رؤية شاملة في التابع الأسي

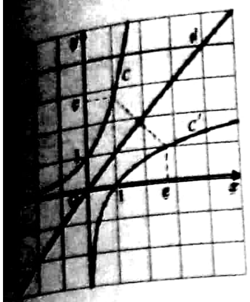
ابع الأسي النيبر

تعريف: التابع الأسي النيبري exp:

هو التابع المعرف على R كما يلي:

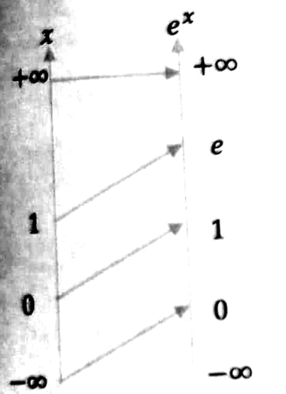
صورة كل x من R وفق exp هو العدد الذي لوغاريتمه النيبري يساوي x ونرمز له بالرمز $exp(x) = e^x$

نتائج هامة:



- $\ln x = y \Rightarrow x = e^y$
- $e^1 = e \quad , \quad e^0 = 1$
- اياً يكن $x \in R$ فإن $\ln e^x = x$
- اياً يكن $x \in]0, +\infty[$ فإن $e^{\ln x} = x$
- $exp: R \to R_+^* \quad : x \to e^x$
- $\ln: R_+^* \to R \quad : x \to \ln x$
- بما أن التقابل العكسي للتابع اللوغاريتمي النيبري هو التابع الأسي النيبري فإن C' هو نظير C بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث.

ملاحظات:



.1

$$x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$$
$$x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$$
$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$$

2. في حالة $x > 0$ نجد: $e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = e^{\ln \frac{1}{x})} = \frac{1}{x}$

في حالة $x > 0$ نجد:

$$e^{|\ln x|} = \begin{cases} e^{\ln} & : x \geq 1 \\ e^{-\ln x} & : x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x & : x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & : x < 1 \end{cases}$$

3. اياً يكن العددين a , b فإن:

$$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$
$$a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$$
$$a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$$

4. التابع $f(x) = e^x$ معرف على R

التابع $f(x) = e^{g(x)}$ معرف حيث يكون $g(x)$ معرف.

ملاحظة

حل المعادلة $e^{f(x)} = e^{g(x)}$ يكافئ حل المعادلة $f(x) = g(x)$

حل المتراجحة $e^{f(x)} \leq e^{g(x)}$ يكافئ حل المتراجحة $f(x) \leq g(x)$

وائل زعتارية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال 0952480990

تدريب صفحة 186:

1) اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

$\boxed{1}\ A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ $= 2 + 3 = 5$	$\boxed{2}\ B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$ $= e^{\ln\sqrt{16}} + e^{\ln 3}$ $= 4 + 3 = 7$
$\boxed{3}\ C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ $= -3 + 5 = 2$	$\boxed{4}\ D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$ $= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

2) اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من العبارات الآتية مبيناً المجموعة التي تكون معرفة عليها.

$\boxed{1}\ A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$ $= x - (\ln 2 + \ln e^x)$ $= x - \ln 2 - x$ $= -\ln 2$	شرط التعريف: $x > 0 \qquad 2e^x > 0$ $D =]0, +\infty[$
$\boxed{2}\ B = e^{\ln(x-1) - \ln x} + \frac{1}{x}$ $= e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} + \frac{1}{x}$ $= \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = 1$	شرط التعريف: $x - 1 > 0 \qquad x > 0 \qquad x \neq 0$ $D =]1, +\infty[$
$\boxed{3}\ C = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln x}$ $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$	شرط التعريف: $e^{\frac{1}{x}} > 0 \qquad x > 0$ $x \neq 0$ $D =]0, +\infty[$

3) حل المعادلات أو المتراجحات الآتية:

$\boxed{1}\ e^{3-x} = 1$ $e^{3-x} = e^0$ $3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$	$\boxed{2}\ e^{2x^2+3} = e^{7x}$ $2x^2 + 3 = 7x$ $2x^2 - 7x + 3 = 0$ $\Delta = 49 - 24 = 25$ إما : $x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{2}}$ أو: $x_2 = \frac{7+5}{4} = 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3}$
$\boxed{3}\ \frac{e^x}{1 - 2e^x} = 5$ $e^x = 5 - 10e^x$ $11e^x = 5$ $e^x = \frac{5}{11} \Rightarrow \boxed{x = \ln\frac{5}{11}}$	$\boxed{4}\ 2e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1}$ $\frac{2}{e^x} = \frac{1}{e^x + 1}$ $2e^x + 2 = e^x$ $e^x = -2$ (مستحيلة الحل)
$\boxed{5}\ \ln(e^x - 2) = 3$ $\ln(e^x - 2) = \ln e^3$ $e^x - 2 = e^3$ $e^x = e^3 + 2$ $\boxed{x = \ln(e^3 + 2)}$	$\boxed{6}\ \ln(2 - e^x) \geq 3$ $\ln(2 - e^x) \geq \ln e^3$ $2 - e^x \geq e^3$ $\underbrace{2 - e^3}_{\text{سالب}} \geq e^x$ (وهذه المتراجحة مستحيلة الحل)

7 $e^{x^2-2} \le e^{4-x}$

$x^2-2 \le 4-x$

$x^2+x-6 \le 0$

$(x+3)(x-2)=0$

إما $x=-3$ أو $x=2$

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad$ 2 $\quad +\infty$		
x^2+x-6	+ 0	− 0	+
$x^2+x-6 \le 0$	غير محققة	محققة	غير محققة

$S=[-3,2]$

8 $(e^x-1)(e^x-4)<0$

$(e^x-1)(e^x-4)=0$

إما $e^x=1 \rightarrow x=0$

أو $e^x=4 \rightarrow x=\ln 4$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $\ln 4$ $\quad +\infty$		
$(e^x-1)(e^x-4)$	+ 0	− 0	+
$(e^x-1)(e^x-4)<0$	غير محققة	محققة	غير محققة

$S=]0,\ln 4[$

9 $e^{2x^2-1} \ge 3$

$e^{2x^2-1} \ge e^{\ln 3}$

$2x^2-1 \ge \ln 3$

$2x^2 \ge 1+\ln 3$

$2x^2 \ge \ln e+\ln 3$

$2x^2 \ge \ln 3e$

$x^2 \ge \frac{1}{2}\ln 3e$

$\underbrace{x^2 \ge \ln\sqrt{3e}}$

إما $x \ge \sqrt{\ln\sqrt{3e}}$ أو $x \le -\sqrt{\ln\sqrt{3e}}$

$S=\left]-\infty,-\sqrt{\ln\sqrt{3e}}\right] \cup \left[\sqrt{\ln\sqrt{3e}},+\infty\right[$

تذكرة: $\underbrace{x^2 \ge a}$

إما $x \ge \sqrt{a}$ أو $x \le -\sqrt{a}$

4) اشرح لماذا تتفق إشارة $e^x-\frac{4}{e^x}$ مع إشارة (e^x-2)؟ ثم حل المتراجحة $e^x-\frac{4}{e^x}<0$

- $e^x-\frac{4}{e^x}=\frac{e^{2x}-4}{e^x}=\frac{(e^x-2)\overbrace{(e^x+2)}^{\boxed{+}}}{\underbrace{e^x}_{\boxed{+}}}$

