الفصل الثالث

الزمر (Group)

1. قوانين التشكيل (Laws of Composition)

تعريف

لتكن E و F و G ثلاث مجموعات. نسمي قانون تشكيل معرف على $E\times F$ ويأخذ قيمة في G كل تطبيق f منطلقه $E\times F$ ومستقره G.

ونكتب عادة من أجل كل ثلاثية $(x,y,z)\in E\times F\times G$ ، $z=x*y,$ أو $z=xy,$ أو $z=x\oplus y,$ عوضاً عن $z=f(x,y)$ ونقول أن z هي حاصل تشكيل x مع y وفق القانون $*$.

حالات خاصة

- إذا كانت $E\to F=G$ أي أن $f:E\times F\to F$ عندئذ نقول أن f قانون تشكيل خارجي على F مؤثراته هي E.
- إذا كانت $E=F=G$ أي أن $f:E\times E\to E$ عندئذ نقول أن f قانون تشكيل داخلي على E.

مثال: إن الجمع والضرب هي قوانين تشكيل داخلية على $\mathbb{N}$

خواص قوانين التشكيل الداخلية

لتكن E مجموعة مزودة بقانون التشكيل الداخلي $*$، نقول أن $*$:

1- تبديلي إذا وفقط إذا: $\forall\quad (x,y)\in E^2;\quad x*y=y*x$

2- تجميعي إذا وفقط إذا: $\forall \quad (x,y,z)\in E^3; \quad (x*y)*z = x*(y*z)$

3- أنه يقبل عنصر حيادي $e\in E$ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall x\in E,\ x*e = e*x = x$$

4- نقول عن $x\in E$ انه يقبل نظيراً من اليمين (نظيراً من اليسار) بالنسبة للقـانون $*$ إذا وجد عنصر $x`\in E$ بحيث $(x`*x=e)x*x`=e$ على الترتيب.

ونقول أن $x\in E$ يقبل نظيراً $x`$ إذا كان $x*x`=x`*x=e$.

5- إذا كان $*$ و $\perp$ قانوني تشكيل داخليين على E. نقول $*$ يقبل التوزيع من اليمين أو (من اليسار) على $\perp$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall \quad (x,y,z)\in E^3; \quad x*(y\perp z) = (x*y)\perp(x*z)$$

أو

$$\forall \quad (x,y,z)\in E^3; \quad (x\perp y)*z = (x*z)\perp(y*z)$$

ونقول أن $*$ يقبل التوزيع على $\perp$ إذا وفقط إذا كان يقبل التوزيع مـن اليمـين واليـسار على $\perp$.

مبرهنة

لتكن E مجموعة مزودة بالقانون الداخلي $*$ عندئذ:

1- إذا كان e عنصر حيادي في E بالنسبة لـ $*$ فإن e وحيد.

2- إذا كان لـ $x\in E$ نظيراً هو $x`\in E$.

وكان $*$ تجميعياً فإن $x`$ وحيد.

2. التشاكلات التقابلية (Isomorphism)

لتكن $(E,*)$ و $(F,\perp)$ مجموعتين مزودتين بقانوني تشكيل داخليين وليكن $f:E\to F$ تطبيقاً بينهما. نقول أن f تشاكل بين $(E,*)$ و $(F,\perp)$ إذا وفقط إذا:

$$\forall (x,y)\in E^2,\quad f(x*y) = f(x)\perp f(y)$$

إذا كان f تقابلاً إضافة إلى كونه تشاكلاً قلنا أنه تشاكل تقابلي. التابع العكسي لتشاكل تقابـل هو تشاكل أيضاً.

3. الزمرة (Group)

نقصد بالبنية الجبرية على المجموعة E عملية تزويد المجموعة E بعدد منته مـن قـوانين التشكيل الداخلية والخارجية التي تحقق عدداً من الخواص.

ملاحظة

إذا كانت لدينا مجموعتان مزودتان ببنى جبرية ومتشاكلتان تقابلياً. فإن كل خاصة مثبتة فـي إحدى البنيتين ولا تتعلق إلا بالبنية الجبرية تكون صحيحة في الأخرى.

تعتبر الزمرة أحد أهم البنى الجبرية وتنبع أهميتها من كثرة المجالات التي تـستخدم نظريـة الزمر.

تعريف

تقول أن المجموعة G المزودة بقانون تشكيل داخلي * هي زمرة ونرمز لهـا بـ $(G,*)$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1- القانون * تجميعي:

$$\forall(x,y,z)\in G^3;\quad x*(y*z)=(x*y)*z$$

2- يقبل القانون * عنصراً حيادياً:

$$\exists e\in G, \forall x\in G;\quad x*e=e*x=x$$

3- لكل عنصر من G نظير في G:

$$\forall x\in G;\exists x`\in G; x*x`=x`*x=e$$

إذا كان القانون * تبديلياً $(\forall(x,y)\in G^2; x*y=y*x)$ فإن $(G,*)$ تسمى زمرة تبديلية.

ملاحظات

- إذا كانت G زمرة تبديلية فإننا نرمز لقانون التشكيل في هذه الحالة بـ (+) وإلـى نظيـر العنصر x بـ $(-x)$ وإلى العنصر الحيادي بـ 0_G أو اختصاراً 0.

وإذا كان $x \in G$ و $n \in \mathbb{Z}$ فإننا نكتب nx للدلالـة علـى $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n}$ وإذا كـان $n > 0$ وللدلالة على 0 إذا كان $n = 0$ وإذا كان $n < 0$ فإن $nx = (-n)(-x)$.

- نرمز عادة إلى قانون زمرة G (تبديليه أو غير تبديليه) بالرمز (0) والذي يهمل عادة عند الكتابة. نرمز لنظير كل عنصر x بـ x^{-1} ونسميه مقلوب x.

نرمز بـ 1_G أو اختصاراً 1 للعنصر الحيادي.

إذا كان $x \in G$ و $n \in \mathbb{Z}$ فإن $x^n = x\,x \ldots x$ إذا كان $n > 0$ و $x^n = (x^{-1})^{-n}$ عندما $n < 0$.

- فيما سيأتي سنستخدم الرمز (0) للدلالة على قانون التشكيل لزمرة G ما لم يذكر خـلاف ذلك.

مثال

نستطيع أن نثبت أن البنى التالية:

$$(\mathbb{C}, \times), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}^*, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}^*, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +), (\{-1, 1\}, +)$$

هي عبارة عن زمر، حدد أي منها تشكل زمرة تبديلية.

1- خواص الزمر

1- في زمرة $(G,*)$ العنصر الحيادي وحيد ونظير كل عنصر وحيد أيضاً.

