x+x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}$

"التدريب رقم 8"

[3]

11) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$

$f'(x) = \frac{-\sin x(\sin x-1) - \cos x(\cos x)}{(\sin x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x}{(\sin x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x}{(\sin x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin x}{(\sin x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-1 + \sin x}{(\sin x-1)^2}$

12) $f(x) = \frac{1+\sin x}{2+\cos x}$

$f'(x) = \frac{\cos x(2+\cos x) - (-\sin x)(1+\sin x)}{(2+\cos x)^2}$

$f'(x) = \frac{2\cos x + \cos^2 x - (-\sin x - \sin^2 x)}{(2+\cos x)^2}$

$f'(x) = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{(2+\cos x)^2}$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}$

$-x-1$

$f'(x) = \frac{\frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} = \frac{\frac{-3}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}$

« تمرينات ومسائل صـ 105 »

[5] ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً :

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$$

وما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

التابع مستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(3)(-1)$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{37}{54}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = -\frac{1}{2} \qquad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{37}{54}$$

للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاث حلول

7) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

8) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$

$$f'(x) = \frac{(\sin^2 x)'(\cos^3 x) - (\cos^3 x)'(\sin^2 x)}{(\cos^3 x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x(\cos x)(\cos^3 x) - 3\cos^2 x(-\sin x)\sin^2 x}{\cos^6 x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x \cdot \cos^4 x - 3\cos^2 x \cdot \sin^3 x}{\cos^6 x}$$

9) $f(x) = \tan(3x)$

$$f'(x) = 3(1 + \tan^2(3x))$$

10) $f(x) = \tan^2 x$

$$f(x) = 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\star$ مشتق مرتبة ثانية f'' أو $f^{(2)}$

$\star$ مشتق مرتبة ثالثة f''' أو $f^{(3)}$

حساب المشتقات من المرتب (1)(2)(3).

[9] ص 105 ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر.

1] $f(x) = x^2\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$f(a) = f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\sqrt{x}}{\cancel{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x}}{1} = 0 \Rightarrow$$ قابل للاشتقاق

2] $f(x) = x|x|$

$f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}|x|}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} |x| = 0 \Rightarrow$$ التابع قابل للاشتقاق.

3] $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$ $\quad f(a) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + |x|}{x(x^2+1)}$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(x+1)}{x(x^2+1)} = 1$$

ميل نصف المماس

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(x-1)}{x(x^2+1)}$$ قابل للاشتقاق عند الـ 0 من اليمين

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x^2+1} = -1$$ قابل للاشتقاق عند الصفر من اليسار لكن التابع غير قابل للاشتقاق عند الصفر.

إذا كان العدد المشتق من اليمين يساوي العدد المشتق من اليسار فإن التابع قابل للاشتقاق وإذا ما يساوي بعضا غير قابل للاشتقاق.

$1 \neq -1 \Leftarrow$ التابع غير قابل للاشتقاق

«تمرينات ومسائل ص 105»

[7] 1] $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - x + 1$

$f''(x) = 6x - 1 \rightarrow 3(2x) = 6x$

$f'''(x) = 6 \quad ((3x^2)') = 6x \cdot 3$ لو كان

2] $f(x) = x\sqrt{x}$

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x) \quad \sqrt{x}.\sqrt{\cancel{x}}$

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$

$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$

$f'''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}$

3] $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \frac{(-(x-1)^2)'(-1)}{(x-1)^4}$

$f''(x) = \frac{+2x-2}{(x-1)^4}$

$f'''(x) = \frac{2(x-1)^4 - 4(x-1)^3(2x-2)}{(x-1)^8} \quad (x-1)^4$

$f'''(x) = \frac{2(x-1)^4 - 4(x-1)^3 2(x-1)}{(x-1)^8}$

$f'''(x) = \frac{\cancel{(x-1)^4}[2-4(2)]}{(x-1)^8} = \frac{-6}{(x-1)^4}$

[4] $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

$f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(2x)$

$f''(x) = -4\cos(2x) - 4\sin(2x)$

$f'''(x) = +8\sin(2x) - 8\cos(2x)$

مهمة «توجيهي 2020»

[8] $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

[1] تحقق أن $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$.

نوجد $f'(x)$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

نعوض .

$$\sqrt{1+x^2}\left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right) \stackrel{?}{=} f(x)$$

$$\sqrt{1+x^2} + x = f(x)$$

[2] استنتج أن $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$

نشتق العلاقة يلي برهناها في الطلب الأول.

[1] $\sqrt{1+x^2} \cdot f'(x) = f(x)$

نشتق العلاقة (1) بالأول . مشتقة الثاني + بالثاني مشتق الأول

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} f' + f''(x)\sqrt{1+x^2} = f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

نضرب الطرفين بـ $\sqrt{1+x^2}$

$$xf' + (1+x^2)f''(x) = \underbrace{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$\Rightarrow xf'(x) + (1+x^2)f''(x) - f(x) = 0$$

« تطبيقات الاشتقاق »

أولاً : اطراد تابع اشتقاقي .

[1] نقول عن التابع أنه متزايد تماماً على المجال I إذا كان المشتق الأول موجباً لا ينعدم .

أي : $f'(x) > 0$

[2] نقول عن التابع أنه متناقص تماماً على المجال I إذا كان المشتق الأول سالباً ولا ينعدم .

أي : $f'(x) < 0$

ثانياً : القيم الحدية (القيم المحلية) .

[1] القيمة المحلية الكبرى .

إذا انعدم المشتق عند قيمة ولتكن $*$ وغيّر المشتق الأول إشارته من الموجب إلى السالب فإننا نقول أن $f(*)$ قيمة محلية كبرى .

[2] القيمة المحلية الصغرى .

إذا انعدم المشتق الأول عند قيمة ما ولتكن $*$ وغيّر المشتق الأول إشارته من السالب إلى الموجب فإننا نقول $f(*)$ قيمة محلية صغرى .

« نتيجة » نقول عن $f(*)$ أنها قيمة محلية كبرى إذا حقق الشرط $f(*) \geq f(x)$ حيث x ينتمي للمجال $I \cap J$

« نتيجة » نقول عن $f(*)$ أنها قيمة محلية صغرى إذا تحقق الشرط التالي : $f(*) \leq f(x)$

« مبرهنة الحل الوحيد »

إذا كان التابع متزايد تماماً أو متناقص تماماً ولا ينعدم المشتق عندئذ أياً كانت K من $[f(a), f(b)]$ فإنه يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = K$ ضمن المجال $[a, b]$

مثال: ادرس تغيرات التابع وعيّن القيم المحلية .

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

التابع مستمر واشتقاقي على R $\Leftarrow$ $D =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

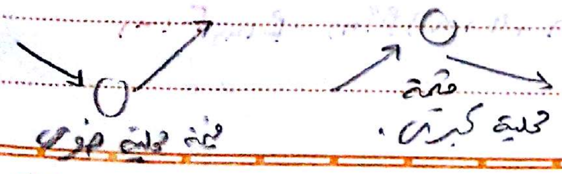
$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$$

« قيمة محلية صغرى »



« المشتقات من المراتب العليا »

* نرمز للمشتق الأول بالرمز $f'(x)$ أو $f^{(1)}(x)$
* نرمز للمشتق الثاني بالرمز $f''(x)$ أو $f^{2}(x)$
* مشتق من المرتبة $[n]$ هو $f^{(n)}(x)$

مثال: أوجد المشتقة من المرتبة الرابعة

$$f(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\sin x$$
$$f'''(x) = -\cos x$$
$$f''''(x) = +\sin x$$

« حل المعادلات المثلثية »

[1] $\sin x = \sin \theta$

إما $x = \theta + 2\pi k$

أو $x = \pi - \theta + 2\pi k$

[2] $\cos x = \cos \theta$

إما $x = \theta + 2\pi k$

أو $x = -\theta + 2\pi k$

[3] $\tan x = \tan \theta$

$x = \theta + 2\pi k$

[4] $\cot x = \cot \theta$

$x = \theta + 2\pi k$

مثال: حل المعادلات الآتية:

$$\sin(x-2) = \frac{1}{2}$$

نعلم أن $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ، أو $\sin 30 = \frac{1}{2}$

$$\sin(x-2) = \sin\frac{\pi}{6}$$

إما $x-2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k + 2$

أو $x-2 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k + 2$

« حالات خاصة »

$\sin x = \cos x$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k$

← دورة كاملة

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi k + \frac{\pi}{2}$$

نشاط ١٠٥ ص :

$f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$

- تحقق أن f معرف على المجال $[0,2]$
- معرف عندما $x(2-x) \boxed{\geq 0}$

ندرس الإشارة :

إذا ماكان مضمون الجذر درجة أولى ندرس الإشارة أما إذا كان درجة ٢ ننقل المعالم الأرقام والمجاهيل إلى طرف .

$x(2-x) = 0$

$x=0 \quad x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	

مجال التعريف فقط $D_f = [0,2]$

- أثبت أن f اشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال .

x تابع كثير حدود اشتقاقي على $]0,2[$ المحتوى في R .

$x(2-x)$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على $]0,2[$ المحتوى في R وحسب النتيجة [6 صـ]

فإن $\sqrt{x(2-x)}$ اشتقاقي على $]0,2[$

$\Leftarrow$ f اشتقاقي على $]0,2[$

(النتيجة 6) : إذا كان u تابعاً موجباً تماماً واشتقاقياً على مجال I ، كان التابع f المعرف على I بالصيغة $f(x) = \sqrt{u(x)}$ اشتقاقياً على I .

احسب $f'(x)$

$f'(x) = (x)'\sqrt{x(2-x)} + (\sqrt{x(2-x)})'(x)$

$= 1 \cdot \sqrt{x(2-x)} + \frac{[x(2-x)]'}{2\sqrt{x(2-x)}}(x)$

$= \sqrt{x(2-x)} + \frac{\overset{+2-x}{1\cdot(2-x)} + \overset{-x}{(-1)(x)}}{2\sqrt{x(2-x)}} \cdot x$

$= \sqrt{x(2-x)} + \frac{-2x+2}{2\sqrt{x(2-x)}} \cdot x$

$= \sqrt{x(2-x)} + \frac{\cancel{2}(-x+1)}{\cancel{2}\sqrt{x(2-x)}}(x)$

$= \sqrt{x(2-x)} + \frac{-x^2+x}{\sqrt{x(2-x)}}$

ط٢ : $= \sqrt{x(2-x)} + \frac{[x(2-x)]'}{2\sqrt{x(2-x)}}(x)$

$= \sqrt{x(2-x)} + \frac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{x(2-x)}}(x)$

$= \sqrt{x(2-x)} + \frac{2-2x}{2\sqrt{x(2-x)}} \cdot (x)$

ونخرج عامل مشترك ونختصر 2

« إيجاد النهاية عن طريق تعريف العدد المشتق »

[1]

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

[2]

منطبق هي الفقرة لما يكون
عدد ← x والمقام العدد $- x$.

مثال: برهن أن $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

[1] نفرض البسط كاملاً $f(x)$:

$f(x) = \sin x$

[2] نوجد $f(a)$

$f(a) = f(0) = \sin 0 = 0$

* الجواب دائماً (0)

[3] نشتق $f'(x)$ $\quad f'(x) = \cos x$

[4] نوجد $f'(a)$ [الجواب هو دائماً النهاية]

$f'(a) = \cos(0) = \boxed{1}$

[5] نعوض بالقانون:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0}$$

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

مثال:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

1- نفرض تابع:

$f(x) = \tan x - 1$

2- نوجد $f(a)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$

3- نشتق التابع:

$f'(x) = 1 + \tan^2 x$

4- نوجد $f'(a)$

$f'(a) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\frac{\pi}{4}$

$1 + 1 = 2$

وهو جواب النهاية، ونعوض بالقانون.

$$2 = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1 - 0}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$2 = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

مثال «الاشتقاقية ومسائل»

[1] $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ، $x \neq 0$ ؛ $f(0) = 0$. هل f مشتقة عند الصفر؟

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos\frac{1}{x}$$

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$$

نضرب بـ x ونميز حالتين: $x > 0$

$$-x \leq x\cos\frac{1}{x} \leq x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} -x = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^+} x \cos\frac{1}{x} = 0$$

∴ قابل للاشتقاق من اليمين

∴ له رسم مماس من اليمين.

وعندما $x < 0$

$$\lim_{x \to 0^-} x \cos\frac{1}{x}$$

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x \geq x\cos\frac{1}{x} \geq x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} x = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^-} x \cos\frac{1}{x} = 0$$

قابل للاشتقاق من اليسار وله رسم مماس من اليسار . بما أن $f'(0^+) = f'(0^-)$

[2] ما هو $f'(x)$ ∴ التابع قابل للاشتقاق عند الصفر.

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,(x^2)$$

$$= 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

~~مرفوض~~ عندما $x = 0$

$f(0) = 0$ ، $f'(x) = 0$

وظيفة:

[2] $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$ ، $R \setminus \{-1\}$

[1] اكتب معادلة المماس $x = 1$

نحتاج إلى نقطة التماس

$$f(1) = \frac{1 - 3 + 1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

نقطة التماس $(1, -\frac{1}{2})$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2 - 3x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$= m = \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3 - x^2 + 3x - 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = m\ f'(1) = \frac{1 + 2 - 4}{(1+1)^2}$$

$$m = -\frac{1}{4}$$

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

[2] هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته

$$y = \boxed{-4}x \quad m'$$

$f'(x) = a \to$ الميل

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = -4$$

$$x^2 + 2x - 4 = -4(x^2 + 2x + 1)$$

$$x^2 + 2x \cancel{-4} + 4x^2 + 8x \cancel{+4} = 0$$

Class

- فكرة الحل ٢: نأخذ المشتق بعلاقة مساواة مع العدد (-٤) ونحل المعادلة إذا انحلت يوجد مماس وإذا ما انحلت لا يوجد مماس

$5x^2 + 10x = 0 \Rightarrow 5x(x+2) = 0$

$x = 0 \qquad x = -2$

يوجد مماس

[3] هل يقبل c مماساً $\boxed{\text{موازياً}}$ للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$

$3x - 2y = 0$

$y = \frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} = m$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = \frac{3}{2}$$

$2(x^2 + 2x - 4) = 3(x^2 + 2x + 1)$

$2x^2 + 4x - 8 - 3x^2 - 6x - 3 = 0$

$-x^2 - 2x - 11 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 4(-1)(-11)$

$= 4 - 44 = -40 < 0$

مستحيلة الحل $\Leftarrow$ لا يقبل مماس

[18] «وظيفة ١»

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

هل يمكن تعيين a , b لكي يقبل c مماساً $\boxed{\text{أفقياً}}$ في النقطة $A(1,2)$ منه.

فكرة الحل:

١- نعوض النقطة $A(1,2)$ في التابع فينتج علاقة أولى.

٢- نشتق ونضع بدل $f'(x)$ العدد ٥

٣- ونعوض $x = 1$ بالمشتق.

$f(1) = a + b + 1 \Rightarrow f(1) = 2$

لأن من النقطة $(1,2)$

$\Rightarrow \boxed{a + b + 1 = 2} \quad (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f'(1) = 0$

لأن الميل معدوم

$\Rightarrow \boxed{3a + 2b = 0} \quad (2)$

من المعادلة (1)

$a = -b + 1 \quad (1)'$

نعوض بـ (2) $\quad 3(-b+1) + 2b = 0$

$-3b + 3 + 2b = 0$

$-b = -3 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

نعوض في $(1)'$ نجد

$\Rightarrow a = -3 + 1 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$

$f'(x) = -6x + 6x$

$f'(1) = -6 + 6 = 0$

$f'(1) = 0$ ✓

يقبل مماساً أفقياً

ما يكون عندما حصول كيف الخطوة الثانية

[19] $f(x) = \dfrac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$

عيّن a , b لتكون $y = \boxed{4}x + 3$ ($m = f'(x)$)

معادلة للمماس للخط $x = 0$.

نفس الـ 18 بس بدال الـ x_0 مفروض الميل (4)

بس المشكلة ما معي نقطة التماس مفروض $x = 0$

في معادلة المماس ,

$x = 0 \Rightarrow y = 3$ ($f(0)$)

نقطة التماس $(0, 3)$

$f(0) = \dfrac{b}{1} \Rightarrow 3 = \dfrac{b}{1} \Rightarrow \boxed{b = 3}$

$f'(x) = \dfrac{(9x^2 + a)(x^2+1) - 2x(3x^3 + ax + b)}{(x^2+1)^2}$

$f'(0) = \dfrac{a}{1} = 4 \Rightarrow a = 4$

$f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$

[20] مسألة الاتوقع 2020 "

$f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$

هل يمكن تعيين a لكون التابع قيمة حدية محلية عند $x = 1$.

$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$

$f'(1) = 3a + 6 + 3 = 3a + 9$

$3a + 9 = 0 \Rightarrow a = -3$

* $f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x$ *

$f'(x) = -9x^2 + 6x + 3 = 0$

$\div -9$ $= x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$

$(x - 1)(x + \frac{1}{3})$

$x = 1 \quad x = -\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{9}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

يوجد قيمة حدية عند الـ 1 وهي 3

⇓

فكرة الحل : اـ نفوض النقطة الحدية في التابع ونتبع علاقة .

- نشتق التابع ثم نعوض فاصلة النقطة الحدية بالمشتق ونضع بدل $f'(x)$ العدد 0 حصراً .

يوجد في طلب [20] طلب .

إذا علمت أن $a = -3$ ادرس التغيرات والحل يبدأ من عند * .

[15]

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

- احسب المشتق للتابع f .

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

- استنتج مشتق كل من التوابع الآتية :

استنتاج مشتق تابع من تابع :

ـ نبحث عن العلاقة بينهما $g(x) = f(*)$

② $g'(x) = f'(*) \cdot *'$

[1] $g: x \to \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

$$g'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

[2] $h: x \to \frac{x^4+1}{x^2-1}$

$$h(x) = f(x^2)$$

$$h'(x) = f'(x^2) \cdot (x^2)'$$

$$h'(x) = \frac{x^4-2x^2-1}{(x^2-1)^2} \cdot 2x$$

[3] حالة خاصة :

$$l: x \to \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

$$l(x) = \sqrt{f(x)}$$

$$l'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$l'(x) = \frac{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}}}$$

[4] $k: x \to \frac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

$$k'(x) = f(\sin x)$$

$$k'(x) = f'(\sin x) \cdot (\sin x)'$$

$$= \frac{\sin^2 x - 2\sin x - 1}{(\sin x-1)^2} \cdot \cos x$$

[22] * احسب في حال وجودها نزاية التابع f عند a المعطاة:

[1] $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ $\quad a = 0$

نفرض البسط كاملاً: $g(x) = \cos x - 1$

نوجد $g(a)$: $g(0) = \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

نشتق: $g'(x) = -\sin x \, dx$

نوجد $g'(a)$: $g'(0) = -\sin 0 = 0$

نعوض بالقانون:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - 0}{x - 0} = 0$$

[2] $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ $\quad a = 0$

نفرض البسط كاملاً: $g(x) = \tan x$

نوجد $g(a)$: $g(0) = \tan 0 = 0$

نشتق: $g'(x) = 1 + \tan^2 x$

نوجد $g'(a)$: $g'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1$

نعوض بالقانون:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - 0}{x - 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

« السؤال إجباري »

خطوات رسم خط بياني للتابع.

1] نوجد النقاط المساعدة

« نقطة التقاطع مع محور الفواصل $x'x$ »

* حيث نضع $y=0$ ونحسب x ونقطة التقاطع مع محور التراتيب

حيث نضع $x=0$ ونحسب y ونستخدم النقاط الموجودة في الجدول.

2] نرسم المقاربات.

3] نرسم المماس إن طلب.

4] نرسم الخط البياني للتابع C اعتماداً على الجدول والأسهم من اليسار إلى اليمين.