(e^x+2) موجب تماماً و e^x موجب تماماً أصبحت إشارة المقدار السابق من إشارة (e^x-2)

- $e^x-\frac{4}{e^x}<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x}<0$

ومنه تكون المتراجحة السابقة محققة عندما يكون $e^x-2<0$

$e^x<2 \quad \Rightarrow \quad x<\ln 2$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $S=]-\infty,\ln 2[$

****

خواص التابع الأسي:

$e^0=1 \quad , \quad e^1=e$	$e^{-a}=\frac{1}{e^a}$
$e^{a+b}=e^a.e^b$	$(e^a)^p=e^{ap}$
$e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$	$e^{a_1+a_2+\dots+a_n}=e^{a_1}.e^{a_2}\dots\dots e^{a_n}$

تعريف:

ليكن a عدد حقيقي موجب تماماً، وليكن x عدد حقيقي ما نعرف a^x كما يلي:

$a^x=e^{x\ln a}$

$3^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\ln 3} \quad , \quad \pi^5=e^{5\ln\pi}$

مبرهنة: أياً يكن العددان الحقيقيان الموجبان تماماً a, b والعددان الحقيقيان u, v:

$1^u=1$	$(a.b)^u=a^u.b^u$	$\frac{a^u}{a^v}=a^{u-v}$
$a^u.a^v=a^{u+v}$	$(a^u)^v=a^{u.v}$	$\frac{a^u}{b^u}=\left(\frac{a}{b}\right)^u$

علاء رحال 0952480990 ياسر الساسة 0949198068 ... زعترية 0933699123

Scanned by CamScanner

ملاحظة دائماً في الاثباتات أو حل معادلات أفضل طريقة أن نستطيع e^{x} عامل مشترك

تدريب صفحة 190 :

1) اثبت صحة كل من المساواتين الآتيتين على R.

$\boxed{1}$ $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$

$$L_1=\underbrace{\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)}$$
$$=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x(1+e^{-x})}{e^{-x}+1}\right)=\ln e^x=x=L_2$$

$L_1=\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)$
$=\ln[e^x(1+\frac{1}{e^x})]-\ln(e^{-x}+1)$
$=\ln e^x+\ln(1+e^{-x})-\ln(e^{-x}+1)$
$=\ln e^x=x=L_2$

$\boxed{2}$ $\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$

$$L_1=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)}=\frac{1}{e^{-x}+1}=L_2$$

(ط2) $L_1=\dfrac{e^x}{1+e^x}\div e^x=\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}=L_2$

أو طريقة 3: $L_1=\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\dfrac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$

2) اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

$\boxed{1}$ $A=\ln\sqrt{e^5}$ $=\ln e^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$	$\boxed{2}$ $B=\frac{e}{e^{2+\ln 3}}$ $=\frac{e}{e^2.e^{\ln 3}}=\frac{1}{3.e}$
$\boxed{3}$ $C=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$ $=\frac{e^2.e^{\ln 8}}{e^3.e^{\ln 4}}=\frac{8}{(e)(4)}=\frac{2}{e}$	$\boxed{4}$ $D=\frac{e^{4x}}{e.(e^x)^2}$ $=\frac{e^{4x}}{e.e^{2x}}=\frac{e^{2x}}{e}=e^{2x-1}$
$\boxed{5}$ $E=(e^{2x})^3.(e^{-x})^6$ $=e^{6x}.e^{-6x}=e^0=1$	$\boxed{6}$ $F=\frac{e^{3\pi}-e^{2\pi}}{e^{2\pi}-e^{\pi}}$ $=\frac{e^{\pi}(e^{2\pi}-e^{\pi})}{e^{2\pi}-e^{\pi}}=e^{\pi}$
$\boxed{7}$ $G=(32)^{\frac{3}{2}}$ $=((2)^5)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{15}{2}}$	$\boxed{8}$ $H=3^{\frac{-1}{\ln 3}}$ $=e^{\frac{-1}{\ln 3}.\ln 3}=e^{-1}=\frac{1}{e}$
$\boxed{9}$ $I=\sqrt[6]{27}.3^{\frac{1}{2}}$ $=\sqrt[6]{3^3}.3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}=3$	

ملاحظة: $e^{x}.e^{-x}=1$ لا تنس

3) اثبت أن التابع f المعرف على R وفق:

$f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ هو تابع ثابت.

$$f(x)=\underbrace{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}_{\text{مطابقة}}$$
$$=[e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})][e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}]$$
$$=(2e^{-x})(2e^x)=4e^0=4\ (\text{ثابت})$$

$=e^{2x}+2e^{x}.e^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^{x}.e^{-x}+e^{-2x})$
$=e^{2x}+2+\cancel{e^{-2x}}-e^{2x}+2-\cancel{e^{-2x}}$
$=4$ ثابت

4) حل المعادلات الآتية:

$\boxed{1}$ $e^{2x}-5e^x+4=0$ $(e^x-4)(e^x-1)=0$ إما $e^x=4\rightarrow\boxed{x_1=\ln 4}$ أو $e^x=1\rightarrow\boxed{x_2=0}$	$\boxed{2}$ $e^{2x}-e^x-6=0$ $(e^x-3)(e^x+2)=0$ إما $e^x=3\rightarrow\boxed{x=\ln 3}$ أو $e^x=-2$ (مرفوض)

Scanned by CamScanner

3
$$4e^{2x} - e^{x} + 2 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4(4)(2) = -31 < 0$$
(المعادلة مستحيلة الحل)

4
$$e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$$
$$(e^{-x} - 6)(e^{-x} - 1) = 0$$
إما $e^{-x} = 6 \rightarrow -x = \ln 6 \Rightarrow \boxed{x_1 = -\ln 6}$

او $e^{-x} = 1 \rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

---

5) حل المتراجحات الآتية:

1
$$e^{x} - 4e^{-x} \le 0$$
$$e^{x} - \frac{4}{e^{x}} \le 0$$
$$e^{2x} - 4 \le 0$$
$$(e^{x} - 2)\underbrace{(e^{x} + 2)}_{+} \le 0$$
فالإشارة من إشارة $e^{x} - 2$
$$e^{x} - 2 \le 0$$
$$e^{x} \le 2$$
$$x \le \ln 2$$
$$S =]-\infty, \ln 2]$$

2
$$(e^{x} - 2)e^{x} > 2(e^{x} - 2)$$
$$(e^{x} - 2)e^{x} - 2(e^{x} - 2) > 0$$
$$(e^{x} - 2)(e^{x} - 2) > 0$$
$$(e^{x} - 2)^2 > 0$$
دائماًمحققة إلا عندما : $e^{x} - 2 = 0$
$$e^{x} = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$
$$S = R \setminus \{\ln 2\}$$

3
$$e^{x+2} \ge \frac{3}{e^{x}}$$
$$e^{x+2} . e^{x} \ge 3$$
$$e^{2x+2} \ge e^{\ln 3}$$
$$2x + 2 \ge \ln 3$$
$$x \ge \frac{\ln 3 - 2}{2}$$
$$x \ge \frac{1}{2}\ln 3 - 1$$
$$S = \left[\frac{1}{2}\ln 3 - 1, +\infty\right[$$