الإثبات:

لنفرض انه يوجد حياد بين $e, e`$ عندئذ:

$$e` = e` * e = e$$

- لنفرض أن لـ x نظيرين $x`$ و x^n عندئذٍ؛

$$e = x * x`$$

$$\Rightarrow x`` * e = x^n * (x * x`)$$

$$\Rightarrow x`` = (x^n * x) * x`$$ لأن $*$ تجميعي

$$\Rightarrow x^n = e * x`$$ لأن x^n هو نظير x

$$\Rightarrow x`` = x`$$

-2 لتكن $(G,.)$ زمرة ما. إن قانون الاختزال من اليمين واليسار محققين، أي أنه:

$$\forall(a,x,y)\in G^3;\begin{cases} ax=ay\Rightarrow x=y \\ xa=ya\Rightarrow x=y \end{cases}$$

الإثبات:

$an=ay$

$\Rightarrow a^{-1}(ax)=a^{-1}(ay)$

وبما أن (.) تجميعي فإن:

$\Rightarrow (a^{-1}a)x=(a^{-1}a)y$

$\Rightarrow 1.x=1.y$

$\Rightarrow x=y$

نترك للطالب التحقق من العلاقة الثانية.

-3 إذا كان $(a,b)\in G^2$ عندئذ المعادلة $a.x=b$ تملك حلاً وحيداً هو $x=a^{-1}.b$.

الإثبات: ينتج بسهولة بالاعتماد على ما سبق.

-4 $\forall(x,y)\in G^2;\quad (x,y)^{-1}=y^{-1}.x^{-1}$

الإثبات:

$(x.y)^{-1}.(x.y)=1$

$\Rightarrow ((x.y)^{-1}.x).y=1$ (لأن (.) تجميعي)

عندئذٍ $[(x,y)^{-1}.x].y.y^{-1}=1.y^{-1}$

$\Rightarrow [(x,y)^{-1}.x].1=y^{-1}\Rightarrow (x.y)^{-1}.x=y^{-1}$

وبنفس الشكل نقوم بتشكيل طرفي العلاقة السابقة مع x^{-1} من اليسار فنجد أن:

$[(x,y)^{-1}.x].x^{-1}=y^{-1}.x^{-1}$

$\Rightarrow (x.y)^{-1}.(x.x^{-1})=y^{-1}.x^{-1}$ (لأن (.) تجميعي)

$\Rightarrow (x.y)^{-1}=y^{-1}.x^{-1}$

$\Rightarrow (x.y)^{-1}=y^{-1}.x^{-1}$

5- زمرة الجداء:

إذا كانت لدينا زمرتان $(G,.)$ و $(H,*)$ عندئذ يمكننا أن نزود مجموعة الجـداء الـديكارتي $G\times H$ بقانون تشكيل داخلي على النحو التالي:

$$\forall (x,y),(x`,y`)\in G\times H; (x,y)T(x`,y`)=(x.x`,y*y`)$$

ونستطيع أن نثبت أن $(G\times H,T)$ هي زمرة تسمى بزمرة الجداء الـديكارتي أو اختـصاراً بزمرة الجداء.

2- الزمرة الجزئية Subgroup

تعريف

لتكن $(G,.)$ زمرة و H مجموعة جزئية مـن H. نقـول أن H زمـرة جزئيـة إذا تحقـق الشرطان:

1- H مغلقة بالنسبة للقانون $(.)$ أي أن $\forall (x,y)\in H^2;\quad x.y\in H$

2- إن $(H,.)$ زمرة.

مبرهنة

لتكن $(G,.)$ زمرة و H مجموعة جزئية من G. إن H زمرة جزئيـة إذا وفقـط إذا تحقـق الشرطان:

1- $e\in H$.

2- $\forall (x,y)\in H^2;\quad x.y^{-1}\in H$

الإثبات:

I- عندما $(H,.)$ مجموعة جزئية فإن الشرطين محققين (يترك للطالب).

II- عندما الشرطين (1) و (2) محققين لتثبت أن H مجموعة جزئية من G.

بما أن (.) تجميعي على G عندئذ

$$\forall (x,y)\in H\subset G\Rightarrow x^{-1}\in G\Rightarrow x^{-1}.(x,y^{-1})=(x^{-1}.x).y^{-1}=e.y^{-1}=y^{-1}$$

ولكن e و y من H عندئذٍ حسب الشرط الثاني $e.y^{-1} \in H$ وبالتالي $y^{-1} \in H$ إذن نـستنتج أن:

$$\forall y \in H;\, y^{-1} \in H$$

لنثبت أن H مغلقة بالنسبة للقانون (.).

حسب العلاقة السابقة

$$\forall (x,y) \in H^2;\, y^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow (x,y) \in H^2;\quad y^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow x\,(y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow xy \in H$$

حيث $(y^{-1})^{-1} = y$ (أثبت ذلك).

ومنه $(H,.)$ زمرة جزئية لأنها مغلقة بالنسبة للقانون (.) ولأن $e \in H$ ولكـل عنـصر مـن H وكذلك (.) تجميعي بالفرض حيث $(G,.)$ هي زمرة.

لكي تثبت أن $H \subset G$ هي زمرة جزئية من الزمرة، اتبع ما يلي:

1- أثبت أن $e \in H$.

2- احسب $x.y^{-1}$ من أجل كل $(x,y) \in H^2$.

3- بين أن $x.y^{-1}$ هو عنصر من H: $x.y^{-1} \in H$.

4- عندئذ تكون أثبت أن $(H,.)$ هي زمرة جزئية من G.

ملاحظة:

لكي تثبت أن مجموعة ما H هي زمرة بالنسبة لقانون تشكيل ما. يكفى أن نثبت أنهـا زمـرة جزئية من زمرة معروفة.

مثال

لتكن E مجموعة ما غير خالية و $a \in E$ ولتكن $G = \{f \in B(E); f(a) = a\}$ حيث $B(E)$ هي مجموعة كل التقابلات من E إلى E. أثبت أن $(G,\circ)$ هي زمرة أي أن G زمرة بالنـسبة لتركيب التطبيقات.

الحل:

أثبت أن $(B(E),\circ)$ هي زمرة. وأن العنصر الحيادي في هذه الزمرة هو التطبيـق المطـابق II_E.

ولنثبت أن $(G,\circ)$ هي زمرة جزئية من $B(E)$.

نلاحظ أن:

$$\forall x \in E;\quad I_E(x) = x \Rightarrow I_E \in G$$

وذلك حسب تعريف المجموعة G.

ليكن f,g تطبيقين من G ولنحسب $f \circ g^{-1}$.

$$\forall x \in E; (f \circ g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x))$$

$$= g^{-1}(x) \quad (g^{-1}(x) \in E \text{ لأن})$$

$$= g^{-1}(g(x)) \quad (g \in G \text{ لأن})$$

$$= (g^{-1} \circ g)(x)$$

$$= I_E(x) = x$$

وبالتالي $f \circ g^{-1} \in G$. إذن $(G,\circ)$ هي زمرة جزئية من $B(E)$ وبالتالي هي زمرة.

ملاحظة:

في المثال السابق إذا كانت $E = \mathbb{N}_n$ فإننا نرمز بـ $(S_n,\circ)$ إلى الزمرة $(B(N_n),\circ)$ ونسميها الزمرة المتناظرة بـ n عنصراً.

رموز جديدة

لتكن $(G,.)$ زمرة وA و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من G: نكتب AB للدلالة علـى المجموعة $\{ab; (a \in A) \wedge (b \in B)\}$.

