السؤال الأول : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة فيها : $U_1 = 2$ و $U_4 = 16$. **المطلوب** :

1) احسب q أساس المتتالية ، و U_6 ، واستنتج اطراد المتتالية . 2) عبّر عن U_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_0 + U_3 + U_6 + \cdots + U_{3n}$

السؤال الثاني : $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية مُعرّفة بالعلاقة : $U_n = en + 2e$. **المطلوب** :

1) أثبت أنَّ المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابيّة أساسها e ، واستنتج اطراد المتتالية ، واحسب حدّها الرابع .

2) احسب المجموع : $S = U_2 + U_4 + \cdots + U_{20}$.

السؤال الثالث : نُعرّف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار : $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$. **المطلوب** :

1) احسب S_1 و S_2 و S_3 .

2) ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

3) برهن بالتدريج صحّة المساواة : $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4) جد نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ ، ماذا تستنتج ؟

السؤال الرابع : a و b و c أعداد حقيقيّة حيث $a \neq 0$. نعلم أنَّ a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسيّة أساسها q ، كما نعلم أنَّ $(-3a)$ و b و c ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابيّة . **المطلوب** :

1) احسب q . 2) إذا علمت أنَّ $b = 2$ وأنَّ المتتالية الهندسيّة متزايدة تماماً ، فجد قيمة كل من a و c .

X-Math πac

السؤال الخامس :

1) المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ مُعرّفة وفق $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = -U_n + 4$. **المطلوب** :

a. احسب U_1 و U_2 و U_3 و U_4 و U_5 ، ثمَّ خمّن U_n بدلالة n .

b. بفرض $U_n = 2 + (-1)^n$. برهن بالتدريج صحّة هذه العلاقة .

2) احسب المجموع : $S = -\frac{1}{3} - 1 - \frac{5}{3} - \frac{7}{3} - \cdots - 5$

السؤال السادس : لتكن $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية مُعرّفة وفق العلاقة التدريجيّة التالية : $\begin{cases} U_1 = 2\pi \\ U_{n+1} = \frac{\pi(2U_n - \pi)}{U_n} \end{cases}$. **المطلوب** :

1) احسب U_2 و U_3 ، وأثبت أنَّ المتتالية متناقصة .

2) أثبت بالتدريج أنَّ : $\pi \leq U_n \leq 2\pi$.

3) لتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ المُعرّفة بالعلاقة : $V_n = \frac{2}{U_n - \pi}$.

a . أثبت أنَّ المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ حسابيّة يُطلب تعيين كل من أساسها وحدّها الأوّل .

b. أثبت أنَّ : $V_n = \frac{2n}{\pi}$ ، واستنتج U_n بدلالة n .

c. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{2}{U_1 - \pi} + \frac{2}{U_2 - \pi} + \cdots + \frac{2}{U_n - \pi}$.

------- انتهت الأسئلة -------

إعداد : محمود المحمود 0936 838 276

(حل اختبار المتتاليات -2-)

السؤال الأول:

$(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية فيها: $U_4=16$, $U_1=2$

1) $\frac{U_4}{U_1}=q^{4-1} \Rightarrow q^3=\frac{16}{2}=8$

$\Rightarrow \boxed{q=2}$

$\frac{U_6}{U_1}=q^5 \Rightarrow U_6=U_1 . q^5=2(2)^5$

$\Rightarrow \boxed{U_6=64}$

في المتتالية الهندسية يكون:

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=q=2>1 \Rightarrow$

U_n متزايدة تماماً"

2) $U_n=U_1 . q^{n-1}=2(2)^{n-1}$

$\Rightarrow \boxed{U_n=2^n}$

3) $S_n=U_0+U_3+U_6+\dots+U_{3n}$

مجموع حدود متتالية هندسية:

أساسها $q'=8 \Leftarrow q'=q^3=2^3$

حدها الأول: $a=U_0=1$

عدد حدودها: $n=\frac{3n-0}{3}+1=n+1$

$S_n=a.\frac{1-q^n}{1-q}=1\times\frac{1-8^{n+1}}{1-8}$

$\Rightarrow \boxed{S_n=\frac{-1+8\cdot 8^n}{7}}$

السؤال الثاني:

$U_n=en+2e$

1) $U_{n+1}-U_n=e(n+1)+2e-en-2e$

$=en+e-en$

$U_{n+1}-U_n=e=r \Rightarrow$

U_n حسابية أساسها $r=e$

في المتتالية الحسابية يكون:

$U_{n+1}-U_n=r=e>0$

$\Leftarrow$ U_n متزايدة تماماً"

الحد الرابع $\Leftarrow n=3$:

$U_3=3e+2e=5e \Rightarrow \boxed{U_3=5e}$

2) $S=U_2+U_4+\dots+U_{20}$

مجموع حدود متتالية حسابية

حدها الأول: $a=U_2=2e+2e=4e$

حدها الأخير: $l=U_{20}=20e+2e=22e$

عدد حدودها: $n=\frac{20-2}{2}+1=10$

$S=n.\frac{a+l}{2}=10\times\frac{4e+22e}{2}$

$=5(26e) \Rightarrow \boxed{S=130e}$

السؤال الثالث

$S_n = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$

1) $S_1 = 1^3 = 1$

$S_2 = 1^3+2^3 = 1+8 = 9$

$S_3 = 1^3+2^3+3^3 = 9+27 = 36$

2) سلسلة ⇐ معيار الفرق:

$S_{n+1} = \underbrace{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}+(n+1)^3$

$= S_n + (n+1)^3 \Rightarrow$

$S_{n+1} - S_n = (n+1)^3 > 0$

⇐ S_n متزايدة تماماً"

3) نسمي القضية: $E(n): S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

نثبت صحة القضية من أجل $n=1$:

$E(1): \quad S_1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ✓

محققة

نفرض صحة القضية من أجل n:

$E(n): \quad S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$:

$E(n+1): \quad \underbrace{S_{n+1}}_{\ell_1} = \underbrace{\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}_{\ell_2}$

$\ell_1 = S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{من الفرض}} + (n+1)^3$

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$\ell_1 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$

$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$

$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \ell_2$

محققة من أجل $n+1$ ⇐

محققة من أجل n.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

⇐ S_n متباعدة نحو $+\infty$

السؤال الرابع:

1) $\boxed{b = aq}$ ① , $\boxed{c = aq^2}$ ②

$b = \frac{-3a+c}{2} \Rightarrow \boxed{2b = -3a+c}$ ③

نعوض ① و ② في ③

$2aq = -3a + aq^2 \Rightarrow$

$aq^2 - 2aq - 3a = 0 \Rightarrow$

$a(q^2-2q-3) = 0 \ ; a \neq 0 \Rightarrow$

$q^2 - 2q - 3 = 0 \Rightarrow$

$(q-3)(q+1) = 0$

إما $q=3$ أو $q=-1$

2) $\boxed{b=2}$, المتتالية الهندسية متزايدة تماماً" ⇐ $\boxed{q=3}$

$b = aq \Rightarrow a = \frac{b}{q} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$

$c = bq = 2(3) = 6 \Rightarrow \boxed{c=6}$

السؤال الخامس:

1) $u_0=3\ ,\ u_{n+1}=-u_n+4$

a. $u_1=-u_0+4=-3+4=1$

$u_2=-u_1+4=-1+4=3$

$u_3=-u_2+4=-3+4=1$

$u_4=-u_3+4=-1+4=3$

$u_5=-u_4+4=-3+4=1$

إحدى طرق التخمين:

$u_1-u_0=1-3=-2=(-1)^1.2$

$u_2-u_1=3-1=2=(-1)^2.2$

$u_3-u_2=1-3=-2=(-1)^3.2$

$u_4-u_3=3-1=2=(-1)^4.2$

$u_5-u_4=1-3=-2=(-1)^5.2$

نستنتج: $u_{n+1}-u_n=(-1)^{n+1}(2)$

$=(-1)^n(-1)(2)$

$u_{n+1}-u_n=-2(-1)^n\Rightarrow$

$-u_n+4-u_n=-2(-1)^n\Rightarrow$

$-2u_n+4=-2(-1)^n\Rightarrow$

$-u_n+2=-(-1)^n\Rightarrow$

$\boxed{u_n=(-1)^n+2}$ هذا تخميننا لـ u_n بدلالة n

* طريقة ثانية:

نحل المعادلة $f(x)=x$: $x=-x+4$

$\Rightarrow 2x=4\Rightarrow\boxed{x=2=\ell}$

نفرض المتتالية: $v_n=u_n-\ell$

$v_n=u_n-2$

ونبرهن أنها هندسية:

$v_{n+1}=u_{n+1}-2=-u_n+4-2$

$=-u_n+2$

$=-(u_n-2)$

$\Rightarrow v_{n+1}=-v_n\Rightarrow$

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=-1=q\Rightarrow$

v_n هندسية أساسها $q=-1$

ونكتب حدها العام:

$v_0=u_0-2=3-2$

$v_0=1$

$v_n=v_0.q^n$

$=(1)(-1)^n$

$\Rightarrow\boxed{v_n=(-1)^n}$

ونعزل u_n من علاقة v_n:

$u_n=v_n+2\Rightarrow\boxed{u_n=(-1)^n+2}$

هذا تخميننا لـ u_n بدلالة n.

ويوجد أيضاً "طرق أخرى".

b. نسمي القضية: $E(n): u_n=2+(-1)^n$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0):\ u_0=2+(-1)^0=2+1=3$ ✓

محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$ ونبرهن

صحة $E(n+1)$: $E(n+1):\ u_{n+1}=2+(-1)^{n+1}$

من الفرض

$\ell_1=-u_n+4=-2-(-1)^n+4=2+(-1)^{n+1}=\ell_2$

محققة من أجل $n+1$ ⇐ محققة من أجل n

(2 $S = -\frac{1}{3} - 1 - \frac{5}{3} - \frac{7}{3} - \dots - 5$

نضرب الطرفين بـ 3 :

$3S = -1 - 3 - 5 - 7 - \dots - 15$

(3S) مجموع حدود متتالية حسابية

أساسها $r = -2$

حدّها الأوّل: $a = -1$

حدّها الأخير: $l = -15$

عدد حدودها: $n = 8$ {الأعداد الفردية من (-1) إلى (-15)}

$3S = n\frac{a+l}{2} = 8 \times \frac{-1-15}{2} \Rightarrow$

$3S = 4(-16) \Rightarrow \boxed{S = \frac{-64}{3}}$

السؤال السادس:

$$\begin{cases} u_1 = 2\pi \\ u_{n+1} = \frac{\pi(2u_n - \pi)}{u_n} \end{cases} \quad n \geq 1$$

(1 $u_2 = \frac{\pi(2u_1 - \pi)}{u_1} = \frac{\pi(4\pi - \pi)}{2\pi}$

$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{3\pi}{2}}$

$u_3 = \frac{\pi(2u_2 - \pi)}{u_2} = \frac{\pi(3\pi - \pi)}{\frac{3\pi}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{4\pi}{3}}$

نسمّي القضيّة: $E(n): u_{n+1} \leq u_n$

نثبت صحّة القضيّة من أجل $n=1$:

$E(1): u_2 \leq u_1$

$\frac{3\pi}{2} < 2\pi$ محققة ✓

نفرض صحّة $E(n)$ ونبرهن صحّة $E(n+1)$:

$E(n+1): u_{n+2} \leq u_{n+1}$

نفرض التابع: $f(x) = \frac{\pi(2x - \pi)}{x}$

$f'(x) = \frac{2\pi x - 2\pi x + \pi^2}{x^2} = \frac{\pi^2}{x^2} > 0$

f متزايد تماماً

لدينا من الفرض: $u_{n+1} \leq u_n$

$f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}$

محققة من أجل $n+1$ ⇐ محققة من أجل n

⇐ u_n متناقصة

(2 نسمّي القضيّة: $E(n): \pi \leq u_n \leq 2\pi$

نثبت صحّة القضيّة من أجل $n=1$

$E(1): \pi < u_1 = 2\pi \leq 2\pi$ محققة

نفرض صحّة $E(n)$ ونبرهن صحّة $E(n+1)$:

$E(n+1): \pi \leq u_{n+1} \leq 2\pi$

نستفيد من تزايد التابع f، ومن الفرض:

$\pi \leq u_n \leq 2\pi$

$f(\pi) \leq f(u_n) \leq f(2\pi)$

$\pi \leq u_{n+1} \leq \frac{3\pi}{2} < 2\pi$

$\Rightarrow \pi \leq u_{n+1} \leq 2\pi \Rightarrow$ محققة من أجل $n+1$ محققة من أجل n

(3 $v_n = \frac{2}{u_n - \pi}$

.a $v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1} - \pi} = \frac{2}{\frac{\pi(2u_n - \pi)}{u_n} - \pi}$

$= \frac{2u_n}{2\pi u_n - \pi^2 - \pi u_n} = \frac{2u_n}{\pi u_n - \pi^2}$

$= \frac{2u_n}{\pi(u_n - \pi)} \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{2u_n}{\pi(u_n - \pi)}}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n}{\pi(u_n - \pi)}_{(1)} - \frac{2}{u_n - \pi}_{(\pi)}$

$= \frac{2u_n - 2\pi}{\pi(u_n - \pi)}$

$= \frac{2(u_n - \pi)}{\pi(u_n - \pi)} \Rightarrow$

$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{\pi} = r \Rightarrow$

v_n حسابية أساسها $\boxed{r = \frac{2}{\pi}}$

وحدّها الأول:

$v_1 = \frac{2}{u_1 - \pi} = \frac{2}{2\pi - \pi} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{2}{\pi}}$

.b $v_n = v_1 + (n-1)r = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}(n-1)$

$= \frac{2}{\pi} + \frac{2n}{\pi} - \frac{2}{\pi} \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{2n}{\pi}}$

$v_n = \frac{2}{u_n - \pi} \Rightarrow \frac{1}{v_n} = \frac{u_n - \pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{2}{v_n} = u_n - \pi$

$\Rightarrow u_n = \frac{2}{v_n} + \pi = \frac{2}{\frac{2n}{\pi}} + \pi$

$= \frac{\pi}{n} + \pi = \frac{\pi + n\pi}{n}$

$\Rightarrow \boxed{u_n = \pi\left(\frac{1+n}{n}\right)}$

.c $S_n = \frac{2}{u_1 - \pi} + \frac{2}{u_2 - \pi} + \dots + \frac{2}{u_n - \pi}$

$= v_1 + v_2 + \dots + v_n$

مجموع حدود متتالية حسابية

حدّها الأول: $a = v_1 = \frac{2}{\pi}$

حدّها الأخير: $\ell = v_n = \frac{2n}{\pi}$

عدد حدودها: $n = n - 1 + 1 = n$

$S_n = n\frac{a + \ell}{2} = n \cdot \frac{\frac{2}{\pi} + \frac{2n}{\pi}}{2}$

$= n \times \frac{2}{\pi} \times \frac{(1+n)}{2} \Rightarrow$

$\boxed{S_n = \frac{n}{\pi}(1+n)}$

#MeEnMathTeam

X_Math Bac

X-Math πac

تدقيق : إيناس دللي