بنوب فيم تعدم اعتماد بفضل ايما نافود بنوب كما بيطاع الدرج

4
$$e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$$
$$e^{2x} - \frac{2}{e^{x}} - 3 < 0$$
$$e^{3x} - 3e^{x} - 2 < 0$$
نفرض $(e^{x} = t) > 0$ ومنه : $t^3 - 3t - 2 < 0$
$$t^3 - 3t - 2 = 0$$
معادلة من الدرجة الثالثة نأخذ حل تجريبي يحققها ومنه

نجد $t = -1$ ونقسم المعادلة على المعامل $(t + 1)$
$$(t + 1)(t^2 - t - 2) < 0$$
$$(t + 1)(t - 2)(t + 1) < 0$$
$$(t + 1)^2(t - 2) < 0$$
$$\underbrace{(e^{x} + 1)^2}_{+}(e^{x} - 2) < 0$$
فالإشارة من إشارة $(e^{x} - 2)$ ، $e^{x} - 2 < 0$
$$e^{x} < 2 \Rightarrow x < \ln 2$$
$$S =]-\infty, \ln 2[$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} t^3 - 3t - 2 & t + 1 \\ \mp t^3 \mp t^2 & t^2 - t - 2 \\ -t^2 - 3t - 2 & \\ \pm t^2 \pm t & \\ -2t - 2 & \\ \pm 2t \pm 2 & \\ 0 & \end{array}$$

هذه الطريقة خاطئة لأنه من الترتيب أخذنا $e^{x} = t > 0$ ما بيصير t تساوي -1

بروح عاطة نفس علامة

التصحيح

$$e^{2x} - \frac{2}{e^{x}} - 3 < 0$$ نضرب بـ $e^{x} > 0$
$$e^{3x} - 2 - 3e^{x} < 0$$
نفرض أن
$$e^{x} = t > 0$$
$$t^3 - 3t - 2 < 0$$ قاعدة كل المتراجحات (نساويها للصفر)
$$t^3 - 3t - 2 = 0$$
بالتعويض $t = 2$ يحقق المعادلة لذلك نقسم على $t - (+2)$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 3t - 2 & t - 2 \\ t^3 - 2t^2 & t^2 + 2t + 1 \\ 2t^2 - 3t - 2 & \\ 2t^2 - 4t & \\ t - 2 & \\ t - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

$$(t - 2)(t^2 + t + 1) = 0$$
$$(t - 2)(t + 1)(t + 1) = 0$$
إما $t = 2$

او $t = -1$ مرفوض

t	0		2		$+\infty$
$t^3 - 3t - 2$		$-$	0	$+$	
		محققة			

متراجحة < 0

$$t \in]0, 2[$$
$$e^{x} \in]0, 2[$$ بأخذ لوغاريتم
$$x \in]-\infty, \ln 2[$$
$$S =]-\infty, \ln 2[$$

نفس الحل ظلط بروح علامات

Scanned by CamScanner

$\boxed{6}$ $e^x + 4e^{-x} \leq 5$

نضرب بـ e^x : $\quad e^{2x} + 4 \leq 5e^x$

$e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$

ط2

$(e^x - 4)(e^x - 1) = 0$ نفرض $e^x = t > 0$

إما $e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$

او $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$(e^x - 1)(e^x - 4)$	$+$	0 $-$ 0	$+$	
$(e^x - 1)(e^x - 4) \leq 0$	غير محققة	محققة	غير محققة	

$S = [0, \ln 4]$

$\boxed{5}$ $e^{x+\ln 4} > \frac{2}{3}$

$e^{x+\ln 4} > e^{\ln\frac{2}{3}}$

$x + \ln 4 > \ln\frac{2}{3}$

$x > \ln\frac{2}{3} - \ln 4$

$x > \ln\frac{1}{6}$

$x > -\ln 6$

$S =]-\ln 6, +\infty[$

****

مبرهنات في نهايات التابع الأسي

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

إذا كان xe^x في المقام عندئذ نهايته 0^- عندما $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ $\quad n \in N$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n . e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n . e^{-x} = 0$ $\quad n \in N$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ملاحظات هامة :

لإزالة حالات عدم التعيين في نهايات التابع الأسي نتبع ما يلي:

1. نخرج عامل مناسب و هو e^x أو x وإذا وجدنا في التمرين e^{-x} نخرجها عامل مناسب

أو $\dfrac{e^x \text{ من البسط}}{x \text{ من المقام}}$ أو $\dfrac{x \text{ من البسط}}{e^x \text{ من المقام}}$

2. عندما نحصل على حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ حصرياً نطبق القاعدة $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
3. توحيد المقامات أو توزيع البسط على المقام.
4. تغيير المتحول

Scanned by CamScanner

تمرين: احسب نهاية كل تابع من التوابع الآتية عند القيم المرفقة بجانب كل تابع.

$\boxed{1}$ $f(x)=e^x-4x+1 \ : a=+\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty-\infty$

$$f(x)=e^x\left(1-4.\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-0+0)=+\infty$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \quad : a=+\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x-1} \quad : a=+\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{e^x}{x}.\frac{\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.\frac{(1-0)}{(1-0)}=+\infty$$

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{e^x-5}{x} \quad : a=+\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{5}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-0=+\infty$$

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{4x} \quad : a=0$

حصلنا على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{e^{3x}-1}{4x}=\frac{3}{4}.\frac{e^{3x}-1}{3x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{3}{4}.(1)=\frac{3}{4}$$

علماً ان : $\left(\lim_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}=1\right)$

$\boxed{6}$ $f(x)=x+e^{-x}+2 \ : a=-\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty+\infty$

$$f(x)=e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}+1+\frac{2}{e^{-x}}\right)$$

$$=e^{-x}\left(\underbrace{x.e^x}+1+2.e^x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty(0+1+0)=+\infty$$

$\boxed{7}$ $f(x)=(x-1).e^x \quad : a=-\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty\times0$

$$f(x)=x.e^x-e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-0=0$$

$\boxed{8}$ $f(x)=4x-1+e^{2-x} : a=-\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $-\infty+\infty$

$$f(x)=4x-1+e^2.e^{-x}$$

$$=e^{-x}\left(\frac{4x}{e^{-x}}-\frac{1}{e^{-x}}+e^2\right)$$

$$=e^{-x}\left(4\underbrace{xe^x}-e^x+e^2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty(0-0+e^2)=+\infty$$

$\boxed{9}$ $f(x)=e^x-ln \qquad : a=+\infty$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty-\infty$

$$f(x)=x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty-0)=+\infty$$

$\boxed{10}$ $f(x)=\dfrac{ln\,(1+4x)}{1-e^{3x}} \quad a=0$

حصلنا على حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x)=\frac{ln\,(1+4x)}{-(e^{3x}-1)}$$

$$=\frac{4x\,\frac{\ln(1+4x)}{4x}}{-3x\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)}$$

$$=\frac{4\,\frac{\ln(1+4x)}{4x}}{-3\,\frac{e^{3x}-1}{3x}}$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{-4}{3}$$

وائل زعترية 0933699123
ياسر السامة 0949198068
علاء رحال 0952480990

نهايات مميزة :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

مثال ① : اوجد نهاية التابع f عند $a=-2$: $f(x)=(3+x)^{\frac{2}{x+2}}$

حصلنا على حالة $(1)^{\infty}$ عندئذ :

$$f(x)=(1+x+2)^{\frac{2}{x+2}}$$

بفرض $\underbrace{u(x)=x+2}_{\substack{x\to-2\\ u(x)\to 0}} \Rightarrow \frac{1}{u(x)}=\frac{1}{x+2} \Rightarrow \frac{2}{u(x)}=\frac{2}{x+2}$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{u(x)\to 0}[1+u(x)]^{\frac{2}{u(x)}}=\lim_{u(x)\to 0}\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{2}=e^{2}$$