مثال: ادرس تغيرات التابع وارسم خطه البياني

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

التابع مستمر واشتقاقي على $D =]-\infty, +\infty[\subseteq \mathbb{R}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x - 5$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$f(\frac{5}{2}) = -\frac{1}{4}$

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

للرسم: نوجد نقاط مساعدة. $x=0 \Rightarrow y=6 \Rightarrow \boxed{(0,6)}$

$y=0 \Rightarrow 0 = x^2-5x+6 \Rightarrow 0 = (x-3)(x-2) \Rightarrow x=3 \Rightarrow \boxed{(3,0)}$

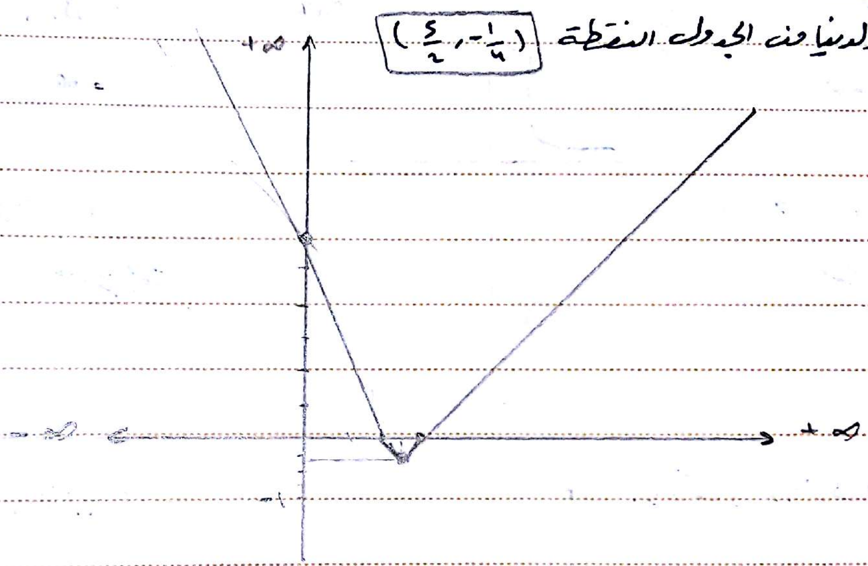
$x=2 \Rightarrow \boxed{(2,0)}$

ولدينا من الجدول النقطة $\boxed{(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})}$

من الجدول نأخذ من x $(-\infty)$

(من اليسار)

ومن $f(x)$ نأخذ $(+\infty)$ إلى فوق

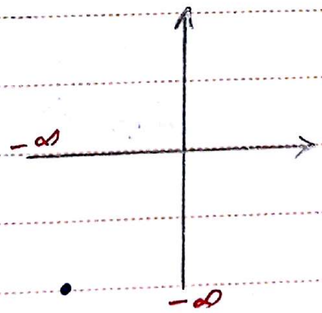


((حالة البدء)) | ((حالة الانتهاء))

من اليسار

x	$-\infty$
$f(x)$	$-\infty$

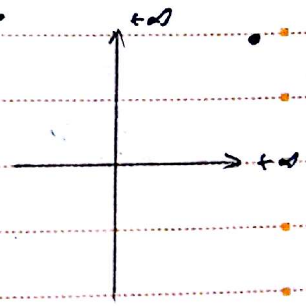
ومن تحت



من اليمين

x	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$

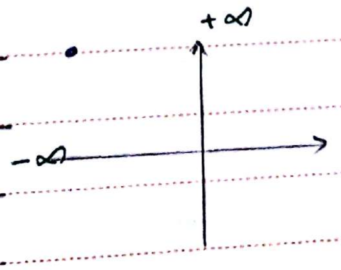
ومن فوق



من اليسار

x	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$

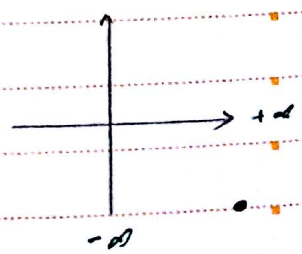
ومن فوق



من اليمين

x	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$

ومن تحت

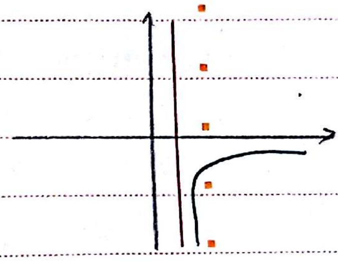


«حالات رسم الخط البياني»

من تحت وقريب من الواحد.

مقارب شاقولي

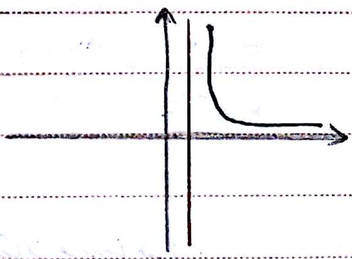
	1	
	$-\infty$ ↗	



من فوق وقريب من الواحد

مقارب شاقولي

x	1	
	$+\infty$ ↘	

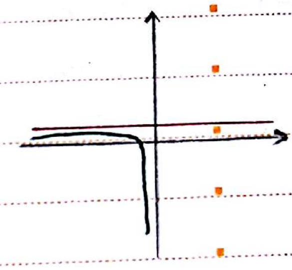


من اليسار وقريب من الواحد.

من اليسار

	$-\infty$
	1 ↘

مقارب أفقي

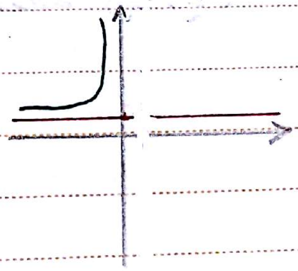


من اليسار وقريب من الواحد

من اليسار

	$-\infty$
	1 ↗

مقارب أفقي

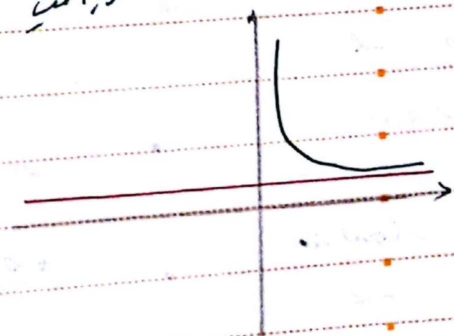


حالة الانتهاء (نقطة نهاية رسم التابع)

x	$+\infty$	من اليمين
$f(x)$	↘ 1	

من اليمين وقريب من الواحد

مقارب أفقي

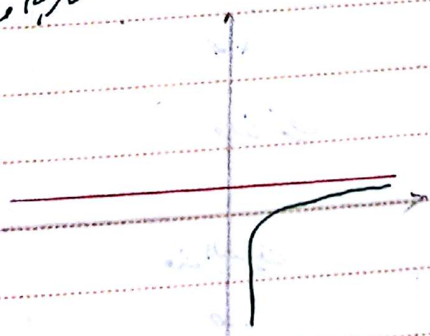


حالة الانتهاء (النقطة النهائية للتابع)

x	$+\infty$	من اليمين
$f(x)$	↗ 1	

من اليمين وقريب من الواحد.

مقارب أفقي



«دراسة التوابع المثلثية»

تعريف التابع الدوري:

نقول عن التابع أنه دوري إذا حقق الشرط التالي:

$$\boxed{f(x+\star)=f(x)}$$

ودوره $\boxed{T=\star}$

☆ تابع $x\to\sin x$ تابع دوري ودوره الأصغري 2π

لأن $\sin(x+2\pi)=\sin x$

☆ تابع $x\to\cos x$ تابع دوري ودوره الأصغري 2π لأن

$\cos(x+2\pi)=\cos x$

☆ تابع $x\to\tan x$ دوري ودوره الأصغري π لأن

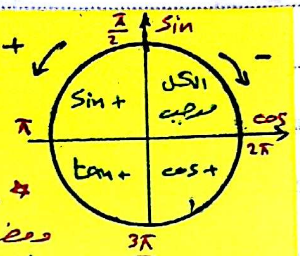
$\tan(x+\pi)=\tan x$

البرهان:

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$$

$$=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x$$

«كل جبار ظالم تجبّر»



☆ إذا كانت الزاوية بدلالة $\frac{\pi}{2}$ ومضاعفاتها نضع الإشارة حسب الربع ونقلب النسبة

☆ إذا كانت الزاوية بدلالة π ومضاعفاتها نضع الإشارة حسب الربع ولا نقلب النسبة.

مثال١ $\sin(\star+\frac{\pi}{2})=+\cos\star$

$\cos(\star+\frac{\pi}{2})=-\sin\star$

مثال $\sin(\pi+\star)=-\sin\star$

$\cos(\pi-\star)=-\cos\star$

الاصطلاح الى الربع الأول

ملاحظة:

☆ التابع الدوري يمكن رسمه على المجال طوله T عوضاً عن R «مجموعة الأعداد الحقيقية»

☆ يمكن رسم تابع الـ sin على مجال طوله 2π وهي في المجال $]-\pi,\pi[$

لأن $x\in D_f \Rightarrow x+T\in D_f$

☆ $x\to\sin(ax+b)$ دوري ودوره $\frac{2\pi}{|a|}$

☆ $x\to\cos(ax+b)$ دوري ودوره $\frac{2\pi}{|a|}$

«المدرس موجب دوماً»

« مضاربه تابع $x \to \tan x$ أو
$f(x) = \tan x$ »

1- تابع الـ tan دوري ودوره π

2- تابع الـ tan تابع فردي لأن

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

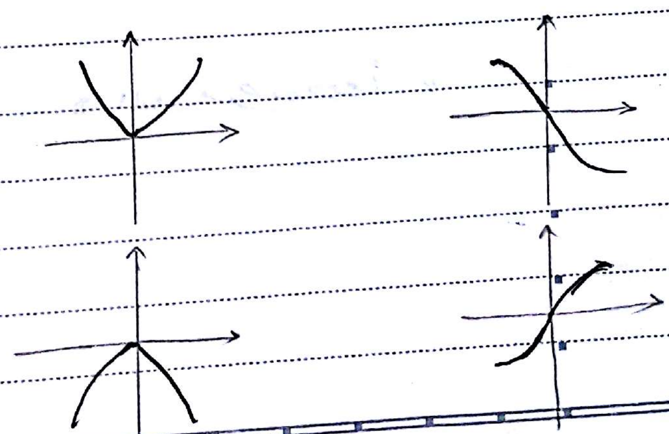
⇐ التابع فردي

« التابع »

« فردي »	« زوجي »
[1] أيا كان $x \in D$ فإن $-x \in D$	[1] أيا كان $x \in D$ فإن $-x \in D$

أو $\Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ « مشتركة »

« فردي »	« زوجي »
[2] $f(-x) = -f(x)$	[2] $f(-x) = f(x)$
الخط البياني متناظر بالنسبة للمبدأ	الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب



* $x \to \sqrt{x}$ ليس فردي وليس زوجي
لأن $D_f = [0, +\infty[$ ليست متناظرة

« مجموعة التعريف »

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$

إذا كان التابع الزوجي أو فردي فإننا ندرس التغيرات على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$
ثم نستفيد من خواص التناظر والانسحاب
ولإتمام الرسم على R نقوم بالرسم
بالانسحاب $(T_{\vec{i}})$

⇐

ادرس تغيرات التابع $f(x)=\tan x$ على

$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

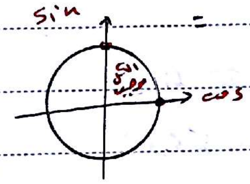
بما أن التابع $\tan x$ ← تابع دوري ندرسه على المجال طوله π أي على المجال $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$

وبما أنه تابع فردي ⇐ ندرسه على المجال

$[0,\frac{\pi}{2}[$

$f(0)=\tan(0)=0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim \tan\frac{\pi}{2}=\lim\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

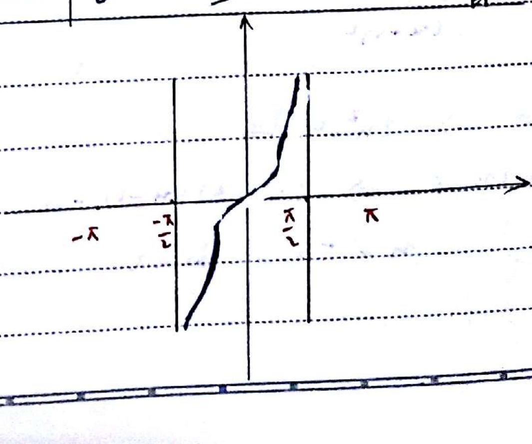


مقارب شاقولي $x=\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>0$

⇐ فالتابع متزايد تماماً

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖



"تمرينات ومسائل 24"

$f(x)=x+\sqrt{x-1}-4$

$D=[1,+\infty[$

ادرس تغيرات التابع ، أثبت أن $f(x)=0$ حل وحيد

إذا كان المجال مغلق عند العدد

في دراسة التغيرات يجب أن نعلم إذا كان التابع اشتقاقي أم غير اشتقاقي لكن هو يعطيها طبعاً قبل دراسة تغيرات التابع

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\frac{x+\sqrt{x-1}-4+3}{x-1}$$

$\Rightarrow \infty$

الحل:

التابع مستمر على $[1,+\infty[$

$f(1)=1+0-4=-3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+\infty=+\infty$

$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$

⇐ التابع متزايد تماماً ، لأنه غير اشتقاقي عند 1

x	1	حل	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	-3	0 ↗	$+\infty$

التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,+\infty[$

والعدد 0 ينتمي لصورة هذا المجال $]-3,+\infty[$

⇐ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

Class

"تمرينات ومسائل" 25 "هامة"

$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ $\quad I =]1, +\infty[$

عند السد مفتوح فهو حتماً اشتقاقي.

ادرس تغيرات التابع.

التابع مستمر واشتقاقي على المجال $I \Leftarrow]1, +\infty[$

- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} - 1 = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي "yy'"

والخط c على يمينه

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - \infty = -\infty$

- $f'(x) = \underbrace{\frac{-1}{(x-1)^2}}_{\text{سالب}} - \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{سالب}} < 0$

والتابع متناقص تماماً.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً في المجال $]1, 2[$

التابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $I =]1, +\infty[$

فهو متناقص على المجال $]1, 2[$ المحتوى في I

والعدد 0 ينتمي للصورة $]1 - \sqrt{2}, +\infty[$

$\Leftarrow$ للمعادلة حل وحيد

أي

$]1, 2[$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) \cdot f(2) < 0$

$+\infty \cdot (1 - \sqrt{2}) < 0$

$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$ $\quad R / 1$ $\quad [27]$

$D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

1] أوجد نهاية التابع عند $+\infty$ و $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2] أثبت أن المستقيم $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط c.

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 1 \\ \hline x + 1 & 2x^2 + x + 7 \\ & -2x^2 \mp 2x \\ \hline & -x + 7 \\ & +x + 1 \\ \hline & 0 \quad 8 \end{array}$$

$f(x) - y_a$

$= \cancel{2x} - 1 + \frac{8}{x+1} - (\cancel{2x} - 1)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y_a = \lim \frac{8}{x+1} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_a = 0$

$\Leftarrow$ المستقيم $y = 2x - 1$ مقارب مائل

والخط c في جوار الـ $+\infty$ و الـ $-\infty$

3] ادرس نهاية f عند -1 ماذا تستنتج بالنسبة للخط؟

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{2 - 1 + 7}{0} = \frac{8}{0^+} = +\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي "yy'" والخط c على يمينه

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي "yy'" والخط c على يساره

4] ادرس تغيرات f

التابع مستمر واشتقاقي على $R / -1$

$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0$

$x^2 + 2x - 3 \Rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0$

$x = -3 \qquad x = 1$

منحني محذوفة التعريف

x	$-\infty$	-3	-1	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 −	‖	− 0	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-11 \searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow 5$	$\nearrow +\infty$

$f(-3) = -11$ (نهاية عظمى كبرى)

$f(1) = 5$ (نهاية محلية صغرى)

ج] اثبت أن $I(-1, -3)$ هو مركز تناظر للمنحني c.

$a = -1$، $b = -3$

شرط مركز التناظر $\forall\ a+h \in D \Rightarrow a-h \in D$

$f(a+h) + f(a-h) = 2b$

$$f(a+h) = f(a-1+h) = \frac{2(-1+h)^2 + (-1+h) + 7}{-1+h+1}$$

$$= \frac{2(1-2h+h^2) - 1 + h + 7}{h} = \frac{2 - 4h + 2h^2 + h + 6}{h}$$

$$= \frac{2h^2 - 3h + 8}{h}$$

$f(a-h) = f(-1-h) \rightarrow$ نكتب نفس الجواب السابق لكن بدل h نضع $-h$

$$= \frac{2(-h)^2 - 3(-h) + 8}{-h} = \frac{2h^2 + 3h + 8}{-h}$$

نعوض بالقانون

$f(a+h) + f(a-h)$

$$= \left[\frac{2h^2 - 3h + 8}{h}\right] + \left[\frac{2h^2 + 3h + 8}{-h}\right]$$

$$= \frac{2h^2 - 3h + 8 - 2h^2 - 3h - 8}{+h} = \frac{-6h}{h} = -6 = 2b$$

د] ارسم مقاربات c ثم ارسم c.

$x \rightarrow \frac{2x^2 + x + 7}{x+1}$ ، $y = 2x - 1$

لرسم المقارب المائل نحتاج نقطتين

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$

$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 7$: نقاط التقاطع مع المحاور

$\Rightarrow (0, 7)$

$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2x^2 + x + 7}{x+1}$

$\Rightarrow 2x^2 + x + 7 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(2)(7)$

$\Delta = 1 - 56 = -55 < 0$

مستحيلة الحل في R

∴ يعني لا يوجد تقاطع في محور x

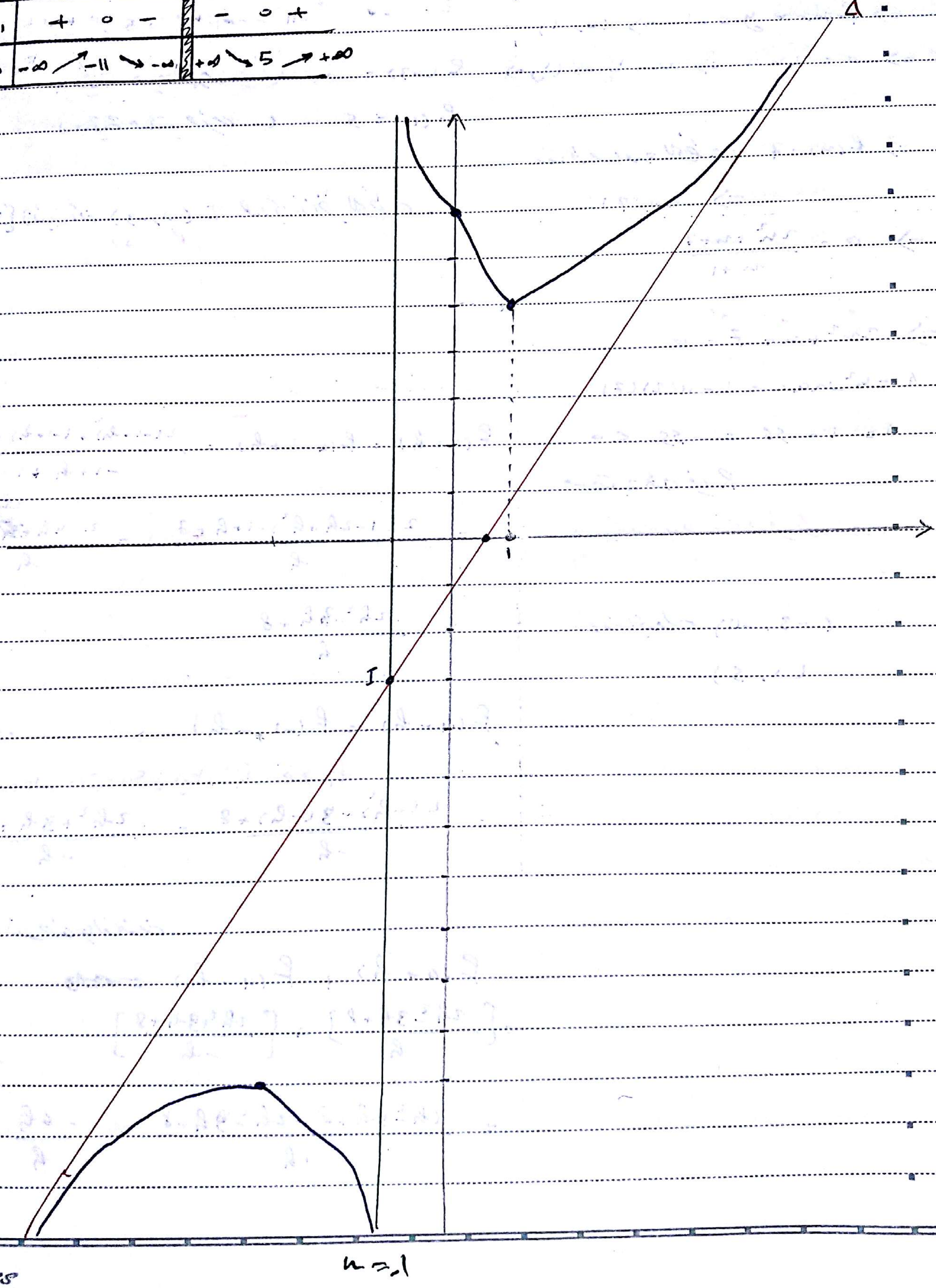
من الجدول $(-3, -11)$

$(1, 5)$

$(1, 5)$ $(-3, -11)$ $(0, 7)$ $(-\frac{1}{2}, 0)$ $(0, -1)$

نقطة مركز التناظر $I(-1, -3)$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty \; \| \; +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$



Class

$\sin^2(-x) = \sin -x \cdot \sin -x = -\sin x \cdot -\sin x = \sin^2 x$

$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$ دوري $\sin(x + n\pi) = \sin x$

١٣ تمرينات ومسائل (30)

- $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$
- قارن بين $f(x+2\pi)$, $f(-x)$
- مع $f(x)$ واستنتج أنه يكفي دراسة f على $[0,\pi]$

[1] $D =]-\infty, +\infty[$

$f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x)$

$= 3(\sin -x \cdot \sin -x) + 4\cos^3(-x)$

$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$

⟸ التابع زوجي.