ونصطلح أن نكتب aB و Ab للدلالة على $A\{b\},\{a\}B$ على الترتيب يجب أن نلاحظ أنه إذا احتوت A على أكثر من عنصرين فإن: $AA = \{ab;(a \in A) \wedge (b \in A)\} \neq \{a^2; a \in A\}$

إذا كانت $\varnothing \neq A \subset G$ فإننا نرمز بـ A^{-1} للمجموعة $\{a^{-1}; a \in A\}$.

مثال هام

أثبت أن أية زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ هي من النمط $(n\mathbb{Z},+)$ حيث $n \in \mathbb{N}$

الحل:

أثبت أن $(n\mathbb{Z},+)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ هي زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$ ولنثبت أن إذا كانـت أن إذا كانت H مجموعة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$ فيها من النمط $(n\mathbb{Z},+)$ حيث n عدد طبيعي.

بما أن H هي مجموعة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$ فإما أن تكون $H=\{0\}$ وإما أن تكون $H \neq \{0\}$.

- إذا كانت $H=\{0\}$ فإن $H=n\mathbb{Z}$ حيث $n=0$.
- إذا كانت $H \neq \{0\}$ ولكن 0 الذي يمثل الحيادي بالنسبة للجمع هو عنصر من H كونهـا مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ وليكن $x \neq 0$ عنصراً من H أي $x \in H \setminus \{0\}$ فإن $-x \in H$ وبالتالي $H \cap \mathbb{N}^* \neq 0$.

لنضع $n=\min(H \cap \mathbb{N}^*)$ أي أن $n \in H$ وبالتـالي مـن أجـل أي عنـصر $z>0$ فـإن $nz=zn=\underbrace{n+n+\ldots+n}_{z-times}$ وبما أن H مغلقة بالنسبة للجمع إذن $nz \in H$ ومن أجـل $z<0$ فإن:

$$nz=(-n)(-z)=(-z)(-n)=\underbrace{(-n)+(-n)+\ldots+(-n)}_{(-z)-times} \in H; \quad x<0$$

لأن H مغلقة بالنسبة للجمع. نستنتج إذن:

$$\forall z \in \mathbb{Z}; \quad nz \in H \Rightarrow n\mathbb{Z} \subset H$$

من جهة أخرى إذا أخذنا العنصر $x \in H$ و $n=\min(H \cap \mathbb{N}^*)$ فإنه بحسب القسمة الأقليديـة يوجد $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ بحيث يكون $x=qn+r; 0 \leq r < n \Leftarrow r=x-qn$

ولكن $x-qn \in H$ بحسب الغـرض إذن $r \in H$ وأيـضاً $r \in N$ إذن $r \in H \cap \mathbb{N}$ وبحـسب تعريف n فإن $r=0$ حكماً وبالتالي $x=qn$ إذن $H \subset n\mathbb{Z}$ ونستنتج أن $H=n\mathbb{Z}$.

مبرهنة

لتكن $(G,.)$ زمرة و $(H_i)_{i \in I}$ جماعة من الزمر الجزئية من G. عندئذ يكون $\bigcap_{i \in I} H_i$ زمـرة جزئية من G.

الإثبات: سهل، يترك للطالب.

ملاحظة

لتكن H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من $(G,.)$ فليس من الضروري أن يكـون $H_1 \cup H_2$ زمـرة جزئية من G.

مثال

إن $(2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z})$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$.

مبرهنة

لتكن $(G,.)$ زمرة ولتكن X مجموعة جزئية من G. إن تقاطع جميع الزمر الجزئية من G والتي تحوي X هو زمرة جزئية من G وهي أصغر زمـرة جزئيـة مـن G تحـوي المجموعة X ونرمز لها بـ $\langle X \rangle$.

الإثبات:

يتم بشكل مباشر بالاعتماد على المبرهنة السابقة.

تعريف

نسمي الزمرة الجزئية $\langle X \rangle$ المعرفة في المبرهنة السابقة الزمرة الجزئية المولدة بالمجموعـة X.

مبرهنة

إذا كانت $x \neq \varnothing$ فإن:

$$\langle X \rangle = \{x_1, x_2, \ldots x_n, n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \mathbb{N}_n ; x_i \in X \cup X^{-1}\}$$

أي أن $\langle X \rangle$ هي مجموعة كل الجداءات المنتهية لعناصر مـأخوذة هـي أو مقاليبهـا مـن المجموعة X.

تعريف

- ليكن x عنصراً من زمرة $(G,.)$ إذا كانت الزمرة الجزئية $<x>$ المولدة بالمجموعة $\{x\}$ منتهية فإننا نسمي عدد عناصرها رتبة العنصر x ونكتب $o(x) = Card\{x\}$. أما إذا كانـت المجموعة $<x>$ غير منتهية فإننا نقول أن رتبة x لا نهائية ونكتب $o(x) = +\infty$.
- إذا وجدنا في الزمرة $(G,.)$ عنصراً x بحيث يكون $G = <x>$ فإننا نقول أن الزمـرة G وحيدة التوليد أي يكفي عنصر وحيد لتوليدها. نقول أن x هو مولد للزمرة G.

لاحظ أن $G = \{x^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ حيث $x^n = \underbrace{x \ldots x}_{n-times}$. أثبت أن G تبديلية.

- إذا كانت الزمرة $(G,.)$ مجموعة منتهية فإننا نسميها زمرة منتهية ونسمي عدد عناصـرها رتبة الزمرة G.

مثال

الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ وحيدة التوليد و $\mathbb{Z}=<1>=<-1>$.

الحل:

أولاً لاحظ أن:

$\langle 1\rangle=\{n.1;\quad n\in Z\}=\{(-n)(-1);\quad n\in Z\}=<-1>$.

إذا كان $p\in\mathbb{Z}$ فإن:

1- إما $p=0$ عندئذٍ $p=0.1\in<1>=<-1>;n=0$

2- أو $p<0$ عندئذٍ $q=-p>0$ وبالتالي:

$$P=(-1)+(-1)+\cdots+(-1)=q(-1)\in<-1>;n=q$$
$$=(-q)(1)=p.1\in<-1>$$

3- أو $p>0$ أي $P=1+1+\cdots+1=P.1\in<1>$

$$=(-p)(-1)\in<-1>$$

إذن $\forall p\in\mathbb{Z}$ فإن $p\in<-1>=<1>$ ومنه $(\mathbb{Z}+)$ وحيدة التوليد.

مبرهنة (Lagrange)

لتكن $(G,.)$ زمرة منتهية، ولـتكن H زمـرة جزئيـة مـن G عندئـذٍ $Card(H)$ يقـسم $Card(G)$.

