# حل المسائل

## حل المسألة الأولى

1) نصتنع الدالة $g(x)$ حيث: $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$g(x)=\frac{\frac{x^2-3x+6}{x-1}-4}{x-2}=\frac{x^2-7x+10}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x-5)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-5}{x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} g(x)=-3$$

وبالتالي الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عندما $x=2$.

2)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=-\infty,\ \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=+\infty$$

وبالتالي فإن المستقيم $x=1$ مقارب موازي للمحور $xx'$،

ووضع الخط $C$ بالنسبة للمقارب هو:

على المجال $]-\infty,1[$ : الخط $C$ على يسار المقارب.

على المجال $]1,+\infty[$ : الخط $C$ على يمين المقارب.

3) نوجد مشتق الدالة $f$ :

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow$$

$$x=-1, x=3\Rightarrow f(-1)=-5, f(3)=3$$

وبالتالي يمكن تنظيم الجدول التالي:

| $x$ | $-\infty$ $\quad -1$ $\quad 1$ | $\quad 3$ $\quad 1$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ $\quad 0$ $\quad -$ | $-$ $\quad 0$ $\quad +$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow -5 \searrow -\infty$ | $+\infty \searrow 3 \nearrow +\infty$ |

$f(-1)=-5$ قيمة كبرى محلياً على المجال $]-\infty,1[$

و $f(3)=3$ قيمة صغرى محلياً على المجال $]1,+\infty[$ .

4) إن الدالة $f$ تكتب بالشكل: $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-1}$

ولإيجاد معادلة المنحني التكاملي نوجد $\int f(x)dx$

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(x-2+\frac{4}{x-1}\right)dx$$

$$=x^2-2x+4\ln|x-1|+c$$

ولنوجد قيمة الثابت التي تحقق العلاقة: $F(2)=1 \Leftarrow$

$c=1$ وبالتالي فإن معادلة المنحني التكاملي:

$$F(x)=x^2-2x+4\ln|x-1|+1$$

5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0$

وبالتالي فإن $\Delta$ مقارب مائل للخط $C$ .. الوضع النسبي:

على المجال $]-\infty,1[$ الخط $C$ تحت المقارب،

وعلى المجال $]1,+\infty[$ الخط $C$ فوق المقارب.

6) ميل المماسين يساوي $-3$ ولكن ميل المماس للخط $C$ هو القيمة العددية للمشتق $f'$ :

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=-3\Rightarrow$$

$$x=0\ ,\ x=2\Rightarrow f(0)=-6\ ,\ f(2)=4$$

وبالتالي نقطتي التماس هما: $(2,4)$ , $(0,-6)$ أما معادلتي المماسين : المماس في النقطة $(0,-6)$ :

$$3x+y+6=0$$

المماس في النقطة $(2,4)$ : $3x+y-10=0$

7) $f(2)=4\ ,\ h(2)=4$ أي أن النقطة $(2,4)$ تنتمي إلى المنحنيين $C\,,C'$ ووجدنا سابقاً أن $f'(2)=-3$

ولنوجد $h'(2)$: $h'(x)=2x-7 \Rightarrow h'(2)=-3$

أي أن $f'(2)=h'(2)$ وبالتالي المنحنيان $C\,,C'$ متماسان في النقطة $(2,4)$ وميل المماس المشترك هو: $m=-3$

معادلته: $y-4=-3(x-2) \Rightarrow 3x+y-10=0$

8) ميل المماس هو القيمة العددية للمشتق وبالتالي فالقيمة التقريبية المطلوبة هي: $f'(0,2)$ حيث:

$$f'(a+h)=f'(a)+f''(a).h$$

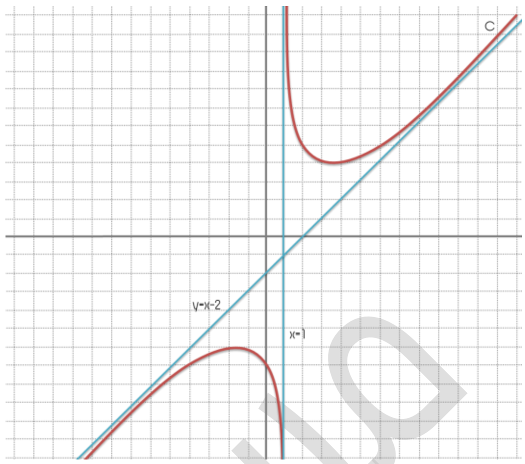
$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}$$

$$f'(0+0,2)\approx f'(0)+f''(0).(0,2)$$

$$\approx -3+(-2-6).(0,2)$$

$$\approx +6,3$$

**(9**




**(10** بعد كتابة العلاقة بدلالة $\lambda$ نجد: $\lambda = f(x)$ ندرس تقاطع $C$ مع المستقيم $y = \lambda$ ونميّز الحالات التالية:

عندما: $\lambda \in ]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[$ للمعادلة حلان مختلفان.

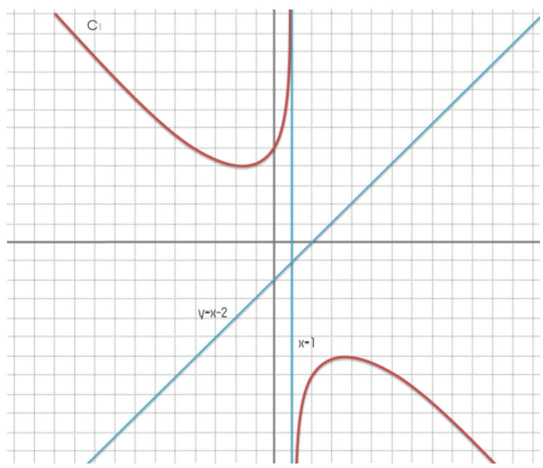
عندما: $\lambda \in \{-5, 3\}$ للمعادلة حل وحيد.

عندما: $\lambda \in ]-5, 3[$ ليس للمعادلة حلول.

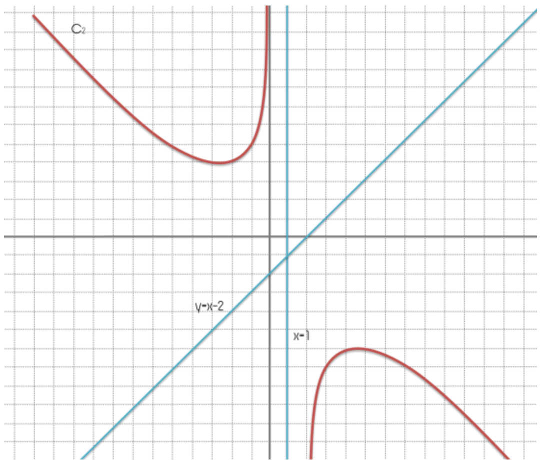
**(11** قانون معدّل التغيّر هو: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt} = f'(x).\frac{dx}{dt}$

حيث: $\frac{dy}{dt} = f'(4).\frac{dx}{dt} = \frac{5}{9}.\frac{1}{10} = \frac{5}{90} \approx 0,05\ cm.s^{-1}$

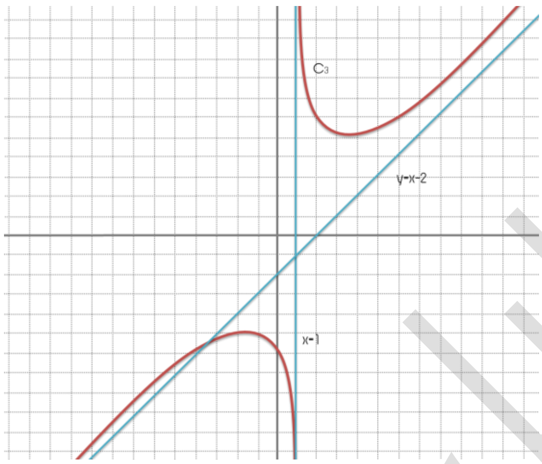
**(12** بملاحظة ان : $f_1(x) = -f(x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $xx'$ ويكون رسمه بالشكل:




**(13** بملاحظة ان : $f_2(x) = f(-x)$ أي أن الخط $C_2$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $yy'$ ويكون رسمه بالشكل:




**(14** بملاحظة أن: $f_3(x) = f(x) + 1$ أي أن الخط $C_3$ ينتج عن انسحاب الخط $C$ وحدة للأعلى $(x, y) \to (x, y + 1)$ ويكون رسمه بالشكل:

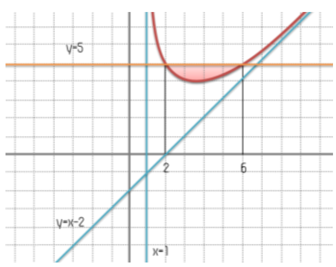



**(15** نلاحظ أن نقاط نقاطع المستقيم $y = 5$ مع المنحني $C$ هي: $(6, 5)$ , $(2, 5)$ وبالتالي فإن مساحة السطح المطلوب تعطى بالعلاقة: $S = \int_2^6 (y_\Delta - f(x))dx$

$$S = \int_2^6 (y_\Delta - f(x))dx = \int_2^6 \left(5 - (x - 2 + \frac{4}{x-1})\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 7x - \ln(x-1)^4\right]_2^6$$

$$S = \left(-18 + 42 + \ln 5^4\right) - \left(-2 + 14 + \ln 1^4\right) = 12 + \ln 625$$

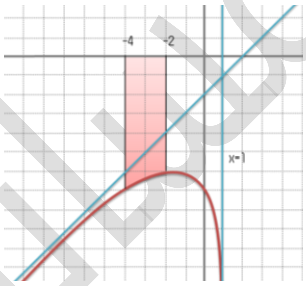


16) تعطى علاقة مساحة السطح المحصور بين $C$ والمحور $xx'$ والمستقيمين: $x=-2$ , $x=-4$ بالشكل:

$$S=-\int_{-4}^{-2} f(x)dx=-\int_{-4}^{-2}\left(x-2+\frac{4}{x-1}\right)dx$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x+\ln(1-x)^4\right]_{-4}^{-2}$$

$$S=-\left[(2+4+\ln 81)-(8+8+\ln 625)\right]=10+\ln\frac{625}{81}$$




**انتهى حل المسألةالأولى**

## حل المسألة الثانية

1) الدالة معرّفة على اجتماع المجالين: $]-\infty,0[\ ,\ ]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$$

وبالتالي فإن المستقيم $x=0$ مقارب موازي للمحور $xx'$ ،

ووضع الخط $C$ بالنسبة للمقارب هو:

على المجال $]-\infty,0[$ : الخط $C$ على يسار المقارب.

على المجال $]0,+\infty[$ : الخط $C$ على يمين المقارب.

نشتق الدالة $f(x)$ فنجد: $f'(x)=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{(e^x-e^{-x})^2}-3<0$

والدالة متناقصة تماماً

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

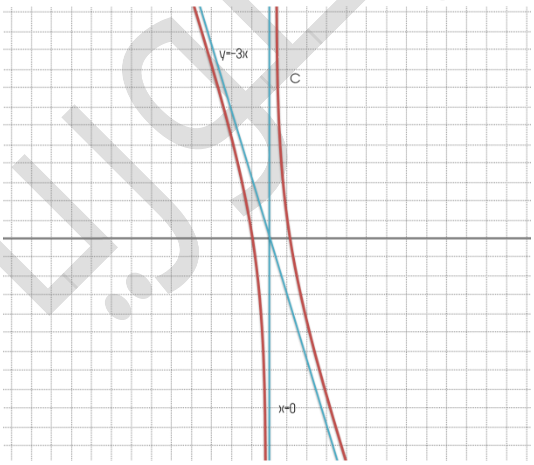
2) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}=0$

وبالتالي فإن $\Delta$ مقارب مائل للخط $C$ .. الوضع النسبي:

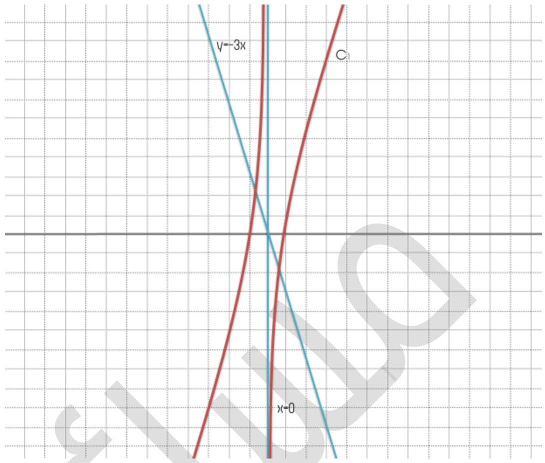
على المجال $]-\infty,0[$ الخط $C$ تحت المقارب،

وعلى المجال $]0,+\infty[$ الخط $C$ فوق المقارب.

3)



4) بملاحظة ان : $f_1(x) = f(-x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $yy'$ ويكون رسمه بالشكل:




انتهى حل المسألةالثانية

## حل المسألة الثالثة

1) الدالة معرّفة على $]-\infty, 1[$ وبحساب النهايات نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$$

وبالتالي فإن $x = 1$ مقارب يوازي $yy'$ على يمين الخط $C$.

2) ولنوجد مشتق الدالة $f$ حيث: $f'(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$

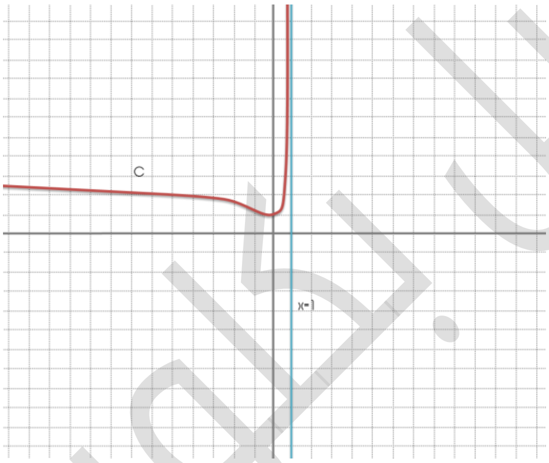
وبالتالي: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 0$ نأخذ فقط $x = 0$

حيث $f(0) = 1$ وبالتالي جدول تغيرات $f$:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

وبالتالي من جدول التغيرات نجد أن $f(0) = 1$ قيمة صغرى شاملة على مجموعة تعريفها.

3)



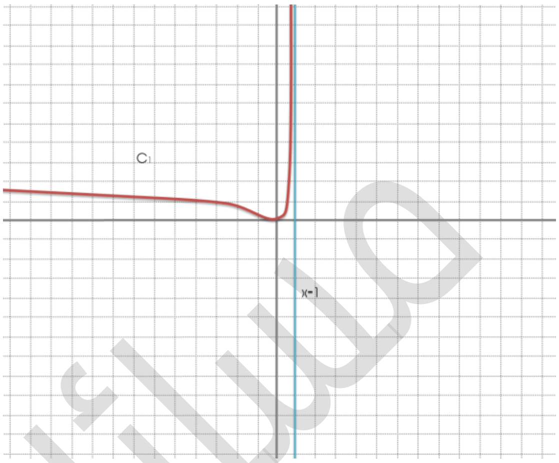

4) ليكن $C'$ الخط البياني للدالة: $g(x) = e^x - x$ ، أثبت أن $C, C'$ متماسان في النقطة $(0,1)$ واكتب معادلة المماس المشترك.

$f(0) = 1 \,,\; g(0) = 1$ أي أن النقطة $(0,1)$ تنتمي إلى المنحنيين $C, C'$ وجدنا سابقاً أن $f'(0) = 0$

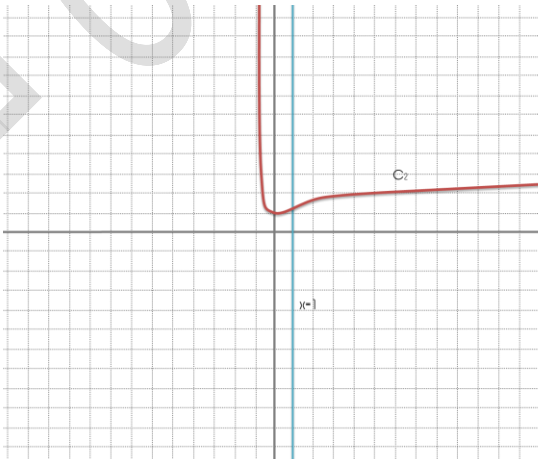
ولنوجد $g'(0)$: $g'(x) = e^x - 1 \Rightarrow g'(0) = 0$ أي أن $f'(2) = g'(2)$ وبالتالي المنحنيين $C, C'$ متماسان في النقطة $(0,1)$ وميل المماس المشترك هو: $m = 0$

معادلته: $y - 1 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 1$

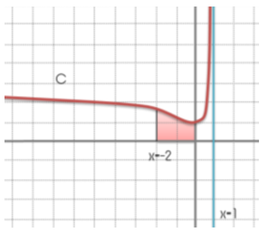
5) بملاحظة أن: $f_1(x) = f(x) - 1$ أي أن الخط $C_1$ ينتج عن انسحاب الخط $C$ وحدة للأسفل $(x,y) \to (x, y-1)$ ويكون رسمه بالشكل:



6) بملاحظة ان : $f_2(x) = f(-x)$ أي أن الخط $C_2$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $yy'$ ويكون رسمه بالشكل:



7)



$$S = \int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{0}\left(\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$= \left[-x - 2\ln(1-x) + x\ln(1-x)\right]_{-2}^{0}$$

$$= [0] - [2 - 2\ln(3) - 2\ln(3)] = 4\ln(3) - 2$$

**انتهى حل المسألةالثالثة**

## حل المسألة الرابعة

1) نصتنع الدالة $h(x)$ حيث: $h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$h(x) = \frac{x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 0}{x - 0} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 2$$

وبالتالي الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عندما $x = 0$.