نحسب:

$f(x+2\pi) = 3\sin^2(x+2\pi) + 4\cos^3(x+2\pi)$

$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$

$f(x+\underset{\text{الدور } T}{2\pi}) = f(x)$

⟸ التابع دوري دوره 2π

وبما أنه دوري ندرسه على المجال $[-\pi, +\pi]$

ولكنه زوجي ندرسه على $[0, \pi]$

[2] أثبت أن $f'(x) = 6\cos x \times \sin x (1 - 2\cos x)$

$f'(x) = 3(2\sin x \cdot \cos x) + 4(-3\cos^2 x \sin x)$

$= 6\sin x \cos x - 12\cos^2 x \sin x$

$= 6\sin x \cos x [1 - 2\cos x]$

[3] دراسة تغيرات f على $[0,\pi]$

التابع مستمر واشتقاقي على $[0,\pi]$

$f(0) = 4$ $f(\pi) = -4$

$f'(x) = 6\sin x \cos x (1 - 2\cos x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ إما $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$

إما $k = 0 \Rightarrow x = 0$ أو $k = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pi}$

أو $k = 2 \Rightarrow x = 2\pi$ مرفوض

لا يوجد ضمن المجال

أو $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$k = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi$ ×

أو $1 - 2\cos x = 0$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	−	0	+	0	−	0
$f(x)$	4	↘	$\frac{11}{4}$	↗	3	↘	−4

$f(\frac{\pi}{2}) = 3$ $f(\frac{\pi}{3}) = 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{4} + \frac{2}{4} = \frac{11}{4}$

ملاحظات هامة:

* التابع الدوري ندرسه على المجال $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$

$\Rightarrow [-\frac{2\pi}{2}, +\frac{2\pi}{2}] \Rightarrow [-\pi, +\pi]$

* التابع الزوجي أو الفردي ندرسه على المجال $[0, \frac{T}{2}]$

* التوابع:
  - زوجي $f(-x) = f(x)$
  - فردي $f(-x) = -f(x)$
  - دوري $f(x + \underset{\text{الدور}}{\text{عدد}}) = f(x)$

■ $\sin^*(-x)$:
  - * زوجي (تختفي إشارة −) $\sin^*(x)$
  - * فردي (لا تختفي إشارة −) $-\sin^*(x)$

■ $\cos^*(-x)$ ⟸ دائماً تختفي إشارة − ⟸ $\cos^*(x)$

ملاحظات:

* الزاويتان المتكاملتان لهما نفس: الـ sin والـ cos مضروب بـ (-)

$\sin 120 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = 60 \qquad x = 300$

$\frac{\pi}{3} \qquad \frac{-\pi}{3} , \frac{5\pi}{3}$

(٤) رسم الخط البياني لـ f على $[-2\pi , +2\pi]$

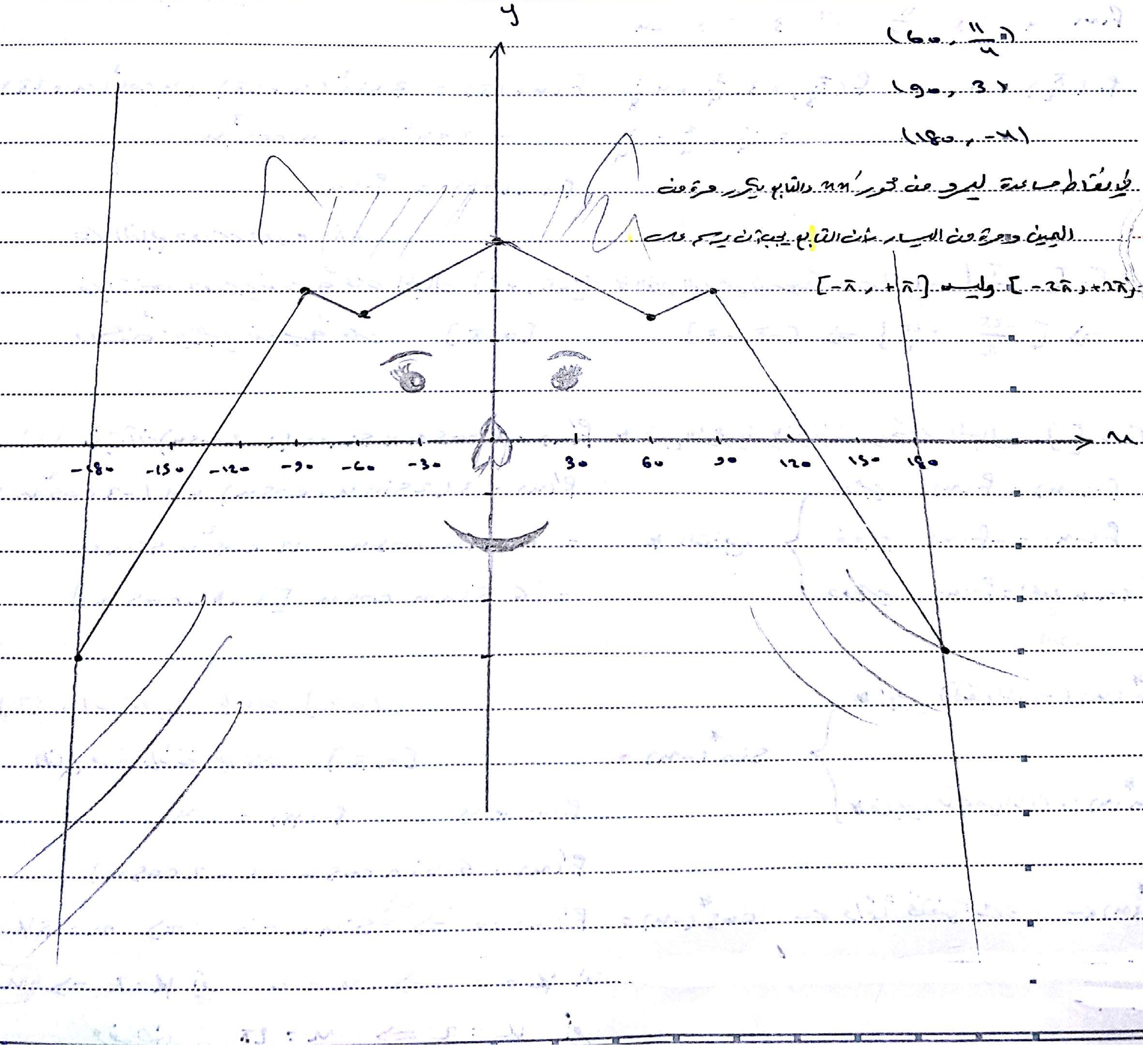
(0, 4)

(60, $\frac{11}{4}$)

(90, 3)

(180, -4)

يتقاطع مع عدة ليس من محور x والتابع يكرر مرة من اليمين ومرة من اليسار فإن التابع يجب أن يرسم على $[-\pi , +\pi]$ وليس $[-2\pi , +2\pi]$



نهاية متتالية

الموضوع .... التاريخ / / 201

نقول عن العدد الحقيقي L أنه نهاية لمتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ إذا ضم كل مجال مفتوح مركزه L جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معيّن ما عدا عدد منته منها وعندها نقول أنّ

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = L$$

ونقول أن المتتالية متقاربة من L

المتتاليات المرجعية المتقاربة $(U_n)_{n\geq0}$ حيث

$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $U_n = \frac{1}{n}$

$U_n = \frac{1}{n^2}$, $U_n = \frac{1}{n^3}$

هذه المتتاليات تتقارب من الصفر لأن نهايتها هي (0)

تعريف المتتالية المتباعدة في حالة النهاية اللانهائية

نقول أن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ تسعى إلى $+\infty$ إذا كان كل مجال من الشكل $]A, +\infty[$ يضم جميع الحدود بدءاً من دليل معين أو باستثناء عدد منته منها.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$$

نقول أن المتتالية متباعدة إلى $\pm\infty$

المتتاليات المرجعية المتباعدة $(U_n)_{n\geq0}$ حيث

$U_n = \sqrt{n}$

$U_n = n$, $U_n = -n$

$U_n = n^2$, $U_n = n^3$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

نقول عن المتتالية أنها تسعى الى $-\infty$ إذا ضم كل مجال من الشكل $]-\infty, A[$ جميع حدود المتتالية بدءاً من دليل معين ما عدا عدد منته منها

مثال $U_n = -n$

فلها أنها متباعدة الى $-\infty$

حالات نهاية المتتالية الهندسية q^n :

[1] $q > 1$ متباعدة

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

مثال $U_n = (3)^n$

[2] $q = 0$ متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

[3] $-1 < q < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

[4] $q = 1$ متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$$

مثال عن [3] $\lim (\pm\frac{1}{2})^n = 0$

متقاربة من الصفر لأن $-1 < q < 1$

5

$q \le -1$

ليست لها نهاية = $\lim_{n \to +\infty} q^n$

الاساس سالب => لا متقاربة

ولا متباعدة لانها متناوبة بالاشارة

مثال $U_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

لأن $0 < q < 1$

مثال $U_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

لأن $q > 1$

مثال: عين عدد طبيعي n_0 يحقق

الشرط: $n > n_0$ فإن $U_n \in]2.99, 3.01[$

$U_n = \frac{3n-1}{n+1}$

نطبق القانون

|$f(n)$ - المركز| < نصف القطر

حساب المركز

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 3$

حساب نصف القطر

الحد العلوي - المركز

$3.01 - 3 = 0.01$

$$\left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{3n-1-3n-3}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{-4}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{4}{n+1} < \frac{1}{100}$$

لأن n كبيرة $n+1$

$$\frac{n+1}{4} > 100$$

$$n+1 > 400$$

$$n > 399$$

مبرهنات نهاية المتتاليات

اذا أمكن تعريف المتتالية على شكل تابع فإن نهاية التابع هي نفسها نهاية المتتالية أي

إذا كان $U_n = f(n)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = *$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = *$

مثال: ادرس نوعية المتتالية $(U_n)_{n \ge 1}$ المعرفة بالعلاقة $U_n = \frac{3n^2+10n-2}{n^2+3}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 3$

مثال: $U_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+1}} = \sqrt{3}$$

ادرس التقارب

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \sqrt{3}$$

المتتالية متقاربة

مبرهنة الإحاطة

$$x_n \le U_n \le V_n$$

$x_n \to L$ ، $V_n \to L$ $\Rightarrow$ $U_n \to L$

عدد حقيقي

مثال: اوجد نهاية المتتالية

$$U_n = \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$$

$$-1 \le \cos 2n \le 1$$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} \le \frac{-1}{\cos 2n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}} = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}} = 0$$

مبرهنة المقارنة

$$U_n \le V_n$$

$U_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $V_n \to +\infty$

$$U_n \le W_n$$

$W_n \to -\infty$ $\Rightarrow$ $U_n \to -\infty$

مبرهنة القيمة المطلقة

$\lim |U_n -$ العدد $| = 0$

مثال: اذا علمت أن

$$|U_n - 5| < \frac{1}{n+3}$$

أوجد $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 5$$

تقارب المتتاليات المحدودة

* نقول عن المتتالية $(U_n)_n$ أنها محدودة من الأعلى اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M يحقق الجميع الحدود الى يساره n ونسمي هذا الـ M حد راجح

x x x x]M

$U_n \le M$

* نقول عن المتتالية $(U_n)_n$ أنها محدودة من الأدنى اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m يحقق الجميع الحدود U_n الى يمينه n

m[x x x x

$U_n \ge m$

نسمي m حد قاصر

* نقول عن المتتالية $(U_n)_n$ أنها محدودة اذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى بآن واحد

m[x x x]M

دراسة المتتاليات المحدودة

* كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تنتهي الى $+\infty$
* كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تنتهي الى $-\infty$
* كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة من M
* كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة من m

تعريف الحد الأعلى للمتتالية

هو أصغر العناصر الراجحة للمتتالية

[متزايدة ومحدودة من الأعلى]

تعريف الحد الأدنى للمتتالية

هو أكبر العناصر القاصرة للمتتالية

[متناقصة ومحدودة من الأدنى]

تدريب صفحة 119

[1] $U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$U_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$

$-10^{-3} < \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$

نقلب الأطراف و نغير الجهة

$n\sqrt{n} > 10^{+3}$

نربع الأطراف

$\underbrace{n^2 . n}_{n^3} > 10^{6}$

نجد تقريبياً

$\Rightarrow n = 100$

[2] $U_n = \frac{3n+1}{n-1}$

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline n-1 & 3n+1 \\ & \underline{3n-3} \\ & 4 \end{array}$$

$U_n = 3 + \frac{4}{n-1}$

$2.98 < U_n < 3.02$

$2.98 < 3 + \frac{4}{n-1} < 3.02$

نضيف -3 للأطراف

$-0.02 < \frac{4}{n-1} < 0.02$

$\frac{-2}{100} < \frac{4}{n-1} < \frac{2}{100}$

نقلب ونغير الجهة ...

$\frac{100}{-2} > \frac{n-1}{4} > \frac{100}{2}$

$-50 > \frac{n-1}{4} > 50$

نضرب بـ 4

$-200 > n-1 > 200$

نضيف 1

$-199 > n > 201$

$\Rightarrow n_0 = 201$

[4] $\lim_{n \to \infty} X_n = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{3}{2}\right]^n = +\infty$

لأن $q>1$ هندسية أساسها $1 < \frac{3}{2}$

$\lim_{n \to \infty} Y_n = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{10}{10.1}\right]^n = 0$

لأن $q<1$

[6] [1] a) $y_n = x_n + 3$

شرط الهندسية

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = q = Const$

$\frac{x_{n+1}+3}{x_{n}+3} = \frac{\frac{1}{3}x_n - 2 + 3}{x_n + 3}$

$= \frac{\frac{1}{3}(x_n+3)}{x_{n}+3} = \frac{1}{3} = q \in R$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

1b) $\frac{y_n}{y_0} = q^{n-0}$

$y_0 = x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$

$y_n = q^n \cdot y_0$

$= (\frac{1}{3})^n \cdot 6$

$= \frac{6}{3^n}$

$y_n = x_n + 3$

$x_n = y_n - 3$

$x_n = \frac{6}{3^n} - 3$

[2] 1a) $S_n = y_0 + \dots + y_n$

هندسية y_n

$S_n = 6 \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}$ [illegible]

$= \frac{6 - \frac{6}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}}$

$= (6 - \frac{6}{3^{n+1}}) \frac{3}{2}$

$= 9 - \frac{9}{3^{n+1}}$

$= 9 - \frac{3 \cdot 3}{3^n \cdot 3}$

$= 9 - \frac{3}{3^n}$

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$= y_0 - 3 + y_1 - 3 + \dots + y_n - 3$

$= \underbrace{y_0 + y_1 + \dots + y_n}_{S_n} \underbrace{-3 - 3 \dots - 3}_{n+1}$

$= S_n + (-3)(n+1)$

$= 9 - \frac{3}{3^n} - 3n - 3$

$= 6 - \frac{3}{3^n} - 3n$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 9 - \frac{3}{3^n}$ 1b

هندسية الأساس أكبر من ١

$= 9 - \frac{3}{\infty} = 9 - 0 = 9$

$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} 6 - \frac{3}{3^n} - 3n$

هندسية الأساس أكبر من ١

$= 6 - \frac{3}{\infty} - 3(\infty) = -\infty$

123 تدرب حل

[2] $U_n = n + 1 - \cos n$

بما أن مجهول لـ Cos سوف نستخدم الإضافة

$-1 \le \cos n \le 1$

نضرب بـ -1

$1 \ge -\cos n \ge -1$

نضيف n:

$1 + n \ge n - \cos n \ge -1 + n$

نضيف 1:

$n + 2 \ge 1 + n - \cos n \ge n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2+2n+4}{2n^2+4n+2} = \frac{-3}{2}$$

$$U_n = \frac{n}{4} + \frac{2n}{n^2+1} \qquad [6]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \infty + 0 = +\infty$$

$$U_n = \frac{10n-3}{n^2+1} \qquad [7]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

$$U_n = \frac{2n^2-1}{3n+5} \qquad [8]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$$

$$U_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}} \qquad [9]$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{\lim \frac{4n-3}{n+1}} = \sqrt{4} = 2$$

$$U_n = \sqrt{\frac{2n^2-1}{3n+1}} \qquad [10]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$$

$$U_n = \cos\left[\frac{2n\pi}{3n+1}\right] \qquad [11]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \cos \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n+2 = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(U_n) = +\infty$$

$$U_n = \frac{2n+3}{3n-1} \qquad [1] \quad [3]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$

$$U_n = \frac{5n-3}{3n-5} \qquad [2]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{3n} = \frac{5}{3}$$

$$U_n = n - \frac{1}{n+1} \qquad [3]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty - \frac{1}{\infty+1}$$

$$= +\infty$$

$$U_n = \frac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1} \qquad [4]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 5$$

$$U_n = \frac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2} \qquad [5]$$

$$\lim \frac{-3n^2+2n+4}{2(n^2+2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n[\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}][\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}]}{[\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}][\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n[n+2-n-1]}{[\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}][\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}]}$$

$$\frac{n}{[\sqrt{n^2+2n+n+2}][\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}]}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n[\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}]} \times \text{المرافق}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} \times \text{المرافق}$$

$$= \frac{1}{1(\infty)} = 0$$

$$u_n = \frac{n!-2}{n!} \quad 15$$

$$\lim \frac{n!}{n!} - \frac{2}{n!}$$

نعلم أنّ $n \le n!$ ، $n \to \infty$ ، $n! \to \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} n! = \infty \Rightarrow \lim u_n = 1-0 = 1$$

$$u_n = \sin\left[\frac{n\pi+1}{2n+1}\right] \quad 12$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sin \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2} \quad 14$$

$$\frac{[\sqrt{n^2+n}-(n+\frac{1}{2})][\sqrt{n^2+n}+(n+\frac{1}{2})]}{\sqrt{n^2+n}+(n+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{n^2+n-(n+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{n^2+n}+(n+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+\cancel{n}-\cancel{n^2}-\cancel{n}-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+(n+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+n+\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\frac{\frac{1}{4}}{\infty} = 0$$

$$u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2} \quad 16$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty - \infty \quad \text{عدم تعيين}$$

$$\frac{(\sqrt{2n^2-5}-n\sqrt{2})(\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2})}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5-2n^2}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-5}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}} = 0$$

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}} \quad 17$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n+2}-n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\,\sqrt{n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n[\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}]}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}$$

زوجي $n \Rightarrow 1$

13 فردي $\Rightarrow -1$

$$U_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \frac{2n}{3n} + \frac{(-1)^n}{3n}$$

$$= \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

18

$$U_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n+2}$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \frac{n(\sqrt{n} + 1)}{n(1 + \frac{2}{n})} = +\infty$$

21

$$U_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \frac{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}})} = 0$$

ملاحظات هامة:

[1] اذا كانت المتتالية غير محدودة من الأعلى فهي لا تنتهي بالضرورة إلى $+\infty$

مثال: لتكن لدينا $U_n = n + (-1)^n . n$

$2n$ الزوجية $+\infty$ ، 0 الفردية 0

[2] اذا انتهت المتتالية الى $+\infty$ فهي ليست بالضرورة أن تكون متزايدة

مثال: $U_n = 2n + (-1)^n . n$

$3n \to +\infty$ الاس زوجي

$n \to +\infty$ الاس فردي

لكن غير متزايدة عند الأعداد الزوجية يتزايد وعند الأعداد الفردية ينقص.

