"بسم الله الرحمن الرحيم"

إليكم هذا الملف الذي يحتوي على:

جميع الأمثلة والدروس المطلوبة في مقرر،

تفاضل وتكامل (1)

ملاحظة:

* الملف مصور من دفتري الخاص وبطريقتي وطريقة شرح دكتورنا..

ولكل طالب طريقة يفضلها في الحل..

وإن شاء الله تعالى ينال استحسانكم ويساعد اللي عنده مشكلة في أي جزئية..

(إن أصبنا فمن الله، وإن أخطأنا فمن أنفسنا والشيطان)

عندك أي ملاحظة تواصل معي:

نكون بشكر نعدلها.

٠٥٥٨٩١٧٠٣

إبراهيم الزهراني

٦/٤/١٤٤٠هـ

تحضيري - أم القرى

وبالله التوفيق،،،

من لا يشكر الناس لا يشكر الله،، الشكر موصول لدكتور المادة

الدكتور: أسامة دقق.

Date: Subject:

*ملاحظة:

مفتوح: o

( )/ > <

مغلق: •

[ ]/ ≥ ≤

Example 1 : P_9

Solve $2x - 7 < 4x - 2$

$2x - 4x < -2 + 7$

$-2x < 5$

نقلب الإشارة لأننا قسمنا على عدد سالب $x > \frac{5}{-2}$

القوس مفتوح لعدم وجود المساواة

$(-\frac{5}{2}, \infty)$

Example 2 : P_9

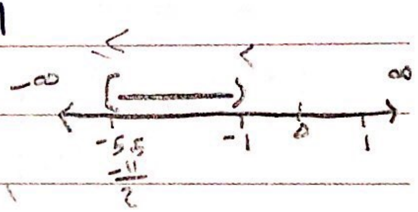
solve $-5 \leq 2x + 6 < 4$

$-11 \leq 2x < -2$

$\frac{-11}{2} \leq x < \frac{-2}{2}$

$-5.5 \leftarrow \frac{-11}{2} \leq x < -1$

$[-\frac{11}{2}, -1)$



Example:

Solve $2 < -3x - 1 \leq 5$

$3 < -3x \leq 6$

نقلب الإشارات $\frac{3}{-3} > x \geq \frac{6}{-3}$

نقلب ونحوله من الأصغر للأكبر $-1 > x \geq -2$ انتبه $\rightarrow$ ~~$(-1, -2]$~~

$-2 \leq x < -1$

$[-2, -1)$

Date: Subject:

Example 3: P_{10}

Solve $x^2 - x < 6$

$x^2 - x - 6 < 0$ سالب

$(x-3)(x+2) < 0$

$x = 3$ $x = -2$

جدول الإشارات

	$-\infty$	-2		3	∞
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$(-2, 3)$

		صفر المعادلة		صفر المعادلة	
ax^2+bx+c	اشارة معامل x^2 (a)	0	عكس الاشارة	0	اشارة معامل x^2 (a)

		صفر المعادلة	
$ax+b$	عكس اشارة المعامل	0	إشارة معامل x (a)

Example 5 : P_{10}

Solve $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$

$x = 1$

$x = -2$

الشرط:

المقام $\neq 0$

$x+2 \neq 0$

$\boxed{x \neq -2}$

	$-\infty$	-2		1	∞
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$		$-$	0	$+$

$(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$

Date: Subject:

Example 6 : P_{10}

سالب

Solve: $(x+1)(x-1)^2(x-3) \leq 0$

$\downarrow$ −1, $\downarrow$ 1, $\downarrow$ 3

	$-\infty$	-1		1		3	∞
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2$ زوجي	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)(x-1)^2(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

→ اذا كان الأس زوجي كلها موجب !!

$[-1,1] \cup [1,3]$ OR $[-1,3]$

اضافي:

لو كانت < 0 (من دون مساواة)

$= (-1,1) \cup (1,3)$ OR $= (-1,3) - \{1\}$

Example 8 : P_{12}

Solve $|x-4| < 2$

قانون $\boxed{|y| \leq a \Rightarrow -a \leq y \leq a}$

عدد موجب

$-2 < x-4 < 2$ (+4)

$2 < x < 6$

$(2,6)$

Example 9 : P_{12}

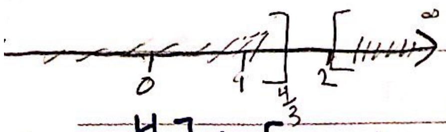
Solve $|3x-5| \geq 1$

قانون $\boxed{|y| \geq a \Rightarrow y \geq a \text{ OR } y \leq -a}$

نفس المعادلة الاصلية — نقلب المتباينة — نعكس الإشارة

$3x-5 \geq 1$ OR $3x-5 \leq -1$

$3x \geq 6$ $\qquad$ $3x \leq 4$



$x \geq \frac{6}{3}$ $\qquad$ $x \leq \frac{4}{3}$

$x \geq 2$

$(-\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, \infty)$

Date: Subject:

Example 4 : P10

موجب

Solve $3x^2 - x - 2 > 0$

المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ $a=3$

$= (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2$ $b=-1$

$= 1 - (-24)$ $c=-2$

$= 25 > 0$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{25}}{6} = \frac{6}{6} = \boxed{1}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{25}}{6} = \frac{-4}{6} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		1	∞
$3x^2-x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$

اشارة معامل x — عكس — اشارة معامل x

$$(-\infty, -\tfrac{2}{3}) \cup (1, \infty)$$

Example 13 : P13

solve $x^2 - 2x - 4 \leq 0$ بالتحليل $(x+\cancel{2})(x-2)$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4$ $a=1$

$= 4 + 16 = 20 > 0$ $b=-2$ $c=-4$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\cancel{2}^{1} + 2\sqrt{5}}{\cancel{2}} = \boxed{1+\sqrt{5}}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\cancel{2}^{1} - 2\sqrt{5}}{\cancel{2}} = \boxed{1-\sqrt{5}}$$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \boxed{2\sqrt{5}}$

	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$	∞
x^2-2x-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$$[1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]$$

HI Tekno

Date: Subject:

Example 14 : P_{14} Solve $|3x+1| < 2|x-6|$

if $a>0$, $b>0$, $a<b \Rightarrow a^2 < b^2$ $\Rightarrow a^2 - b^2 < 0$

$= |3x+1| < |2x-12|$

$= |3x+1|^2 < |2x-12|^2$

$= (3x+1)^2 < (2x-12)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$ $\leftarrow = (3x+1)^2 - (2x-12)^2 < 0$

$= \Big((3x+1) + (2x-12)\Big) . \Big((3x+1) - (2x-12)\Big) < 0$

$= (3x+1+2x-12) . (3x+1-2x+12) < 0$

$= (5x-11) . (x+13) < 0$

$\boxed{x = \frac{11}{5}}$ $\boxed{x = -13}$

	$-\infty$	-13	$\frac{11}{5}$	∞
$5x-11$	$-$	$-$	0	$+$
$x+13$	$-$	0	$+$	$+$
$(5x-11)(x+13)$	$+$	$-$		$+$

$\left(-13, \frac{11}{5}\right)$

Date: Subject:

Example 1 : P_{29}

بسط , اوجد

for $f(x) = x^2 - 2x$, find and simplify.

ⓐ $f(4)$

$= (4)^2 - 2 \cdot 4$

$= 16 - 8$

$\boxed{f(4) = 8}$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

ⓑ $f(4+h)$

$= (4+h)^2 - 2(4+h)$

$= 16 + h^2 + 8h - 8 - 2h$

$\boxed{f(4+h) = h^2 + 6h + 8}$

ⓒ $f(4+h) - f(4) \longrightarrow$ جاهزة

$= h^2 + 6h + \cancel{8} - \cancel{8}$

$\boxed{= h^2 + 6h}$

ⓓ $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$= \dfrac{h^2 + 6h}{h}$

$\boxed{= h + 6}$

Example 2 : P_{30} Find the natural domains for:

ⓐ $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

المقام $\neq 0$

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$x : x \neq 3$

يتبع..