مثال ② : اوجد نهاية التابع f عند $a=+\infty$: $f(x)=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$ ؟

حصلنا على حالة $(1)^{\infty}$ عندئذ :

$$f(x)=\left(\frac{x-1+1+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$$

بفرض $\underbrace{u(x)=\frac{4}{x-1}}_{\substack{x\to+\infty\\ u(x)\to 0}} \Rightarrow \frac{1}{u(x)}=\frac{x-1}{4} \Rightarrow \frac{1}{u(x)}=\frac{x}{4}-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{u(x)}+\frac{1}{4}=\frac{x}{4} \Rightarrow \frac{2}{u(x)}+\frac{1}{2}=\frac{x}{2}$

$$f(x)=(1+u(x))^{\frac{2}{u(x)}+\frac{1}{2}}=(1+u(x))^{\frac{2}{u(x)}}.(1+u(x))^{\frac{1}{2}}=\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{2}\sqrt{1+u(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{u(x)\to 0}\left[\left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{2}\sqrt{1+u(x)}\right]=e^{2}$$

****

$f(x)=e^{g(x)}$

$f'(x)=g'(x)\,.\,e^{g(x)}$

اذا كانت $g(x)$ [illegible]

اشتقاق التابع الأسي:

- التابع $x\to e^{x}$ اشتقاقي على R و تابعه المشتق $x\to e^{x}$
- إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على مجال I

فإن التابع $f:x\longrightarrow e^{u(x)}$ اشتقاقي على I وتابعه المشتق $\grave{f}(x)=\grave{u}(x).e^{u(x)}$

مشتق الاس = نفس x ...

تمرين: في كل من الحالات الآتية، احسب التابع المشتق للتابع على المجموعة المشار إليها:

① $f(x)=e^{x^{2}-4x+1}$ $\quad I=R$ $\grave{f}(x)=(2x-4)e^{x^{2}-4x+1}$	② $f(x)=e^{\sqrt{x-1}}$ $\quad I=]1,+\infty[$ $\grave{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}e^{\sqrt{x-1}}$
③ $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ $\quad I=R$ $\grave{f}(x)=\frac{e^{x}(e^{x}+1)-e^{x}.e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$ $=\frac{e^{2x}+e^{x}-e^{2x}}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$	④ $f(x)=\pi^{x^{2}-x}$ $\quad I=R$ $=e^{(x^{2}-x)\ln\pi}$ $\grave{f}(x)=(2x-1)\ln\pi\,\underbrace{e^{(x^{2}-x)\ln\pi}}$ $=(2x-1)\ln\pi\,.(\pi)^{x^{2}-x}$

Scanned by CamScanner

5 $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ $\quad I =]0, +\infty[$ $= e^{\sqrt{x}.\ln 2}$ $\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln 2.\underbrace{e^{\sqrt{x}.\ln 2}}_{\downarrow}$ $= \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} \quad . \quad 2^{\sqrt{x}}$	6 $f(x) = (x-1)e^x$ $\quad I = R$ $\acute{f}(x) = 1.e^x + e^x(x-1)$ $= e^x + xe^x - e^x = xe^x$

****

تمرين رقم 3 صفحة 199: جد نهاية كل من التوابع الآتية عند a :

1) $f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}$ $\quad : a = 1$

$$f(x) = (1+1-x)^{\frac{3}{x-1}}$$

حصلنا على حالة $(1)^\infty$ عندئذٍ :

نفرض $\underbrace{u(x) = 1-x}_{\substack{x \to 1 \\ u(x)\to 0}} \Rightarrow u(x) = -(x-1) \Rightarrow \frac{1}{u(x)} = \frac{-1}{x-1} \Rightarrow \frac{-3}{u(x)} = \frac{3}{x-1}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u(x)\to 0} [1+u(x)]^{\frac{-3}{u(x)}} = \lim_{u(x)\to 0} \left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{-3} = e^{-3}$$

---

2) $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $\quad : a = +\infty$

$$f(x) = \left(\frac{x+1-1-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

حصلنا على حالة $(1)^\infty$ عندئذٍ :

بفرض $\underbrace{u(x) = \frac{-3}{x+1}}_{\substack{x\to+\infty \\ u(x)\to 0}} \Rightarrow -u(x) = \frac{3}{x+1} \Rightarrow \frac{-1}{u(x)} = \frac{x+1}{3}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u(x)\to 0} [1+u(x)]^{\frac{-1}{u(x)}} = \lim_{u(x)\to 0} \left[(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}\right]^{-1} = e^{-1}$$

---

3) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ $\quad : a = 0$ $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$ $\quad \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين من الشكل $f(x) = \frac{1}{2}\frac{e^x-1}{x}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$ $\quad$ علماً أن : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$	5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x-1}$ $\quad : a = +\infty, -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0-1}{-\infty-1} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين من الشكل $f(x) = \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1) = +\infty$
4) $f(x) = 2xe^{-x}$ $\quad : a = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\quad \infty.0$ حالة عدم تعيين من الشكل $f(x) = 2\frac{x}{e^x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2(0) = 0$	6) $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$ $\quad : a = +\infty, -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0-0+3 = 3$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ $\quad \infty - \infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $f(x) = e^x(e^x - 1) + 3$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty-1)+3 = +\infty$

Scanned by CamScanner

$7)\ f(x) = \ln(e^x + 2)$: $a = +\infty, -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$8)\ f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$: $a = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty + \infty$

$$f(x) = e^{-x}\left(\frac{2x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right)$$

$$= e^{-x}(2xe^x - e^x + 1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0 - 0 + 1) = +\infty$$

$9)\ f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$ $\quad a = 0, +\infty$

$\lim_{x\to0} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $\infty.0$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = 1$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $0.\infty$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$$

$10)\ f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad a = -\infty, +\infty, 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^0 = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$$

تدريب صفحة 203 :

1) بسط كتابة كل من العددين : $A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}}$, $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$

$$A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}} = e^{\frac{-1}{\ln 3}.\ln 3} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$B = 2^{\frac{1}{\ln 4}} = 2^{\frac{1}{2\ln 2}} = e^{\frac{1}{2\ln 2}.\ln 2} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

2) حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة :

① $7^{x-1} = 3^x$

$$e^{(x-1)\ln 7} = e^{x\ln 3}$$
$$(x-1).\ln 7 = x\ln 3$$
$$x\ln 7 - \ln 7 - x\ln 3 = 0$$
$$x\underbrace{(\ln 7 - \ln 3)}_{\ln\frac{7}{3}} = \ln 7$$
$$x\ \ln\frac{7}{3} = \ln 7$$
$$\boxed{x = \frac{\ln 7}{\ln\frac{7}{3}}}$$

② $3^x = 4^{2x+1}$

$$e^{x\ln 3} = e^{(2x+1)\ln 4}$$
$$x\ln 3 = (2x+1)\ln 4$$
$$x\ln 3 = 2x\ln 4 + \ln 4$$
$$x\ln 3 - 2x\ln 4 = \ln 4$$
$$x\underbrace{(\ln 3 - \ln 16)}_{\ln\frac{3}{16}} = \ln 4$$
$$x\ \ln\frac{3}{16} = \ln 4$$
$$\boxed{x = \frac{\ln 4}{\ln\frac{3}{16}}}$$