الإثبات:

لنعرف على G العلاقة الثنائية التالية:

$$\forall(x,y)\in G^2, x\Re_H y\Leftrightarrow x.y^{-1}\in H$$

إن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ لأن:

- $\Re_H$ انعكاسية: لاحظ أن الحيادي في G هو1 وأن $1\in H$ لأن H زمرة جزئية وكذلك:

$$\forall x\in\ ;x.x^{-1}=1\in H\Rightarrow x\Re_H x$$

- $\Re_H$ تناظرية:

$$\forall x,y\in G, x\Re_H y \Rightarrow xy^{-1}\in H \Rightarrow (xy^{-1})^{-1}\in H$$

وذلك لأن H زمرة جزئية من G ولدينا:

$$(xy^{-1})^{-1} = y.x^{-1}\in H \Rightarrow y\Re_H x$$

- $\Re_H$ متعدية:

$$\forall(x,y,z)\in G^3, (x,\Re_H z) \Rightarrow (xy^{-1}\in H)\wedge(yz^{-1}\in H)$$
$$\Rightarrow ((xy^{-1})(yz^{-1}) = xz^{-1}\in H$$

$$\Rightarrow x\Re_H z$$

لنرمز بـ k لعدد صفوف تكافؤ العلاقة $\Re_H$ أي أن $k = Card(G/\Re_H)$.

ولنختر ممثلاً من كل صف من هذه الصفوف عندئذ:

$$G/\Re_H = \{[x_1],[x_2],\dots,[x_k]\};\quad x_1,x_2,\dots,x_k\in G$$

تشكل تجزئة لـ G.

ليكن $x\in G$ عنصراً ما فإن:

$$[x] = \{y\in G, yx^{-1}\in H\} = \{x.h\in G; h\in H\} = x.H$$

لاحظ أن التطبيق $\begin{matrix}\varphi: H \to [x]\\ : h \to x.h\end{matrix}$ هو عبارة عن تقابل ومنه $Card(H) = Card[x]$ وبالتالي

$$Card(G) = \sum_{i=1}^{k} card[x_i] = \sum_{i=1}^{k} Card(H) = k.Card(H).$$

ملاحظة:

لاحظ أن $\frac{Card(G)}{Card(H)} = k\in N$ حيث k هو عدد صفوف تكافؤ العلاقة $\Re_H$.

3- التشاكلات الزمرية

تعريف

لتكن لدينا $(G,.),(H,*)$ الزمرتان وليكن f تطبيقاً من G إلى H . نقول أن f تشاكل زمري إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall(x,y)\in G^2;\quad f(x.y) = f(x)*f(y)$$

ونقول أنه تشاكل تقابلي زمري إذا وفقط إذا كان تقابلاً وتشاكلاً زمرياً في آن واحد.

مبرهنة (خواص التشاكلات الزمرية)

ليكن $f:(G,.)\to(H,*)$ تشاكلاً زمرياً:

- إن صورة الحيادي 1_G في وفق التشاكل f هي الحيادي في H أي أن $f(1_G)=1_H$.
- إن صورة نظير أي عنصر من G وفق التشاكل f هي نظير صورة هذا العنصر:

$$\forall x\in G; f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$$

الإثبات:

إن $1_G=1_G.1_G$ وبالتـالي: $f(1_G)=f(1_G)*f(1_G)$ نطبـق قـانون الاختـزال فنجـد أن:

$$f(1_G)=1_H$$

$$\forall x\in G; f(x^{-1})*f(x)=f(x^{-1}.x)=f(1_G)=1_H$$

(حسب القسم الأول)

وبالتالي $f(x^{-1})$ يمثل نظير $f(x)$ في H أي أن $f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}$. □

تعريف

ليكن تشاكلاً زمرياً. نسمي المجموعة $\ker(f)=\{x\in G;\ f(x)=1_H\}$ نواة التشاكل f .

ونسمي المجموعة $\mathrm{Im}(f)=f(G)=\{f(x);x\in G\}$ صورة التشاكل f .

مبرهنة

ليكن $f:(G,.)\to(H,*)$ تشاكلاً زمرياً عندئذٍ:

1- الصورة المباشرة لأي زمرة جزئية G_1 من G هي زمرة جزئية من H.

2- الصورة العكسية لأي زمرة جزئية H_1 من H هي زمرة جزئية من G .

الإثبات:

1- إذا كانت G_1 زمرة جزئية من G فإن العنصر الحيادي $1_G=G_1$

وبالتالي $1_H=f(1_G)\in f(G_1)$

ليكن $y=f(b), x=f(a)$ حيث $(a,b)\in G_1^2$

عندئذٍ:

$$x*y^{-1}=f(a)*(f(b)^{-1})=f(a)*f(b^{-1})=f(ab^{-1})$$

لأن f تـشاكل زمـري. ولكـن $a.b^{-1}\in G_1$ لأن G_1 زمـرة جزئيـة مـن G وبالتـالي $f(a.b^{-1})\in f(G_1)$ بالتالي $f(G_1)$ هي زمرة جزئية من G.

2- إذا كانت H_1 زمرة جزئية من H فإن: $1_H\in H_1$ ولدينا:

$$1_H=f(1_G)\in H_1$$

ومنه $1_G\in f^{-1}(H)$ حيث $f^{-1}(H_1)=\{X\in G; f(x)\in H_1\}$

ومن جهة أخرى:

$$\forall a,b\in f^{-1}(H_1)\Rightarrow f(a)\wedge f(b)\in H_1\Rightarrow f(a)*[f(b)]^{-1}\in H_1$$

لأن H_1 مرة جزئية ومنه $f(a)*f(b^{-1})\in H_1$ أي أن $f(ab^{-1})\in H_1$ لأن f تشاكل زمري ونستنتج أن $ab^{-1}\in f^{-1}(H_1)$ و بالتالي $f^{-1}(H_1)$ زمرة جزئية من G.

مبرهنة

إذا كان $f(G,.)\to(H,*)$ تشاكل زمري عندئذٍ:

1- f متباين $\Leftrightarrow \ker(f)=\{1_G\}$.

2- f غامر $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f)=H$.

الإثبات:

1- لنفرض أن f متباين وليكن $x\in\ker(f)$ عندئذ: $f(x)=1_H$. حسب المبرهنة السابقة فإن $f(x)=f(1_G)\Leftarrow x=1_G$ لأن f متباين.

ولنثبت الاتجاه المعاكس: إن $\ker(f)=\{1_G\}$

$$\forall(x,y)\in G^2;\quad f(x)=f(y)$$

$$\Rightarrow f(x)*f(y^{-1})=f(y)*f(y^{-1})$$

$$\Rightarrow f(x.y^{-1})=f(y.y^{-1})$$

$$\Rightarrow f(x.y^{-1})=f(1_G)$$

$$\Rightarrow f(x.y^{-1})=1_H$$

وبالتالي $x.y^{-1} \in \ker(f) = \{1_G\}$ أي أن $x.y^{-1} = 1_G \Leftarrow x = y$ إذن f متباين.

2- f غامر $\Leftarrow y = f(x);\quad \exists \in G;\quad \forall y \in H \Leftarrow y \in \mathrm{Im}(f) \Leftarrow H \subset \mathrm{Im}(f)$

ولدينا بالتعريف $\mathrm{Im}(f) \subset H$ إذن $\mathrm{Im}(f) = H$

والعكس يمكن إثباته بسهولة.