Exa: $\longrightarrow \dfrac{1}{x^2 - 3}$

اضافي

$x^2 - 3 \neq 0$

$x^2 \neq 3$

$x \neq \mp\sqrt{3}$

$D_f = R - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

Exa: $\longrightarrow \dfrac{1}{x^2 + 3}$

اضافي

$x^2 + 3 \neq 0$

$x^2 \neq -3$

∴ الشرط دائمًا صحيح (لا يوجد جذر)

$D_f = R$

Date: Subject:

Example 2 : P_{30} → في

Find the natural domains for : اوجد المجال

b) $g(t) = \sqrt{9-t^2}$

شرط الدالة الجذرية : ما تحت الجذر ≥ 0

solv : $9 - t^2 \geq 0$

$9 \geq t^2$

ترتيب المعادلة $t^2 \leq 9$

$\sqrt{t^2} \leq \sqrt{9}$

نرجع لشرط الدرس السابق ونكمل الحل ← $|t| \leq 3$

$t^2 \leq 3$

$-3 \leq t \leq 3$

domains المجال ← $D_g = [-3, 3]$

* ملاحظة :

$(\sqrt{t})^2 = t$

$\sqrt{t^2} = |t|$

Exa: $\sqrt{(-2)^2} = 2$

لو اختصرت $-2 \neq 2$

c) $h(w) = \dfrac{1}{\sqrt{9-w^2}}$

الشرط على الجذرية : $9 - w^2 \geq 0$

الشرط على الكسرية : $\sqrt{9-w^2} \neq 0$

$9 - w^2 \neq 0$

$9 - w^2 > 0$ ← نجمع الشرط

$9 > w^2$

$\sqrt{w^2} < \sqrt{9}$

$|w| < 3$

$-3 < w < 3$

$D_h = (-3, 3)$

Example 4 : 31 في المذكرة (مهم)

Hi Tekno

Date: Subject:

Example :

ⓐ $f(x) = 3x^{4} - x^{2} + 5$ ← العدد الثابت زوجي

زوجي زوجي $n=1$

$\Rightarrow f$ is even (زوجية)

فردية

ⓑ $f(x) = 2x^{5} - 3x^{3} + x^{1}$

$\Rightarrow f$ is odd (فردية)

ⓒ $f(x) = x^{3} + 2x^{2} + x$

$\Rightarrow f$ is nether even and odd (ليست فردية ولا زوجية)

* تبسيط القاعدة :

even → (+)

odd → (−)

$\frac{even}{even} = \frac{+}{+} = + \Rightarrow$ even

$\frac{odd}{odd} = \frac{-}{-} = + \Rightarrow$ even

$\frac{even}{odd} = \frac{+}{-} = - \Rightarrow$ odd

$\frac{odd}{even} = \frac{-}{+} = - \Rightarrow$ odd

$\frac{nether}{\sim}$ → nether

$\frac{\sim}{nether}$ → nether

Hi Tekno

Scanned with CamScanner

Date: Subject:

Example 5 : P32

Is $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$ even, odd, or nether?

$\frac{\text{odd}}{\text{even}} = \frac{-}{+} = - \Rightarrow \text{odd}$

Exa: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

$= \frac{\text{nether}}{\text{even}} \Rightarrow f$ is nether

Exa: $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}$ — $x^2 \cancel{+x} \cancel{-x} - 1$

$x^2 - 1$

$= \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f$ is even

Scanned with CamScanner

0.6 Operations on Functions . العمليات على الدوال

Example: $+/-$

Let $f(x) = x^3 - x + 5$

and $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

Find ① $f(x) + g(x)$

الحل $\rightarrow$ $= 3x^3 - 3x^2 + x + 9$

② $f(x) - g(x)$

الحل $\rightarrow$ $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

Example: $\times / \div$

Let $f(x) = x^2 + 1$

and $g(x) = 3x - 5$

Find ① $f(x) \cdot g(x)$

الحل $\rightarrow$ $= (x^2+1)\cdot(3x-5)$

$= 3x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

② $f(x)/g(x)$

الحل $\rightarrow$ $= \dfrac{x^2+1}{3x-5}$ $\rightarrow$ المطلوب المجال

الشرط: المقام $\neq 0$

$3x - 5 \neq 0$

$3x \neq 5 \Rightarrow x \neq \frac{5}{3} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \{R\} - \frac{5}{3}$

Example: $\Rightarrow$

Let $f(x) = x^2$

and $g(x) = x + 3$

Find ① $f \circ g(x) = f(g(x))$

$= f(x+3)$ تعويض كل x في f بـ $x+3$

$f \circ g(x) = (x+3)^2$

② $g \circ f(x)$

$= g(f(x))$

$= g(x^2)$ تعويض كل x في g بـ x^2

$= x^2 + 3$

$f \circ g \neq g \circ f$

③ $(g \circ f)(4) = x^2 + 3 \Rightarrow = 4^2 + 3 \Rightarrow = 16 + 3 = 19$

Date: Subject:

Example 1 : P 35 مارح يجي نفس الطريقة + في المذكرة

Example 2 : P 36

Let $f(x) = \frac{6x}{x^2-9}$

and $g(x) = \sqrt{3x}$

find ① $(f \circ g)(12)$ ⟶

solve:

$= f(g(12))$

$= f(\sqrt{3 \cdot 12})$

$= f(\sqrt{36})$

$= f(6)$

نعوض بقيمة x في f ⟶ $= \frac{6 \cdot 6}{6^2 - 9} = \frac{36}{36-9} = \frac{36}{27} = \boxed{\frac{4}{3}}$

② $(f \circ g)(x)$

$= f(g(x))$

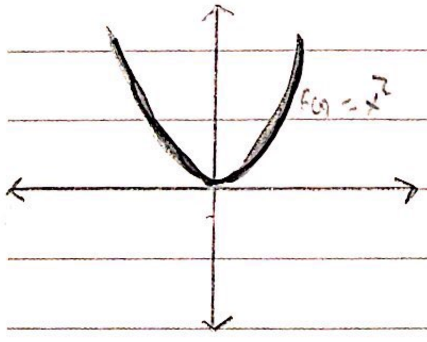
$= f(\sqrt{3x})$

$= \frac{6 \cdot \sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2 - 9}$

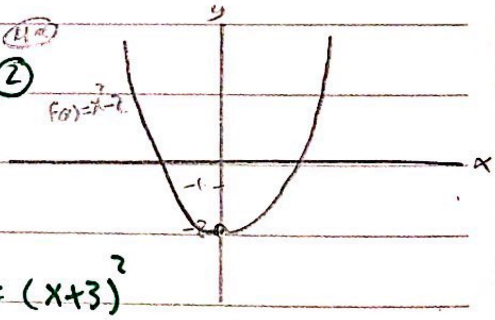
$= \frac{2\sqrt{3x}}{x-3} \Rightarrow D_{f \circ g} = x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3,\ = \{R\} - 3$

Sketch the graphs:

① $f(x) = x^2$



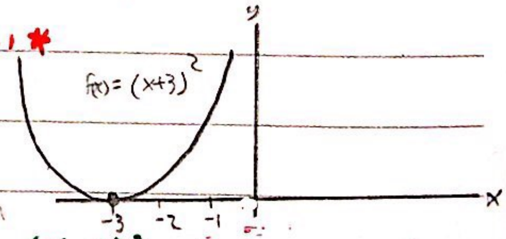
② (4 a)



③ $f(x) = (x+3)^2$

* ازاحة على محور x بـ (-3)

(عكس اشارة العدد)



Example 4 (a) P : 31

① $y = f(x) = x^2 - 2$

* ازاحة على محور y بـ (-2)

(نفس اشارة العدد)

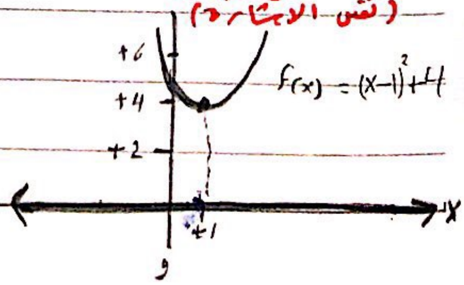
④ $f(x) = (x-1)^2 + 4$

ازاحة على محور x بـ (+1)

(عكس الاشارة)

ازاحة على محور y بـ (+4)

(نفس الاشارة)



Date: Subject:

Example 3 : P37

Example 4: P38

في المذكرة سهلة

الخلاصة :

محور x = عكس الإشارة .