2) شرطي التماس: $f'(x) = g'(x) = m\,,\ A \in C\,, C'$

$$g(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b \qquad g'(x) = -a.e^{-x}$$

$$\Rightarrow g'(0) = -a = f'(0) = 2 \Rightarrow a = -2, b = 2$$

$$\Rightarrow g(x) = -2.e^{-x} + 2$$

وبالتالي فإن ميل المماس المشترك $m = 2$ ومعادلته:

$$y = 3x$$

3) الدالة $f$ معرّفة على المجال $]-\infty, +\infty[$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

ولنوجد مشتق الدالة $f$:

$$f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \quad f'(x) > 0$$

وبالتالي فإن الدالة متزايدة تماماً على مجموعة تعريفها.

وبالتالي جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

الدالة g معرّفة على المجال $]-\infty, +\infty[$ وبالتالي:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$$

وبالتالي فإن $y = 2$ مقارب يوازي المحور $xx'$

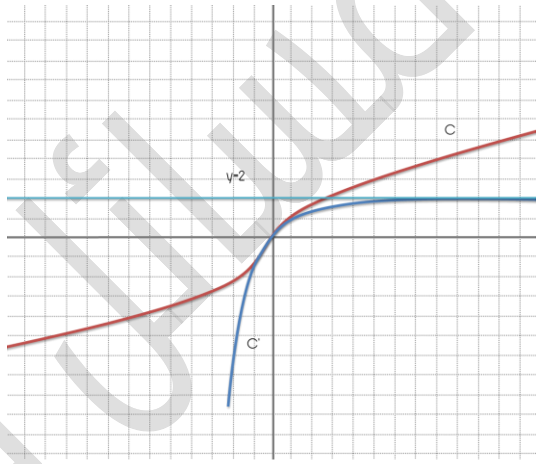
ولنوجد مشتق الدالة $f$: $g'(x) = 2e^{-x} > 0$

وبالتالي فإن الدالة متزايدة تماماً على مجموعة تعريفها.

وبالتالي جدول تغيرات الدالة g:

| $x$ | $-\infty$      $0$      $+\infty$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-\infty \nearrow 2$ |

4)




5)

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int_0^1 x\,dx+\underbrace{\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx}_{I}$$

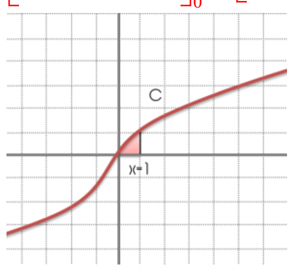
بإستخدام التكامل بالتعويض نوجد حل التكامل $(I)$ حيث:

$$y=x^2+1\Rightarrow dy=2xdx\Rightarrow dx=\frac{dy}{2x}$$

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{y}}dy=\sqrt{y}=\sqrt{x^2+1}$$

**ملاحظة:** وبالإمكان تحويله إلى مشتق الجذر مباشرة بضرب البسط والمقام بالعدد 2 فنحصل على مشتق ماداخل الجذر على ضعفي الجذر.

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\left[\frac{1}{2}+1\right]-[0+1]=\frac{1}{2}$$



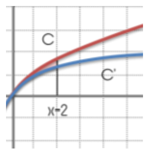

6)

$$S=\int_0^2(f(x)-g(x))dx=\int_0^2\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2e^{-x}-2\right)dx$$

$$S=\int_0^2\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2e^{-x}-2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+\sqrt{x^2+1}-2e^{-x}-2x\right]_0^2=$$

$$\left[2+\sqrt{5}-\frac{2}{e^2}-4\right]-[0+1-2]=\sqrt{5}-\frac{2}{e^2}-1$$




7) ميل المماس هو القيمة العددية للمشتق وبالتالي فالقيمة التقريبية المطلوبة هي: $g'(0,2)$ حيث: $g'(a+h)=g'(a)+g''(a).h$

$$g'(x)=2e^{-x}\ ,\ g''(x)=-2e^{-x}$$

$$g'(0+0,2)\approx g'(0)+g''(0).(0,2)$$

$$\approx -2+(-2).(0,2)\approx 2,4$$

8) قانون معدّل التغيّر هو: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}=f'(x).\frac{dx}{dt}$

حيث: $\frac{dy}{dt}=f'(0)\frac{dx}{dt}=0.(0,5)=0\ cm.s^{-1}$

9) نبرهن العلاقة باستخدام الإستقراء الرياضية:

- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n=1$ :

$$2(-1)^{1+1}.e^{-x}=2e^{-x}=g'(x)$$

والعلاقة صحيحة من أجل $n=1$

- نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n$ ونبرهن صحتها من اجل $n+1$.

نفرض أن $g^{(n)}(x)=2.(-1)^{n+1}.e^{-x}$ صحيحة ولنبرهن:

$$g^{(n+1)}(x)=2.(-1)^{n+2}.e^{-x}$$

$$g^{(n+1)}(x)=\left(g^{(n)}(x)\right)'=\left(2.(-1)^{n+1}.e^{-x}\right)'$$

$$=2.(-1)^{n+1}.\left(-e^{-x}\right)=2.(-1)^{n+1}.(-1).e^{-x}$$

$$=2.(-1)^{n+2}.e^{-x}$$

والعلاقة صحيحة من أجل $n+1$ وبالتالي هي صحيحة أياً يكن $n\in\mathbb{N}^*$.

**انتهى حل المسألةالرابعة**

## حل المسألة الخامسة

**1)** الدالة معرّفة على اجتماع المجالين: $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$$

وبالتالي فإن $x=-1$ مقارب للخط $C$ يوازي $yy'$ :

على المجال $]-\infty,-1[$ : الخط $C$ على يسار المقارب

على المجال $]-1,+\infty[$ : الخط $C$ على يمين المقارب

و $y=-2$ مقارب للخط $C$ يوازي $xx'$ :

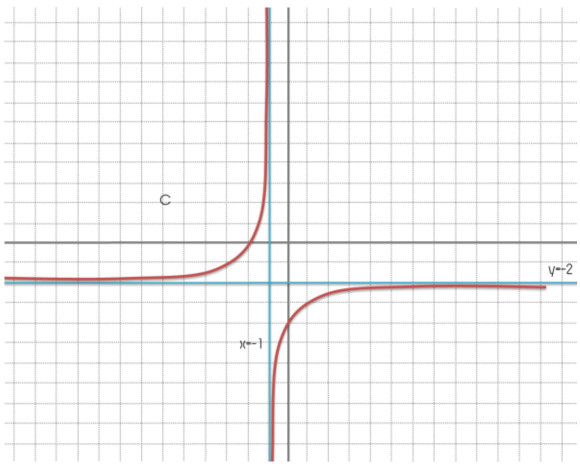
على المجال $]-\infty,-1[$ : الخط $C$ فوق المقارب

على المجال $]-1,+\infty[$ : الخط $C$ تحت المقارب

**2)** لنوجد الآن مشتق الدالة $f$: $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$

وبالتالي فإن الدالة متزايدة تماماً على مجموعة تعريفها.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ | | $-\infty \nearrow +\infty$ |