مبرهنة

إذا كان f تشاكلاً تقابلياً زمرياً فإن التقابل العكسي f^{-1} هو أيضاً تشاكل تقابلي زمري.

مثال

ليكن
$$\begin{array}{l} f:(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_+^*,\times) \\ \quad x \quad \to \quad e^x \end{array}$$

أثبت أن f هو تشاكل تقابلي زمري وما هو تشاكله التقابلي العكسي؟

الحل:

إن التطبيق f هو تقابل ويتم إثبات ذلك بسهولة وهو تشاكل زمري لأن:

$$\forall (x,y) \in \Re;\quad f(x+y) = e^{x+y} = e^x.e^y = f(x) \times f(y)$$

إن التطبيق التقابل العكسي لـ f هو
$$\begin{array}{l} g:(\mathbb{R}_+^*,\times) \to (\mathbb{R},+) \\ :\quad y \quad \to \ln(y) \end{array}$$

بسهولة نثبت أن g هو عبارة عن تقابل وهو تشاكل زمري لأن:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow g(a \times b) = \ln(a \times b)$$
$$\Rightarrow g(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\Rightarrow g(a \times b) = g(a) + g(b)$$

إذن g هو التشاكل التقابلي العكسي لـ f.

ملاحظة هامة:

لتكن $(G,.)$ زمرة وليكن $f: G \to E$ تقابلاً بين المجموعة G والمجموعـة E. إن قـانون التشكيل الداخلي $*$ المعرف على E كما يلي:

$$\forall (x,y) \in E^2,\quad x * y = f[f^{-1}(x).f^{-1}(y)]$$

يجعل من $(E,*)$ زمرة ويكون f تشاكلاً تقابلياً زمرياً.

نقول عندئذٍ إننا نقلنا بنية G إلى E.

مثال

إن التطبيق $f:(\mathbb{R},+)\to]-1,+1[$ حيث $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ ينقل بنيـة الزمـرة $(\mathbb{R},+)$ إلـى المجموعة $]-1,+1[$

أثبت أن f هو تقابل.

إن f متباين لأن إذا كان $x\neq y$ فإن $1+|x|\neq 1+|y|$

وبالتالي $\dfrac{x}{1+|x|}\neq\dfrac{y}{1+|y|}$ أي $f(x)\neq f(y)$

وهو غامر لأن إذا كان $y\in]-1,+1[$ ولنضع؛

$$x=\begin{cases}\dfrac{y}{1+y}\in\mathbb{R}; & -1<y\leq 0\\[2ex] \dfrac{y}{1-y}\in\mathbb{R}; & 0\leq y<1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{y}{1+y}}{1+\left|\frac{y}{1+y}\right|}=\dfrac{\frac{y}{1+y}}{1-\frac{y}{1+y}}=y; & -1<y\leq 0\\[3ex] \dfrac{\frac{y}{1-y}}{1+\left|\frac{y}{1-y}\right|}=\dfrac{\frac{y}{1+y}}{1+\frac{y}{1-y}}=y; & 0\leq y<1\end{cases}$$

إذن $\forall y\in]-1,1[$ فإنه يوجد $x\in\mathbb{R}$ بحيث $y=f(x)$ وبالتالي f غامر إذن f تقابل.

أثبت أن البنية $(]-1,+1[,*)$ هي زمرة.

زمرة خارج القسمة Quotient group

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولتكن H زمرة جزئيـة مـن G. نعـرف علـى G العلاقـة الثنائية $\Re_H$ كما يلي: $\forall(x,y)\in G^2;x\,\Re_H\,y\Leftrightarrow x-y\in H$.

وجدنا أعلاه إن العلاقة $\Re_H$ هي علاقة تكافؤ. لنرمز بـ G/H إلى مجموعة صفوف التكافؤ.

لاحظ إن صف تكافؤ أي عنصر $x \in G$ يعطى كما يلي:

$[x] = \{y \in G; y - x \in H\} = \{y \in G; \quad \exists h \in H, y = x + h\}$

$= \{x + h \in G; h \in H\}$

$= x + H$

نستنتج أن $[0] = H$.

مبرهنة

إن $(G/H, \dotplus)$ هي زمرة تبديلية تسمى زمرة خارج القسمة حيث القانون $(\dotplus)$ معرف كمايلي:

$$\forall A, B \in G/H, A \dotplus B = \{a + b; (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

حيث: $A = [a], B = [b]$

الإثبات:

- سنثبت أولاً أن $(\dotplus)$ هو قانون تشكيل داخلي.

ليكن $A = [a], B = [b]$ ولنثبت أن $A \dotplus B = [a + b]$

$\forall x \in [a + b] \Rightarrow \exists h \in H; \quad x = a + b + h$

ولكن $b + h \in [b] = B$ و $a \in A$ إذن $x \in A \dotplus B$ أي أن $[a + b] \subset A \dotplus B$

وبالعكس ليكن لدينا $x \in A \dotplus B$ فعندئذٍ يوجد $a` \in A$ و $b` \in B$ بحيث يكون $x = a` + b`$ ولكن $B = [b], A = [a]$.

إذن يوجد h_1, h_2 من H بحيث يكون $a` = a + h_1, b` = b + h_2$

ومنه $x = a` + b` = a + b + h_1 + h_2$

$= a + b + h; \quad h = h_1 + h_2 \in H$

إذن $x \in [a + b]$ ومنه $A \dotplus B \subset [a + b]$ ينتج مما سبق أن $(\dotplus)$ هو قانون تشكيل داخلي على G/H.

- يمكن التحقق بسهولة أن $(\dotplus)$ هو قانون تجميعي وتبديلي ونلاحـظ أن $[0]$ هـو العنـصر الحيادي لأن:

$\forall A \in G/H; \quad A \dotplus [0] = A \dotplus H$

$$= \{a+h; \quad a\in A, h\in H\}$$
$$= \{a\} = A$$

- إن لكل عنصر $A\in G/H$ نظير في G/H هو $-A=[-a]$

إن $-A=\{-a; a\in A\}$ هي عنصر من G/H لأن:

إذا كان $A=[a]$ فإن $A=\{a+h\in G; h\in H\}$ ومنه

$-A=\{-a-h\in G; h\in H\}$ ولدينا $-h\in H$ لأن H زمرة جزئية إذن $-A=[-a]$

وكذلك لدينا $A\dotplus(-A)=\{a+(-a)+h; h\in H\}=\{0+h, h\in H\}=H=[0]$

إذن $(-A)\dotplus A=\{(-a)+a+h, h\in H\}=0+H=[0]$ أي لكل عنصر نظير.

مثال

يمكن أن نثبت بسهولة إن $\begin{aligned} Q:(G,\bullet)&\to G/H \\ :a&\to[a]\end{aligned}$ هو عبارة عن تشاكل زمري غامر.

مبرهنة (12)

إن الزمرة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ حيث $(n\neq 0)$ منتهية وعدد عناصرها هو n ولدينا:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$$

ملاحظة:

إذا كان $x\in\mathbb{Z}$ و كان $[x]\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ فإن $[x]=\{x+nk; k\in\mathbb{Z}\}$

وفي حالة $n=0$ فإن الزمرة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تشاكل تقابلياً $\mathbb{Z}$.