هام جداً

[3] لتكن المتتالية المعرفة في المتتالية

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

التي اكتشفنا أن متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى أو متناقصة ومحدودة من الأدنى

* الطريقة التالية

نحل المعادلة $f(x) = x$

[4] أثناء حل المعادلة $f(x) = x$ اذا كان هناك عدة حلول موجبة وعدة حلول سالبة فإننا نختار الموجب أو السالب حسب المسألة

مثال: لتكن المتتالية $U_{n+1} = \sqrt{1 + U_n}$

وحدها البدء: $U_0 = 1$

فإذا علمت أن متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 أوجد نهاية هذه المتتالية

نحل المعادلة $f(x) = x$

$x = \sqrt{1+x}$

نربع $x^2 = 1 + x$

$x^2 \underset{\text{مجموع}}{-x} \underset{\text{ضرب}}{-1} = 0$

$\Delta = b^2 - 4a.c$

$(-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$ سالب

بما أن حد البدء موجب والمتتالية متزايدة

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ملاحظة المتتالية أحسن أرشادي لحد راجع
$l \le M$

التاريخ 201 / /

الموضوع

* $U_{n+1} = f(U_n)$
متزايدة ومحدودة من الأعلى أو
متناقصة ومحدودة من الأدنى
متقاربة
⇐ لحل المعادلة $f(x) = x$

تمارين صفحة 128

[1]

① $U_0 = 2$

$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 3$

$U_1 = \frac{1}{2} U_0 - 3 = \frac{1}{2}(2) - 3$
$= -2$

$U_2 = \frac{1}{2} U_1 - 3 = -4$

$U_3 = \frac{1}{2} U_2 - 3 = -5$

$U_4 = \frac{-11}{2}$

$U_5 = \frac{-23}{4}$ متناقصة ، $U_6 = \frac{-47}{8}$

المتتالية محققة

$\lim_{n \to +\infty} U_n = -6$

② $U_0 = 1$

$U_{n+1} = -\frac{1}{2} U_n$

$U_1 = -\frac{1}{2} U_0 = -\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$

$U_2 = \frac{1}{4}$, $U_3 = \frac{-1}{8}$

$U_4 = \frac{1}{16}$, $U_5 = \frac{-1}{32}$

غير متزايدة وغير متناقصة

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

③ $U_0 = 1$

$U_{n+1} = U_n + 2$

$U_1 = U_0 + 2 = 1 + 2 = 3$

$U_2 = U_1 + 2 = 3 + 2 = 5$

$U_3 = 7$ $U_4 = 9$

$U_5 = 11$

متزايدة

$\lim_{n \to \infty} U_n = +\infty$

[2] $U_n = 5 - \frac{10}{n^2}$

$\lim_{n \to \infty} U_n = 5 - 0 = 5 > 0$

0 ليس حد راجع

$\lim_{n \to \infty} U_n = 5 < 6$

6 حد راجع

$\lim_{n \to \infty} U_n = 5 > 4.999$

4.999 ليس حد راجع

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 5$

5 حد راجع

[3] $U_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

أثبت أن $1 \le U_n \le 3$

سنبرهن أن $1 \le U_n$

أي سنبرهن $0 \le U_n - 1$

$\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 \overset{?}{\ge} 0$

$\frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{n^2-n+1} = \frac{2n}{\underbrace{n^2-n+1}_{\text{موجب}}} \ge 0$

Scanned by CamScanner

ونستنتج من أن :

$u_n - 3 \le 0$ أي $u_n \le 3$

$$\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 3 \overset{?}{\le} 0$$

$$\frac{n^2+n+1-3(n^2-n}{n^2-n+1} \overset{?}{\le} 0$$

$$\frac{-2n^2+4n-2}{n^2-n+1} \overset{?}{\le} 0$$

$$\frac{-2(n^2-2n+1)}{n^2-n+1} \overset{?}{\le} 0$$

$$\frac{\overbrace{-2(n-1)^2}^{\text{سالب}}}{\underbrace{n^2-n+1}_{\text{موجب}}} \le 0$$

تحقق

[4]

① $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

فكرة الحل سوف نحصر u_n بين متتاليتين أصغر منها وأكبر منها

$$\frac{n}{n+1} \le \frac{n+2}{n+1} \le \frac{n+5}{n+1}$$

③ $u_n = \frac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$

$$\frac{2n-10}{(n-1)(n+2)} \le \frac{2n-3}{(n-1)(n+2)} \le \frac{2n+10}{(n-1)(n+2)}$$

[5]

① $u_n = \sin(n)$

$$-1 \le \sin n \le 1$$

محدودة لأنها محدودة من الأدنى ومحدودة من الأعلى

② $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$u_1 = 1 + \frac{1}{(1)^2} = 1 + 1 = 2$

$u_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$u_3 = \frac{10}{9}$

$\lim_{n \to \infty} u_n = 1$

$$1 \le 1 + \frac{1}{n^2} \le 2$$

محدودة من الأدنى ومن الأعلى " محدودة "

③ $u_n = \frac{1}{n+2}$

$u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{1}{4}$

$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

$$0 \le u_n \le \frac{1}{3}$$

محدودة من الأعلى ومن الأدنى

④ $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

$u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{5}$

$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

$$0 \le u_n \le \frac{1}{2}$$

محدودة من الأعلى ومن الأدنى

⑤ $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $u_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$u_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}$$

$\lim \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$

$2 \leq u_n$ $\sqrt{3}$ محدودة من الأدنى فقط

$\lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$

9) $u_n = n^2 + n - 1$

$u_1 = 1$ $\quad u_2 = 5$

$\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$

$u_3 = 11$

$\lim u_n = \infty$

$u_n \geq 1$

$1 \geq u_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

محدودة من الأدنى

محدودة من الأعلى ومن الأدنى

10) $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$

6) $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$

$u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{13}{3}$

$u_1 = 0$ $\quad u_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$u_3 = \frac{37}{4}$

$u_3 = \sqrt{\frac{8}{10}}$ $\quad u_4 = \sqrt{\frac{13}{17}}$

$\lim u_n = \frac{1}{\infty} + \infty = 0 + \infty = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}} = \lim \sqrt{\frac{n^2}{n^2}} = \sqrt{1} = 1$

$\frac{3}{2} \leq u_n$

$0 \leq u_n \leq 1$

محدودة من الأدنى

محدودة من الأعلى ومحدودة من الأدنى

11) $u_n = n + \cos n$

7) $u_n = \frac{-2}{\sqrt{2n+3}}$

حسب الإحاطة

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$u_1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ $\quad u_2 = \frac{-2}{\sqrt{7}}$

$n-1 \leq n + \cos n \leq 1+n$

$\lim n-1 = \infty$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{-2}{\infty} = 0$

$\lim n+1 = \infty$

$0 \geq u_n \geq \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \lim \cos n = \infty$

محدودة

$u_1 = 1 + \cos 1 = 1.99$

8) $u_n = n\sqrt{3} - 2$

$1 + \cos 1 \leq u_n$

$u_1 = \sqrt{3} - 2$

محدودة من الأدنى

12) $u_n = (-1)^n \times n^2$

$u_2 = 2\sqrt{3} - 2$

$u_1 = (-1) \cdot (1) = -1$

$u_3 = 3\sqrt{3} - 2$

$u_2 = (-1)^2 \cdot 4 = 4$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$

$u_3 = (-1)^3 \cdot 3 = -3$

$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ محدودة من الأدنى

$-1 \leq u_n$

نتائج هامة

1] المتتالية المتزايدة تتقارب إلى عدد حقيقي l عندما تكون محدودة

2] المتتالية المتزايدة تنتهي إلى $+\infty$ عندما تكون غير محدودة

3] كل متتالية متقاربة وحدودها موجبة نهايتها عدد حقيقي موجب أو معدوم "النهاية صفراً"

4] المتتالية المتقاربة ليست بالضرورة أن تكون مطردة

5] المتتالية المتباعدة إلى $+\infty$ ليست بالضرورة أن تكون متزايدة

6] في حالة متتالية معرفة عن طريق تابع $u_n = f(x)$ إذا كان $f(x)$ متزايد فإن u_n متزايدة وإذا كان $f(x)$ متناقص فإن u_n متناقصة

7] إذا كانت المتتالية معرفة تدريجياً وفق $u_{n+1} = f(u_n)$ فإذا كانت متزايدة أو متناقصة لا يعني بالضرورة أن u_n متزايدة أو متناقصة

8] عندما تكون متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بعدد M تكون متقاربة لكن نهايتها l ليست بالضرورة أن تساوي M ولكن يجب أن تكون $l \le M$

متتاليات متجاورة : فوق

نقول عن المتتاليتين $[(s_n)_{n\ge0}$ و $(t_n)_{n\ge0}]$ أنهما متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وتقاربت $[(s_n - t_n)_{n\ge0}]$ في الصفر

مثال: برهن أن المتتاليتين s_n و t_n متجاورتان

$s_n = \frac{n+1}{n}$, $t_n = \frac{n}{n+1}$

نفرض تابع

$f(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{x-x-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0$

التابع متناقص تماماً

المتتالية متناقصة تماماً

$t_{n+1} - t_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$

$(n+1) \quad (n+2)$

$= \frac{n^2+n+n+1-(n^2+2n)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$

$\Leftarrow$ المتتالية (t_n) متزايدة تماماً.

$\lim (s_n - t_n)$

$\lim \left[\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1}\right]$

$= \lim \frac{n^2+2n+1-n^2}{n(n+1)} = 0$

طريقة ثانية للخطوة الأخيرة بدل

$\lim (s_n - t_n)$

يمكن الحل بنفس الطريقة

$\lim s_n = 1$

$\lim t_n = 1$

مبرهنات

[1] متتاليتان متجاورتان $\Leftarrow$ متقاربتان

[2] متتاليتان متجاورتان $\Leftarrow$ لهما نفس النهاية

مثال: لدينا المتتاليتان المعرفتان بالشكل

$$t_{n+1} = \frac{t_n+2S_n}{3} \; ; \; t_0 = 1$$

$$S_{n+1} = \frac{t_n+3S_n}{4} \; ; \; S_0 = 12$$

[1] أثبت أن المتتالية $(S_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية وأحسب أساسها ثم نهايتها

$$\frac{S_{n+1}-t_{n+1}}{S_n-t_n} = \frac{\frac{t_n+3S_n}{(3)4} - \frac{t_n+2S_n}{3(4)}}{S_n-t_n}$$

$$= \frac{\frac{3t_n+9S_n-4t_n-8S_n}{12}}{S_n-t_n}$$

$$= \frac{-t_n+S_n}{12(S_n-t_n)} = \frac{1}{2} = const$$

$\Leftarrow (S_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية وأساسها $q=\frac{1}{12}$

حساب النهاية: لدينا $-1 < q < 1$

$$-1 < \frac{1}{12} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(S_n-t_n)_{n\geq 0} = 0$$

[2] أثبت أن المتتاليتان t_n ، S_n متجاورتان

ندرس الاتجاه

$$S_{n+1} - S_n = \frac{t_n+3S_n}{4} - S_n$$

$$= \frac{t_n+3S_n-4S_n}{4}$$

$$= \frac{t_n-S_n}{4} < 0$$

لأن $q>0$ موجب ولدينا $t_0 - S_0$

الحدود سالبة $1-12=-11 \Rightarrow$

فالمتتالية متناقصة

$$t_{n+1} - t_n = \frac{t_n+2S_n}{3} - t_n$$

$$= \frac{t_n+2S_n-3t_n}{3}$$

$$= \frac{-2t_n+2S_n}{3}$$

$$= \frac{2(-t_n+S_n)}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(-t_n+S_n) > 0$$

لأن $q>0$ موجب

لدينا $-t_0 + S_0 = -1+12 = 11 > 0$

فالحدود موجبة والمتتالية متزايدة

من الطلب السابق:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-t_n)_{n\geq 0} = 0$$

فالمتتاليتان متجاورتان.

[3] أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي ثابتة

$$U_n = 3t_n + 8S_n$$

$$U_{n+1} = U_n$$

$$3t_{n+1} + 8S_{n+1} = 3t_n + 8S_n$$

$$\cancel{3}\left[\frac{t_n+2S_n}{\cancel{3}}\right] + \cancel{8}^{2}\left[\frac{t_n+3S_n}{\cancel{4}}\right] = 3t_n+8S_n$$

$$t_n+2S_n+2t_n+6S_n = 3t_n+8S_n$$

$$3t_n+8S_n = 3t_n+8S_n$$

محققة.

$\boxed{4}$ استنتج "أوجد" نهاية t_n ، S_n المتتالية

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 3\lim_{n\to\infty} t_n + 8\lim_{n\to\infty} S_n$$

$$99 = 3\,\ast + 8\,\ast$$

$$99 = 11\,\ast$$

$$\ast = \frac{99}{11} = 9$$

نشاط (1) ص 135

كيف نمثل هندسياً متتالية من رسم

التدريجي

$u_{n+1} = f(u_n)$

ونوجد النهاية اعتماداً على المنحنى

الأول $y = x$ والخط البياني لتابع f

مرسوم في معلم متجانس

الخطوات:

$\boxed{1}$ نحدد العدد u_0 على محور الفواصل

$\boxed{2}$ نسقط على الخط البياني

$\boxed{3}$ نسقط على محور التراتيب فنستنتج u_1

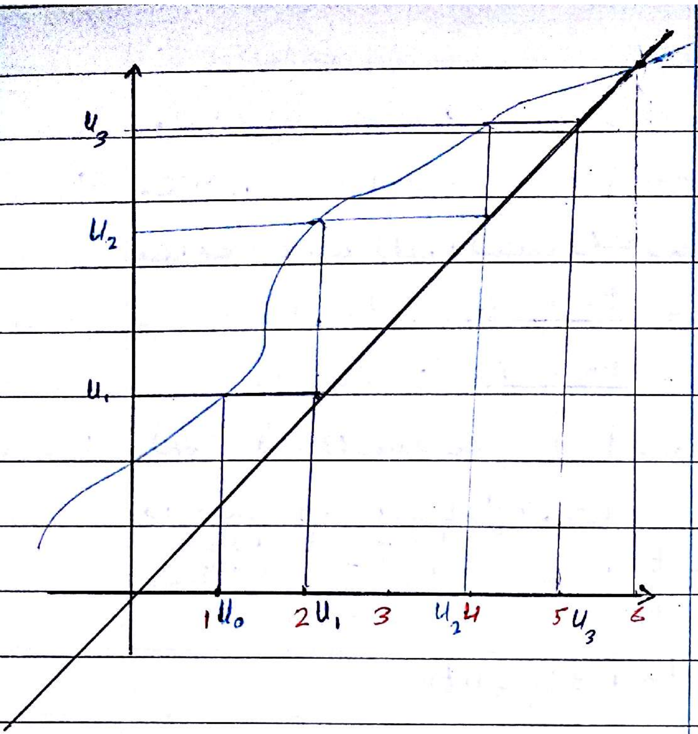
$\boxed{4}$ نسقط من u_1 على المنحني الأول

$\boxed{5}$ نسقط على محور الفواصل ونستنتج u_1

وهكذا..

وتكون نهاية المتتالية (u_n) هي نقطة

تقاطع المنحني مع الخط البياني



من الحدود المتتالية متزايدة

من النهاية متقاربة $\lim_{n\to\infty} u_n = 6$

كيف نوجد النهاية ؟!

من نقطة التقاطع نمد بعدين نسقطها

على محور الفواصل ونستنتج النقطة

أما إذا طلع عند السهم ومشينا

النهاية تكون لانهائية ∞

والمتتالية متباعدة

تدريب ص 132

3

$$y_n = x_n + \frac{1}{4n}$$

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

ندرس الاطراد

$$x_{n+1} - x_n =$$

$$\cancel{\frac{1}{n+2}} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \left[\frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}}\right]$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{\underset{(2)}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{2}{2(n+1)} = \frac{1}{\underset{(2n+2)}{2n+1}} - \frac{1}{\underset{(2n+1)}{2n+2}}$$

$$= \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

(X_n) متزايدة تماماً

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)} - \left[x_n + \frac{1}{4n}\right]$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{-1}{4n(n+1)(2n+1)} < 0$$

y_n متناقصة

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = \cancel{x_n} - \cancel{x_n} - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{4n} = 0$$

$\Rightarrow$ متجاورتان

Finish ♡

التابع اللوغاريتمي

• تعريف اللوغاريتم لعدد ما بالنسبة لأساس ما:
هو الأس المرفوع على الأساس والذي سينتج ذلك العدد بشكل عام:

$$X = b^y \iff y = \log_{(b)}(X)$$

★ مثال: $1000 = 10^3$

$3 = \log_{(10)}(1000)$

$(\text{الأساس})^{\text{الناتج}}$ = مضمون اللوغاريتم

★ مثال: أوجد مايلي:

$\log_{(2)}(8) = 3 \iff 2^3 = 8$

$\log_{(2)}(32) = 5 \iff 2^5 = 32$

- اللوغاريتم العشري:
هو لوغاريتم عدد ما بالنسبة للأساس عشرة

$\log_{(10)}(100) = 2 \Rightarrow 10^2 = 100$

ونرمز اختصاراً «log»

- اللوغاريتم الطبيعي النيبري:
هو لوغاريتم عدد ما بالنسبة للأساس e

$e \simeq 2.7$

$\log_e$ = عدد ما

ونرمز له ln(عدد)

★ خواص اللوغاريتم:

1. $\ln(1) = 0$ لأنه $e^0 = 1$
2. $\ln(+\infty) = +\infty$
3. $\ln(-\infty)$ = لا يوجد
4. $\ln(0) = -\infty$
5. $\ln(a^b) = b\ln a$
6. $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$
7. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
8. $\ln(e) = 1$
9. $e^{\ln \star} = \star$
10. $\ln e^{\star} = \star$
11. $\ln x = \ln y \iff x = y$
12. $a < b \iff \ln a < \ln b$
13. $a > b \iff \ln a > \ln b$

★ جدول اللوغاريتمات الشهيرة:

1. $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -0.7$
2. $\ln(1) = 0$
3. $\ln(2) = 0.7$
4. $\ln(e) = 1$
5. $\ln(3) = 1,1$
6. $\ln(4) = 1,4$
7. $\ln(5) = 1,5$

نتيجة: الأعداد بين $(0,1)$ لوغاريتماتها سالبة يعني الأعداد بين المجال $]0,1[$ الأعداد أكبر من الواحد لوغاريتماتها موجبة $]1,+\infty[$

★ مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي:

معرف عندما المضمون موجب تماماً أي أكبر تماماً من الصفر

أي: $f(x) = \ln\star$ معرف عندما $\star > 0$

★ مثال: أوجد مجموعة تعريف التوابع التالية:

① $f(x) = \ln x$

معرف عندما $x > 0$ ⇐ $D =]0, +\infty[$

② $f(x) = \ln(x+2)$

معرف عندما: $x + 2 > 0$

$x > -2$

$\Rightarrow D =]-2, +\infty[$

$\frac{1}{e^2} \simeq 0.1$

$\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$

$e \simeq 2.7$

$e^2 \simeq 7.5$

$\sqrt{e} \simeq 1.6$

$\frac{1}{e} \simeq 0.3$

③ $f(x) = \ln(x^2-1)$

معرف عندما $x^2-1>0$ ⇐ ندرس الإشارة:

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
		+	0	−	0	+	
		مقبول		مرفوض		مقبول	

$\Rightarrow D =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

④ $f(x) = \ln(x^2+1)$

معرف عندما $x^2+1>0$ ⇐ لا ينعدم ⇐ $D = R$

⑤ $f(x) = \ln\sqrt{x-1}$

معرف عندما $\sqrt{x-1}>0$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$\Rightarrow D =]1,+\infty[$

★ دراسة التابع $f(x) = \ln(x)$:

التابع مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(0) = -\infty$

⇐ $x=0$ مقارب $// \ y'y$ والخط على يمينه

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

$[\ln(*)]' = \frac{*'}{*}$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

والتابع متزايد تماماً

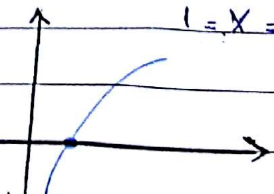
x	0		$+\infty$ يمينا
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$ تحت	↗	$+\infty$ فوق

الرسم:

$x=0 \Rightarrow$ مستقيمة

$y=0 \Rightarrow e^0 = e^{\ln x}$

$1 = x = (1,0)$



★ حل معادلات لوغاريتمية:

نطبق ما يلي:

1. نوجد مجموعة تعريف الطرف الأول D_1
2. نوجد مجموعة تعريف الطرف الثاني D_2
3. نقاطع D_1 و D_2 وهو شرط الحل
4. نشيل اللوغاريتم من الطرفين ونحل المعادلة
5. نرفض الحلول التي لا تنتمي لشرط الحل

مثال: حل المعادلة: $\ln(x-1) = \ln(2x+10)$ ؟

$D_1 =]1,+\infty[\qquad D_2 =]-5,+\infty[$

$-5 \quad 0 \quad 1$

$D_1 \cap D_2 =]1,+\infty[$ شرط الحل هو

$x-1 = 2x+10$

$-11 = x$

$\Rightarrow S = \emptyset$

أو مستحيلة الحل

مثال 2: حل المعادلة: $\ln(x^2-4) = \ln(x+1)$ ؟

$D_1 =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$D_2 =]-1,+\infty[$

⇐ شرط الحل: $]2,+\infty[$

$-2 \quad -1 \quad 2$

⇐ $x^2-4 = x+1$ ⇐ $x^2-x-5=0$

$\Delta = b^2-4ac$ ⇐ سالب = $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ مرفوض

$x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 2.7$ مقبول

- لا يجوز إجراء أي عملية قبل إيجاد مجموعة التعريف
- اللوغاريتم دائماً مجال مفتوح عند العدد ♥
- إذا كان مضمون اللوغاريتم موجب فهو معرف على R. ♥
- لما يكون عنا كسر بسطه عدد ⇐ لا ينعدم ♥
- ينعدم كسر عندما ينعدم بسطه ♥

بالاتقان طرق صاروخية لشرط الحل :

إذا كان طرف درجة أولى وطرف درجة ثانية :

مباشرة شرط الحل مجموعة تعريف الدرجة الأولى

★ حل المتراجحات اللوغاريتمية : توقع 2020

1] نوجد مجموعة تعريف الطرف الأول D_1

2] نوجد مجموعة تعريف الطرف الثاني D_2

3] نوجد شرط الحل $D_1 \cap D_2$

4] نشيل اللوغاريتم من الطرفين ونحل المتراجحة الناتجة « منطبق الخاصية 11 »

5] نقاطع الحل الناتج مع شرط الحل فنستنتج الحلول

مثال : حل المتراجحة : $\ln(x^2-4) \le \ln(-3x)$

$D_1 =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ $\quad D_2 =]-\infty,0[$

شرط الحل $]-\infty,-2[$

$-2 \quad 0 \quad 2$

$x^2-4 \le -3x$

1] ننقل جميع الحدود لطرف واحد

$x^2+3x-4 \le 0$

2] ندرس الإشارة [ونصفر ونعمل جدول]

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

إما $x=-4$ أو $x=1$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

تحقق

⇐ حل المتراجحة هو ⇐ $[-4,1]$

$[-4,1] \cup]-\infty,-2[$

$= [-4,-2[$

طريقة صاروخية للمتراجحة اللوغاريتمية : شرط الحل هو نفسه مجموعة تعريف الطرف الصغير (يلي ورا رمز المتراجحة) ♥

مثال : حل المعادلة :

$\ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

$D_1 =]\frac{3}{2},+\infty[$ $\quad D_2 =]-\infty,6[\cap]0,+\infty[$

$=]0,6[$

$]\frac{3}{2},6[$

$\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \ln x^{\frac{1}{2}}$

$\ln\sqrt{2x-3} = \ln\frac{6-x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{2x-3} = \frac{6-x}{\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{2x-3} = 6-x$

$\sqrt{2x^2-3x} = 6-x$

نربع $\Rightarrow 2x^2-3x\,(6-x)^2$

مثال : حل المتراجحة : $\ln(x^2-3x) \ge 2\ln(6-x)$

شرط الحل : $]-\infty,6[$

$\ln x^2-3x \ge \ln(6-x)^2$

$x^2-3x \ge (6-x)^2$

كمل المتراجحة

نشاط صفحة 154 :

1] ① $\ln(x^2)$

$x^2>0$ ⇐ ندرس الإشارة

$x^2=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$+$	0	$+$	

$R/\{0\}$ ⇐

② $\ln(1-x)$

$1-x>0$

$x>1$

$D=]-\infty,1[$

③ $\ln(x-3)$

$x-3>0$

$D=]3,+\infty$ ⇐ $x>3$

إذا كان مضمون اللوغاريتم موجب فإن مجموعة تعريفه $\mathbb{R}$ ماعدا القيم التي تعدمه

④ $\frac{1}{x}\ln(x+1)$

$D_2 = 1+x>0$

$x>1$

$]-1,+\infty[$

$D_1=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$D=D_1\cap D_2=]-1,0[\cup]0,+\infty[$

⑤ $\frac{1}{\ln x}$

معرف عندما $\ln x\neq 0$

$\Leftarrow e^{\ln x}\neq e^{0}\Rightarrow x\neq 1$

و $x>0$

$\Rightarrow D=]0,1[\cup]1,+\infty[$

⑥ $\ln(x^2+4x)$

$x^2+4x>0$

ندرس الإشارة $x(x+4)=0$

إما $x=0$ أو $x=-4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	
		✓				✓	

$D_f=]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

⑦ $\ln(x^2-3x+2)$

$x^2-3x+2>0$

ندرس الإشارة $(x-2)(x-1)=0$

$D=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

⑧ $\ln|x+1|-\ln|x-1|$

$D_1=\mathbb{R}/\{-1\}$ $\qquad$ $D_2=\mathbb{R}/\{1\}$

$\Rightarrow D=D_1\cap D_2=\mathbb{R}/\{-1,+1\}$

⑨ $\ln\left[\frac{x-3}{2-x}\right]$

$\frac{x-3}{2-x}$

	$-\infty$		$+2$		3		$+\infty$
		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$\boxed{2}$ $f(x)=2+\ln x$

معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$ — معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}\Leftarrow]0,+\infty[$

$\Leftarrow f(x)$ معرف واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

لإيجاد معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x=1$

$y=2$. نقطة المماس: $(1,2)$

$f'(x)=1\Rightarrow y-2=x-1\Rightarrow y=x+1$

وهي معادلة المماس

$\boxed{3}$ $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

اشتقاقي على $]0,+\infty[$ — اشتقاقي على $\mathbb{R}/\{0\}$

① $\Rightarrow \mathbb{R}/\{0\}\cap]0,+\infty[$

$=]0,+\infty[$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$

② التابع مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

* دراسة الإطراد تبدأ من خطوة المشتق لننطلق إلى التغيرات:

$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$

$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=0$

$\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$

$x^2=x$

$\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0$

إما $x=0\notin D$

أو $x=1\in D$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

$f(1)=1+0=1$

قيمة محلية صغرى

قاعدة أوبيتال: نهاية كسر = نهاية $\frac{\text{مشتق البسط}}{\text{مشتق المقام}}$

③ ~~$f(x)\geq 1$ ...~~ نلاحظ أن

$f(1)=1$ قيمة حلية صغرى $f(x)\geq 1$

إذا كانت x من I

④ ① $\ln(2x)=\ln(x^2-1)$

شرط الحل: $]0,+\infty[$

$2x=x^2-1 \Rightarrow x^2-2x-1=0$

$\Delta=4+4=8=2\sqrt{2}$

$x_1=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ مقبول

$x_2=1-\sqrt{2}$ مرفوض

② $\ln(-3x)=\ln(x^2-4)$

شرط الحل: $]-\infty,0[$

$-3x=x^2-4$

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

إما $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ مقبول

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$ مرفوض

③ $\ln(x-2)=\ln(2)$

شرط الحل: $]2,+\infty[$

$x-2=2 \Rightarrow x=4$ مقبول

④ $\ln(x-2)=\ln(x^2-2)$

شرط الحل: $]2,+\infty[$

$x-2=x^2-2$

$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$

إما $x=0$ ، أو $x=1$

لا توجد حلول للمعادلة ϕ

★ قواعد النهايات:

1. $\ln(+\infty)=+\infty$
2. $\ln(-\infty)=$ لا يوجد
3. $\ln(0)=-\infty$
4. $\ln(1)=0$
5. $\ln(e)=1$
6. $\lim_{x\to 0^+}[x\ln x]=0$
7. $\lim_{\star\to\infty}\frac{\ln\star}{\star}=0$

• مثال: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

8. $\lim_{\star\to+\infty}\frac{\star}{\ln\star}=+\infty$

• مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

9. $\lim\frac{\ln(1+\star)}{\star}=1$

• مثال: $\lim\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

10. $\lim_{\star\to 0}\frac{\star}{\ln(1+\star)}=1$
11. $\lim_{\star\to 1}\frac{\star-1}{\ln\star}=1$ ← نتيجة من 10

• مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=1$

12. $\lim_{\star\to 1}\frac{\ln\star}{\star-1}=1$ ← نتيجة من 9

• مثال: احسب $\lim\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$ ؟

$=+\infty-\infty=$ عدم تعيين

$\lim\frac{1}{x}\left[1+\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right]=\lim\frac{1}{x}[1+\ln x]$

$=+\infty[1+0]=+\infty$

• مثال: $\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$\lim_{x\to\infty}\left[x.\frac{1}{x}\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$=1.1=1$

لأن $\lim_{\star\to 0}\frac{\ln(1+\star)}{\star}=1$

وظيفة ص157 + ص158 + ص162 + ص165

★ حل المعادلات ومن الشكل [ln★ = عدد]

$e^{\ln ★} = e^{عدد}$

$★ = e^{عدد}$

مثال: $\ln x = 5$ أوجد x ؟؟

$e^{\ln x} = e^5$

$x = e^5$

مثال: $\ln_e(1-2x) = 5_e$

$1 - 2x = e^5$

$-2x = e^5 - 1$

$x = \frac{e^5 - 1}{-2}$

★ تدرب صفحة 154:

5 ① $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$

$]2, +\infty[$

② $\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

$]1, 1+\sqrt{2}[$

③ $\ln(1+\frac{2}{x}) \geq \ln x$

$S =]0, 2]$

④ $\ln x \leq \ln(x^2-2x)$

$S = [3, +\infty[$

★ إثبات متباينة عن طريق دراسة الاطراد: (توقع 2020)

نطبق ما يلي:

1 ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد بحيث أن يكون طرف الحدود أكبر من الصفر

2 نفرض تابع

3 ندرس الاطراد

4 نحصل على قيمة صغرى نعتمد عليها

5 نحصل على الشكل:

$-$	0	$+$	
↘	□	↗	

مثال:

$\ln x < 2\sqrt{x}$ أياً كانت $x > 0$:

$0 < 2\sqrt{x} - \ln x$

نفرض $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$

$f'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0$

$x = \sqrt{x}$

نربع $\Rightarrow x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

إما $x = 0 \notin D$

أو $x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

$f(1) = 2$ قيمة صغرى

من الجدول وبما أن $f(x) \geq 2$

$\Rightarrow f(x) > 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{x} - \ln x > 0$

$\Rightarrow 2\sqrt{x} > \ln x$

★ تمرينات ومسائل صفحة 172:

4 $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$

شرط الجذرين المختلفين $\Delta > 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(\ln(m+1))$

$= 4 - 4\ln(m+1)$

$a = \ln 50$ ① **2**

$= \ln(2 \times 25)$

$= \ln 2 + \ln 25 = \ln 5^2 + \ln 2$

$= 2\ln 5 + \ln 2$

$\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$ **3**

$= \ln(4-3) = \ln 1 = 0$

$x = \ln 5$ ① **4**

$y = \ln 2 + \ln 3$

$y = \ln(2 \cdot 3) = \ln 6 \Rightarrow y > x$

$x = 2\ln 3$ ②

$y = 3\ln 2$

$2\ln 3 > 3\ln 2$

$a = \ln 567 - \ln 72 - \ln\frac{7}{8} + \ln\frac{1}{27}$ **5**

$= \ln\frac{567}{72} + \ln\frac{\frac{1}{27}}{\frac{7}{8}}$

$= \ln\left[\frac{567}{72} \times \frac{8}{7 \times 27}\right]$

$= \ln\left[\frac{3^4 \times 7}{72} \times \frac{8}{3^3 \times 7}\right]$

$= \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$

① $\ln(1+x) = \ln x + \ln(1+\frac{1}{x})$ **6**

$\ell_2 = \ln[x \cdot (1+\frac{1}{x})]$

$= \ln(x+1) = \ell_1$

② $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln[1+\frac{1}{x^2}]$

$\ell_2 = \ln[x^2 \cdot (1+\frac{1}{x^2})]$

$= \ln(x^2+1) = \ell_1$

$\ln(x^2-x) = \ln x + \ln(x-1)$ ① **7**

مجال الحل: $]1,+\infty[$

$\ln(x^2-x) = \ln[x(x-1)]$

$\ln(x^2-x) = \ln(x^2-x)$

$x^2 - x = x^2 - x \Rightarrow 0 = 0$

المتراجحة: $4 - 4\ln(m+1) > 0$

شرط الحل: $]-1,+\infty[$ كذلك لنا أحقية:

$4 > 4\ln(m+1)$

$1 > \ln(m+1) \Rightarrow e^1 > e^{\ln(m+1)}$

$e > m+1 \Rightarrow e-1 > m$

$m \in]-\infty, e-1[$

$\Leftarrow$ مجموعة الحلول:

$m \in]-1, e-1[$

أو $-1 < m < e-1$

$U_n = \ln(\frac{n+1}{n})$ **5**

$\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{n+1}{n}) =$ ①

$\ln \lim_{x\to+\infty} [\frac{n+1}{n}]$

$\ln(1) = 0$

$S_n = \ln(n+1)$ ②

$S_n = \ln[2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}]$

$= \ln(n+1)$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$

تمارين صفحة 157:

$\ln 3 + \ln\frac{1}{3}$ ① **1**

$\ln 3 + \ln 1 - \ln 3$

$\ln 1 = 0$

$\ln\frac{1}{16}$ ②

$= \ln 1 - \ln 16 = 0 - \ln 2^4$

$= -4\ln 2$

$\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$ ③

$= \frac{1}{2}\ln(2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\ln 2$

كل معادلة y درجة أولى و x درجة ثانية أو العكس هي معادلة قطع مكافئ

- تابع المقلوب هو قطع زائد

محقق دوماً ⇐ مجموعة الحلول هي $]1,+\infty[$

$\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$ (2)

شرط الحل : $]1,+\infty[$

$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-1}{x+2}$

$0 = 0 \Rightarrow$ محقق دوماً

⇐ مجموعة الحلول $]1,+\infty[$

$\boxed{8}$ (1) $2^n \leq 100$

$n=0 \Rightarrow 2^0 = 1 \leq 100$

$n=1 \Rightarrow 2^1 = 2 \leq 100$, $n=2 \Rightarrow 2^2 = 4 \leq 100$

$n=3 \Rightarrow 2^3 = 8 \leq 100$

$n=4 \Rightarrow 2^4 = \cancel{8}16 \leq 100$

$n=5 \Rightarrow 2^5 = 32 \leq 100$

$n=6 \Rightarrow 2^6 = 64 \leq 100$

$n=7 \Rightarrow 2^7 = 128 \leq 100$

ليست أصغر أو تساوي 100 ⇐ $n \in [0,6]$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$

$\frac{1^n}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 3^n \geq 100$

$n=0, n=1, n=2, n=3, n=4$

لا تحقق شرط ★ ⇐ $n \in [5,+\infty[$

(3) $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$n=0 \Rightarrow 0.2 \geq 1$ ✗

$n=1 \Rightarrow 0.2 \geq 0.4$ ✗

$n=2 \Rightarrow 0.2 \geq \frac{4}{25}$ ✓

$\Rightarrow n \in [2,+\infty[$

$\boxed{10}$ (1) $\ln x = \ln(y+1)$

$x = y+1$

$\Rightarrow y = x-1$

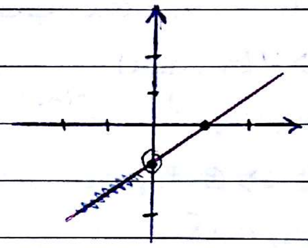
$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

$y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

حيث $x \in]0,+\infty[$, $y \in]-1,+\infty[$

غالصين

من المعادلة فوق



(2) $\ln y = 2\ln x$

$\ln y = \ln x^2$

$y = x^2$ = قطع مكافئ

$x=0 \Rightarrow y=0$ $(0,0)$

$x=1 \Rightarrow y=1$ $(1,1)$

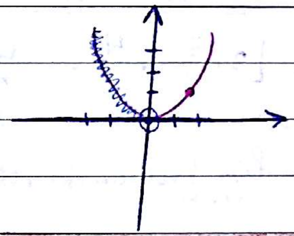
$x=-1 \Rightarrow y=1$ $(-1,1)$

$x=2 \Rightarrow y=4$ $(2,4)$

$x \in]0,+\infty[$, $y \in]0,+\infty[$

يمين

شرق



(3) $\ln x = -\ln y$

$\ln x = \ln y^{-1}$

$\ln x = \ln \frac{1}{y}$

$= \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

قطع زائد

$x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (1,1)$

$x=2 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow (2,\frac{1}{2})$

$x=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (-1,-1)$

$x=-2 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow (-2,-\frac{1}{2})$

$x \in]0,+\infty[$

$y \in]0,+\infty[$

(4) $f(x)=x+x\ln(1+\frac{1}{x})$

$D=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty-\infty\ \ln(1+0)$

$= -\infty-\infty\ \ln(1) = \infty(\infty.0) =$ ع.ت

$\Rightarrow \lim [x+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}] = -\infty$

بنفس الطريقة عند $+\infty$ يكون الجواب $+\infty$

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim[x+x\ln(\frac{x+1}{x})]$

$=0+0.\infty=0$

$x[\ln(x+1)-\ln x]$

$x\ln(x+1)-x\ln x$

$\lim f(x) = -1+[-1.\ln(1-1)]$

$=-1[-1.-\infty] = -1+\infty=+\infty$

(5) $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{0^+}-\ln(0) = +\infty-(-\infty)=+\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty}-\ln(+\infty)=0-\infty=-\infty$

(6) $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{0}{1}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x[\ln x]}{x(1+\frac{1}{x})} = +\infty$

(7) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

$]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{1}{-\infty}=0$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{0^+}=+\infty$

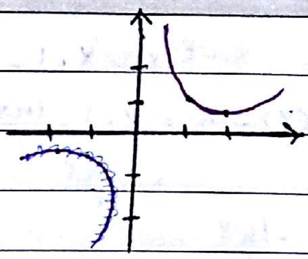
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty}=0$

(8) $f(x)=x(1-\ln x)$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0} f(x) = 0(1-(-\infty)) =$ عدم تعيين

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-\infty) = -\infty$



« جدول التغيرات »

تدرب صفحة 165 :

[1] (1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x.x} = 0.\frac{1}{\infty}=0$

(2) $\lim_{x\to0}[(x^2-x)\ln x]$

$=\lim[x(x-1)\ln x] = (0-1)\cdot0=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$=\lim\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}^2} = \lim\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.\infty$

$=+\infty$

[2] (1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

(2) $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim\frac{0-\ln 0}{0^+}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{+\infty-\infty}{+\infty}=$ عدم تعيين

$\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{\ln x}{x})}{x} = 1-0=1$

(3) $f(x)=x-\ln x$

$]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0}f(x)=0-\ln 0=+\infty$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty-\infty=$ عدم تعيين

$\Rightarrow \lim x[1-\frac{\ln x}{x}]=+\infty[1-0]=+\infty$

3

$$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$f(x) - y_\Delta = x + 1 - \frac{\ln x}{x} - x - 1$$

$$= \frac{-\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln x}{x} = 0$$

جدول الوضع النسبي:

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$		$+$		$-$	
الوضع النسبي		(c) فوق d		(c) تحت d	

4 ①

$$f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

②

$$f(x) = \ln\left[\frac{x-1}{x+1}\right]$$

مسودة ← $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

تمرينات ومسائل ص 172 :

6

$$f(x) = x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$y = x - 1$$

$$f(x) - y_\Delta = x - x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - (x - 1)$$

$$= -x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1$$

$$\lim f(x) - y_\Delta = \lim\left[\frac{-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$= -1 + 1 = 0$$

← $y = x - 1$ مقارب مائل

7 وزاري 2020

$$\lim \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2[1 - \ln x]}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x[1 - \ln x] = \lim_{x \to 0^+} [x - x\ln x] = 0$$