③ $3^x > 4$

$$e^{x\ln 3} > e^{\ln}$$
$$x\ln 3 > \ln 4$$
$$x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$$
$$S = \left]\frac{\ln 4}{\ln 3}, +\infty\right[$$

④ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$

$$e^{x\ln\frac{1}{3}} > e^{\ln 4}$$
$$x\ln\frac{1}{3} > \ln 4$$
$$-x\ln 3 > \ln 4$$
$$x < \frac{-\ln 4}{\ln 3}$$
$$S = \left]-\infty, \frac{-\ln 4}{\ln 3}\right[$$

Scanned by CamScanner

⑤ $5^{-x} < 5^{2x}$

$-x < 2x$

$0 < 3x$

$0 < x$

$S =]0, +\infty[$

⑥ $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

$3.2^x < 2^x + 1$

$3.2^x - 2^x < 1$

$2.2^x < 1$

$2^{x+1} < 2^0$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$S =]-\infty, -1[$

---

3) فيما يأتي حل كلاً من المعادلات و المتراجحات الآتية :

① $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$,

$(2^2)^x + 2.2^x - 3 = 0$

$2^{2x} + 2.2^x - 3 = 0$

$(2^x + 3)(2^x - 1) = 0$

إما $2^x = -3$ (مرفوض)

أو $2^x = 1$

$2^x = 2^0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$4^x + 2^{x+1} - 3 \le 0$

بعد حل المعادلة نجد:

فالإشارة من إشارة $(2^x - 1)$

$\underbrace{(2^x + 3)}_{\text{موجبة دائماً}}(2^x - 1) \le 0$

$2^x - 1 \le 0$

$2^x \le 1 = 2^0$

$2^x \le 2^0$

$x \le 0$

$S =]-\infty, 0]$

---

② $2^{x+1} - 10.2^x + 12 = 0$,

$2.2^x - 10.2^x = -12$

$-8.2^x = -12$

$2^x = \frac{3}{2}$

$e^{x\ln 2} = e^{\ln\frac{3}{2}}$

$x\ln 2 = \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 3/2}{\ln 2}}$

$2^{x+1} - 10.2^x + 12 \ge 0$

بعد حل المعادلة نجد:

$-8.2^x \ge -12$

$2^x \le \frac{3}{2}$

$e^{x\ln 2} \le e^{\ln\frac{3}{2}}$

$x\ln 2 \le \ln\frac{3}{2} \Rightarrow x \le \frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln 2}$

$S = \left]-\infty, \frac{\ln 3/2}{\ln 2}\right]$

---

③ $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$,

$3^{2x+1} + 2 = 7.3^x$: نضرب بـ (3^x)

$3.3^{2x} - 7.3^x + 2 = 0$

$\Delta = 49 - 4(3)(2) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

- إما $3^x = 2$

$e^{x\ln 3} = e^{\ln 2}$

$x\ln 3 = \ln 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$

- أو $3^x = \frac{1}{3}$

$e^{x\ln 3} = e^{\ln\frac{1}{3}}$

$x\ln 3 = -\ln 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

$3^{x+1} + 2.3^{-x} \ge 7$

$3.3^{2x} - 7.3^x + 2 \ge 0$

بعد حل المعادلة نجد:

ان الحلين هما : $x_2 = -1$, $x_1 = \frac{\ln}{\ln 3}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{\ln 2}{\ln 3}$		$+\infty$
المعادلة		+	0	−	0	+	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$S =]-\infty, -1] \cup \left[\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$

Scanned by CamScanner

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2^{x^2-2x}$

① ادرس تغيرات f .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على R

$$f(x) = e^{(x^2-2x)\ln 2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = (2x-2).\ln 2 . e^{(x^2-2x).\ln 2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} : f(1) = e^{-\ln 2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

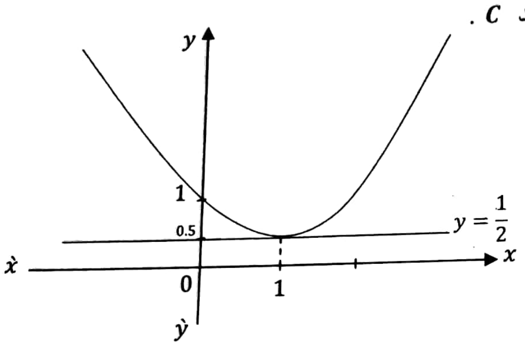
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

② اكتب معادلة d مماس الخط C في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$.

بما ان المماس في النقطة التي تعدم $f'(x)$ فإن المماس افقي و ميله يساوي الصفر

$$d: \ y = \frac{1}{2}$$

③ ارسم في معلم واحد المماس d ثم الخط C .



---

5) جد التابع المشتق لكل من التوابع الآتية :

① $f(x) = x^x$

$= e^{x\ln x}$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{1}{x} . x\right) . e^{x\ln x}$$

$$= (\ln x + 1) . e^{x\ln x}$$

② $f(x) = 3^{x^2}$

$= e^{x^2\ln 3}$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = 2x\ln 3 . e^{x^2\ln 3}$$

③ $f(x) = \pi^{\ln x}$

$= e^{\ln x . \ln\pi}$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x} . \ln\pi \ . e^{\ln x . \ln\pi}$$

---

6) حل في R جملة المعادلتين :

$$3^x . 3^y = 9 \quad ①$$

$$3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \quad ②$$

الحل : من ② نجد ان : $\boxed{3^y = 4\sqrt{3} - 3^x}$ * نعوض * في ① :

$$3^x.\left(4\sqrt{3} - 3^x\right) = 9$$

$$4\sqrt{3}.3^x - 3^{2x} - 9 = 0$$

Scanned by CamScanner

نضرب بـ (-1) :

$$3^{2x} - 4\sqrt{3}\,.\,3^{x} + 9 = 0$$

$$\Delta = 48 - 4(1)(9) = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

- إما $3^{x} = \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} 3^{y} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$3^{x} = 3^{\frac{1}{2}}$, $3^{y} = 3.3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$, $\boxed{y = \frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

- أو $3^{x} = \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} 3^{y} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$3^{x} = 3.\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}}$, $3^{y} = 3^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$, $\boxed{y = \frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

---

7) إذا علمت أن $a > 0$ و $b > 0$ ، فهل صحيح أن $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ ؟

$$L_1 = a^{\ln} = e^{\ln\ .\ln} = \left(e^{\ln}\ \right)^{\ln a} = b^{\ln a} = L_2$$

---

8) ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = x.2^{-x}$ ادرس تغيرات f و ارسم خطه البياني .