مثال

إن عناصر الزمرة $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ هي المجموعة $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}=\{[0],[1],[2],[3]\}$ حيث يمكـن تكـوين جدولي الجمع والجداء كمايلي :

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

×	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

نذكر أن $[a]+[b]=[a+b]$ وأن $[a][b]=[ab]$ وكمثال $[3]+[2]=[5]=[1]$ و $[3][2]=[6]=[2]$ حيث

$$\begin{aligned}[6]&=\{6+4k\,;k\in\mathbb{Z}\}\\ &=\{2+4+4k\,;k\in\mathbb{Z}\}\\ &=\{2+4(1+k)\,;k\in\mathbb{Z}\}\\ &=\{2+4l\,;l=1+k\in\mathbb{Z}\}\\ &=[2]\end{aligned}$$

4- الزمر وحيدة التوليد

تعريف

- نُذكر بأن الزمرة $(G,\bullet)$ تسمى وحيدة التوليد إذا وجد عنصر $x\in G$ بحيث يكون:

$$G=<a>=\{a^k\,,k\in\mathbb{Z}\}$$

ونذكر أيضاً أن $a^k=a\bullet\ldots\bullet a$

- نقول أن الزمرة G دوارة إذا كانت وحيدة التوليد وعدد عناصرها منتهي ونـسمي رتبـة الزمرة G عدد عناصرها.

مبرهنة (13)

لتكن $(G,\bullet)$ زمرة وحيدة التوليد وليكن لدينا التشاكل الزمري:

$$\begin{aligned}f\ &:(\mathbb{Z},+)\to(G,\bullet)\\ &:\ k\ \to\ a^k\end{aligned}$$

بما أن $\ker(f)$ هو زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$ فإنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكـون $\ker(f) = n\mathbb{Z}$ ونميز الحالتين:

1- إذا كان $n = 0$ فإن الزمرة G تشاكل تقابلياً $\mathbb{Z}$ (f تشاكل تقابلي).

2- إذا كان $n > 0$ فإن الزمرة G دوارة وتشاكل تقابلياً الزمرة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.

نتيجة

لتكن $(G,\bullet)$ زمرة دوارة أي $G = < a >$ أثبت أن $Card(G) = n$ حيث n هو اصـغر عـدد طبيعي $k \in \mathbb{N}^*$ بحيث $a^k = 1_G$ حيث 1_G هو العنصر الحيادي في G . أي أن:

$$n = \min\{k \in \mathbb{N}^*; a^k = 1_G\}$$

الإثبات:

إن الزمرة $G = < a >$ تشاكل تقابلياً الزمرة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ حسب المبرهنة السابقة. أي يوجد التشاكل التقابلي:

$$f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+) \to (G,\bullet)$$
$$: [k] \to a^k$$

لاحظ أن $n \in \mathbb{N}^*$ هو أصغر عدد لا يساوي الصفر بحيث يكون:

$$[n] = [0]$$

وبما أن f تقابل إذن n هو أصغر عدد طبيعي لا يساوي الصفر بحيث يكون $a^n = 1_G$

5- الزمرة المتناظرة (Symmetric group)

تعريف

لتكن E مجموعة ما. نسمي تبديلاً على E التقابل $\sigma : E \to E$. نرمز بـ (S_E) لمجموعـة التبادیل على E . إن $S_E = B(E,E)$ إذن S_E والمزودة بقانون تركيب التطبيقـات $(\circ)$ هـي زمرة ونسميها زمرة التباديل على E .

تعريف

عندما $E=\mathbb{N}_n$ فإننا نرمز بـ S_n لزمرة التباديل على $\mathbb{N}_n$ ونسميها الزمرة المتناظرة وحيث $Card(S_n)=n!$

إذا كان $\sigma\in S_n$ فإننا نكتب σ كما يلي

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6)\end{pmatrix}$$

مثال: إن عدد التبادبل على المجموعة $\mathbb{N}_3$ يساوي $3!=6$ وهذه التباديل هي :

$$I=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\quad a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\quad d=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\quad f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

إذن $S_3=\{I,a,b,c,d,e,f\}$

هذه التباديل هي عبارة عن تقابلات كما هو واضح من مخططات فن. لاحظ أن تركيب أي تبديل مع نفسه يعطي التبديل I . وتركيب أي تبديل مع I هو التبديل ذاته. إن تركيب التطبيقات عملية تجميعية إذن $(S_3,\circ)$ زمرة.

فيما يلي كيفية حساب تركيب تبديلين

$$b\circ a(1)=b\big(a(1)\big)=b(2)=1,$$
$$b\circ a(2)=b\big(a(2)\big)=b(3)=2,$$
$$b\circ a(3)=b\big(a(3)\big)=b(1)=3$$

ونستنتج أن $b\circ a=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

مبرهنة (14) (Cayley)

كل زمرة تشاكل تقابلياً زمرة جزئية من زمرة التباديل.

تعريف

ليكن $\sigma \in S_n$ وليكن $x \in \mathbb{N}_n$. نسمي مدار (مسار) العنصر x حسب التبديل σ. المجموعة:

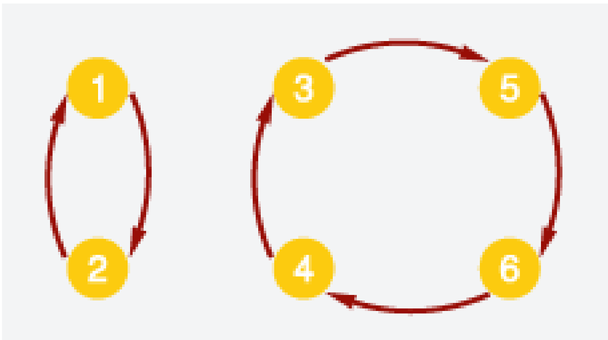
$$O(x) = \{\sigma^k(x); k \in \mathbb{N}\}$$

مثال: إذا كانت $E = \mathbb{N}_6$ أي أن $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ وليكن

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

عندئذٍ: $O(3) = O(4) = O(5) = O(6) = \{3,4,5,6\}, O(1) = O(2) = \{1,2\}$

ويمثل المسار بالمخطط التالي:



ملاحظة

إذا كان $y \in O(x)$ فإن $O(x) = O(y)$

تعريف (التباديل الدائرية)

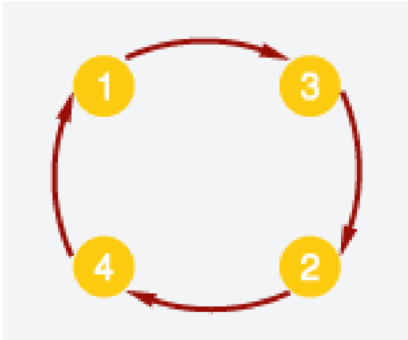
ليكن التبديل $\sigma \in S_n$. نقول أن σ هو تبديل دائري إذا وجد عنصر $x \in \mathbb{N}_n$ بحيث يكـ ون $O(x) = \mathbb{N}_n$.