محور y = نفس الإشارة .

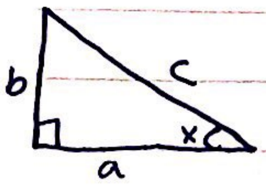
افتح ص 37 في الكتاب وشوف المحاذاة الهيئة الخلفة

+

الأشكال الملونة في الخلف فالملخص

0.7 Trigonometric functions P: 41

الدوال المثلثية :



$$\sin(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\tan(x) = \frac{\overset{\text{odd}(-)}{\sin}}{\underset{\text{even}(+)}{\cos}} \qquad \cot = \frac{\overset{+}{\cos}}{\underset{-}{\sin}} = \frac{1}{\tan(x)}$$

$\Downarrow$ tan is odd(−) $\qquad$ $\Downarrow$ cot is odd

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

$\Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$\Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\boxed{1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)}$$

← نفسها على الدوال المثلثية :

$\cos(-x) = \cos(x) \Rightarrow$ cos is even

$\sin(-x) = -\sin(x) \Rightarrow$ sin is odd

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$ $\Downarrow$ odd

Cos is even (+)

sin is odd (−)

tan is odd (−)

cot is odd (−)

$f(-x) = f(x) \Longrightarrow f$ is even (+)

$f(-x) = -f(x) \Longrightarrow f$ is odd (−)

$f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow f$ is neather

Example:

① $f(x) = x^2 + 5$

$f(-x) = (-x)^2 + 5$

$f(-x) = x^2 + 5$

$f(x) = f(-x) \Longrightarrow f$ is even (+)

② $f(x) = x^3 + x$

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

$f(-x) = -x^3 - x$

$= -(x^3 + x)$

$f(-x) = -f(x) \Longrightarrow f$ is odd (−)

Date: Subject:

Example 6 : P46

$$1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$$

$$\times\cos \Rightarrow 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \rightarrow$$ توحيد مقامات

$$=\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2}=\sec^2$$ ✓

$$1+\cot^2(x)=\csc^2(x)$$

$$=1+\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$=\frac{\sin^2+\cos^2}{\sin^2}$$

$$=\frac{1}{\sin^2}=\csc^2(x)$$ ✓

Example :-

$$(\overset{a}{1}+\overset{b}{\sin(x)})\cdot(1-\sin(x))$$

$$a^2+b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

$$=1^2+\sin^2(x)$$

$$=\cos^2(x)$$

$$=\frac{1}{\sec^2(x)}$$

Date: Subject:

تابع

الربع الاول فقط

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$$\frac{\sqrt{\;\;}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(0) = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$$

$$\cos(0) = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

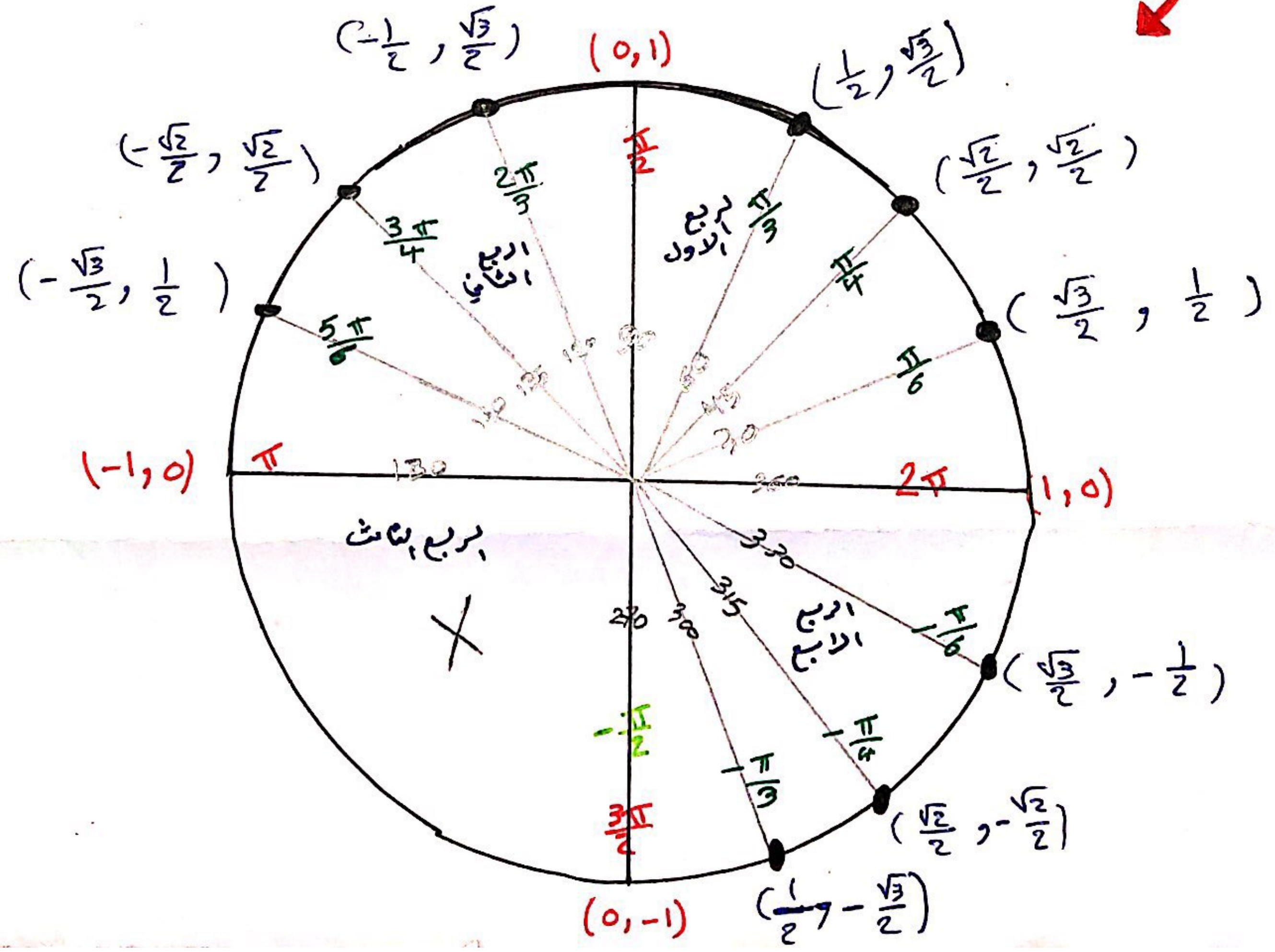
الدائرة مهمة

* نستخدم زوايا الربع الأول فقط

	0	30	45	60	90
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$$\sqrt{} \quad / \quad 2$$

(cos, sin)



1.1 P. 57

Example 1: find $\lim_{x \to 3} (4x-5)$.

$= 4(3) - 5 = \boxed{7}$

Example: $\lim_{x \to 2} (4x^3)$

$= 4(2)^3 \Rightarrow = 4 \cdot 8 \Rightarrow = \boxed{32}$

Ex: 2 find $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{0}{0}$

① اول شي نعوض ونشوف فيه حل او لا.

② اتضح لنا أنه لابد من التحليل!