**3)** $f(0)=-4\,,\ g(0)=-4$ أي أن النقطة $A(0,-4)$

تنتمي إلى المنحنيين $C\,,C'$ لدينا $f'(0)=2$

ولنوجد $g'(2)$: $g'(x)=2e^x \Rightarrow g'(0)=2$ أي أن

$f'(2)=g'(2)$ وبالتالي المنحنيين $C\,,C'$ متماسان في النقطة

$(0,-4)$ وميل المماس المشترك هو: $m=2$

معادلته: $y+4=2(x-0) \Rightarrow y-2x+4=0$

**4)** مساحة السطح $S=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{-2x-4}{x+1}\right)dx$

نكامل بالتعويض بفرض: $y=x+1$ فيكون: $dy=dx$

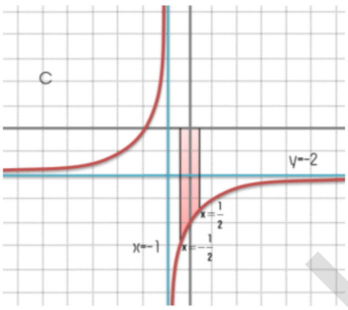
وحدود التكامل: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2},\ x=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

نعوّض في التكامل فنجد:

$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{-2(y-1)-4}{y}\right)dy=-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-2-\frac{1}{y}\right)dy$$

$$=-\left[-(2y+\ln y)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\left[3+\ln\frac{3}{2}\right]-\left[1+\ln\frac{1}{2}\right]$$

$$=2+\ln 3$$




**انتهى حل المسألةالخامسة**

## حل المسألة السادسة

**1)** الدّالة $f$ معرّفة على $[0,+\infty[$ :

$$f(0)=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$$

نحن أمام حالة عدم تعيين ، يجب إزالتها (نضرب بالمرافق):

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right)}{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right)}=$$

$$\frac{x^2-\frac{1}{9}x^3}{\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}}=\frac{x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{9}\right)}{x^3\left(\sqrt{\frac{1}{x^5}}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{0-\frac{1}{9}}{0+0}=-\infty$$

نوجد المشتق:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3x^2}{6\sqrt{x^3}} \quad : f'(x)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3x^2}{6\sqrt{x^3}}-\Rightarrow 6x\sqrt{x}-6x^2\sqrt{x}=0$$

$$6x\sqrt{x}(1-x)=0\Rightarrow x=0,x=1\Rightarrow f(0)=0$$

$$f(1)=\frac{2}{3}$$

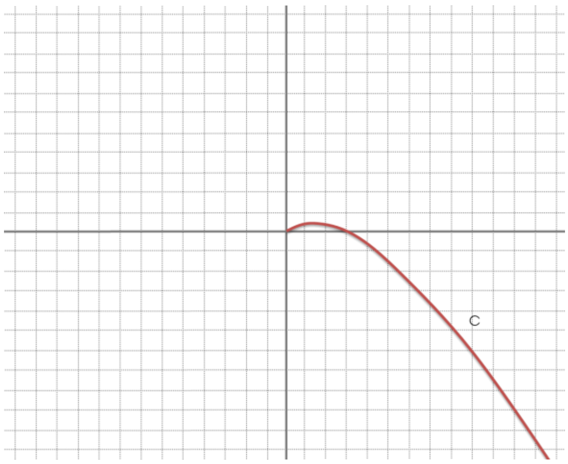
فيكون جدول تغيرات $f$:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{2}{3}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

من جدول التغيرات نلاحظ أن $f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً على المجال $[0,1[$.

وأن $f(1)=\frac{2}{3}$ قيمة كبرى شاملة على مجموعة التعريف.

**(2**




**3)** بتحويل الأس إلى جذر نجد:

$$\sqrt{x^3}+3\alpha-3\sqrt{x}=0\Rightarrow 3\alpha=3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}$$

$$\Rightarrow \alpha=\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\Rightarrow \alpha=f(x)$$

ندرس تقاطع $C$ مع المستقيم $y=\alpha$ ونميّز الحالات التالية:

عندما: $\alpha\in\left[0,\frac{2}{3}\right[$ للمعادلة حلان مختلفان.

عندما: $\alpha\in\,]-\infty,0[\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}$ للمعادلة حل وحيد.

عندما: $\alpha\in\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$ ليس للمعادلة حلول.

**4)** بإجراء الحساب المناسب على المتراجحة نجد:

$$\sqrt{x^3}\geq 3\sqrt{x}-2\Rightarrow 2\geq 3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\geq\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\Rightarrow f(x)\leq\frac{2}{3}$$

نلاحظ أن المتراجحة محققة مهما تكن: $x\in[0,+\infty[$ .

**5)** نوجد نقاط تقاطع $C$ مع المحور $xx'$ بحل المعادلة:

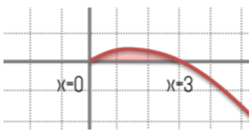
$\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}=0\Rightarrow x=0,x=3$ ويكون التكامل:

$$S=\int_0^3 f(x).dx=\int_1^3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right)dx=\int_0^3\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_1^3=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{5}\sqrt{x^5}\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{27}-\frac{1}{5}\sqrt{243}\right]-\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right]=\left[\frac{2}{3}.3\sqrt{3}-\frac{1}{5}.9\sqrt{3}\right]-\frac{7}{15}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{5}-\frac{7}{15}$$



**6) قانون حساب طول القوس:** $L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$y'=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y'^2=\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2=\frac{1-2x+x^2}{4x}$$

$$1+y'^2=1+\frac{1-2x+x^2}{4x}=\frac{(1+x)^2}{4x}$$

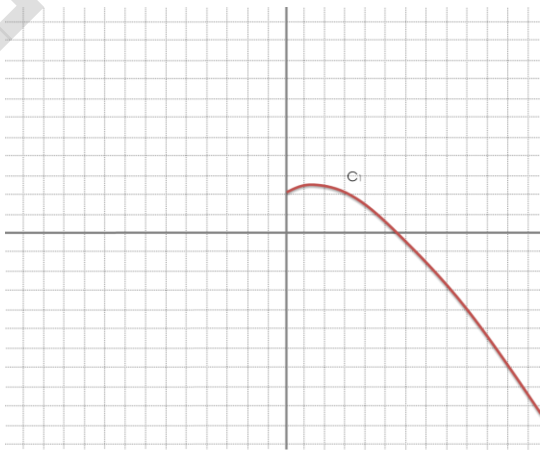
$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1+x}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$L=\int_1^{16}\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}\left[2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^{16}$$

$$=\left[\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^{16}=\left[4+\frac{64}{3}\right]-\left[1+\frac{1}{3}\right]=24$$

**7) بملاحظة أن: $f_1(x)=f(x)+2$ أي أن الخط $C_1$ ينتج عن انسحاب الخط $C$ وحدة للأسفل $(x,y)\to(x,y+3)$**

**ويكون رسمه بالشكل:**




## انتهى حل المسألةالسادسة

## حل المسألة السابعة

**1) الدالة $f$ معرّفة على اجتماع المجالات:**

$$]-\infty,0[\ ,\ ]0,3[\ ,\ ]3,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=-\infty\quad,\quad\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}3}f(x)=+\infty\quad,\quad\lim_{x\xrightarrow{>}3}f(x)=+\infty$$

**وبالتالي فإن $y=0$ مقارب للخط $C$ منطبق على $xx'$**

**و $x=0$ مقارب للخط $C$ منطبق على $yy'$**

**و $x=3$ مقارب للخط $C$ يوازي $yy'$**

**2) نوجد مشتق الدالة $f$:**

$$f'(x)=-\frac{9\left(3x^2-12x+9\right)}{x^3-6x^2+9x}=-\frac{27\left(x^2-4x+3\right)}{x^3-6x^2+9x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$$

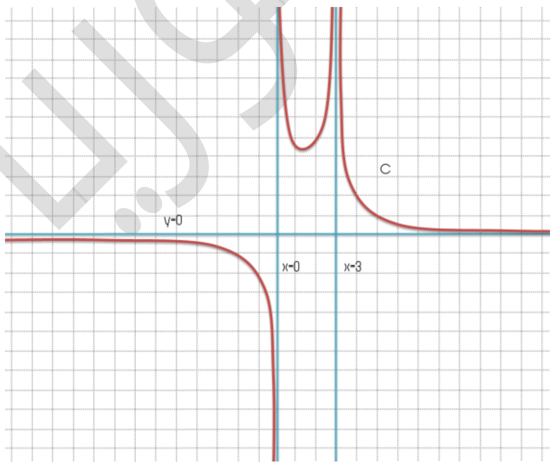
$$\Rightarrow x=1,\underbrace{x=3}_{\text{مرفوضة}}\Rightarrow f(1)=\frac{9}{4}$$

**ويكون جدول تغيرات $f$ بالشكل:**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{9}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

**من جدول التغيرات نجد أن $f(1)=\frac{9}{4}$ قيمة صغرى محلياً على المجال $]0,3[$.**

**3)**



**(4**

$$f(x)=\frac{9}{x^3-6x^2+9x}=\frac{9}{x(x^3-6x+9)}$$

$$=\frac{9}{x(x-3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x-3}$$

لحساب قيمة $A$ نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $x$ ونوجد

النهاية عندما $x\to 0$ فنجد: $A=1$

لحساب قيمة $B$ نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ $(x-3)^2$

ونوجد النهاية عندما $x\to 3$ فنجد: $B=3$

لحساب قيمة $C$ نعوض قيم $A, B$ ونأخذ قيمة اختيارية لـ $x=2$

$$\frac{9}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{1}+\frac{C}{-1}\Rightarrow C=-1$$

وتصبح الدالة بالشكل: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{1}{x-3}$

ولنوجد $\int f(x)dx$ على المجال $]0,3[$

$$\int f(x)dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{3}{(x-3)^2}dx-\int\frac{1}{x-3}dx$$

$$=\ln x-\frac{3}{x-3}-\ln(3-x)+c$$

5) بملاحظة ان : $f_1(x)=f(-x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $yy'$ .