$$f(x) = x.2^{-x} = x.e^{-x\ln 2}$$

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \times +\infty = -\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $\infty.0$

$$f(x) = x.e^{-x\ln 2} = \frac{x}{e^{x\ln 2}} = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{x\,.\ln 2}{e^{x\,.\ln 2}}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$$\grave{f}(x) = 1.e^{-x\ln 2} - \ln 2\ .e^{-x\ln 2}.x$$
$$= e^{-x\ln 2}(1 - x\ln 2)$$

$$\grave{f}(x) = 0 \Rightarrow 1 - x\ln 2 = 0$$

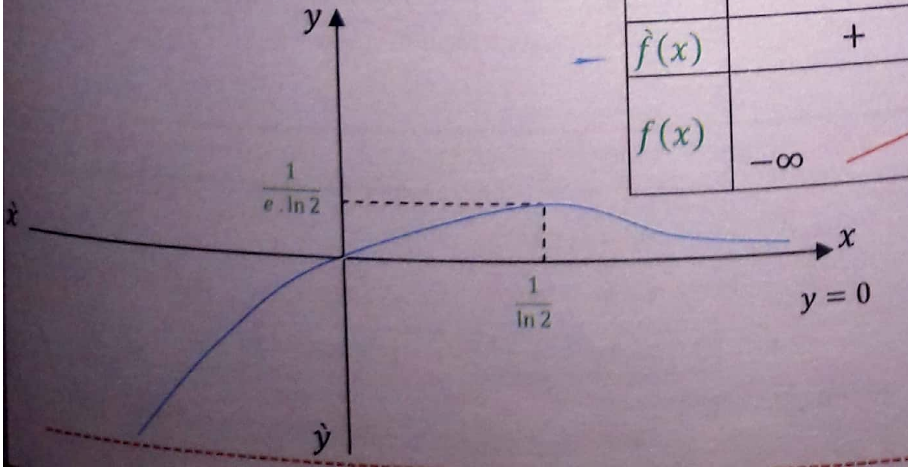
$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\ln 2}} : f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\,.\,e^{\frac{-1}{\ln}.\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\,.\,e^{-1} = \frac{1}{e\,.\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e\,.\ln 2}$	↘	0

نقطة مساعدة :

$x = 0 : f(0) = 0$

$(0,0)$



⑨ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$

① ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

نكتب f بشكل أبسط :

$$f(x) = 2^{2x} - 2^2 . 2^x = e^{2x\ln 2} - 4 . e^{x\ln 2}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب أفقي لـ C منطبق على $x\grave{x}$ عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =?$ عدم تعيين $+\infty - \infty$

$f(x) = e^{x .\ln 2}[e^{x\ln 2} - 4]$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 4) = +\infty$

$$\grave{f}(x) = 2.\ln 2 . e^{2x\ln 2} - 4\ln 2\ e^{x\ln 2}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \Longrightarrow 2\ln 2\ e^{2x\ln 2} - 4\ln 2\ e^{x\ln 2} = 0 \quad (\div 2\ln 2)$$

$$e^{2x\ln 2} - 2e^{x\ln 2} = 0$$

$$e^{x\ln 2}(e^{x\ln 2} - 2) = 0$$

$$e^{x\ln 2} = 2$$

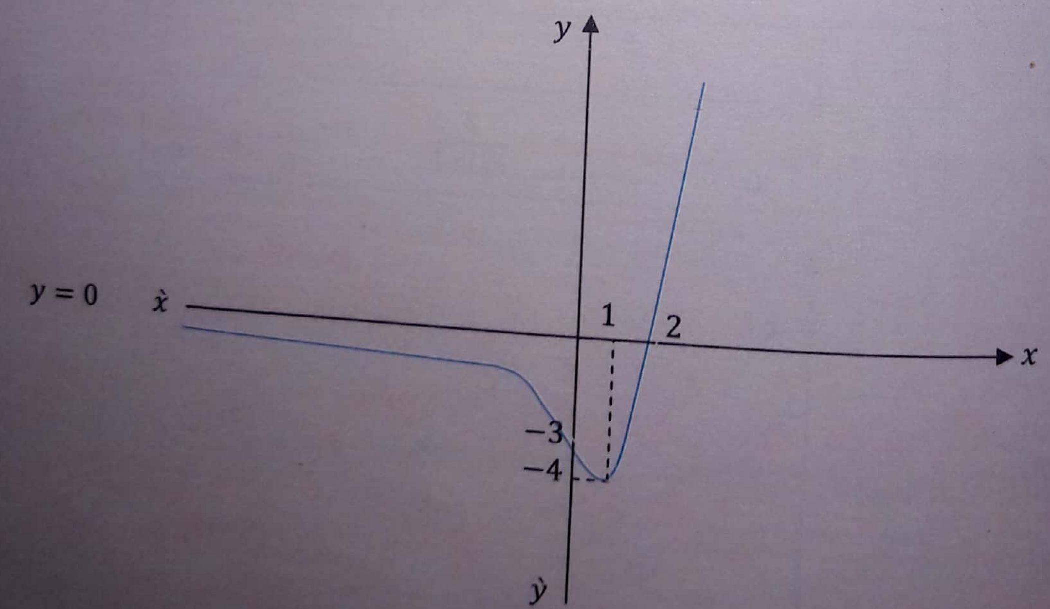
$$e^{x\ln 2} = e^{\ln 2}$$

$$x\ln 2 = \ln 2$$

$$\boxed{x = 1} : f(1) = -4$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\grave{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-4	↗	$+\infty$

② ارسم C .



نقط مساعدة :

C قطع $x\grave{x}$ اي $y = 0$

$0 = 2^{2x} - 2^{x+2}$

$2^{x+2} = 2^{2x}$

$x + 2 = 2x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,0)$

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$: f(0) = -3$

$(0,-3)$

Scanned by CamScanner

10) ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = (1-x).2^x$

ادرس تغيرات f و ارسم خطه البياني .

f معرف و مستمر و اشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$.

$f(x) = (1-x).e^{x\ln 2}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $+\infty.0$

$$f(x) = (1-x)e^{x\ln 2} = e^{x\ln 2} - xe^{x\ln 2} = e^{x\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}.x\ln 2 .e^{x\ln 2}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $y=0$ مقارب افقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $-\infty$

(علماً ان : $\lim_{x\to-\infty}(x\ln 2 .e^{x\ln 2}) = 0$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\acute{f}(x) = -e^{x\ln 2} + \ln 2 .e^{x\ln 2}(1-x)$

$= e^{x\ln 2}[-1+\ln 2(1-x)] = e^{x\ln 2}[-1+\ln 2 - x\ln 2]$

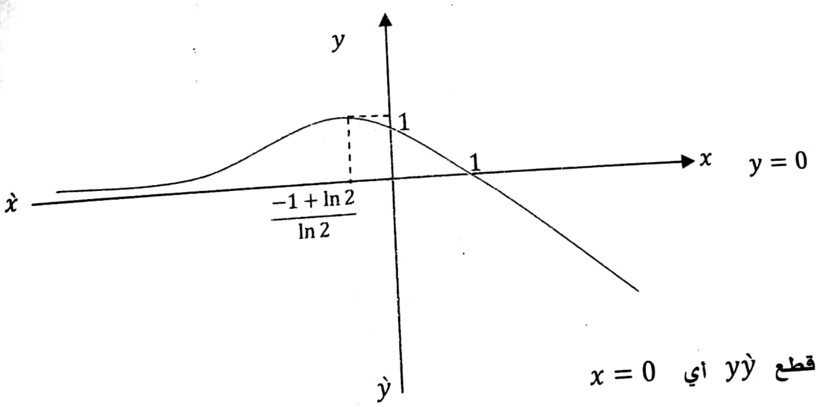
$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow -1+\ln 2 - x\ln 2 = 0$

$$\boxed{x = \frac{-1+\ln 2}{\ln 2}}$$

$$:f\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right) = \left(1 - \frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right).e^{\left(\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}\right).\ln 2} = \left(\frac{\ln 2 + 1 - \ln 2}{\ln 2}\right)e^{-1+\ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}.e^{-1+\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.e^{\ln 2 - 1} = \frac{1}{\ln 2}.e^{\ln\left(\frac{2}{e}\right)} = \frac{1}{\ln 2}.\left(\frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e.\ln 2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1+\ln 2}{\ln 2}$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e.\ln 2}$	$\searrow$	$-\infty$



$x\acute{x}$ أي $y = 0$: ، C قطع $y\acute{y}$ أي $x = 0$

$0 = (1-x).$

$0 = 1-x$

$x = 1 \Rightarrow$ (

$f(0) = 1$

****

معادلات تفاضلية بسيطة

مبرهنة: إن حلول المعادلة التفاضلية $\acute{y} = ay \;:\; a \neq 0$ هي التوابع $f_k: x \to ke^{ax}$ حيث k عدد حقيقي.