$x^2 - 3x + 2x - 6$

$x^2 - x - 6$

التحليل

$= \dfrac{(x+2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$

$= x + 2 \Rightarrow 3 + 2 = \boxed{5}$ نعوض بـ 3

Example 3: find $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

حفظها

$$\boxed{= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Example:

find $\lim_{x \to 0} \dfrac{3 \sin(x)}{2x}$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \to = 1$

$= \dfrac{3}{2} \cdot 1 = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

Hi Tekno

Date: Subject:

Limit Theorems 1.3 : P68

Example 1 : P68 Find $\lim_{x\to 3} 2x^4$

$= 2(3)^4$

$= 2(81)$ $\quad 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$: $9,\ 27,\ 81$

$\boxed{= 162}$

Example 2 : $\lim_{x\to 4} (3x^2 - 2x)$

$= 3(4)^2 - 2(4)$

$= 3(16) - 8$

$= 48 - 8 = \boxed{40}$

Example 3 : P69 Find $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

$= \frac{\sqrt{4^2+9}}{4}$

$= \frac{\sqrt{25}}{4}$

$\boxed{= \frac{5}{4}}$

Example 4 : P69 $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ and $\lim_{x\to 3} g(x) = 8$

Find $\lim_{x\to 3} \left[f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)} \right]$

هامش:

$= 4^2 \cdot \sqrt[3]{8}$ $\quad = \sqrt[3]{2^3}$

$= 16 \cdot 2 = \boxed{32}$ $\quad = 2$

Example 5 : P69 Find $\lim_{x\to 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

ما في رمز كثر الأعداد كبيرة.

$= \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8}$

$= \frac{224 - 160 - 26 + 6}{12 - 12 - 8} = \frac{44}{-8} = \boxed{-\frac{11}{2}}$

انتبه ✱ غير معرفة = $\frac{0}{0}$

✱ معرفة = 0

Date: Subject:

Example 7: p70 Find $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0}$ غير معرفة

$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}$

عملية النطاق بالعام..

"بهرب من مرافق بحمام"

$\lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \sqrt{x}+1 \boxed{=2}$

Example 8: p70 Find $\lim_{x\to2} \frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6} = \frac{0}{0}$ غير معرفة

$= \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+5)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+3)} = \frac{x+5}{x+3} \boxed{= \frac{7}{5}}$

Example: Find $\lim_{x\to4} \frac{x-4}{x^2+4}$

$= \frac{4-4}{4^2+4} = \frac{0}{16+4} = \frac{0}{20} \boxed{=0}$

Example: Find $\lim_{x\to2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$ غير معرفة

$\lim_{x\to2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$

$\lim_{x\to2} \frac{1}{x+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Hi Tekno

1.5 Limits at infinity. P 77

Example 2 : P 78 Prove that $\lim\limits_{x\to\boxed{\infty}} \dfrac{\boxed{x}}{1+\boxed{x^2}} = 0.$

① درجة البسط < درجة المقام $= 0$

② درجة المقام < درجة البسط $= \mp\infty$

③ درجة البسط = درجة المقام = $\dfrac{x \text{ معامل}}{x \text{ معامل}}$

① $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} = 0$

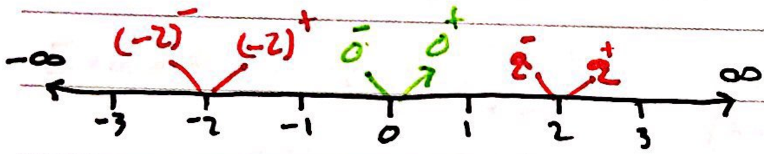
③ **Example 3. P 79** Find $\lim\limits_{x\to\boxed{-\infty}} \dfrac{\boxed{2x^3}}{1+\boxed{x^3}} = \dfrac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 2$

نفس المثال تقريبًا.

Example : Find $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\boxed{2x^3}+5x^2-x+17}{1+\boxed{3x^3}} = \dfrac{2\cancel{x^3}}{3\cancel{x^3}} = \dfrac{2}{3}$

② **Example :** $\lim\limits_{x\to\boxed{-\infty}} \dfrac{\boxed{x^4}-2x^2-1}{\boxed{2x^3}+x} = \dfrac{x^4}{2x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$

نعوض



a^+ : يمين العدد a

a^- : يسار العدد a

$\boxed{a^- < a < a^+}$

$\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{\text{عدد}}{x} = \pm\infty$

على حسب الإشارات. (إشارة العدد وإشارة الـ (0) يمين أو يسار.

Example 5 : P 80

Find $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2}$ and $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 1^- - 1 = 0^- < 0 = -\infty$

والتربيع $= \infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 1^+ - 1 = 0^+$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$

Date: Subject:

Example: Find $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)^3}$ and $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^3}$.

$\lim_{x\to 1^-} (x-1) = 1^- - 1 = 0^- < 0 = -\infty$ | $\lim_{x\to 1^+} (x-1) = 1^+ - 1 = 0^+ > 0 = \infty$

Example: Find $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{3}{2-x}$ and $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{3}{2-x}$

$\lim_{x\to 2^-} (2-x) = 2 - 2^- = 0^+ > 0 = \infty$ | $\lim_{x\to 2^+} (2-x) = 2 - 2^+ = 0^- < 0 = -\infty$

Example 6: P80.

Find $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$ $\quad 2^+ + 1 = 3$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1 \to 3}{(x-2)(x-3)} = -\infty$$

$0^+ \leftarrow \times \rightarrow -1$ ضرب $\rightarrow = 0^-$

Example: $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+1}$ $\quad$ V.A = ? (x = عدد) $\quad$ H.A ? (y = عدد)

V.A $\rightarrow$ $\boxed{x = \text{صفر المقام}}$

$\boxed{x = -1 \text{ is V.A}}$

H.A $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\boxed{3x}+5}{\boxed{x}+1}$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3$

$\boxed{y = 3 \text{ is H.A}}$

Example 7: P80

Find the vertical (عمودي) and horizontal (أفقي) asymtotes (خطوط التقارب) of the graph of $y = f(x)$ if

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

V.A = $\boxed{x = 1 \text{ is V.A}}$ $\quad$ H.A $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\boxed{2x}}{\boxed{x}-1} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\boxed{y = 2 \text{ is H.A}}$

Example:

$f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

V.A $\boxed{x = -2}$, H.A $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{x}+2} = 0$ $\boxed{y = 0}$

Date: Subject:

1.6: Continuity of functions. P 82

للأسف ما كتبته
مع الدكتور

[الدرس الوحيد اللي ناقص]

Date: Subject: التفاضل (الاشتقاق)

2.2 The derivative. P100

مشتقة

قانون..

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Example 1: Let $f(x) = 13x - 6$ مشتقة

Find $f'(4)$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \frac{\cancel{52} + 13h \cancel{- 6} \cancel{- 52} \cancel{+ 6}}{h}$$

$$= \frac{13\cancel{h}}{\cancel{h}} = \boxed{13}$$

$$\Rightarrow f'(4) = 13$$

Example: $\lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h}$

$f(x) = ??$ $x = ??$

بالعكس

$f(x) = \frac{1}{3}$ $x = 3$

قانون

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

Example: $\lim_{x \to c} \dfrac{\frac{2}{x+3} - \frac{2}{c+3}}{x - c}$ $f(x) = ??$

بالعكس

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{x+3}$$

Date: Subject:

Example:

Let $f(x) = x^2 + 5x$ Find $f'(c)$

أي عند c=

$$\boxed{f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}}$$

قانون سابق

$$\lim_{x \to c} \frac{(x^2+5x) - (c^2+5c)}{x-c}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{x^2+5x - c^2 - 5c}{x-c}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{(x^2-c^2) + (5x-5c)}{x-c}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{\cancel{(x-c)}(x+c) + 5\cancel{(x-c)}}{\cancel{x-c}}$$

$$\lim_{x \to c} x + c + 5$$

نعوض بـ c $= c + c + 5$

$\Rightarrow f'(c) = 2c + 5$

Example 6: P 102

(a)

$$\lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$$

القانون:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$f(x) = x^2$ at $x = 4$

(b)

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x-3}$$

$f(x) = \frac{2}{x}$ at $x = 3$

Hi Tekno

Date: Subject:

2.3 Rules of Finding Derivatives. P. 107

$$\boxed{\begin{aligned} (\text{ثابت})' &= 0 \\ (x)' &= 1 \\ (x^2)' &= 2x \\ (x^3)' &= 3x^2 \\ &\vdots \\ (ax^n)' &= an\,x^{n-1} \end{aligned}}$$