مثال

لتكن لدينا المجموعة $\mathbb{N}_4 = \{1,2,3,4\}$ والتبديل $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

لاحظ أن $O(1) = \{1 \quad 3 \quad 4 \quad 2\} = \mathbb{N}_n$ إذن التبديل σ هو تبديل دائري.

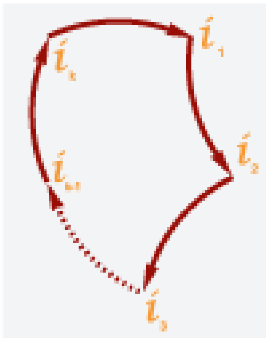
وتمثله بالمخطط التالي:



تعريف

ليكن لدينا التبديل $\sigma \in S_n$. نقول أن σ هو دورة من المرتبـة $2 \leq k$ إذا وفقـط إذا وجـدت العناصر $i_1 i_2,\ldots\ldots,i_k$ المختلفة مثنى مثنى وعددها $k \in \mathbb{N}_n$ بحيث يكون:

- $\forall j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}; \sigma(j) = j$



- $\forall p \in \mathbb{N}_{k-1}; \quad \sigma(i_p) = i_{p+1}$
- $\sigma(i_k) = i_1$

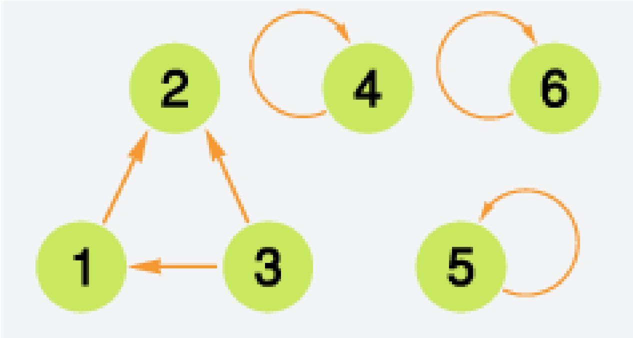
نرمز لمثل هذا التبديل بـ $C = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$. نسمي المجموعة $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ حامل الـدورة C.

مثال

إذا كانت $E = \mathbb{N}_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

إن هذا التبديل هو عبارة عن دورة من المرتبة (3) وحامل الدورة هو المجموعة $\{1,2,3\}$ أي نختصر أن الدورة هي $C = \{1 \quad 2 \quad 3\}$

إن المخطط أدناه يمثل دورة من المرتبة



تعريف

نسمي مناقلة في S_n كل دورة من المرتبة (2). أي أن المناقلة تبادل بين عنصرين مـن $\mathbb{N}_n$ وتدع العناصر الأخرى ثابتة.

نرمز للمناقلة بـ τ بالرمز (a,b) أو بالرمز $\tau_{a,b}$ أي أن المناقلة تبادل بين العنصرين b,a.

ملاحظة

إن كل مناقلة τ تحقق ما يلي $\tau \circ \tau = I$ حيث I هو التطبيق المطابق على $\mathbb{N}_n$ وهو العنصر الحيادي في S_n.

لاحظ أنه إذا كان:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1,2,\dots,a,\dots,b,\dots,n \\ 1,2,\dots,b,\dots,a,\dots,n \end{pmatrix}$$

إذن:

$$\tau o \tau = \begin{pmatrix} 1,2,\dots,a,\dots,b,\dots,n \\ 1,2,\dots,a,\dots,b,\dots,n \end{pmatrix} = I$$

مبرهنة (15)

إن كل تبديل $\sigma \in S_n \setminus \{I\}$ هو حاصل تركيب عدد من الدورات حواملها منفصلة مثنى مثنى.

الإثبات:

إن كل تبديل $\sigma \in S_n \setminus \{I\}$ يحوي عدد محدود من المسارات المنفصلة مثنى مثنـى $k < n$.

عندئذ نستطيع أن نشكل k دورة $\sigma_i , i = 1,\dots,k$ حيث مرتبة كل دورة تقابـل طـول أحـد المسارات المحتواة في σ ويكون $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \sigma_k$.

مثال: ليكن التبديل $\sigma \in S_{10}$ المعرف كمايلي :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

وسنحاول كتابة هذا التبديل كناتج تركيب دورات. نقوم أولاً بتعين الدورة التي ينتمي 1 إلى حاملها و ذلك بحساب الصور المتتالية لـ 1 ونجد أن

$C_1 = \left(1, \sigma(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1)\right) = (1,9,7,6)$ لاحظ أن $2 \notin C_1$ وبالتالي وبإتباع نفس الخطوات السابقة نجد أن $C_2 = \left(2, \sigma(2), \sigma^2(2), \sigma^3(2)\right) = (2,5,4,3)$ و $C_3 = \left(8, \sigma(8)\right) = (8,10)$ وبالتالي :

$$\begin{aligned} \sigma &= C_1 \circ C_2 \circ C_3 \\ &= (1 \quad 9 \quad 7 \quad 6)(2 \quad 5 \quad 4 \quad 3)(8 \quad 10). \end{aligned}$$

تمرينات:

التمرين1

لتكن $(G,.)$ زمرة ولنضع $C=\{x\in G;\forall g\in G;g.x=x.g\}$

أثبت أن C زمرة جزئية من $(G,.)$

الحل:

- إذا كان e_G هو الحيادي فإن $e_G\in C$ لأن $\forall g\in G;\quad g.e_G=e_G.g$
- ليكن $(x,y)\ni C^2$. ليكن y^{-1} هو نظير y بالنسبة لـ $(.)$ ولنثبت أن $xy^{-1}\in C$.

$$(\forall g\in G)\wedge(\forall x\in C)\Rightarrow gx=xg\Rightarrow g=xgx^{-1}$$

$$\Rightarrow x^{-1}g=x^{-1}xgx^{-1}=gx^{-1}\Rightarrow gx^{-1}=x^{-1}g\Rightarrow x^{-1}\in C$$

$$\forall(x,y)\in C^2,(gx)y^{-1}=(xg)y^{-1}$$

$\Rightarrow g(x.y^{-1})=(gx)y^{-1}$ إن $x\in C\Leftarrow gx=xg$

$\Rightarrow g(xy^{-1})=g(xy^{-1})$ $(.)$ تجميعي

إذن $xy^{-1}\in C$ من أجل كل $(x,y)\in C^2$ ومنه C هي زمرة جزئية من G وتـدعى مركـز الزمرة G.

التمرين 2

لتكن $G\neq\varnothing$ مجموعة مزودة بقانون تشكيل داخلي $(*)$ ولنفرض أن:

1. القانون $(*)$ تجميعي.
2. $\exists e\in G,\ \forall x\in G;\quad x*e=x$
3. $\forall x\in G,\ \exists x'\in G;\ x*x'=e$

أثبت أن $(G,*)$ هي زمرة.

الحل:

- القانون $(*)$ تجميعي بالفرض.