**انتهى حل المسألةالسابعة**

## حل المسألة الثامنة

**1)** الدالة معرّفة على اجتماع المجالين $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

يكون للدالة نهاية عند $0$ إذا كان:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$$

نعلم أن: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ وبالتالي فإن $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$

$$f(x)=-e^x\times\frac{x}{1-e^x}\Rightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-1$$

أي أن للدالة نهاية عند $(0)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

ويكون $y=0$ مستقيم مقارب للخط C منطبق على $xx'$

**2)** ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها.

نوجد المشتق:

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(1-e^x)+xe^{2x}}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x(1-e^x+x)}{(1-e^x)^2}<0$$

والدالة متناقصة تماماً على مجموعة تعريفها

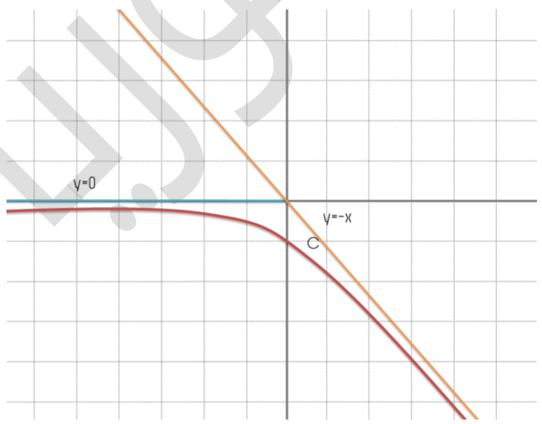
ويكون جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ |
| $f(x)$ | $0 \searrow -1$ | ‖ | $-1 \searrow -\infty$ |

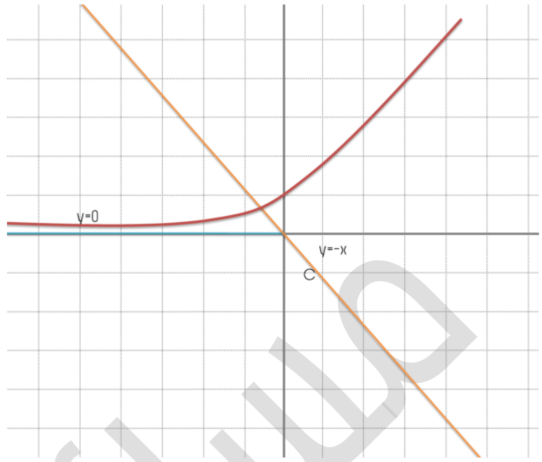
**3)** $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-e^x}=0$

أي ان $\Delta$ مقارب مائل للخط $C$ في جوار $+\infty$

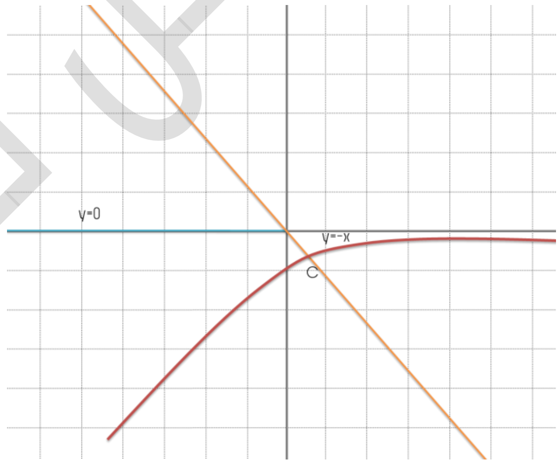
**4)**



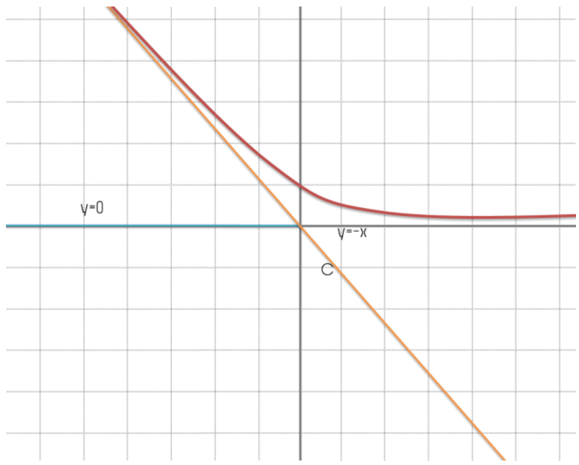
**5)** نلاحظ ان $f_1(x)=-f(x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $xx'$ ، ويكون رسمه بالشكل:




**6)** نلاحظ ان $f_2(x)=f(-x)$ أي أن الخط $C_2$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $yy'$، ويكون رسمه بالشكل:




**7)** نلاحظ ان $f_3(x)=-f(-x)$ أي أن الخط $C_3$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة لمبدأ الإحداثيات ويكون رسمه بالشكل:




**8)** بعد فك الأقواس نلاحظ ان المتراجحة تؤول إلى الشكل:

$\dfrac{xe^x}{1-e^x}<0$ أي أن $f(x)<0$ ومن جدول تغيرات $f$ نجد ان العلاقة صحيحة مها تكن $x\in\mathbb{R}^*$ .

**9)**

$$I=\int x(1-e^x)f(x).dx=\int x(1-e^x).\frac{xe^x}{1-e^x}dx$$

$$\int x^2e^x dx$$

$$u=x^2 \Rightarrow u'=2x \quad , \quad v'=e^x \Rightarrow v=e^x$$

$$I=x^2e^x-2\underbrace{\int xe^x dx}_{I_1} \Rightarrow$$

$$u_1=x \Rightarrow u_1'=1 \quad ,v_1=e^x \Rightarrow v_1'=e^x$$

$$I_1=xe^x-\int e^x dx=e^x(x-1)$$

$$\Rightarrow I=e^x(x^2-2x+2)$$

انتهى حل المسألةالثامنة

## حل المسألة التاسعة

**1)** الدالة معرّفة على اجتماع المجالين: $]-\infty,-1[\,,\,]-1,1[$

**2)**
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$$

وبالتالي: $x=1$ مقارب موازي للمحور $yy'$ في جوار $-\infty$

$x=-1$ مقارب موازي للمحور $yy'$ في جوار $-\infty\,,+\infty$

$y=0$ مقارب منطبق على المحور $xx'$ في جوار $-\infty$

**3)** نوجد مشتق الدّالة $f$ :

$$f'(x)=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\left(x^2-1\right)-2x\sqrt{1-x}}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$=\frac{-\left(x^2-1\right)-4x(1-x)}{2\sqrt{1-x}\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-x^2+1-4x+4x^2}{2\sqrt{1-x}\left(x^2-1\right)^2}$$
$$=\frac{3x^2-4x+1}{2\sqrt{1-x}\left(x^2-1\right)^2}=\frac{(x-1)(3x-1)}{2\sqrt{1-x}\left(x^2-1\right)^2}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow \underbrace{x=1}_{\text{مرفوضة}}:x=\frac{1}{3}\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=-\sqrt{\frac{27}{32}}$$

ويكون جدول تغيرات $f$ بالشكل:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-\sqrt{\frac{27}{32}}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ |

**4)**
$$I_1=\int\frac{xf(x)}{\sqrt{1-x}}dx=\int\frac{x}{x^2-1}dx=\int\frac{x}{(x-1)(x+1)}dx$$
$$\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ$(x-1)$ ونوجد النهاية عندما x تسعى إلى (1) فنجد $A=\frac{1}{2}$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ$(x+1)$ ونوجد النهاية عندما x تسعى إلى (-1) فنجد $B=\frac{1}{2}$ ..... فيكون التكامل:

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+c=\ln\sqrt{(1-x)(x+1)}+c$$

$$I_2=\int 2\sqrt{1-x}\,f'(x)dx=\int\frac{(x-1)(3x-1)}{\left(x^2-1\right)^2}dx$$
$$=\int\frac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=\int\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)^2}dx\ :$$
$$\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $(x-1)$ ونوجد النهاية عندما x تسعى إلى (1) فنجد $A=\frac{1}{2}$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $(x+1)^2$ ونوجد النهاية عندما x تسعى إلى (-1) فنجد $C=2$

بعد تعويض قيمة $A.C$ وتعويض قيمة اختيارية لـ$x=0$ نجد: $B=-\frac{1}{2}$

$$I_2=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+2\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}+c$$
$$=\ln\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}-\frac{2}{x+1}+c$$

**5)** نلاحظ ان $f_1(x)=-f(-x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

**انتهى حل المسألةالتاسعة**

## حل المسألة العاشرة

1) الدّالة معرّفة على المجال $]0,+\infty[$ :

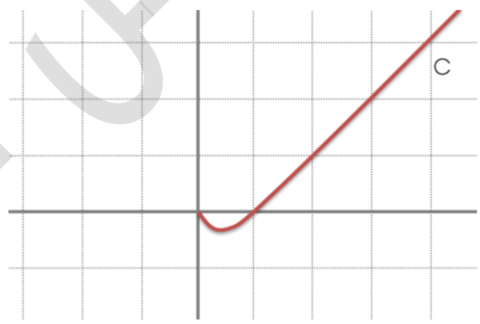
$$\lim_{x \to 0^{>}} f(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

لنوجد مشتق الدالة:

$$f'(x)=\ln x+1 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{e} : f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$$

ويكون جدول تغيرات الدالة $f$ بالشكل:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




2) ميل المماس هو $m=1$ وبالتالي فإن : $f'(x_0)=1$

$f(1)=0 \Leftarrow x=1 \Leftarrow \ln x=0 \Leftarrow$ فتكون نقطة التماس: $(1,0)$ ومعادلة المماس هي: $y=x-1$

3) $g(1)=0 \Rightarrow ae+b=0 \Rightarrow b=-ae$

$$g'(1)=1 \Rightarrow ae=1 \Rightarrow a=\frac{1}{e} \Rightarrow b=-1$$

وتصبح الدالة بالشكل: $g(x)=e^{x-1}-1$ خطها البياني $C'$.

4) $m(1,2) \approx f'(1)+f''(1)(0,2)$

$$f'(1)=1 \ , \ f''(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f''(1)=1$$

$m(1,2) \approx f'(1)+f''(1)(0,2)=1+0,2=1,2$

5) نضرب طرفي المتراجحة بـ $x$ على فنجد: $x\ln x+\frac{1}{e} \geq 0$

تصبح المتراجحة: $f(x) \geq -\frac{1}{e} \Leftarrow x\ln x \geq -\frac{1}{e}$

وبالتالي من جدول تغيرات $f$ نلاحظ ان المتراجحة صحيحة مهما تكن: $x \in ]0,+\infty[$

6) $\frac{\lambda}{x}=\ln x \Rightarrow \lambda = x\ln x = f(x)$

وبالتالي فإن حلول المعادلة هي:

$\left]-\infty,-\frac{1}{e}\right[$ : ليس للمعادلة حل.

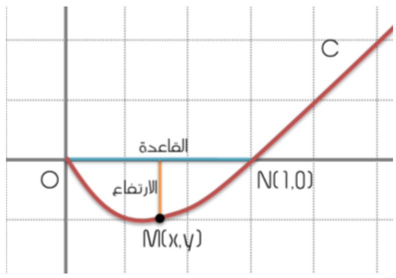
$\left]-\frac{1}{e},0\right[$ : للمعادلة حلين مختلفين.

$[0,+\infty[ \cup \left\{-\frac{1}{e}\right\}$ : للمعادلة حل وحيد.

7) نلاحظ ان $f_1(x)=-f(-x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

8) نلاحظ ان $f_2(x)=f(x)+1$ أي أن الخط $C_2$ ينتج عن انسحاب الخط $C$ بمقدار واحد إلى اليمين.

9) نقطة تقاطع الخط $C$ مع المحور $xx'$ هي: $N(1,0)$




$$S(x)=\frac{1}{2}ON.h=\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}x\ln x \Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$y=e \Rightarrow x=e \Rightarrow \left.\frac{dS}{dx}\right|_{x=e}=\left.\frac{\ln x+1}{2}\right|_{x=e}=1$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}cm^2.s^{-1}$$

10) $S(x)=\frac{1}{2}x\ln x \quad : \quad x \in ]0,1[$

$\lim_{x \to 0^{>}} S(x)=0 \quad , \quad \lim_{x\to 1} S(x)=0$ أما المشتق:

$$S'(x)=\frac{\ln x+1}{2} \Rightarrow S'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{e} : S\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2e}$$

ويكون جدول تغيرات $S(x)$ بالشكل:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $S(x)$ | ‖ $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2e}$ | $\nearrow$ | $0$ |

مساحة المثلث $OMN$ أكبر مايمكن عند النقطة $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$

ومساحته في هذه النقطة: $S(x)=\frac{1}{2e}$

**11)** نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=2$ :

$$f''(x)=\frac{1}{x}=(-1)^2\frac{0!}{x^1}$$

نفرض ان العلاقة صحيحة من أجل $n=k$ أي أن:

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{(k-2)!}{x^{k-1}}$$

ولنبرهن صحة العلاقة من أجل $n=k+1$ :

$$f^{(k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}$$

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^k\frac{(k-2)!}{x^{k-1}}\right)'$$

$$=(-1)^k(k-2)!\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)'=(-1)^k(k-2)!\left(x^{-(k-1)}\right)'$$

$$=(-1)^k(k-2)!(-1)(k-1)x^{-(k-1)-1}$$

$$=(-1)^{k+1}(k-1)!x^{-k}=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}$$

وبالتالي العلاقة صحيحة من اجل $n=k+1$ فهي صحيحة مهما تكن $n\geq 2$.

**انتهى حل المسألةالعاشرة**

## حل المسألة الحادية عشر

**1)** الدالة معرّفة على المجال $]1,+\infty[$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

وبالتالي فإن $x=1$ مقارب موازي للمحور $yy'$ في جوار $+\infty$

و $y=0$ مقارب منطبق على المحور $xx'$ في جوار $+\infty$

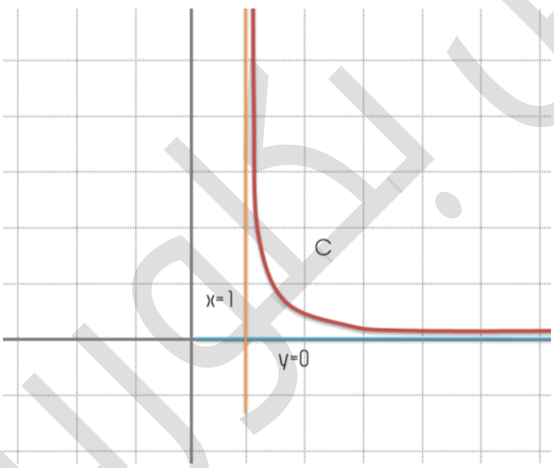
**2)** نوجد مشتق الدالة $f$ :

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=-\frac{2}{(x-1)(x+1)}<0$$

والدالة متناقصة تماماً على مجموعة التعريف. ويكون جدول التغيرات:

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

**3)**




**4)**

$$x-xe^{\lambda}+1+e^{\lambda}=0\Rightarrow e^{\lambda}(x-1)=x+1$$

$$\Rightarrow e^{\lambda}=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow \lambda=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=f(x)$$

على المجال: $]-\infty,0]$ ليس للمعادلة حل.

على المجال: $]0,+\infty[$ للمعادلة حل وحيد.