Example 1 Find the derivatives of:
P.110

① $5x^2+7x-6$.

$$(5x^2+7x-6)' = \boxed{10x+7}$$

② $(4x^6-3x^5-10x^2+5x+16)'$

$$\boxed{= 24x^5-15x^4-20x+5}$$

قانون ... $\boxed{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'}$

Exampl 2: P110

$g(x) = x$

$h(x) = 1+2x$

Find $f'(x) = g(x)\cdot h(x)$

solution:

$$f'(x) = [x\cdot(1+2x)]'$$

$$= (x)'\cdot(1+2x) + (x)\cdot(1+2x)'$$

$$= (1)\cdot(1+2x) + (x)(2)$$

$$= 1+2x+2x$$

$$\boxed{= 1+4x}$$

Example 3: P 111

اشتقاق

$$D_x[(3x^2-5)(2x^4-x)]$$

$$= (3x^2-5)'\cdot(2x^4-x) + (3x^2-5)\cdot(2x^4-x)'$$

$$= 6x\cdot(2x^4-x) + (3x^2-5)\cdot(8x^3-1)$$

بجمع الحدود $= 12x^5-6x^2+24x^5-3x^2-40x^3+5$

$$\boxed{= 36x^5-40x^3-9x^2+5}$$

Date: Subject:

قانون: $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$

Example 4: P 112 Find $\frac{d}{dx} \frac{(3x-5)}{(x^2+7)}$

اشتقاق

$$= \frac{(3x-5)' \cdot (x^2+7) - (3x-5) \cdot (x^2+7)'}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot (x^2+7) - (3x-5) \cdot (2x)}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{3x^2+21-6x^2+10x}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+10x+21}{(x^2+7)^2}$$

Example 5: P 113.

Find $D_x y$ if $y = \frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x}$

$$= \left(\frac{2}{x^4+1}\right)' + \left(\frac{3}{x}\right)'$$

$$= \frac{\overset{0}{\cancel{(2)' \cdot (x^4+1)}} - (2) \cdot (x^4+1)'}{(x^4+1)^2} + \frac{\overset{0}{\cancel{(3)' \cdot (x)}} - (3) \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{-2(4x^3)}{(x^4+1)^2} + \frac{-3}{x^2}$$

$$\boxed{= \frac{-8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2}}$$

2.4 : P 114 Derivatives of Trigonometric Functions

$\sin(x)' = \cos(x)$

$\cos(x)' = -\sin(x)$

$\tan(x)' = \sec^2(x)$ * التسهيل: اللي تبدأ بـ (C)

$\cot(x)' = -\csc^2(x)$ ⟹ مشتقتها بالسالب (-)

$\sec(x)' = \sec(x) \cdot \tan(x)$

$\csc(x)' = -\csc(x) \cdot \cot(x)$

Example 1: P 115

عدد ثابت، دالة، عدد ثابت، دالة

Find $D_x(3\sin x - 2\cos x)$.

cos, -sin

$\boxed{= 3\cos x + 2\sin x}$

سالب وسالب موجب

Example 3: P 116

دالة، دالة

Find $D_x(x^2 \sin x)$. ⟹ دالة x دالة = نستخدم قانون:

[مشتقة ضرب دالتين]

$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$

$= (x^2)' \cdot (\sin x) + (x^2) \cdot (\sin x)'$

$= (2x)(\sin x) + (x^2) \cdot (\cos x)$

$\boxed{= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x}$

Example 4: P 116

*تعني مشتقة ′

Find $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$

نستخدم قانون:

$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$

$= \frac{(1+\sin x)' \cdot (\cos x) - (1+\sin x) \cdot (\cos x)'}{\cos^2(x)}$

$= \frac{(\cos x) \cdot (\cos x) - (1+\sin x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2(x)}$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$ ⟶ قانون سابق

$= \frac{(\cos^2 x) + (\sin x) + (\sin^2 x)}{\cos^2(x)} \Rightarrow = \boxed{\frac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)}}$

2.5 The Chain Rule P.118 قاعدة السلسلة

نستخدم ﻟ دالة خارجية عليها أس

مشتقة الدالة بدون أس

دالة f: function $\boxed{(f^n)' = nf^{n-1} \cdot f'}$ ⇒ Chain Rule (C.R)

$$(x^n)' = nx^{n-1} \cdot \underbrace{(x)'}_{=1} = nx^{n-1}$$

Example 1: P.119

If $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, find $D_x y$.

$$D_x y \overset{C.R}{=} 60 \cdot (2x^2 - 4x + 1)^{59} \cdot (2x^2 - 4x + 1)'$$

$$= 60 \cdot (2x^2 - 4x + 1)^{59} \cdot (4x - 4)$$ → إخراج 4 عامل مشترك

إلى هنا صح ✔ $= 60 \cdot (2x^2 - 4x + 1)^{59} \cdot 4(x - 1)$

زيادة خطوة التبسيط ⊕ $\boxed{= 240 \cdot (2x^2 - 4x + 1)^{59} (x - 1)}$

Eample 2: P 119

If $y = \frac{1}{(2x^5 - 7)^3}$, find $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{(2x^5 - 7)^3}\right)'$$

$$= \left((2x^5 - 7)^{-3}\right)'$$ - نرفع الأس فوق بالسالب

$$\overset{C.R}{=} -3 \cdot (2x^5 - 7)^{-4} \cdot (2x^5 - 7)'$$

$$= -3 \cdot (2x^5 - 7)^{-4} \cdot (10x^4)$$

$$= -30x^4 \cdot (2x^5 - 7)^{-4}$$ →

تحويل من الصيغة الخطية الى الكسرية فقط

$$\boxed{= \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4}}$$

Date: Subject:

Example 7: P121

Find $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{(2x-1)^3}$

$$= \left[(2x-1)^{-3}\right]'$$

$$\overset{C.R}{=} -3\cdot(2x-1)^{-4}\cdot(2x-1)'$$

$$= -3\cdot(2x-1)^{-4}\cdot(2)$$

$$= -6(2x-1)^{-4}$$

$$\boxed{= \frac{-6}{(2x-1)^4}}$$

4, 9, 10

Example 4: P120 If $y = \sin 2x$, find $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\boxed{(f(g))' = g'\cdot f'(g)} \leftarrow \text{قانون التركيب :}$$

Solution: $= 2\cos(2x)$

تذكير بقانون C.R

$$(f^n)' = nf^{n-1}\cdot f'$$

Example: $D_x\left(\tan(x^2+1)\right)$

$$= 2x\cdot\sec^2(x^2+1)$$

① هي دالة خارجية عليها أس نستخدم C.R

② وهي دالة تركيب دالة نستخدم قانون التركيب

Example 9: P122 Find $D_x \sin^3(4x)$

قانون (C.R) $= 3\sin^2(4x)\cdot\left(\sin(4x)\right)'$

قانون التركيب . $= 3\sin^2(4x)\cdot 4\cdot\cos(4x)$

$$= 12\sin^2(4x)\cdot\cos(4x)$$

Example: $D_x\left(\cos^4(x^2+x)\right)$

C.R $= 4\cos^3(x^2+x)\cdot\left(\cos(x^2+x)\right)'$ $\rightarrow$ $\cos' = -\sin$

التركيب $= -4\cos^3(x^2+x)\cdot(2x+1)\cdot\sin(x^2+x)$

Hi Tekno

Date: Subject:

Example 10 : P 122

$(f(g))' = g' \cdot f'(g)$

Find $D_x \sin\left(\cos(x^2)\right)$ = قانون التركيب

$\cos' = -\sin$

$= \left(\cos(x^2)\right)' \cdot \cos\left(\cos(x^2)\right)$

$= -2x \cdot \sin(x^2) \cdot \cos\left(\cos(x^2)\right)$

Date: Subject:

2.6 Higher-order Derivatives.

Example 1: P 126

$y = \sin(2x)$ Find:

المشتقة الأولى $\leftarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \cos(2x)$.