مبرهنة: إن حلول المعادلة التفاضلية $\acute{y} = ay + b \;:\; (a \neq 0, b \in R)$

هي التوابع $g_k: x \to ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي.

نتيجة: أياً كان (x_0, y_0) فيوجد حل وحيد f معرف على R للمعادلة التفاضلية $\acute{y} = ay \;:\; a \neq 0$ يحقق: $f(x_0) = y_0$.

ملاحظة: نرتب المعادلة التفاضلية بالشكل النظامي قبل استخراج قيمة a.

****

تدريب صفحة 205:

1) حل المعادلات التفاضلية الآتية:

2) $\acute{y} + 2y = 0$ $\acute{y} = -2y$ $y = k.e^{-2x} \;;k \in R$	1) $\acute{y} = 3y$ $y = k.e^{3x} \;;k \in R$
4) $2\acute{y} + 3y = 0$ $\acute{y} = \frac{-3}{2}y$ $y = k.e^{\frac{-3}{2}x} \;;k \in R$	3) $3\acute{y} = 5y$ $\acute{y} = \frac{5}{3}y$ $y = k.e^{\frac{5}{3}x} \;;k \in R$

---

2) في كل حالة عين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

1) $\acute{y} = 2y$ والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$.

حلها يكون $y = k.e^{2x}$ ، لكن $f(0) = 1$ أي نعوض ($y = 1$ و $x = 0$)

$$k.e^0 = 1 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

عندئذ: $y = e^{2x}$

---

2) $\acute{y} + 5y = 0$ والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$.

$\acute{y} = -5y$ وحلها يكون $y = k.e^{-5x}$

لكن C يمر بالنقطة $A(-2,1)$ اي نعوض ($y = 1$ و $x = -2$)

$$k.e^{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e^{10}} \Rightarrow \boxed{k = e^{-10}}$$

عندئذ: $y = e^{-10}e^{-5x} = e^{-10-5x}$

Scanned by CamScanner

3) $\acute{y} + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها (-2) من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

$\acute{y} = -2y$ وحلها يكون $y = k.e^{-2x}$

لكن ميل المماس يساوي $\frac{1}{2}$ أي $\left(\acute{y} = \frac{1}{2}\right)$ في النقطة التي فاصلتها (-2) أي $(x = -2)$

$$\acute{y} + 2y = 0$$

$$\frac{1}{2} + 2y = 0$$

$$y = \frac{-1}{4}$$

إذاً نقطة التماس $\left(-2, \frac{-1}{4}\right)$

$$y = k.e^{-2x} \Longrightarrow k.e^{4} = \frac{-1}{4} \Rightarrow k = \frac{-1}{4e^{4}} \Rightarrow \boxed{k = \frac{-e^{-4}}{4}}$$

عندئذ: $y = \frac{-1}{4}e^{-4}e^{-2x} = \frac{-1}{4}e^{-4-2x}$

---

3) حل المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\acute{y} = 2y + 1$ $y = k.e^{2x} - \frac{1}{2}$; $k \in R$	2) $y + 3\acute{y} = 2$ $\acute{y} = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$ $y = k.e^{\frac{-1}{3}x} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{-1}{3}}$ $y = ke^{\frac{-1}{3}x} + 2$; $k \in R$
3) $2\acute{y} = y - 1$ $\acute{y} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ $y = k.e^{\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{2}}$ $y = ke^{\frac{1}{2}x} + 1$; $k \in R$	4) $2y + 3\acute{y} - 1 = 0$ $\acute{y} = \frac{-2}{3}y + \frac{1}{3}$ $y = k.e^{\frac{-2}{3}x} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2}{3}}$ $y = k.e^{\frac{-2}{3}x} + \frac{1}{2}$; $k \in R$

Scanned by CamScanner

تمرينات و مسائل صفحة 209

① في كل من الحالات الآتية ، احسب التابع المشتق للتابع f على المجموعة I المشار إليها :

1 $f(x) = (x^2 - 2x)e^x \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x) = e^x[2x-2+x^2-2x] = e^x(x^2-2)$$

2 $f(x) = e^{-x}.\ln x \quad : I =]0,+\infty[$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = -e^{-x}\ln x + \frac{1}{x}e^{-x} = e^{-x}\left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

3 $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x} \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = (2x-1)e^{-x} - e^{-x}(x^2-x+1) = e^{-x}[2x-1-x^2+x-1] = e^{-x}(-x^2+3x-2)$$

4 $f(x) = \frac{1}{x}.e^x \quad : I = R\backslash\{0\}$

f اشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}e^x + e^x.\frac{1}{x} = e^x\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right) = e^x\left(\frac{-1+x}{x^2}\right)$$

5 $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}} \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{-x}) + e^{-x}(e^x-1)}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x+1+1-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x-e^{-x}+2}{(1+e^{-x})^2}$$

6 $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}} \quad : I = R\backslash\{0\}$

f اشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}.x = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

7 $f(x) = \ln(1+e^x) \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

8 $f(x) = e^{x\ln x} \quad : I =]0,+\infty[$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{1}{x}.x\right).e^{x\ln x} = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$$

9 $f(x) = (\sin x + \cos x).e^x \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = (\cos x - \sin x)e^x + e^x(\sin x + \cos x) = e^x[\cos x - \sin x + \sin x + \cos x] = 2\,e^x\cos x$$

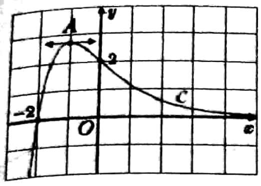
10 $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) \quad : I = R$

f اشتقاقي على R

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$$

Scanned by CamScanner

② C هو الخط البياني لتابع f معرف على R وفق $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان اعتماداً على ما تجد في الشكل :



1) احسب قيمة كل من a و b

من الخط البياني للتابع f نلاحظ ان C يمر بالنقطتين $(0,2)$ ، $(-2,0)$

$(0,2) \in C \ : x = 0 \ , \quad f(0) = 2$

$(0+b)e^{0} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 2}$

$(-2,0) \in C \ : x = -2 \ , \quad f(-2) = 0$

$(-2a+b)e^{+2} = 0 \qquad (\div e^{+2}) \quad ,(b=2)$

$-2a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1}$

نجد ان : $\boxed{f(x) = (x+2)e^{-x}}$

2) احسب $\acute{f}(x)$ ، و استنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f

f معرف واشتقاقي على R

$\acute{f}(x) = e^{-x} + (-e^{-x})(x+2)$

$= e^{-x}(1 - x - 2) = e^{-x}(-1-x)$

$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(-1-x) = 0$

$e^{-x} \neq 0$

$-1 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

$: f(-1) = (-1+2)e = e \quad : A(-1, e)$

3) اثبت ان محور الفواصل مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $+\infty . 0$