**5)** لدينا: $f:]1,+\infty[\to]0,+\infty[ \;:\; f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

يكون $f$ تقابل إذا كان لكل قيمة $y$ تنتمي إلى المستقر $]0,+\infty[$

توجد قيمة مثل $x$ تنتمي إلى المنطلق بحيث: $f(x)=y$

أي يكون للمعادلة $f(x)=y$ حل وحيد في المنطلق $]1,+\infty[$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=y \Rightarrow x=\frac{e^{y}+1}{e^{y}-1}$$

ومنه $x=\frac{e^{y}+1}{e^{y}-1}$ حل وحيد فإن:

$$f^{-1}:]0,+\infty[\to]1,+\infty[ \;:\; f^{-1}(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$$

فالخط البياني للدالة $f^{-1}$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة لمنصف الربع الأول.

**6)** نلاحظ ان $f_1(x)=-f(x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $xx'$.

**7)** نبرهن أن: $F'(x)=f(x)$ ولنوجد مشتق الدالة $F(x)$ :

$$F'(x)=\frac{2x}{x^{2}-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{2x}{(x-1)(x-1)}$$

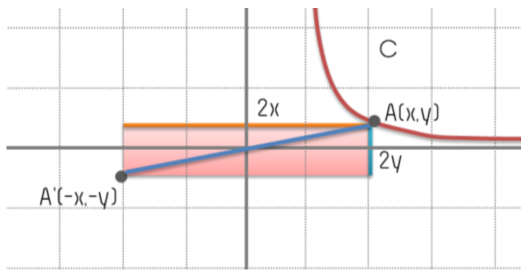
$$=\frac{2x}{x^{2}-1}+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{2x}{x^{2}-1}=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=f(x)$$

أي أن الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1,+\infty[$.

$$S=\int_{2}^{4}f(x)dx=[F(x)]_{2}^{4}=\ln 5+4\ln\frac{5}{3}-\ln 3-2\ln 2$$

$$=\ln 5+4\ln 4-4\ln 3-\ln 3-2\ln 2=5\ln\frac{5}{3}-2\ln 2$$

**8)**




محيط المستطيل هو:

$$L(x)=2(2x+2y)=4x+4\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

حيث $x\in\left[\frac{7}{5},4\right]$ وبالتالي فإن:

$$L\left(\frac{7}{5}\right)=\frac{28}{5}+4\ln 6=\frac{28}{5}+4\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{64}{5}$$

$$L(4)=16+\ln\frac{5}{3}=16+\frac{1}{2}=\frac{33}{2}$$

ولنوجد مشتق $L(x)$ :

$$L'(x)=4+4\frac{-2}{(x+1)(x-1)}\Rightarrow L'(x)=0$$

$$(x+1)(x-1)=2\Rightarrow x^{2}-1=2\Rightarrow x=\sqrt{3}$$

$$L\left(\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}+4\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)=4\left(\frac{17}{10}\right)+4\left(\frac{13}{10}\right)=12$$

ويكون جدول تغيرات $L(x)$ بالشكل:

| $x$ | $\frac{7}{5}$ | | $\sqrt{3}$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $L'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $L(x)$ | $\frac{64}{5}$ | $\searrow$ | $12$ | $\nearrow$ | $\frac{33}{2}$ |

وبالتالي يكون موضع النقطة $A$ هو النقطة التي فاصلتها $\sqrt{3}$

حيث: $A\left(\sqrt{3},\frac{13}{10}\right)$

ومحيط المستطيل المطلوب: $L=12$

أما مساحته:

$$S=4xy=4\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{13}{10}\right)=4\left(\frac{17}{10}\right)\left(\frac{13}{10}\right)=\frac{884}{10}$$

انتهى حل المسألةالحادية عشر

## حل المسألة الثانية عشر

1) الدّالة معرّفة ومستمرة على المجال $[-1,1]$.

2) لدينا $f(-1)=0\,,f(1)=0$ ولنوجد مشتق لدالة:

$$f'(x)=2\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

الدالة اشتقاقية على المجال $]-1,1[$ أي أن

$$f'(x)=0 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow f(0)=2$$

ويكون جدول التغيرات:

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ |

من جدول التغيرات نلاحظ أن:

$f(0)=2$ قيمة كبرى شاملة.

$f(-1)=0$ قيمة صغرى محلياً على المجال $[-1,0[$.

$f(1)=0$ قيمة صغرى محلياً على المجال $]0,1]$.

3) نلاحظ أن: $f(x)=-f_1(x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $xx'$ ، أو:

نلاحظ أيضاً: $f(x)=-f_1(-x)$ أي أن الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

4) نلاحظ أن $g(x)=\pm2\sqrt{1-x^2}$ ( الخط البياني للدالة $g(x)$ اجتماع الخطين البيانيين للدالتين $f(x),f_1(x)$ )

وبتربيع الطرفين نجد: $y^2=\left(g(x)\right)^2=4\left(1-x^2\right)$

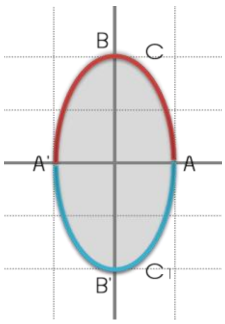
وتصبح المعادلة من الشكل: $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

وهي معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ ذراه:

$$A(1,0),A'(-1,0),B(0,2),B'(0,-2)$$

حيث $a=1,b=2$

محرقيه $F(0,\sqrt3),F'(0,-\sqrt3)$ حيث: $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt3$ ومحوره المحرقي $yy'$.




5) نعلم أن: $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-f_1(x)\right)dx$ هو مساحة السطح المحصور بين الخطين $C,C_1$ أي تساوي مساحة القطع الناقص السابق ،ونعلم ان مساحة القطع الناقص هي: $S(\varepsilon)=ab\pi$

أي أن:

$$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-f_1(x)\right)dx=ab\pi=(1)(2)\pi=2\pi$$

**انتهى حل المسألةالثانية عشر**

## حل المسألة الثالثة عشر

1) بحساب ميل المماس:

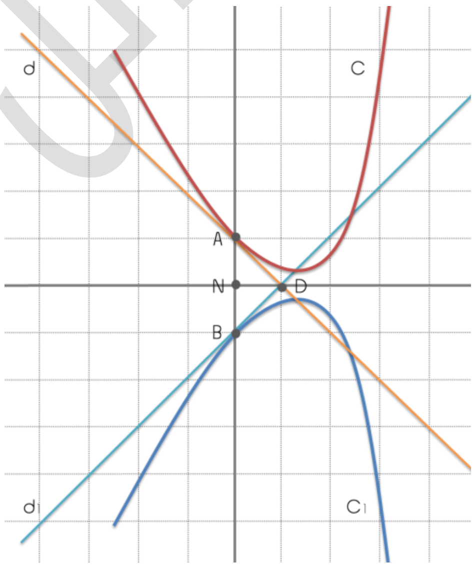
$$f'(x) = e^x - 2 \Rightarrow m = e^0 - 2 = -1$$

فتكون معادلة المماس $d: y = 1 - x$

2) نلاحظ أن $f_1(x) = -f(x)$ أي أن الخط البياني $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $xx'$ وبما أن النقطة $B$ نظيرة النقطة $A$ بالنسبة للمحور $xx'$ فإن مماس الخط $C_1$ في النقطة $B$ هو نظير $d$ بالنسبة للمحور $xx'$ وتكون معادلة المماس للخط $C_1$ في النقطة $B$ هي: $d_1: y = x - 1$

ملاحظة: يمكن إيجاد معادلة المماس بالاشتقاق وحساب الميل والتعويض.

3)




4) بالحل المشترك لمعادلتي المماسين $d_1, d$ نجد $D(1,0)$

ولنبرهن أن المثلث متساوي الساقين:

طريقة أولى: بما أن النقطتين $A, B$ متناظرتان بالنسبة للمحور $xx'$ أي أن المستقيم $xx'$ محور القطعة المستقيمة $AB$ و $D$ نقطة من $xx'$ فهي متساوية البعد عن $A, B$ أي أن المثلث $ABD$ متساوي الساقين.

طريقة ثانية: بحساب أطوال القطعتين $BD, AD$ نجد:

$$[AD] = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{2}$$

$$[BD] = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{2}$$

$\Leftarrow$ $ABD$ متساوي الساقين.

طريقة ثالثة: إذا كانت $N$ نقطة تقاطع $AB$ مع $xx'$ فإن المثلثين $AND, BND$ قائمين وبحسب نظرية فيثاغورث في المثلثين القائمين نجد: $AD = BD = \sqrt{2} \Leftarrow ABD$ متساوي الساقين.