المشتقة الثانية $\leftarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2 \cdot 2 \cdot \sin(2x) = -2^2 \cdot \sin(2x)$

المشتقة الثالثة $\leftarrow \frac{d^3y}{dx^3} = -2^2 \cdot 2 \cdot \cos(2x) = -2^3 \cdot \cos(2x)$

المشتقة الرابعة $\leftarrow \frac{d^4y}{dx^4} = +2^3 \cdot 2 \cdot \sin(2x) = 2^4 \cdot \sin(2x)$

⋮

Example: $\frac{d}{dx}(2x^5 + 4x^3 - x^2 + 7x + 1) \stackrel{?}{=} \frac{d^3}{dx^3} \rightarrow$ أوجد المشتقة الثالثة

الأولى $\frac{d}{dx} = 10x^4 + 12x^2 - 2x + 7$

الثانية $\frac{d^2}{dx^2} = 40x^3 + 24x - 2$

الثالثة $\frac{d^3}{dx^3} \boxed{= 120x^2 + 24}$

Date: Subject:

2.7 Implicit Differentiation. P.130

$\boxed{y = f(x)}$ حفظ.

Example 1 : P131

Find $\frac{dy}{dx}$ أو $= y'$ if $4x^2y - 3y = x^3 - 1$

Solution:

$$(4x^2y - 3y)' = (x^3 - 1)'$$

at the point (1, 1)

x y

مشتقة عز × دالة

دالة دالة

$$4((x^2)'.y + x^2y') - 3y' = 3x^2$$

لو أعطاني نقطة خليها بالسؤال

$$4(2xy + x^2y') - 3y' = 3x^2$$

$$8xy + 4x^2y' - 3y' = 3x^2$$

$$4x^2y' - 3y' = 3x^2 - 8xy$$

$$y'(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}} \rightarrow = \frac{3(1)^2 - 8(1)(1)}{4(1)^2 - 3} = \boxed{-5}$$

Example 2 : P 132 دالة بدها تستخدم C.R

Find $\frac{dy}{dx}$ if $x^2 + 5y^3 = x + 9$

Solution: $(x^2 + 5y^3)' = (x + 9)'$

chain Rule: تذكير*

$(f^n)' = n f^{n-1} \cdot f'$ بدون أس

$$2x + 15y^2y' = 1$$

$$15y^2y' = 1 - 2x$$

$$\boxed{y' = \frac{1 - 2x}{15y^2}}$$

At the point (0, 1)

(x , y)

$$= \frac{1 - 2(0)}{15(1)^2} = \boxed{\frac{1}{15}}$$

Date: Subject:

Example 4: P 133

If $y = 2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt{x^2+1}$, find $D_x y$.

Solution: $(y)' = \left(2x^{\frac{5}{3}} + \sqrt{x^2+1}\right)'$

$= \left(2x^{\frac{5}{3}}\right)' + \left(\sqrt{x^2+1}\right)'$

$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

$= 2 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{5}{3} - \frac{3}{3}$

$\frac{5-3}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

$= \frac{10}{3} x^{\frac{2}{3}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Date: Subject:

3.1 Maxima and Minima P: 151

Critical Points: نقاط حرجة

① a is an end point (صعود بغفرة)

② a is a stationary point if $f'(a) = 0$ (أصفار الـ f')

or

③ a is a singular point if $f'(a)$ doesn't exict (غير موجودة)

Example 2 : P 153 Find the maximum and minimum values of $f(x) = x^3$ on $[-2, 2]$

① critical point:

→ end point $\{-2, 2\}$

→ $f'(x) = 3x^2$

if $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0$

$x^2 = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$

⇒ stationary point: $\{0\}$

⇒ Critical points: $\{-2, 2, 0\}$

② Find the maximum and minimum values:

$f(-2) = (-2)^3 = \boxed{-8}$ → minimum

$f(2) = (2)^3 = \boxed{8}$ → maximum

$f(0) = (0)^3 = 0$

Date: Subject:

Example: (1+3) P: 152+153

$f(x) = -2x^3 + 3x^2$ on $[-\frac{1}{2}, 2]$.

① Critical Point:

→ end points: $\{-\frac{1}{2}, 2\}$

→ $f'(x) = -6x^2 + 6x$

→ if $f'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 6x = 0$

$\Rightarrow 6x(-x+1) = 0$

$\Rightarrow 6x = 0$ or $-x+1=0$ $\quad -x = -1$

$\boxed{x=0}$ or $\boxed{x=1}$ $\quad x^{-1}$ $\quad \boxed{x=1}$

⇒ stationary points: $\{0, 1\}$

⇒ Critical points: $\{-\frac{1}{2}, 2, 0, 1\}$

② maximum and minimum: $(-\frac{1}{2})^3 = \frac{-1}{8} = \boxed{-\frac{1}{8}}$

$f(-\frac{1}{2}) = -2(-\frac{1}{2})^3 + 3(-\frac{1}{2})^2 \Rightarrow -2(-\frac{1}{8}) + 3(\frac{1}{4}) = \frac{2}{8} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = \boxed{1}$

$f(2) = -2(2)^3 + 3(2)^2 \Rightarrow -16 + 12 = \boxed{-4}$

$f(0) = \boxed{0}$ $\quad$ minimum

$f(1) = -2(1)^3 + 3(1)^2 = \boxed{1}$ $\quad$ maximum.

Example 4: P153

$f(x) = x^{2/3}$ on $[-1, 2]$

① Critical Point:

end point $\{-1, 2\}$

→ $f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

بشرط : المقام $\neq 0$

$\therefore f'(0)$ does not exist

⇒ 0 is a singular point.

⇒ Critical point $\{-1, 2, 0\}$

يتبع.. →

① maximum and minimum

$\rightarrow f(-1) = (-1)^{\frac{2}{3}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}}\ \boxed{= 1}$

$\left\{ (x^n)^m = x^{n.m} \right.$

$\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$

$\rightarrow f(2) = (2)^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \boxed{\sqrt[3]{4}} \rightarrow$ maximum

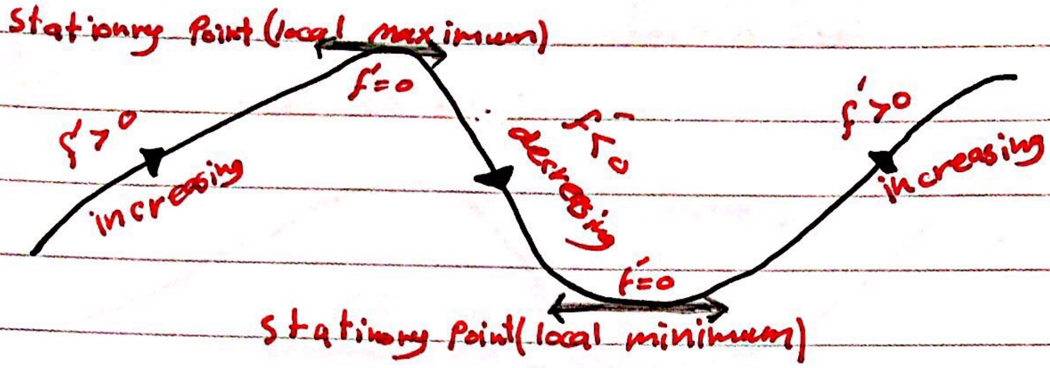
$\rightarrow f(0) = 0^{\frac{2}{3}} = \boxed{0} \rightarrow$ Minimum

3.2 Monotonicity and concavity P: 155

① if $f' > 0 \Rightarrow f$ is increasing ↗ متزايدة

② if $f' < 0 \Rightarrow f$ is decreasing ↘ متناقصة

③ if $f'(a) = 0 \Rightarrow a$ is a stationary point (نقطة استقرار) → local maximum / local minimum



Example 1 : P 155 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

Find where f is increasing and where it is decreasing.