← اشتقاقي عند الصفر

⑨

$$f(x) = \ln\left[\frac{x+1}{x-4}\right]$$

$$]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln \frac{x+1}{x-4} = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \ln\left[\frac{-1+1}{-1-4}\right] = \ln\left(\frac{0}{-5}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \ln \frac{x+1}{x-4} = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim f(x) = \lim \ln\left[\frac{x+1}{x-4}\right] =$$

$$= \ln\left(\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x-4}\right) = 0$$

⑩

$$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$$

$$D =]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{1}[\ln 1 - 1] = \ln(0) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty}(\ln +\infty - 1) = 0(+\infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right] = 0 - 0 = 0$$

⑪

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$$

$$]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim f(x) = \left[\frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right] = +\infty[1 + 0] = +\infty$$

⑫

$$f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$$

$$]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 + 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \infty - \infty =$$ عدم تعيين

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x+1}{x}$$

$$= +\infty + \ln\left(\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x}\right) = +\infty$$

- كل معادلة درجة أولى للمجهولين x و y هي معادلة مستقيم وتسمى معادلة خطية ترسم بعرض نقطتين ♥

$\boxed{8}$ ① $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

التابع مستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\ln(0)}{0} = -\infty$

$x=0$ مقارب $// yy'$ والخط c على يمينه

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقارب $// xx'$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x)=0$

$\Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$

$f(e) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية آنية

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

②

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

③

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

④

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$		$+\infty$

⑤

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

⑥

	0		1		3		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	
	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$6\ln 3 - 7$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{9}$ ② $f(x) = \ln \frac{x+1}{\ln x}$

$I =]1,+\infty[$

$D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

وهو اشتقاقي على هذا المجال

$f(x) = \ln(x+1) - \ln(\ln x)$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x\ln x}$

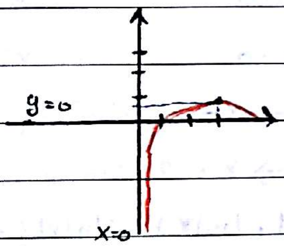
① $f(x) = \ln[\ln(\ln x)]$

$f'(x) = \frac{[\ln(\ln x)]'}{\ln(\ln x)}$

$= \frac{\frac{[\ln x]'}{\ln x}}{\ln(\ln x)} = \frac{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\ln(\ln x)}$

$= \frac{1}{x \ln x \ \ln(\ln x)}$

$\boxed{8}$ رسم التابع ① :



تمرينات ومسائل صفحة 175 :

$\boxed{14}$ ① $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

هام

$D_1 = R \setminus \{2\}$

$=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

$D_2 =]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

$E = D_1 \cap D_2$ مجموعة الحل

$=]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

$\ln[|x^2-4|] = \ln 1$

$|x^2-4| = 1$

إما $x^2-4=1 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$ مقبول

أو $x^2-4=-1 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ مقبول

$$|x|^2 = x^2$$
$$\sqrt{x}^{\,2} = x$$
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$ (2)

$D_1 =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$D_2 =]-4, +\infty[$

$D = D_1 \cap D_2$

$=]-4, 2[\cup]2, +\infty[$

$\ln[|x-2| \cdot (x+4)] = \ln 8$

$|x-2|(x+4) = 8$

$(x-2)(x+4) = 8 \Leftarrow x > 2$ عندما

$x^2 + 4x - 2x - 8 = 8$

$x^2 + 2x - 16 = 0$

وكملها ...

أو $(-x+2)(x+4) = 8$

$-x^2 - 4x + 2x + 8 = 8 \rightarrow x < 2$ عندما

$-x^2 - 2x = 0$

$-x[x+2] = 0$

إما $-x = 0 \Rightarrow x = 0$ مقبول

أو $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$ مقبول

$\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$ (3)

$D_1 =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}, +\infty[$

$D_2 =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$D_3 =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$

$= \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -\frac{3}{2}\}$

$\ln|2x+2| \cdot |x-1| = \ln x^2$

$\ln|2x^2 + x - 3| = \ln x^2$

$|2x^2 + x - 3| = x^2$

إما $2x^2 + x - 3 = x^2$

$x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-3) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

$x_1, x_2 \in D$

أو $-[2x^2 + x - 3] = x^2$

$3x^2 + x - 3 = 0$

$\Delta = 1 - 4(3)(-3) = \sqrt{37}$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{37}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} \in D$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{37}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} \in D$

$x^2 + y^2 = 10$ 15

$\ln x + \ln y = \ln 3$

شرط الدالة $]0, +\infty[$

$x \cdot y = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{y}$ ---- (1)

نعوض في (1) $\Leftarrow$

$(\frac{3}{y})^2 + y^2 = 10$

$\Rightarrow \frac{9+y^4}{y^2} = 10$

$9 + y^4 = 10y^2$

$9 + y^4 - 10y^2 = 0$

نفرض $y^2 = t$

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$(t-9)(t-1) = 0$

إما $t - 9 = 0 \Rightarrow t = 9$

$t = y^2 = 9 \Rightarrow$ إما $y = 3$

أو $y = -3$ مرفوض

أو $t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

$t = y^2 = 1 \Rightarrow$ إما $y = 1$

أو $y = -1$ مرفوض

$x = 3$ نعوض في (3) $y = 1$

$x = 1$ (3) " " $y = 3$

هام جداً

$$2\ln x + \ln y = 7 \qquad ②$$

$$3\ln x - 5\ln y = 4$$

شرط الحل: $x>0 \; , \; y>0$

$$\ln_e (x^2 \cdot y) = 7_e$$

$$x^2 \cdot y = e^7 \; \ldots ③$$

$$\ln x^3 - \ln y^5 = 4$$

$$\Rightarrow \ln_e \frac{x^3}{y^5} = 4_e$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y^5} = e^4 \; \ldots ④$$

من 3 نجد: $y = \frac{e^7}{x^2}$

تتمة 15:

← من ④: $e^4 = \frac{x^3}{\left[\frac{e^7}{x^2}\right]^5}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{\frac{e^{35}}{x^{10}}} = e^4$$

$$\Rightarrow \frac{x^{13}}{e^{35}} = e^4 \Rightarrow x^{13} = e^{39}$$

$$\Rightarrow \left[x^{13}\right]^{\frac{1}{13}} = \left[e^{39}\right]^{\frac{1}{13}}$$

$$x = e^3$$

نعوض في *: $y = \frac{e^7}{e^6} \Rightarrow y = e$

$$\ln x \cdot \ln y = -12 \qquad ③$$

$$\ln(x \cdot y) = 1$$

من المعادلة الثانية نجد: $\boxed{\ln x + \ln y = 1}$ ③

نفرض $\ln x = a$ و $\ln y = b$

نعوض في ① و ③ ← $a + b = 1$

$$a \cdot b = -12$$

$$\Rightarrow a = 4 \; , \; b = -3$$

$$b = 4 \; , \; a = -3$$

$$a = 4 \Rightarrow \ln x = 4 \Rightarrow x = e^4$$

$$b = -3 \Rightarrow \ln y = -3$$

$$\Rightarrow y = e^{-3}$$

أو العكس

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2 \qquad \boxed{17}$$

$$P(-1) = -2 + 5 - 1 - 2 = 0$$

بما أن $P(-1) = 0$ نقسم على $x+1$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 3x - 2 \\ x+1 & \cancel{2x^3} + 5x^2 + x - 2 \\ & \mp \cancel{2x^3} \mp 2x^2 \\ \hline & \cancel{3x^2} + x - 2 \\ & \mp \cancel{3x^2} \mp 3x \\ \hline & -2x - 2 \\ & -2x - 2 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$$

* حل المتراجحة $P(x) \le 0$

$$(x+1)(2x^2 + 3x - 2) \le 0$$

$$(x+1)(2x^2 + 3x - 2) \le 0$$

إما $x = -1$ أو $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

← حلول المتراجحة: $]-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}]$

② $D_1 = R / \{0\}$

$$D_2 =]-\frac{5}{2}, +\infty[$$

$$D_3 =]-\infty, 2[$$

$$\Rightarrow D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]0, 2[$$

$$\ln x^2 + \ln(2x+5) \le \ln(2-x)$$

$$\ln(2x^3 + 5x^2) \le \ln(2-x)$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 5x^2 + x - 2 \le 0$$

$$\frac{*}{\heartsuit} = \left(\frac{\heartsuit}{*}\right)^{-1}$$

$\Rightarrow]-\infty, -2] \cup [1, \frac{1}{2}] \cup]0, 2[$

$\Rightarrow]0, \frac{1}{2}]$

15 بطريقة اوقانية:

المعادلة ②:

$\ln(x.y) = \ln 3$

$x^2 + y^2 = 10$ ...①

$x.y = 3$ ...②

$x^2 + y^2 + 2xy = 10 + 2xy$

① $(x+y)^2 = 10 + 2xy$

② $x.y = 3$

نعوض ② في ① $\Leftarrow$ $(x-y)^2 = 16$

نجذر $\Rightarrow |x+y| = 4$

إما $x+y = 4 \Rightarrow$ إما $x=1, y=3$

أو $y=1, x=3$

أو $x+y=-4 \Rightarrow$ إما $x=-1, y=-3$

مستحيل لأن مضمون اللوغاريتم يجب أن يكون موجب

16 $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

شرط الحل $x > 0$

$\ln x = t$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t-3)(t+1) = 0$

إما $t = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$

أو $t = -1 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$(\ln x)^3 - 2\ln x - 3 \geq 0$

نفرض $\ln x = t$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 3 \geq 0$

نفس الإشارة: $t^2 - 2t - 3 = 0$

إما $t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3$

أو $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
		+	0	−	0	+	

$x \in]-\infty, \frac{1}{e}] \cup [e^3, +\infty[$

$S =]0, \frac{1}{e}] \cup [e^3, +\infty[$

18 ① $f(x) = -f(x)$

الشرط: 1) $\forall (x) \in I \Rightarrow -x \in I$

2) $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = \ln\left[\frac{-x+1}{1+x}\right]$

$= \ln\left[\frac{x+1}{1-x}\right]^{-1} = -\ln\left[\frac{-x+1}{1+x}\right] = -f(x)$

وخرجه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

② $\frac{x+1}{1-x}$ مستمر واشتقاقي على:

$D_1 =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\Leftarrow f(x)$ اشتقاقي على I المحتوى في D_1

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \ln(0) = -\infty$

$x = -1$ مقارب $// yy'$ والخط C على يمينه

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ln\frac{2}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty$

$x = 1$ مقارب $// yy'$ والخط C على ~~يمينه~~ يساره

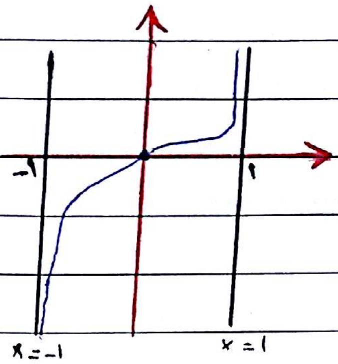
$f(0) = 0$

$f(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x)$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

$f'(x) = \frac{(1-x) + (x+1)}{(x+1)(1-x)} = \frac{2}{(x+1)(1-x)} > 0$

x	-1		0		1
$f'(x)$			+		
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



[19] $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

$]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$x=0$ مقارب // yy' والخط c على يمينه

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$x=1$ مقارب // yy' والخط c على يساره

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$x=1$ مقارب // yy' والخط c على يمينه

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{+\infty}=0$

$y=0$ مقارب // xx' في جوار $+\infty$

$f'(x)=\frac{-[\ln x+\frac{1}{x}(x)]}{x^2\ln^2x}=\frac{-\ln x-1}{x^2\ln^2 x}$

$f'(x)=0\Rightarrow -\ln x-1=0$

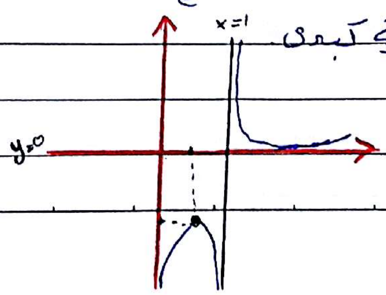
$\ln x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$

$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}}=-e$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

$f(\frac{1}{e})=-e$

قمة محلية كبرى



التابع الأسي:

هو تابع معرف على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^x$

أو $x\to e^x$ ويرمز له في الآلات الحاسبة expx

$e^x=y\Rightarrow \ln y=x$

مثال: $e^0=1\Rightarrow \ln 1=0$

* التابع اللوغاريتمي النيبري تابع تقابله العكسي هو التابع الأسي $y=e^x$ لذلك الخطان البيانيان متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول الذي معادلته $y=x$

مثال: ص184

* صفات التوابع الأسية (خواصها):

[1] مجموعة التعريف: يكون التابع الأسي معرف على مجموعة تعريف الأس.

مثال: $f(x)=e^{\sqrt{x+1}}$

معرف على مجموعة تعريف الأس أي $\sqrt{x+1}$:

$x+1\ge0\Rightarrow x\ge-1$

$\Rightarrow D=[-1,+\infty[$

مثال: $f(x)=e^{\ln(x+1)}$

معرف على مجموعة تعريف الأس أي $\ln(x+1)$:

$x+1>0\Rightarrow x>-1$

$D=]-1,+\infty[$

مثال: $f(x)=e^{x^2+10x+2}$

الأس تابع صحيح $D=\mathbb{R}$

[2] $e^a=e^b\iff a=b$

[3] $e^a>e^b\iff a>b$

⇐ التابع الأسي متزايد تماماً

[4] $e^a<e^b\iff a<b$

[5] $e^{\ln x}=x$

[6] $\ln e^x=x$

[7] $e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$

* حل المعادلات الأسية أو المتباينات:

نطبق ما يلي:

1. نوجد مجموعة التعريف للطرفين
2. نقاطعهما «تقاطع مجموعتي التعريف»
3. نطبق الخواص السابقة
4. بالمتباينة آخر شيء حلول المتباينة نقاطعها مع شرط الحل

مثال

$$e^{\frac{1}{x}} = e^{x+1}$$

التابع الأسي:

هو تابع معرف على R كما يلي:

$f(x) = e^x$

أو $x \to e^x$

ويرمز في الآلات الحاسبة $\exp x$

$e^x = y \Leftrightarrow \ln y = x$

مثال:

$e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$

★ التابع اللوغارتمي النيبري تابع تقابل تقابله العكسي هو التابع الأسي $y = e^x$

لذلك الخطان البيانيان بالنسبة لمنصف الربع الأول الذي معادلته $y = x$

مثال: 184

★ صفات التوابع الأسية [خواصه]:

1 مجموعة التعريف يكون التابع الأسي معرف على مجموعة تعريف الأس.

مثال:

$f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$

معرف على مجموعة تعريف الأس أي $\sqrt{x+1}$

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$D = [-1, +\infty[$

مثال:

$f(x) = e^{\ln(x+1)}$

معرف على مجموعة تعريف الأس

$\ln(x+1)$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$D =]-1, +\infty[$

مثال:

$f(x) = e^{x^2+10x+2}$

$D = R$ الأس تابع صحيح

2 $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

3 $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

التابع الأسي متزايد تماماً

4 $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

5 $e^{\ln ★} = ★$

6 $\ln e^{★} = ★$

7 $e^{-\ln ★} = e^{\ln ★^{-1}} = e^{\ln \frac{1}{★}} = \frac{1}{★}$

حل المعادلات الأسية أو المتراجحات

نطبق ما يلي:

1 نوجد مجموعة التعريف للطرفين

2 نقاطعهما تقاطع مجموعتي التعريف

3 نطبق الخواص السابقة

4 بالمتراجحة نأخذ في حلول المتراجحة تقاطعها مع شرط الحل

مثال: حل المعادلة $e^{\frac{1}{x}} = e^{x+1}$

شرط الحل: $R / \{0\}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = x + 1$

$x^2 + x = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4(1)(-1) = 5$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ مقبول

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ مقبول

مثال : بسِّط ما يلي :

1) $A = e^{2+\ln 8}$

$= e^{2} \cdot \cancel{e}^{\ln 8} = 8e^{2}$

2) $B = \dfrac{e^{2}}{e^{1+\ln 2}}$

$= \dfrac{e^{2}}{e \cdot e^{\ln 2}} = \dfrac{e^{2}}{2e} = \dfrac{e}{2}$

3) $C = e^{2x} \cdot (e^{-x})^{3}$

$e^{2x} \cdot e^{-3x} = e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$

القوى الحقيقية :

1) $a^{x} = e^{x \ln a}$

مثال :

$2^{x} = e^{x \cdot \ln 2}$

مثال :

$5^{x} = e^{x \ln 5}$

2) $\ln a^{x} = x \ln a$

3) $(☆ \cdot ♡)^{n} = ☆^{n} \cdot ♡^{n}$

4) $\dfrac{a^{☆}}{a^{♡}} = a^{☆ - ♡}$

مثال : حل المعادلة

$e^{x^2} = (e^{x})^{3} \cdot e$

شرط الحل : $\mathbb{R}$

$e^{x^2} = e^{3x} \cdot e \Rightarrow e^{x^2} = e^{3x+1}$

$x^{2} = 3x+1$

$x^{2} - 3x - 1 = 0$

ثم حل Δ

$x_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ مقبول ، $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ مقبول

مثال :

$e^{2x+1} < e^{-x+4}$

شرط الحل : $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$

$2x+1 < -x+4$

$3x < 3$

$x < 1$

مجموعة الحل : $S =]-\infty, 1[\cap \mathbb{R}$

$]-\infty, 1[$

مثال :

$e^{3x+1} \geq 2$

شرط الحل : $\mathbb{R}$

نأخذ لوغرتم الطرفين

$\ln e^{3x+1} \geq \ln 2$

$3x+1 \geq \ln 2$

$3x \geq -1 + \ln 2 \rightarrow$

$x \geq \dfrac{-1+\ln 2}{3}$

$S = \left[\dfrac{-1+\ln 2}{3}, +\infty\right[$

8) $e^{0} = 1$

9) $e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b}$

10) $e^{-☆} = \dfrac{1}{e^{☆}}$

11) $(e^{☆})^{♡} = e^{☆ \cdot ♡}$

/ /

لا نستطيع حل معادلة فيها e^{-x} و e^{x} نضرب الطرفين بـ e^{x}

مثال: حل المتراجحة

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 < 0$

شرط الحل R

نعدم المقدار

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

$(e^{x} - 4)(e^{x} - 1) = 0$

إما $e^{x} = 4 \Rightarrow x = \ln 4$

أو $e^{x} = -1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

تحقق

$S =]0, \ln 4[$

مثال: حل المتراجحة

$e^{x} + 4e^{-x} < 5$

$e^{x} + 4e^{-x} - 5 < 0$

نضرب الطرفين بـ e^{x}

$e^{2x} + 4 - 5e^{x} \leq 0$

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 \leq 0$ نرمز

$x \in [0, \ln 4]$

مجموعة الحلول

$S = [0, \ln 4] \cap R$

$= [0, \ln 4]$

$e^{x} \cdot e^{-x} = e^{0} = 1$

دراسة التابع الأسي:

* مبرهنات النهايات (إذا كان بدل x عدد نفراه)

1. $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$
2. $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$
3. $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^{x} - 1} = 1$
6. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{x}}{x} = -1$

مشتق التابع الأسي:

مشتق التابع الأسي x التابع نفسه

أمثلة:

- $f(x) = e^{x}$

  $= e^{x}$

- $f(x) = e^{3x}$

  $= 3e^{3x}$

7. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$

مثال:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{3}} = +\infty$

لأن الأسي أعلى مرتبة

Farah Notebook

التابع الأسي e^x لا ينعدم لأنه موجب دوما

e^x أقوى وأسبق من كثير الحدود ( )

عدد^x $= e^{x \ln \text{عدد}}$ ...... / ...... / ......

186 تدرب

$\boxed{1}$

- $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$

$2 + 3 = 5$

- $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

$e^{\ln 16^{\frac{1}{2}}} + e^{\ln 3}$

$= 16^{\frac{1}{2}} + 3$

$= \sqrt{16} + 3 = 7$

- $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$

$-3 \ln e + e^{\ln 5}$

$-3 + 5 = 2$

- $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$\boxed{2}$

- $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$

$= x - [\ln 2 + \ln e^x]$

$= x - \ln 2 - x = -\ln 2$

$D =]0, +\infty[$

- $B = e^{\ln(x-1) - \ln x} + \frac{1}{x}$

$= e^{\ln\left[\frac{x-1}{x}\right]} + \frac{1}{x}$

$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$

$D =]1, +\infty[$

$\boxed{8}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = 0$

$\boxed{9}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \cdot e^x = 0$

أمثلة: احسب مشتقات التوابع الآتية:

$\boxed{1}$ $f(x) = e^{x^2 - x}$

$f'(x) = (2x-1)(e^{x^2-x})$

$\boxed{2}$ $f(x) = \pi^{x^2 - x}$ $f(x) = e^{(x^2-x)\ln\pi}$

$f'(x) = \pi(2x-1)\, e^{(x^2-x)\ln\pi}$

دراسة تغيرات التابع الأسي:

$\boxed{1}$ نوجد مجموعة التعريف.