• لنثبت أن x' هو نظير x بالنسبة لـ $(*)$. لدينا بالفرض $x*x'=e$. بما أن $x'\in G$ إذن يوجد $x''\in G$ بحيث يكون $x'*x''=e$ وبالتالي:

$x'*(x*x')=x'*e=x'$ حسب الفرض الثاني والثالث

$\Rightarrow x'*\left[(x*x')*x''\right]=x'*x''=e$

$\Rightarrow x'*\left[x*(x'*x'')\right]=e$ * تجميعي

$\Rightarrow x'*(x*e)=e$ حسب الفرض الثالث

$\Rightarrow (x'*x)*e=e$ * تجميعي

$\Rightarrow x'*x=e$

•لنثبت أن e هو العنصر الحيادي بالنسبة لـ $(*)$. لنثبـت أن $e*x=x$. لـدينا بـالفرض $x*e=x$ وبالتالي:

$\Rightarrow e*(x*e)=e*x$

$\Rightarrow (e*x)*e=(x*x')*x$ حسب الفرض الأول والثالث

$\Rightarrow e*x=x*(x'*x)$ حسب الفرض الأول والثاني

$\Rightarrow e*x=x*e=x$ حسب الفرض الأول والثالث

إذن يوجد حيادي ولكل عنصر نظير والقانون $(*)$ تجميعي بالفرض أي أن $(G,*)$ هي زمرة.

التمرين 3:

لتكن H_1,H_2 زمرتين جزئيتين من الزمرة G أثبت أن :

$$\underbrace{H_1\cup H_2 \text{ زمرة جزئية من } G}_{(1)} \Leftrightarrow \underbrace{H_1\subset H_2 \text{ or } H_2\subset H_1}_{(2)}$$

الحل :

إن $(2)\Rightarrow(1)$ واضح.

لنفـرض أن $H_1\cup H_2$ زمـرة جزئيـة مـن G. لـيكن $(x\in H_1)\wedge(y\in H_2)$ عندئـذ $(x\in H_1\cup H_2)\wedge(y\in H_1\cup H_2)$ وبما أن $H_1\cup H_2$ زمرة جزئية فإن $xy^{-1}\in H_1\cup H_2$

وبالتالي $(xy^{-1}\in H_1)\vee(xy^{-1}\in H_2)$ إذن:

إما $xy^{-1}\in H_1$ وبالتالي $y^{-1}\in H_1$ أي $y\in H_1$ لأن H_1 زمرة جزئية إذن $H_2\subset H_1$.

و إما $xy^{-1}\in H_2$ وبالتالي $x\in H_2$ لأن H_2 زمرة جزئية إذن $H_1\subset H_2$.

التمرين 4:

أثبت أن الزمرة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};\, n\neq 0$ هي زمرة منتهية و عدد عناصرها يساوي n و

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{[0],[1],\ldots,[n-1]\}$

الحل :

إذا كان $[x]\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ فإن

$$\begin{aligned}[x]&=\{y\in\mathbb{Z};\, y-x\in n\mathbb{Z}\}\\&=\{y\in\mathbb{Z};\,\exists k\in\mathbb{Z}; y-x=nk\}\\&=\{y=x+nk;\, k\in\mathbb{Z}\}\\&=\{x+nk;\, k\in\mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

- لاحظ أنه إذا كان $0\leq p<q<n$ فإن $q-p$ لايمكن أن يكون من مضاعفات العدد n. أي أن $q\notin[p]$ ونستنتج إذن $[p]\neq[q]$.

- ليكن $[a]\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ عندئذ بإجراء القسمة التقليدية لـ a على n نجد أنه توجد الثنائيـة $(q,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ حيـث $0\leq r<n$ و $a=qn+r$ ومنه $a-r=qn\in n\mathbb{Z}$ أي أن $a\in[r]$، إذن $[a]=[r]$. ونستنتج أنه من أجل أي $[a]\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ فإنـه يوجـد $r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ بحيث $[a]=[r]$.

ملاحظة:

$[n]=[0]$ لأن

$$\begin{aligned}[n]&=\{n+nk\,;k\in\mathbb{Z}\}\\&=\{nl\,;l=k+1\in\mathbb{Z}\}\\&=[0]\end{aligned}$$

التمرين 5:

أثبت أنه يوجد $(n-1)!$ تبديلاً دائرياً في الزمرة المتناظرة S_n.

الحل :

ليكن $x\in\mathbb{N}_n$ عندئذ يوجد $n-1$ لإختيار صورة x وفق أي تبديل دائري σ ومن ثم يتم إختيار صورة العنصر $\sigma(x)\in\mathbb{N}_n$ بـ $n-2$ حيث يتم الإختيار من المجموعة $\mathbb{N}_n\setminus\{x,\sigma(x)\}$. يتم إختيار صورة العنصر $\sigma^2(x)\in\mathbb{N}_n$ بـ $n-3$ حيث يتم الإختيار من المجموعة $\mathbb{N}_n\setminus\{x,\sigma(x),\sigma^2(x)\}$ وهكذا حتى آخر عنصر $\sigma^{n-1}(x)\in\mathbb{N}_n$ الذي يتم إختيار صورته بطريقة واحدة. إذن هناك $(n-1)!$ تبديلاً دائرياً في الزمرة المتناظرة S_n.

التمرين 6:

لتكن $2\leq n$. عندئذٍ أي تبديل $\sigma\in S_n$ يكتب كتركيب عدد منته من المناقلات. أي أن

$$\sigma=\tau_1 0\tau_2 0\ldots 0\tau_k$$

(بكلام آخر من أجل $2\leq n$ إن مجموعة المناقلات في S_n تولد الزمرة S_n).

<u>الحل</u> :

نعتمد طريقة التدريج في الإثبات.

1- من أجل $n=2$ فإن S_2 هي المجموعة $\{I,\tau_{1,2}\}$.

2- نفرض صحتها عند $(n-1)$ وليكن σ تبديلاً من S_n. نميز الحالتين التاليتين:

- $\sigma(n)=n$.

ليكن $\tilde{\sigma} : N_{n-1} \to N_{n-1}$ أي $\tilde{\sigma} \in S_{n-1}$ عندئذٍ استناداً إلى الفرض يوجد المناقلات $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \ldots, \tilde{\tau}_k$ من S_{n-1} بحيث يكون $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}_1 \circ \tilde{\tau}_2 \circ \cdots \circ \tilde{\tau}_k$ ولنعرف المناقلات $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ من S_n بحيث يكون $\tau_i(x) = \begin{cases} n & x = n \\ \tilde{\tau}_i(x), & x \neq n \end{cases}$ وبالتالي نستنتج أن $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$.

- إذا كان $\sigma(n) = p \neq n$

لنعرف $\overline{\sigma} = \tau_{n,p} \circ \sigma \in S_n$. عندئذ التبديل $\overline{\sigma}$ يحقق $\overline{\sigma}(n) = n$ ويمكننا تطبيق الحالة السابقة أي أن $\overline{\sigma} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$ وبالتالي $\sigma = \tau_{n,p} \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$.