Solution: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

if $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$

بالقسمة على 6 لجميع الحدود $6\div$ $\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$x+1=0$ or $x-2=0$

$\boxed{x=-1}$ $\boxed{x=2}$

	$-\infty$	-1		2	∞
$f'(x) = 6x^2-6x-12$	+	0	−	0	+
	↗		↘		↗

f increasing $(f'>0)$: $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

f decreasing $(f'<0)$: $(-1, 2]$

* نعوض بـ x في الدالة الأصلية حتى نجيب y :

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 7$
$= -2 - 3 + 12 + 7 = \boxed{14}$ y

$(-1, 14)$ local maximum (x, y)

$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 7$
$= 16 - 12 - 24 + 7 = \boxed{-13}$ y

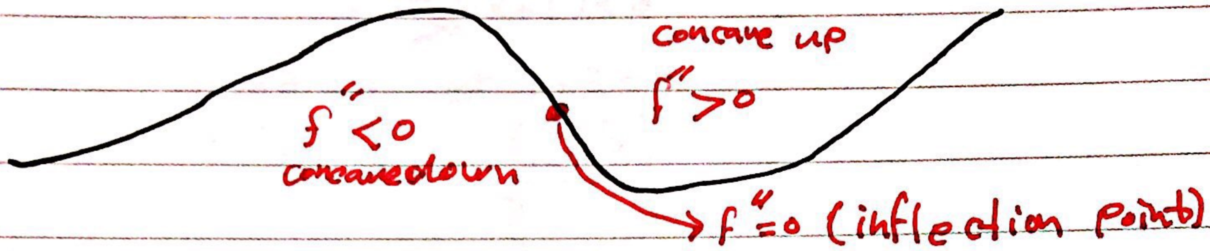
$(2, -13)$ local minimum (x, y)

3.2 تابع f : function

① if $f'' > 0 \Rightarrow f$ concave up (تقعر)

② if $f'' < 0 \Rightarrow f$ concave down (تحدب)

③ if ⓘ $f''(a) = 0 \Rightarrow a$ is an inflectin point (نقطة انقلاب)
or ⓘⓘ $f''(a)$ does not exist



Example: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

solution: $f' = 6x^2 - 6x - 12$

$f'' = 12x - 6$

if $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0$

$12x = 6$

$x = \frac{6}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$ ∞
$f''(x) = 12x - 6$	$-$	$+$

f concave up: $(\frac{1}{2}, \infty)$

f concave down: $(-\infty, \frac{1}{2})$

∴ إخراج y

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2}) - 12(\frac{1}{2}) + 7$

$= 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{4} - 6 + 7$

$= \frac{2}{8} - \frac{3}{4} + 1$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1$

$= \frac{-2}{4} + 1$

$= \frac{-2}{4} + \frac{4}{4}$

$= \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ inflection Point y

نقطة انقلاب

Example 3 : P 157 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

① increasing ? decreasing ? local maximum ? local minimum ?

(f') كلها بتبي بال $\longrightarrow (f')$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3$

$= x^2 - 2x - 3$

if $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x + 1 = 0$ or $x - 3 = 0$

$\boxed{x = -1}$ $\boxed{x = 3}$

	$-\infty$ -1	-1 3	3 ∞
$f'(x) = x^2 - 2x - 3$	$+$	$-$	$+$
	↗	↘	↗

f increasing $(f' > 0)$: $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

f decreasing $(f' < 0)$: $(-1, 3)$

$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 4$

$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 4$

$= -\frac{1}{3} + \frac{18}{3}$ $= -\frac{1}{3} + 6 \Longrightarrow 6 - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{18}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{17}{3}} \rightarrow y$

$= \frac{17}{3}$

$(-1, \frac{17}{3})$ local maximum

$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 3(3) + 4$

$= \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 - 9 + 4$

$= \frac{27}{3} - 9 - 9 + 4$

$= \cancel{9} - \cancel{9} - 9 + 4$

$y \leftarrow \boxed{= -5}$

$(3, -5)$ local minimum

Date: Subject: $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ ،بياني

② concave up? concave down? inflection point?

(f'') لما بدنا بالـ $\longrightarrow (f'')$

$$f' = x^2 - 2x - 3$$

$$\boxed{f'' = 2x - 2}$$

if $f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0$

$$2x = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

	$-\infty$ 1	1 ∞
$f''(x) = 2x-2$	$-$	$+$

f concave up: $(1, \infty)$ $f'' > 0$

f concave down: $(-\infty, 1)$ $f'' < 0$

$$f(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - (1)^2 - 3(1) + 4$$

$$= \frac{1}{3} - 1 - 3 + 4$$

$$\boxed{= \frac{1}{3}} \rightarrow y$$

$(1, \frac{1}{3})$ inflection point.

Example 7. P: 160 Find all points of inflection of $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}$$

$$= \frac{-2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$f'' = \frac{-2}{9}\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

بما إنها مقام $\neq 0$

$$x^{\frac{5}{3}} \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$\Rightarrow f''(0)$ does not exist غير موجودة

$$f(0) = 0^{\frac{1}{3}} + 2$$

$$\boxed{= 2} \rightarrow y$$

(0, 2) inflection point.

3.6 The Mean value theorem for derivatives P. 185

f : function on $[a, b]$

There exist (يوجد) at least (على الأقل) a number

$c \in (a,b)$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ ① = ② \end{array}}$$

Example 1 : P 186 find the number $\underline{\underline{c}}$ guarnteed by the Mean value theorem for $\underline{\underline{f(x) = 2\sqrt{x}}}$ on $[\underset{a}{1}, \underset{b}{4}]$

قانونا $\boxed{(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}}$

$① \; f'(x) = (2\sqrt{x})'$

$= 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

نحط x مكان في أول لبين نقوم في الأخير بـ c موجود c

$$\boxed{f'(\underline{\underline{c}}) = \dfrac{1}{\sqrt{c}}}$$

$a = 1 \quad , b = 4$

$② = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$= \dfrac{2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}}{3}$

$= \dfrac{4 - 2}{3} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

$① = ②$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \times \frac{2}{3}$$

$2\sqrt{c} = 3$

$\cancel{(\sqrt{c})^2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$$\boxed{c = \frac{9}{4}}$$

Date: Subject:

Example 2 : p 187

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ on $[\underset{a}{-1}, \underset{b}{2}]$ $c = ?$ M.V.T

Solution:

① $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

① $\boxed{f'(c) = 3c^2 - 2c - 1}$

② $a = -1$, $b = 2$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$$

$$= \frac{\left((2)^3 - (2)^2 - 2 + 1\right) - \left((-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1\right)}{3}$$

$$= \frac{(8 - 4 - 2 + 1) - (-1 - 1 + 1 + 1)}{3}$$

$$= \frac{3 - 0}{3} \quad ② \boxed{= 1}$$

① = ②

$3c^2 - 2c - 1 = 1$

$3c^2 - 2c - 2 = 0$

$\overset{a}{3}c^2 \; \overset{b}{-2}c \; \overset{c}{-2}$

$a = 3$

$b = -2$

$c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(-2)$

$= 4 + 24 \boxed{= 28} > 0$

$c_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{28}}{6} = \boxed{\frac{2 + \sqrt{28}}{6}}$

$c_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{28}}{6} = \boxed{\frac{2 - \sqrt{28}}{6}}$

Date: Subject:

3.8 Antiderivatives P:197 التكامل

Power Rule : (P.R)

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1}$$

ثابت

مهمة لا تنساها

Example 1 : P 197 Find an antiderivatives of the function $f(x) = 4x^3$ on $(-\infty, \infty)$

$$\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx$$

$$\overset{P.R}{=} 4 \cdot \frac{x^4}{4} + C$$

$$\boxed{= x^4 + C}\ , C \in \mathbb{R}$$

Example 4 . P 200

$$\boxed{\int 1\,dx = x + C}$$

$$\boxed{\int k\,dx = k\int 1\,dx = kx + C}$$

اختصار

$$\boxed{\int k\,dx = kx + C}$$

ⓐ $\int (3x^2 + 4x)\,dx$

$$= 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx$$

$$= \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{4}^{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} + C$$

$$\boxed{= x^3 + 2x^2 + C}$$

$\frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2}$

ⓑ $\int (u^{3/2} - 3u + 14)\,du$

$$\overset{P.R}{=} \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3 \cdot \frac{u^2}{2} + 14u + C$$