$\boxed{2}$ نوجد النهاية عند أطراف مجموعة التعريف والمقاربات

$\boxed{3}$ نوجد المشتق الأول ونقسمه

$\boxed{4}$ ننظم جدول التغيرات ومن ثم نرسم الخط البياني للتابع. متقاربات

مثال: ادرس التابع:

$f(x) = \exp(x) = e^x$

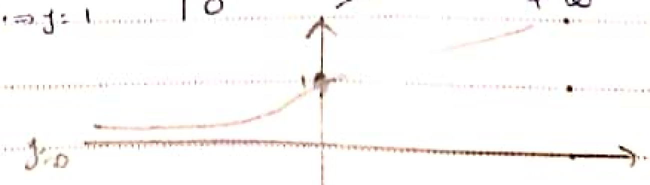
انا مستمر: أمتقاني عم R

مقاربات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = e^x > 0$ التابع متزايد تماما.

نقطة	$-\infty$	$+\infty$
مشتقة		$+$
	0	↗ $+\infty$

$x=0 \Rightarrow y=1$



$y=0$

$e^3 \approx 20$

/ /

$e^x <$ طالب

مستحيلة الحل

3

① $e^{3-x}=1$

$D_f=R$

$3-x=\ln(1)$

$3-x=0$

$x=3\in R$ مقبول

② $e^{2x^2+3}=e^{7x}$

$D=R$

$2x^2-7x+3=0$

$\Delta=49-24=25$

$\sqrt{\Delta}=5$

$x_1=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$

$x_2=\frac{1}{2}$

$[3,\frac{1}{2}]$ مجموعة الحلول

③ $\frac{e^x}{1-2e^x}=5$ $\quad R\setminus\{1,\frac{1}{2}\}$

$e^x=5-10e^x$

$e^x+10e^x=5$

$11e^x=5 \Rightarrow e^x=\frac{5}{11}$

$\ln e^x=\ln\frac{3}{11}$

$x=\ln\frac{3}{11}\in D$

④ $2e^{-x}=\frac{1}{e^x+2}$

$D=R$

$2e^0+4e^{-x}=1$

$2+4e^{-x}=1 \Rightarrow 4e^{-x}=-1$

$4\frac{1}{e^x}=-1 \Rightarrow -e^x=4$

$e^x=-4$ مستحيلة

⑤ $\ln(e^x-2)=3$

$e^x-2=e^3$

$e^x=e^3+2$

$x=\ln(e^3+2)$

⑥ $\ln(2-e^x)\geq 3$

$D=]-\infty,\ln 2[$

$e^{\ln(2-e^x)}\geq e^3$

$2-e^x\geq e^3$

$2-e^3\geq e^x$

سالب

مستحيلة الحل

$]\ln 2,+\infty[$ شرط الحل

⑦ $e^{x^2-2}\leq e^{4-x}$ شرط الحل R

$x^2-2\leq 4-x$

$x^2+x-6\leq 0$ شرط الحل:

$\Delta=25 \rightarrow \sqrt{\Delta}=5$

$x_1=\frac{-1-5}{2}=-3,\quad x_2=\frac{-1+5}{2}=2$

Farah Notebook

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D = [-3, 2]$

⑧ $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$

ندرس الإشارة

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$e^x - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 4$

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in]0, \ln 4[$

⑨ $e^{2x^2-1} \geq 3$

$\ln e^{2x^2-1} \geq \ln 3$

$2x^2 - 1 \geq \ln 3$

$2x^2 - 1 - \ln 3 \geq 0$

ندرس الإشارة

$2x^2 - 1 - \ln 3 = 0$

$2x^2 = 1 + \ln 3$

$x^2 = \frac{1 + \ln 3}{2}$

إما $x = \sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$

أو $x = -\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$		$\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}, +\infty\right[$

$\boxed{4}$

$e^x - \frac{4}{e^x} = \frac{e^{2x} - 4}{e^x}$

$= \frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^x}$

$\frac{e^x + 2}{e^x}$ موجب

$e^x - 2$ هي إشارة A ← مقدار موجب

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

الحل $]-\infty, \ln 2[$

190 تدريب

$\boxed{1}$

① $\ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) = x$

$f_1 = \ln\left[\frac{e^x + 1}{e^{-x} + 1}\right] = \ln\left[\frac{e^x + 1}{\frac{1}{e^x} + 1}\right]$

$\ln \frac{e^x + 1}{\frac{1 + e^x}{e^x}}$

$\ln\left[e^x + 1 \cdot \frac{e^x}{e^x + 1}\right] = \ln e^x = x \ln e$

$\therefore x = f_1$

تكملة مثال دراسة التغيرات :

اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 2.

$y - f(a) = m(x - a)$, $a \to 2$

$f(2) = e^2$

$f(a) = f(2) = e^2$

$y = e^2 = e^2(x-2)$

نفك ونعزل y

وظيفة :

ادرس التابع

$$f(x) = \exp\left[\frac{x}{x^2+1}\right]$$

التابع مستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{\lim \frac{x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

مقارب أفقي y=1 في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

y=1 مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' e^{\frac{x}{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^2+1-2(x)(x)}{(x^2+1)^2} e^{\frac{x}{x^2+1}}$$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} e^{\frac{x}{x^2+1}}$$

موجب

موجب

---

② $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$f_2 = \frac{1}{e^{-x}\left[\frac{1}{e^{-x}}+1\right]} = \frac{e^x}{1+e^x} = f_1$$

$\boxed{4}$

② $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

شرط الحل : $D = R$

نفرض $e^x = t$

$t^2 - t - 6 = 0$

$(t-3)(t+2) = 0$

$t = 3$

$t = -2$

$x = \ln 3$ مقبول

$e^x = -2$ مستحيلة

③ $4e^x - e^x + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4(4)(2) = -31 < 0$

$\Delta < 0$

مستحيلة الحل

④ $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

$D = R$

$t^2 = e^{-2x} \Rightarrow e^{-x} = t$

$t^2 - 7t + 6 = 0$

$(t-6)(t-1) = 0$

$t = 6 \Rightarrow e^{-x} = 6$

$\ln e^{-x} = \ln 6$

$x = -\ln 6$, $x = 0$

كل معادلة فيها e^{x} ، e^{-x} نضرب الطرفين بـ e^{x}
إذا كان متوفر معادلتين نفرضها

23 / 199 / 20 تدريب

تمرينات ومسائل

14

• $\frac{e^{-x}-1}{e^{x}-1} = -2$

$e^{+x}-1=0 \Rightarrow e^{x}=1$

$\Rightarrow x=0$

$D: R\setminus\{0\}$

$-2(e^{x}-1) = e^{-x}-1$

$-2e^{x}+2 = e^{-x}-1$

$-2e^{x}-e^{-x}+3=0$

نضرب الطرفين بـ e^{x}

$-2e^{2x}-1+3e^{x}=0$

$-2t^{2}+3t-1=0$

$\Delta = b^{2}-4ac$

$x_1=0$ مرفوض

$x_2=-\ln 2$ مقبول

• $4e^{2x}+e^{-2x}<5$

$D: R$

$4e^{2x}+e^{-2x}-5<0$

ندرس الإشارة

نضرب الطرفين بـ e^{2x}

$4e^{4x}+1-5e^{2x}=0$

$4t^{2}-5t+1=0$

$\Delta=b^{2}-4ac$

	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
	+	0 −	0	+

$S=[-\ln 2, 0]$

$1-x^{2}$ هي من تحدد الإشارة

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^{2}=0$

$1=x^{2}$

إما $x=1$

أو $x=-1$

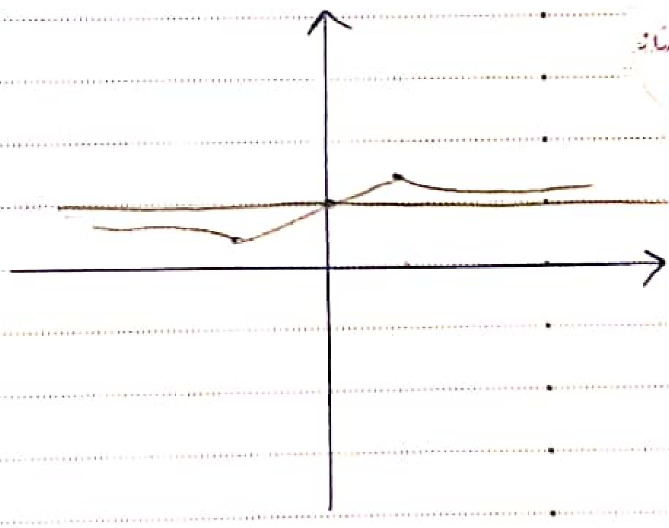
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0 +	0	−
$f(x)$	1 ↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ ↗	$\sqrt{e}$ ↘	1
		0.6	1.5	

للرسم نحتاج نقاط إضافية

$x=0 \Rightarrow f(0)=1 \quad (0,1)$

$y=0$ مستقيمة

متقاربات



/ /

15

① $e^x - \frac{1}{e} e^y = 1$

$2e^x + e^y = 4 + e$

نفرض $e^x = A$

$e^y = B$

① $A - \frac{1}{e} B = 1$

② $2A + B = 4 + e$

نضرب الأولى بـ $[e]$ ونجمع مع $\boxed{2}$:

$eA - B = e$

$2A + B = 4 + e$

$A = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \quad , B = e \Rightarrow x =$

② $e^{4x} e^y = \frac{1}{e^2}$

$x \cdot y = -2$

من ② نبدأ

$y = \frac{-2}{x}$

$e^{4x} e^{\frac{-2}{x}} = e^{-2}$

$e^{4x - \frac{2}{x}} = e^{-2}$

$\frac{4x^2 - 2}{x} = -2$

$\Delta = 36$,

$x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}$

- $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

$e^{3x} \cdot e + 4e^{2x} \cdot e - 5e^x \cdot e = 0$

$ee^x [e^{2x} + 4e^x - 5] = 0$

إما $ee^x = 0$ مستحيل

أو $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$

$(e^x + 5)(e^x - 1) = 0$

$e^x + 5 = 0 \Rightarrow e^x = -5$ مستحيل

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

- $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$

$e^{2x} - 3e^x \cdot e + 2e^2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$a = 1 , b = -3e , c = 2e^2$

$(e^x - 2e)(e^x - e) = 0$ أو

إما $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

أو $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

- $e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^{x+2}$

$e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^x \cdot e^2$

نقسم على e^x:

$e^{2x} - (e^2 - 1)e^x - e^2 = 0$

$\Delta = \ldots$

$\Delta = e^4 + 2e^2 + 5 = 0$

إذا كان عندك كسر بالبسط والمقام تابع أسي نطلع e^x عامل مشترك من البسط والمقام

أمثلة عن النهايات:

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)$

$\lim x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=+\infty(1-\infty)=-\infty$

$\boxed{2}$ $\lim(e^{2x}-e^x)$

$\lim e^x(e^x-1)=+\infty(+\infty)=+\infty$

$\boxed{3}$ $\lim(e^x-\ln x)$

$\lim e^x\left(1-\frac{\ln x}{e^x}\right)=e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\cdot\frac{\ln x}{x}\right)$

$=+\infty$

$\boxed{4}$ $\lim[e^x-x^2]$

$\lim x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)=+\infty(1-0\ldots)$

متجاوزة

$=+\infty$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x^2)$

$\lim x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)=+\infty(0-1)=-\infty$

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x+1}{1+e^x}$

$\frac{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}=\frac{2+0}{0+1}=2$

دراسة تابع وحل المعادلات:

مثال:

$f(x)=e^{-x}+x-2$

$\boxed{1}$ ادرس تغيرات التابع ثم بين أن المعادلة $f(x)=0$ حلاً

$\boxed{2}$ استنتج المقارب المائل وارسمه

هذا الطلب

ثم ارسم الخط البياني للتابع. محلول آخر الورقة

التابع مستمر واشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty-\infty$

$\lim e^{-x}\left[1+\frac{x}{e^{-x}}-\frac{2}{e^{-x}}\right]$

$e^{-(-\infty)}[1+0-0]=e^{+\infty}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0+\infty=+\infty$

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)=0\Rightarrow-e^{-x}+1=0$

$e^{-x}=1\Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

قيمة محلية صغرى $f(0)=-1$

التابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty,0]$ والعدد 0 ينتمي لصورة المجال $]-1,+\infty[$ فالمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$ والعدد 0 ينتمي لصورة هذا المجال $[-1,+\infty[$ ، $0\in f]0,+\infty[=]-1,+\infty[$

فالمعادلة حل وحيد $f(x)=0$

المعادلة حلاً $f(x)=$

$\heartsuit^{*} = e^{*\ln\heartsuit}$

الناتج الأسي لا نعيد ؟
e^{0} ، يعني ،

$\boxed{20}$

$f(x) = e^{\left[\frac{1+x}{1-x}\right]}$

تابع مستمر واشتقاقي على
$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$y = \frac{1}{e}$ مقارب // xx'

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{e} = e^{-\infty} = 0$

نقطة مقاربة $(1,0)$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$

$x=1$ مقارب // $y'y$ والطرفين يسار

$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} e^{\left[\frac{x+1}{1-x}\right]} > 0$

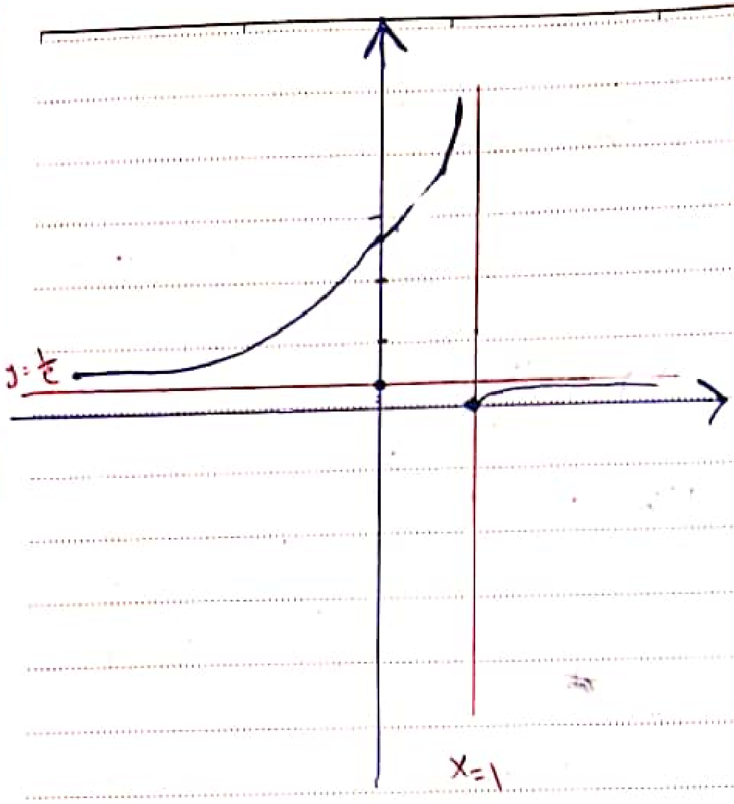
والدالة متزايدة تماماً

x	$-\infty$		1		$+\infty$
		$+$	‖	$+$	
	$\frac{1}{e}$	↗ $+\infty$	‖	0 ↗	$\frac{1}{e}$

نقاط مساعدة :

$x = 0 \Rightarrow f(0) = e \Rightarrow (0, e)$

$y = 0 \Rightarrow 0 = e^{\frac{1+x}{1-x}}$ مستحيل



قواعد مميزة للنهايات :

1. $\lim_{* \to 0} (1+*)^{\frac{1}{*}} = e$

2. $\lim_{* \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{*}\right)^{*} = e$

مثال : برهن أن (تذكر)

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \lim e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$= e$

مثال: برهن أن

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$

$\lim e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$

$= e$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

لذا استخدمنا بالأسس x نتذكر القواعد المميزة

دراسة التوابع من النمط $f(x) = a^x$

مشتقة هو:

لوغارتم الأساس X التابع نفسه

مثال:

$f(x) = 5^x$

$f'(x) = \ln(5)\, 5^x$

$f(x) = e^x$

$\ln e . e^x = e^x$

مثال: ضرب امتحانية، نوع

ادرس تغيرات التابع

$f(x) = x . 2^x$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = x . e^{x \ln 2} = \frac{x \ln 2}{\ln 2}$

$= \frac{1}{\ln 2} . 0 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty . +\infty = +\infty$

$f'(x) = 1 . 2^x + (2^x \ln 2) x =$

$= 2^x + x 2^x \ln 2$

$f'(x) = 0$

$2^x + x 2^x \ln 2 = 0$

$2^x (1 + x \ln 2) = 0$

$2^x = 0$ مستحيلة

$1 + x \ln 2 = 0 \Rightarrow \ln 2 = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{\ln 2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
		0	
	0	$\frac{-1}{e \ln 2}$	$+\infty$

$f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{\ln 2} e^{-\frac{1}{\ln 2} . \ln 2}$

مثال: احسب

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

$x+3 \div (x-1) = 1$, $\frac{-x+1}{4}$

$1 + \frac{4}{x-1}$

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

نفرض $\frac{4}{x-1} = z$

$\Rightarrow \frac{4}{z} = x - 1 \Rightarrow x = \frac{4}{z} + 1$

$x \to +\infty \Rightarrow z \to 0$

نعوض

$\lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{\frac{4}{z}+1}{2}}$

$\lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{2}{z} + \frac{1}{2}}$

$\lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{2}{z}} . (1+z)^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{z \to 0} \left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]^2 . (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$e^2 . [1+0]^{\frac{1}{2}} = e^2$

/ /

199 تدرب

1

① $f(x) = \ln x - e^x$

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$

$\lim x \left[\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x}\right]$

$= +\infty [0 - \infty] = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln(0) e^0 = -\infty - 1 = -\infty$

هام

② $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

تمرين

$D =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1}$

$= \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$

$\lim \frac{e^x \left[1 - \frac{1}{e^x}\right]}{e^x \left[1 + \frac{1}{e^x}\right]} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

2

$f(x) = (3 - x)e^x$

$D = \mathbb{R}$

①

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (3 + \infty) 0$ ع ت

$f(x) = 3e^x - xe^x$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3(0) - (0) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim (3 - x) e^x$

$= [3 - (+\infty)] e^{+\infty} = -\infty$

$f'(x) = -e^x + e^x(3 - x)$

$= -e^x + 3e^x - xe^x$

$f'(x) = 2e^x - xe^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - xe^x = 0$

$e^x(2 - x) = 0$

إما $e^x = 0$ مستحيلة

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = e^2$ قيمة محلية كبرى

②

$f''(x) = e^x(2 - x) + (-1)e^x$

$= 2e^x - xe^x - e^x = e^x - xe^x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x - xe^x = 0$

$e^x [1 - x] = 0$

$x = 1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

Farah Notebook

$$③\ f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$④\ f(x) = 2xe^{-x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2(+\infty)e^{-\infty} = +\infty \cdot 0 \quad ع ت$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{e^x} = 2(0) = 0$$

$$⑤\ f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} \quad ع ت$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = +\infty\left[\frac{1-0}{1-0}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty + 1} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$⑥\ f(x) = e^{2x} - e^x + 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{2(+\infty)} - e^{+\infty} + 3$$

$$= +\infty - \infty \quad ع ت$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x\left[e^x - 1 + \frac{3}{e^x}\right]$$

$$= +\infty\,[+\infty + 0] = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{2(-\infty)} - e^{-\infty} + 3 = 3$$

بما أن $x = 1$ نوجد ترتيب نقطة التماس

$$f(1) = (3-1)e^1 = 2e$$

نقطة التماس $(1, 2e)$

$$m = f'(a) = e(2-1) = e$$

ومنه معادلة المماس

$$y - 2e = e(x - 1)$$

$$y = ex + e$$

رسم التابع والمماس نرسم المماس بأخذ نقاط مساعدة ونقاط التقاطع

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (0, 3)$$

$$y = 0 \Rightarrow (3-x)e^x = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow (3, 0)$$

نرسم المماس

$$x = 0 \Rightarrow y = e \Rightarrow (0, e)$$

$$y = 0 \Rightarrow ex + e = 0$$

$$ex = -e \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow (-1, 0)$$

$\boxed{3}$

$$①\ f(x) = (2 - x)^{\frac{3}{x-1}}$$

$$f(x) = (1 + 1 - x)^{\frac{3}{x-1}}$$

$$= \left[(1 + 1 - x)^{\frac{1}{x-1}}\right]^3$$

$$= \left[(1 + 1 - x)^{\frac{1}{+(-x+1)}}\right]^{-3}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

متجاوزات

Farah Notebook

/ /

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} = +\infty$$

تمرينات ومسائل:

23

① $U_n = \dfrac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3}$$

② $U_n = \dfrac{e^{2n}}{(n+1)^2}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{2n}}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n . e^n}{n^2+2n+1}$$

$$\frac{e^n . e^n}{n.n[1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}]}$$

$$= +\infty \left[\frac{1}{1+0+0}\right] = +\infty$$

③ $U_n = \ln[2+e^{-n}]$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ln[2+e^{-\infty}]$$

$$= \ln[2+0] = \ln 2$$

④ $U_n = e^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = e^{1-\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}} = e$$

⑦ $f(x) = \ln(e^x+2)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln \lim e^x + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(e^{-\infty}+2) = \ln(0+2)$$

$$= \ln 2$$

⑧ $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim e^{-x}\left[\frac{2x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right]$$

$$= \lim e^{-x}\left[2xe^{x} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right]$$

$$= +\infty\,[0-0+1]$$

$$= +\infty$$

⑨ $f(x) = \frac{1}{x}[e^x - 1]$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty$$

⑩ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

205 . 203

/ /

⑤ $U_n = n[e^{\frac{1}{n}} - 1]$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left[\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n^{-1}}\right]$$

$$= \lim \left[\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right] = 1$$

⑥ $U_n = [1 + \frac{1}{n}]^{2n}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left[(1 + \frac{1}{n})^n\right]^2 = e^2$$

معادلات تفاضلية بسيطة:

* تعريف المعادلة التفاضلية

هي معادلة تحوي المشتق y'.