لنبرهن أن المثلث قائم:

طريقة أولى: بملاحظة: $m_{d_1} = 1, m_d = -1$ و $m_{d_1}.m_d = -1 \Leftarrow d \perp d_1$ أي أن المثلث $ABD$ قائم.

طريقة ثانية: $AND$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين $\Leftarrow$ $\hat{A} = 45°$ وبنفس الطريقة نجد $\hat{B} = 45°$ أي أن $\hat{D} = 90°$ وبالتالي المثلث $ABD$ قائم.

طريقة ثالثة: لدينا $NA = ND = NB$ أي أن النقاط $A, B, D$ تقع على دائرة مركزها $N$ و $AB$ قطرها، أي أن $\hat{D} = 90°$ لأن الزاوية التي تحصر قطر الدائرة قائمة وبالتالي المثلث $ABD$ قائم.

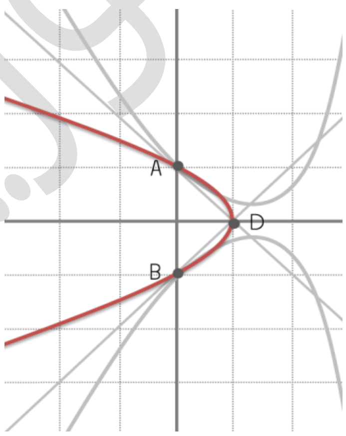
5) ذروة القطع $(1,0)$ و $A, B$ نقطتين منه ، وبملاحظة ان النقطتين متناظرتين بالنسبة للمحور $xx'$ أي أن المحور المحرقي للقطع هو $xx'$ وتكون معادلة القطع بالشكل:

$$y - y_0 = 4P(x - x_0)$$

لحساب $P$ نعوّض الذروة والنقطة $A$ ( أو $B$ ) فنجد

$$P = -\frac{1}{4} < 0$$

القطع مفتوح نحو اليسار وتصبح معادلة القطع المكافئ المطلوب: $y^2 = -x + 1$



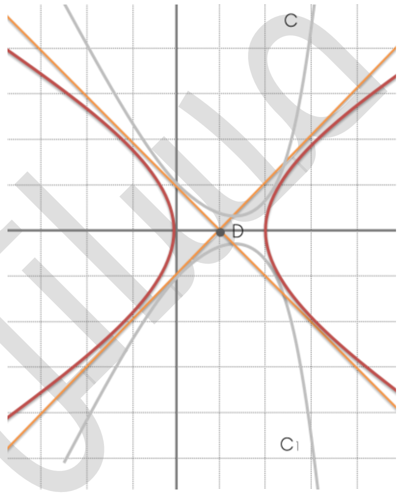
**(6** نقطة تقاطع المماسين ( المقاربين ) هي مركز القطع

$\Leftarrow$ مركز القطع $(1,0)$ ميل المقارب $\frac{a}{b}$ ويساوي $1$ أي أن

$a = b$ والقطع متساوي الساقين ، من الذروة نلاحظ أن

$a = 1$ أي أن $b = 1$ وتصبح معادلة القطع:

$$(x-1)^2 - y^2 = 1$$




**(7** بما أن $AB$ القطر الصغير فإن المحور المحرقي للقطع

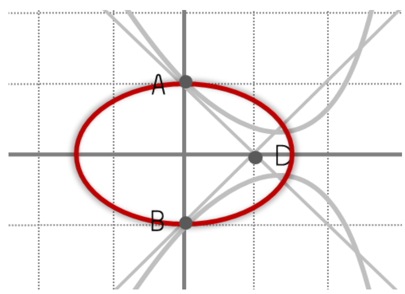
الناقص المطلوب هو $xx'$ ومركز القطع هو منتصف $AB$ أي

أن مركز القطع $(0,0)$ لدينا $[AB] = 2b = 2 \Leftarrow b = 1$

ومن المحرق $(1,0)$ نجد $c = 1$ أي أن:

$$a = \sqrt{2} \Leftarrow a^2 = b^2 + c^2 = 1 + 1$$

وتصبح معادلة القطع: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$




**(8** نشكل علاقة مساحة المثلث بالشكل:

$$S(x) = \frac{1}{2} DD'.h = \frac{1}{2}(2).y_M = y_M = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$$

حيث $x \in ]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[$ وبدراسة تغيرات الدالة $S(x)$ على

المجال $]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[$ نجد:

$$S(\sqrt{2}) = 0 \,, S(-\sqrt{2}) = 0$$

ولنوجد مشتق الدالة $S(x)$ :

$$S'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 : S(0) = 1$$

ويكون جدول تغيرات $S(x)$ :

| $x$ | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

من جدول التغيرات نلاحظ ان أكبر قيمة عند النقطة $(0,1)$

وتكون مساحة الدالة أكبر مايمكن عن النقطة $M(0,1)$

انتهى حل المسألةالثالثة عشر

## حل المسألة الرابعة عشر

1) الدالة معرّفة ومستمرة واشتقاقية على المجال: $]-\infty,+\infty[$ وتكون نهايات الدالة بالشكل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

أي ان المستقيم $y=0$ مقارب منطبق على المحور $xx'$

لنوجد المشتق:

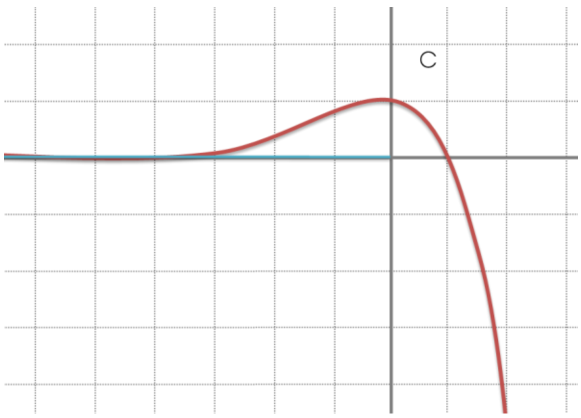
$$f'(x)=-e^{x}+(1-x)e^{x}=-xe^{x}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow x=0 : f(0)=1$$

ويكون جدول تغيرات الدالة:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

ومنه نجد أن النقطة $f(0)=1$ قيمة كبرى شاملة للدالة.

2)




3) نقطة تقاطع الخط $C$ مع المحور $xx'$ هي النقطة $(1,0)$

وبالتالي تكون مساحة السطح المحصور:

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x)e^{x}dx=\int_0^1 e^{x}dx-\underbrace{\int_0^1 xe^{x}dx}_{\text{تجزئة}}$$

$$=\left[e^{x}-\left(xe^{x}-e^{x}\right)\right]_0^1=\left[2e^{x}-xe^{x}\right]_0^1=$$
$$[2e-e]-[2]=e-2$$

4) حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحدد بالخط $C$ والمحورين الإحداثيين:

$$V=\int_0^1\pi\left(f(x)\right)^2dx=\pi\int_0^1(1-x)^2e^{2x}dx$$
$$=\pi\int_0^1\left(1-2x+x^2\right)e^{2x}dx$$
$$=\pi\left(\int_0^1 e^{2x}dx-2\underbrace{\int_0^1 xe^{2x}dx}_{\text{تجزئة}}+\underbrace{\int_0^1 x^2e^{2x}dx}_{\text{تجزئة}}\right)$$
$$=\pi\left(\frac{e^2-5}{4}\right)$$

5) نلاحظ أن $f_1(x)=f(-x)$ أي ان الخط $C_1$ هو نظير الخط $C$ بالنسبة للمحور $yy'$

وأن: $f_2(x)=f(x-1)$ أي ان الخط $C_2$ ينتج عن انسحاب الخط $C$ بمقدار واحد لليسار.

6) $x=\ln\left|\frac{\lambda}{1-x}\right|\Rightarrow e^{x}=\frac{\lambda}{1-x}\Rightarrow\lambda=(1-x)e^{x}=f(x)$

وتكون حلول المعادلة بالشكل:

$]-\infty,0]\cup\{1\}$ : للمعادلة حل وحيد.

$]0,1[$ : للمعادلة حلين مختلفين.

$]1,+\infty[$ : ليس للمعادلة حلول.

7) $e^{-x}+x\geq1\Rightarrow e^{-x}\geq1-x$

$\Rightarrow 1\geq(1-x)e^{x}$

ومنه ينتج أن: $f(x)\leq1$ ومن جدول تغيرات $f$ نلاحظ أن العلاقة محققة مهما تكن قيمة $x$.

انتهى حل المسألةالرابعة عشر

وانتهى حل جميع المسائل

بالتوفيق للجميع