مقلوب

$$\boxed{= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}u^2 + 14u + C}$$

Date: Subject:

ⓒ $\int \left(\frac{1}{t^2} + \sqrt{t}\right) dt =$

$= \int \left(t^{-2} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt$

PR $\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

C
مهمة !!
لا تنساها

$= \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$\boxed{= -t^{-1} + \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C}$ or $\boxed{= -\frac{1}{t} + \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C}$ تحويل صيغة فقط

Generalized Power Rule (G.P.R)

f: function

$$f^n(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$n \neq -1$

Example 5 : P 201

ⓐ $\int \underbrace{(x^4+3x)^{30}}_{f(x)} \underbrace{(4x^3+3)}_{f'(x)} dx \overset{G.P.R}{=}$

$f(x) = x^4+3x$

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3+3$

$\boxed{= \frac{(x^4+3x)^{31}}{31} + C}$

ⓑ $\int \underbrace{\sin^{10}(x)}_{f^{10}(x)} \underbrace{\cos x}_{f'(x)}\, dx$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$\boxed{= \frac{\sin^{11} x}{11} + C}$

أخرجنا سالب (−)

ملاحظة / عشان ما تتغير قيمة التكامل

Date: Subject:

ⓒ $-\int -\sin(x) \cdot \cos^{10}(x)\, dx =$

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$\boxed{= -\dfrac{\cos^{11}(x)}{11} + C}$

Example 6 , P 201

ⓐ $\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12)\, dx =$

$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 6x \\ f'(x) &= 3x^2 + 6 \end{aligned}}$

$= \int (x^3 + 6x)^5 \cdot 2(3x^2 + 6)\, dx$

$= 2 \int \underbrace{(x^3 + 6x)^5}_{f^5(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 + 6)}_{f'(x)}\, dx$

$\overset{G.P.}{=} 2 \cdot \dfrac{(x^3 + 6x)^6}{6} + C$

$\boxed{= \dfrac{(x^3 + 6x)^6}{3} + C}$

ضربنا في $\frac{1}{2}$ عشان ما نأثر في قيمة التكامل

ⓑ $\int (x^2 + 4)^{10}\, \frac{1}{2} \cdot 2x\, dx =$

$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}}$

$= \frac{1}{2} \int \underbrace{(x^2 + 4)^{10}}_{f^{10}(x)} \cdot \underbrace{2x}_{f'(x)}\, dx$

$\overset{G.P.R}{=} \frac{1}{2} \cdot \dfrac{(x^2 + 4)^{11}}{11} + C$

$\boxed{= \dfrac{(x^2 + 4)^{11}}{22} + C}$

Date: معادلات تفاضلية Subject:

3.9 Introduction to Differential Equations. P: 203

Example 1 P204

Solve $\frac{dy}{dx} = 2x$ when $y = 2$, $x = -1$

Solution:

وسطين في طرفين

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1}$$

$$\Rightarrow dy = 2x\,dx$$

$$\Rightarrow \int 1\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\Rightarrow y = \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} + c$$

$$\boxed{\Rightarrow y = x^2 + c}$$

At $(-1, 2)$

$$2 = (-1)^2 + c$$

$$2 = 1 + c$$

$$1 = c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$\therefore \boxed{y = x^2 + 1}$$

Example 2 P 205 $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3x^2}{y^2}$ $y = 6$, $x = 0$

$$\Rightarrow y^2\,dy = x + 3x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \int y^2\,dy = \int x + 3x^2\,dx$$

$$\times 3 \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + c$$

ضرب في 3 لنتخلص من 3 في المقام

$$\Rightarrow y^3 = \frac{3x^2}{2} + 3x^3 + c \qquad (0, 6)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + c}}, \ c \in R$$

3
6
6

$$6 = \sqrt[3]{0 + 0 + c}$$

216

$$(6)^3 = c \Rightarrow \boxed{c = 216}$$

$$45 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3x^3 + 216}}$$

Date: Subject:

4.1 Introduction To Area

a: ثابت

$a+a+a=3a$

$\underbrace{a+a+\dots+a}_{15}=15a$

$\underbrace{a+a+\dots+a}_{n} = na = \sum_{i=1}^{n} a$ ← Sigma

$i=1 \quad i=2 \quad n \quad i=n$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a = na}$$

Example 1: P 217 Suppose that $\sum_{i=1}^{100} a_i = 60$ and $\sum_{i=1}^{100} b_i = 11$ Calulate $\sum_{i=1}^{100} (2a_i - 3b_i + 4)$

$$= \sum_{i=1}^{100} 2a_i - \sum_{i=1}^{100} 3b_i + \sum_{i=1}^{100} 4$$

$$= 2\underbrace{\sum_{i=1}^{100} a_i}_{=60} - 3\underbrace{\sum_{i=1}^{100} b_i}_{=11} + \sum_{i=1}^{100} 4$$

$$= 2\times 60 - 3\times 11 + 100\times 4$$

$$= 120 - 33 + 400$$

$$\boxed{=487}$$

Date: Subject:

① $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

Example 3 : P 218

Find a formula for $\sum_{i=1}^{n} (j+2)(j-5)$.

$= \sum_{i=1}^{n} (j+2)(j-5)$

$= \sum_{i=1}^{n} (j^2-5j+2j-10)$

$= \sum_{i=1}^{n} (j^2-3j-10)$

$= \sum_{i=1}^{n} j^2 - 3\sum_{i=1}^{n} j - \sum_{i=1}^{n} 10$ ② ①

$$\boxed{= \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6} - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 10n}$$

Date: Subject:

4.2 The Definite Integral P: 224

a, b numburs

① $\int_b^a f(x)\,dx = 0$

② $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

ارجع:
له مثال في ورقة Review
Q: 29

③ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ $\quad a \to c \to b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

تكامل antiderivative of f $= F(b) - F(a)$

Example:

① $\int_0^1 (x^2 + x - 1)\,dx =$

② $= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$

فوق ← تحت

نعوض

نعوض

$= \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\cancel{\frac{0^3}{3}} + \frac{0^2}{2} - 0\right)$

$= \frac{1}{3}_{(\times 2)} + \frac{1}{2}_{(\times 3)} - \frac{1}{1}_{(\times 6)}$

توحيد مقامات

$= \frac{2+3-6}{6} = \boxed{-\frac{1}{6}}$

Date: Subject:

4.3 The first fundamental Theorem of Calculus. P. 238

تفاضل وتكامل

(F.F.T.C)

F.F.TC : دالة

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{u(x)} f(t)\,dt\right) = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

ثابت

Example 1 : P238 Find $\frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{x} t^3\,dt\right] =$

$$= x^3 \cdot x' \Rightarrow x^3 \cdot 1 \boxed{= x^3}$$

Example 2 : P238 (مع تعديل)

Find $\frac{d}{dx}\left[\int_{x}^{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$

يوجد سالب لأن مكان الفوق (2) ثابت تحت
* نقدر نقلبها لأنها لا بد من تغيير

$$= -\frac{d}{dx}\left[\int_{2}^{x} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$$

$$\boxed{= -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2+17}} \cdot 1} \rightarrow (x)'$$ مشتقة x

Example 4 : P238 Find $\frac{d}{dx}\left[\int_{x^2}^{1} (3t-1)\,dt\right]$ D_x = أو

$$= -D_x\left[\int_{1}^{x^2} (3t-1)\,dt\right]$$

$$= -(3x^2-1) \cdot (x^2)'$$

$$= -(3x^2-1) \cdot (2x)$$

$$\boxed{= -6x^3+2x}$$

$= (-3x^2+1)(2x)$

$= -6x^3+2x$

The distance traveled by a bicycle with wheels of radius **30 centimeters** when the wheels turn through **100 revolutions** is **6000 π centimeters**

a) **True** b) **False**

Suppose that $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 5$, $\int_{-1}^{3} g(x)dx = 3$ and $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2$. Answer the questions

Question 29 $\int_{2}^{3} f(x)dx = 3$

$a)$ True ☐ $b)$ False ☐