مثال: $y' + 2y = 0$

* حل معادلة تفاضلية

هي إيجاد مجموعة التوابع $f(x)$ التي تحقق

$f'(x) = a f(x)$

* حل المعادلة $y' = ay$

هو $y = Ke^{ax}$

حيث K عدد حقيقي.

مثال: حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$

نتيجة: إذا كان لدينا ثنائية (x_0, y_0)

فيوجد حل وحيد f للمعادلة التفاضلية

$y' = ay$ تحقق $f(x_0) = y_0$

* حل المعادلة $y' = ay + b$

$$y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

مثال: حل المعادلة

$$y' = 2y - 5$$

$$y = Ke^{2x} - \frac{-5}{2}$$

$$y = Ke^{2x} + \frac{5}{2}$$

حيث $K \in \mathbb{R}$

عند حل المعادلة التفاضلية إذا وضع شرط للسؤال فإننا نحسب K

205 تدريب

1

① $y' = 3y$

$y = ke^{3x}$

② $y' + 2y = 0$

$y' = -2y \Rightarrow y = ke^{-2x}$

③ $3y' = 5y$

$y' = \frac{5}{3}y$

$y = ke^{\frac{5}{3}x}$

④ $2y' + 3y = 0$

$2y' = -3y$

$y' = \frac{-3}{2}y$

$y = ke^{-\frac{3}{2}x}$

2 هام جداً هكذا يأتي السؤال

① $y' = 2y \quad , f(0) = 1$

أو يمر بالنقطة $(0,1)$

$y = ke^{2x}$

$1 = ke^{(2)(0)} \Rightarrow k = 1$

$y = e^{2x}$

$f(0) = 1$ نعوض بدل x

② $y' + 5y = 0$

$y' = -5y$

$\Rightarrow y = ke^{-5x}$

نعوض ⇐

$1 = ke^{-5(-2)}$

$1 = ke^{10} \Rightarrow k = \frac{1}{e^{10}}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{e^{10}} e^{-5x}$

③ $y' + 2y = 0$ سؤال دورة

$y' = -2y$

$y = ke^{-2x}$

ميل المماس في النقطة

فاصلتها -2 هـ $\frac{1}{2}$ y'

الفكرة [illegible] تم تعويض بدل $x = -2$

$y' = \frac{1}{2}$

نشتق

$y' = k(-2)e^{-2x}$

نعوض

$\frac{1}{2} = -2ke^{-2(-2)}$

$\frac{1}{2} = -2ke^{4} \Rightarrow$

$k = \frac{1}{-4e^{4}} \Rightarrow y = \frac{e^{-4}}{-4} e^{-2x}$

/ /

ط2

$(-2, \_\_)$

لإيجاد الترتيب نعوض 2- في المعادلة

ونعوض بدل $y' = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + 2y = 0$

$2y = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$

نقطة التماس $(-2, \frac{-1}{4})$

نعوض كالسابق نجد K

تكملة مثال دراسة التابع وحل المعادلات

$\boxed{2}$

$y = x - 2$

مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} + x - 2) - (x - 2) = 0$$

* f صغيرة هي مشتق F كبيرة لديك ونسمي F تابع أصلي

* اذا كان البسط مشتق المقام فإن التابع الأصلي هو $\ln$ القيمة المطلقة للمقام.

التكامل والتوابع الأصلية

* نقول عن التابع F أنه تابع أصلي للتابع f على المجال I اذا وفقط اذا تحقق الشرطان التاليان:

1. F اشتقاقي على I
2. $F'(x) = f(x)$

مثال: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

لذلك نقول أن $F(x) = \frac{1}{x}$ تابع أصلي للتابع f على المجال $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

لأن $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ $\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

مثال: $f(x) = 2$

نلاحظ أن $F(x) = 2x$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على $\mathbb{R}$

وكذلك $F(x) = 2x+1$ تابع أصلي لـ $f(x)$

* نتيجة: يوجد عدد غير منته من التوابع الأصلية ونرمز له:

$G(x) = F(x) + K$ حيث K عدد حقيقي

* نتيجة: المنحني التكاملي هو خط بياني الموافق للتابع الأصلي C_k

$x \mapsto F(x) + K$

ينتج من الخط البياني C للتابع $F(x)$ بانسحاب شعاعه $(0,K)$ أو Kj (التراتيب تزداد)

مثال: من الكتاب صفحة 220

* مبرهنة: اذا كان f تابع مستمر على المجال I فإنه يوجد تابع أصلي F للتابع f على هذا المجال

* مبرهنة: التابع الأصلي الوحيد للتابع $f(x) = \frac{1}{x}$ هو $F(x) = \ln|x|$

مثال: أثبت أن التابع $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ هو تابع أصلي لـ $x \mapsto \sqrt{x}$ ($f(x)=\sqrt{x}$) على المجال $]0,+\infty[$

1. نبرهن أن F اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$
2. نبرهن أن $F'(x) = f(x)$

*البرهان:

$\frac{2}{3}x$ هو تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ وهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$ المحتوى في $\mathbb{R}$ و $\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\Leftarrow$ جداء ضربهما هو اشتقاقي على $]0,+\infty[$

* دائماً التابع الجذري اشتقاقي على مجال مفتوح عند العدد واحياناً يكون اشتقاقي عند ذلك العدد

$$\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{3}(x\sqrt{x})'$$

$$= \frac{2}{3}\left(1.\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}x\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} = f(x)$$

$\boxed{2}$ أ يكون F تابعاً أصلياً للتابع

$x \mapsto \sqrt{x}$

على المجال $[0,+\infty[$

لدينا مشكلة عند العدد (0) لذلك ندرس قابلية الاشتقاق عند ال (0)

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 0}{x - 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\sqrt{x} = \boxed{0}$$

عدد حقيقي

⇐ التابع F قابل للاشتقاق

⇐ قابل للاشتقاق على $[0,+\infty[$

⇐ F تابع أصلي لـ f

* قواعد التابع الأصلي:

$\boxed{1}$ $f(x) = \text{عدد}\ (m) \Rightarrow F(x) = mx + k \ ; k \in \mathbb{R}$

مثال: $f(x) = 5 \Rightarrow F(x) = 5x + k$

ونضيف للأس واحد على الأس الجديد بالمشتق

$\boxed{2}$ $f(x) = g^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)(g')} + k$

مثال: $f(x) = (2x+3)^5$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{(2x+3)^6}{6\,(2)} + k$$

$f(x) = (\sin x)^3$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{(\sin x)^4}{4\cos x} + k$$

$f(x) = x^3$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4(1)} + k$$

$f(x) = x^2$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3(1)} + k$$

$f(x) = x$

$$F(x) = \frac{x^2}{2(1)} + k$$

تمارين صفحة 222

$\boxed{1}$

1. $F(x) = x\cos x$

$f(x) = \cos x - x\sin x$

$F'(x) = 1.\cos x + (-\sin x).x$

$= \cos x - x\sin x = f(x)$

2. $F(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$

$f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

$F(x) = \frac{-1}{x^2 - x} \Rightarrow F'(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

$= f(x)$

تمارين صفحة 227

$\boxed{1}$

1. $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$

$F(x) = 8\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x$

$= 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + k$

2. $f(x) = \frac{1}{x^4}$

$f(x) = x^{-4} \Rightarrow F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} + k$

$\boxed{3}$ $f(x) = \frac{★'}{★} \Rightarrow F(x) = \ln|★| + k$

مثال : $f(x) = \frac{4x^3}{x^4+10}$

$\Rightarrow F(x) = \ln|x^4+10| + k$

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\Rightarrow F(x) = \ln|\sin x| + k$

$f(x) = \frac{-\sin x}{-\cos x}$

$\Rightarrow F(x) = -\ln|\cos x| + k$

$f(x) = \frac{2x}{2(x^2+10)}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+10| + k$

واحد على مشتقة الأس بالتابع نفسه

$\boxed{4}$ $f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + k$

مثال : $f(x) = e^{3x+10}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+10} + k$

$f(x) = e^{x}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{1}e^{x} + k$

8) $f(x) = \frac{3x+1}{2x} = \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x}$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \ln|x| + K$

9) $f(x) = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$

$= 1 + 3 \cdot \frac{1}{x-2}$

$F(x) = x + 3\ln|x-2| + K$

10) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$

$\frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x-1}$ $\quad \frac{7}{2} \frac{2x^{1}}{2(2x-1)}$

$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \ln|2x-1| + K$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{-1}{3}} - 3x^{-2}$

$F(x) = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 3\frac{x^{-1}}{-1} + K$

4) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

$f(x) = (x-1)^{-2}$

$F(x) = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(x-1)} + K$

5) $f(x) = (2x+1)(x^2+x)^{-2}$

$F(x) = \frac{(x^2+x)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(x^2+x)} + K$

6) $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$

$F(x) = 4\sqrt{x^2-x} + K$

7) $f(x) = \frac{5}{(4x-3)}$

$f(x) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4 \cdot 1}{(4x-3)}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{4} \cdot \ln|4x+3| + K$

* $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

*تكملة القواعد

$\boxed{5}$ $f(x) = \sin(ax+b) \Rightarrow$
$F(x) = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + k$

مثال: $f(x) = \sin(3x+1)$

$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{3}\cos(3x+1) + k$

$\boxed{6}$ $f(x) = \cos(ax+b) \Rightarrow$
$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$

مثال: $f(x) = \cos(\omega t + \phi)$

$F(x) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \phi) + k$

$\boxed{7}$ $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow F(x) = \tan x$

$\boxed{8}$ $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow F(x) = -\cot x$

هااام

$\boxed{9}$ $f(x) = g^n \cdot g' \Rightarrow F(x) = \frac{g^{n+1}}{n+1} + k$

مثال: $f(x) = \underbrace{\sin^5 x}_{g^n} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{\sin^6 x}{6} + k$

مثال: $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln^3 x$

$\Rightarrow F(x) = \frac{\ln^4 x}{4} + k$

* بس نشوف ln بالبسط و x بالمقام فوراً بتذكر عباكي القاعدة $\boxed{9}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{\ln^2 x}{2}$

$\boxed{10}$ الأعلى للجذر ⇐ حول الى قوة ⇐ نعود الى القاعدة رقم $\boxed{2}$

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}$

$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$

$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow$

$F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

$\boxed{11}$ $f(x) = \frac{\star'}{\sqrt{\star}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{\star}$

$* \int *' e^{*} = e^{*}$

* التكامل غير المحدد

* نرمز لمجموع التوابع الأصلية بالرمز:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

رمز التكامل ، التابع المراد مكاملته ، رمز التفاضل ، التابع الأصلي ، ثابت التكامل

مثال:

[1] $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k$

[2] $\frac{1}{2}\int 2x \cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$

[3] $\int \frac{2x-1}{x^2-x+3}\,dx = \ln|x^2-x+3| + k$

[4] $\frac{1}{2}\int \underbrace{2(x-2)}_{g'} \underbrace{(x^2-4x+5)}_{g}{}^3\,dx$

$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-4x+5)^4}{4}$

[5] $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

$\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \underbrace{\ln^{-2} x}_{g}\,dx$

$= \frac{\ln^{-1} x}{-1} + k$

مثال: $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$

$\Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x^2-x} + k$

$f(x) = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}}}$

$\Rightarrow F(x) = 2\sqrt{e^{2x}} + k$

$f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\sqrt{x^2+3})$

$= \sqrt{x^2+3} + k$

* التكامل المحدد هو عدد نعين معين k

* التكامل المحدود و خواصه

* ليكن f تابع مستمر على I وليكن a , b عددين من هذا المجال :

بنطوي التابع الأصلي ونعوض الحد العلوي b ناقص الحد الأدنى a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

$$F(b) - F(a)$$

مثال :

$\boxed{1}$ $$\int_{-1}^{2} (2x-1)\,dx$$

$$= \left[2\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[x^2 - x\right]_{-1}^{2}$$

$$= (4-2) - (1-(-1))$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$\boxed{2}$ $$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}$$

$\boxed{3}$ $$\int_2^4 \frac{3}{x-1}\,dx$$

$$3\int_2^4 \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= 3\Big[\ln|x-1|\Big]_2^4$$

$$3\Big[(\ln 3) - (\ln 1)\Big]$$

$$= 3\ln 3 = \ln 3^3 = \ln 27$$

$\boxed{4}$ $$\int_0^1 2x\,e^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1$$

$$= e - 1$$

* خواص التكامل

$\boxed{1}$ $$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$\boxed{2}$ $$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$$

حيث λ عدد حقيقي

Scanned by CamScanner

$$* \quad \frac{1}{x \cdot y} = \frac{\frac{1}{x}}{y}$$

$\boxed{3}$ $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$\boxed{4}$ $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$b \in [a, c]$$

مثال:

$$\int_1^{10} f(x)\,dx =$$

$$\int_1^5 f(x)\,dx + \int_5^{10} f(x)\,dx$$

مثال:

$$\int \sqrt{(2x+1)^3}\,dx$$

$$\int (2x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$\frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{(\frac{5}{2})(2)} + K$$

مثال:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_e^{e^2}$$

$$= (\qquad) - (\qquad)$$

$$= \ln|\ln e^2| - \ln|\ln e|$$

$$= \ln 2$$

مثال:

$$\int |x^2 - 1|\,dx$$

* تمارين صفحة 235

$\boxed{2}$

$$\int_{-1}^{2} x|x-1|\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} (-x^2+x)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2-x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{+1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

ثم نعوض [الحد العلوي - الحد السفلي]

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2-2\cos\theta}\,dx$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\,dx$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\,dx$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\,dx$$

نفرع الربع

$\sin x \leq 0$: $-2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,dx$

$$= -2\left[-\cos x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \ldots$$

$$\int_{0}^{1} (e^{2x} - e^{-2x})\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{e^2 + e^{-2}}{2} - 1$$

* التكامل بالتجزئة

$\int x^n \sin x\,dx$ (كثير حدود) , $\int x^n e^x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$, $\int x^n \ln x\,dx$

نفرض $x^n = u$ والمقدار الآخر v'

نفرض $\ln x = u$ والمقدار الآخر v'

* قانون التكامل بالتجزئة :

$$\int u.v' = u.v - \int v.u'$$

مثال :

$$I = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$$

نفرض :

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$\Rightarrow I = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-xe^{-x} + (-e^{-x})\right]_0^1$$

$$= (\quad) - (\quad)$$

مثال :

$$I = \int_0^e x \ln x\,dx$$

نفرض :

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$I = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\right]_0^e$$

$$(\quad) - (\quad)$$

= ...

مثال: $I = \int x \sin x \, dx$

نفرض:

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$I = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x \, dx$

$= -x^2 \cos x + 2 \underbrace{\int x \cos x \, dx}_{I'}$

$I' = \int x \cos x \, dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$I' = x \sin x - \int \sin x \, dx$

$= x \sin x + \cos x$

$\Rightarrow I = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x + \cos x \right] + k$

* تكاملات الكسور الجزئية:

هي تكاملات لكسور نهدف إلى تفريقها لتحويلها إلى مجموع كسور جزئية و لدينا حالتان:

* الحالة الأولى: عندما درجة البسط أقل من المقام نطبق ما يلي لتفريق هذا الكسر:

p. ذلك المقام

ن. نكتب التابع الكسري بالشكل $F(x) = \frac{q(x)}{P(x)}$

ذلك المقام: $q(x) = (x-r_1)(x-r_2)$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{A}{(x-r_1)} + \frac{B}{(x-r_2)}$$

ثم نوجد A , B كما يلي:

نوحد المقامات و نطابق الأمثال بين الطرفين

مثال: أوجد تكامل الكسر $\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$

على المجال عشان نعرف اشارة القيمة المطلقة

على المجال $]-\infty, -2[$

درجة البسط أصغر من المقام ⇐ ذلك المقام

$x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$

مثال: فرّق التابع الكسري الى مجموع كسور جزئية ثم أوجد تكامله على المجال

$]2,3[$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$$

درجة البسط أقل من درجة المقام ذلك المقام

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}_{(x-2)}+\frac{B}{x-2}_{(x-3)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{\boxed{Ax}-2A+\boxed{Bx}-3B}{(x-3)(x-2)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{(A+B)x-2A-3B}{(x-3)(x-2)}$$

بالمطابقة:

$A+B=0$ $\boxed{1}$

$-2A-3B=1$ $\boxed{2}$

نضرب $\boxed{1}$ بـ 2

$2A+2B=0$ $\boxed{3}$

$-B=1 \Rightarrow B=-1$

$\boxed{1}$ في $\Rightarrow A=1$

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+2}_{(x+1)}+\frac{B}{x+1}_{(x+2)}$$

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx+2B}{(x+2)(x+1)}$$

$$\frac{\boxed{2x}+1}{(x+2)(x+1)}=\frac{\boxed{(A+B)x}+A+2B}{(x+2)(x+1)}$$

بالمطابقة نجد:

$A+B=2$ $\boxed{1}$

$A+2B=1$ $\boxed{2}$

$\boxed{1}$ من $\Rightarrow A=2-B$

$\Rightarrow 2-B+2B=1$

$\boxed{B=-1} \Rightarrow \boxed{A=3}$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx=\int\left[\frac{3}{x+2}+\frac{-1}{x+1}\right]dx$$

$$=3\ln|x+2|-1\ln|x+1|+k$$

$$=3\ln(-x-2)+\ln(-x-1)+K$$

مثال:

$$I = \int \frac{4x^3 - 3x}{2x^2 - 3x - 2}\, dx$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 3 \\ \hline 2x^2 - 3x - 2 & 4x^3 - 3x \\ & -4x^3 \pm 6x \pm 4x \\ \hline & 6x + x \\ & -6x^2 \pm 9x \pm 6 \\ \hline & 10x + 6 \end{array}$$

الكسر = ناتج القسمة + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$= 2x + 3 + \frac{10x + 6}{2x^2 - 3x - 2}$$

نفرقة ←

$$\frac{10x+6}{2x^2-3x-2} = \frac{2(5x+3)}{2(x^2 - \frac{3}{2}x - 1)}$$

دلتا ←

$$\frac{5x+3}{(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+\frac{1}{2})}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\, dx = \int \frac{1}{x-3}\, dx + \int \frac{-1}{x-2}\, dx$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + k$$

$$= \ln(x+3) - \ln(x-2) + k$$

مثال:

$$I = \frac{\boxed{}}{3x^2 - 3x + 10}$$

$\Downarrow$

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

جذرا المعادلة

$\Delta = \dots \Rightarrow x_1 =$

$x_2 = \dots$

*الحالة الثانية:

درجة البسط أكبر أو تساوي المقام

نقسم البسط على المقام [قسمة]

ونعود للحالة السابقة.