$f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}} + 2e^{-x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$: $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$:

---

③ ارسم الخط البياني C للتابع الأسي exp ثم استنتج رسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية :

① $f: x \to e^{x} - 2$ ② $g: x \to 1 - e^{x}$ ③ $h: x \to |1 - e^{x}|$

لنناقش : $\boxed{P(x) = exp(x) = e^{x}}$

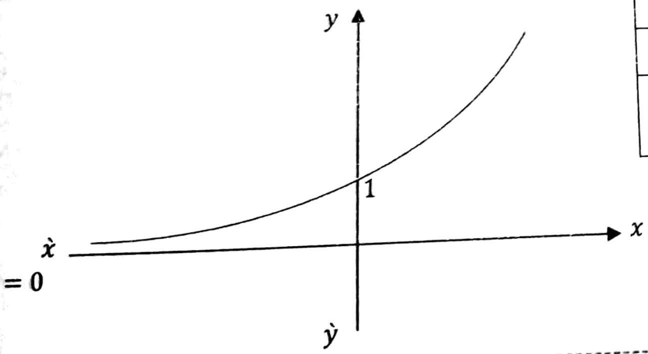
f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$: $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $-\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ،

$\acute{f}(x) = e^{x} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$



نقطة مساعدة:

C قطع $y\acute{y}$ اي $x = 0$

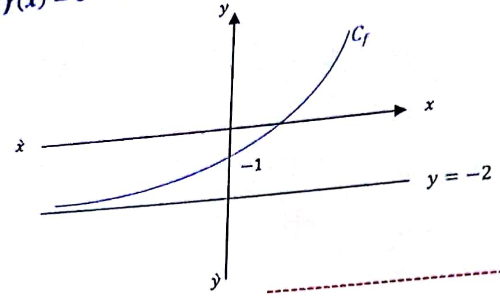
$f(0) = e^{0} = 1$

$(0,1)$

① $f(x) = e^x - 2 = P(x) - 2$

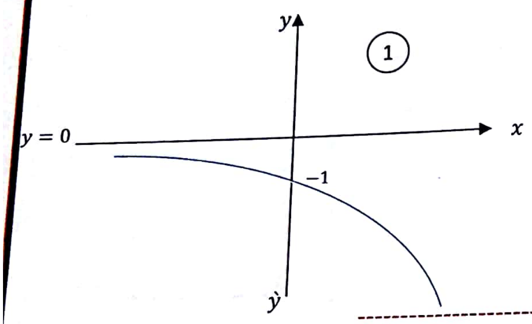
C_f ينتج عن C_P بانسحاب متجهه $\vec{u} = -2\vec{j}$

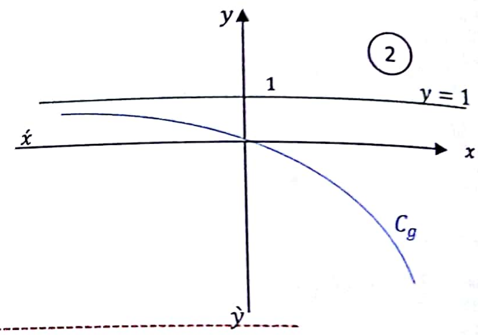
	بعد	قبل
المقارب	$y = -2$	$y = 0$
نقطة التقاطع مع $y\acute{y}$	$(0,-1)$	$(0,1)$



② $g(x) = 1 - e^x$
$= 1 - P(x) = -P(x) + 1$

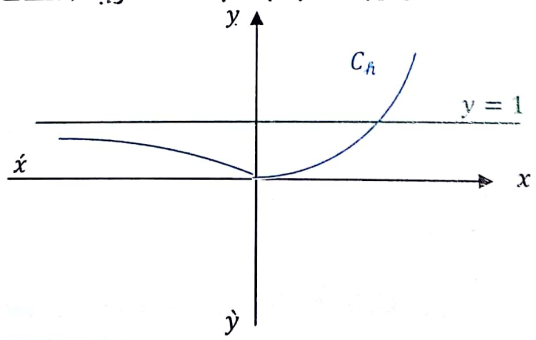
C_g ينتج عن C_P بـ: 1) أخذ نظير C_P بالنسبة لـ $x\acute{x}$
2) ثم انسحاب متجهه $\vec{u} = \vec{j}$





③ $h(x) = |1 - e^x|$
$= |g(x)|$

C_h ينتج عن C_g بأخذ نظائر النقاط ذات التراتيب السالبة بالنسبة لـ $x\acute{x}$ وإبقاء النقاط ذات التراتيب الموجبة كما هي:



④ ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

1) ما نهاية f عند طرفي مجموعة تعريفه؟

f معرف عند $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

2) ادرس تغيرات f وارسم C

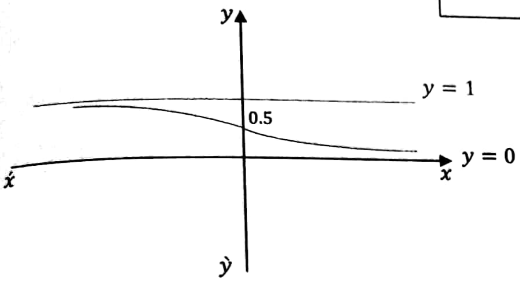
f معرف ومستمر واشتقاقي على R .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ $y = 1$ مقارب افقي // $x\acute{x}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على $x\acute{x}$ عند $+\infty$

$\acute{f}(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\acute{f}(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$



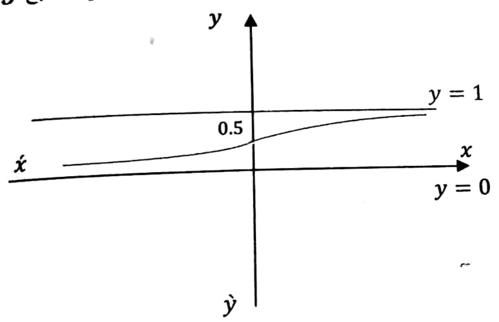
نقطة مساعدة:

C قطع $y\acute{y}$ أي

$x = 0 \ : f(0) = \frac{1}{2}$

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

3) g هو التابع المعرف على R وفق $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ اثبت ان $g(x) = f(-x)$ ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع g انطلاقاً من C.



C_g نظير C_f بالنسبة لـ $y\acute{y}$

---

⑤ في الحالات الآتية، بيّن أن الخط البياني C للتابع f المعطى على R يقبل مقارباً مائلاً d، عينه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d.

$\boxed{1}$ $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x - 1$ ومنه:

$f(x) - y_d = x - 1 + e^{-2x} - (x - 1) = e^{-2x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$f(x) - y_d = e^{-2x} > 0 \Rightarrow$ C فوق d

$\boxed{2}$ $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x + 1$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + 1 + 4e^{-x} - (x+1) = 4e^{-x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـC عند $+\infty$

$f(x) - y_d = 4e^{-x} > 0 \Rightarrow$ C فوق d

$\boxed{3}$ $f(x) = x + 2 + xe^{x}$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x + 2$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + 2 + xe^{x} - (x+2) = xe^{x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$\left.\begin{array}{l} f(x) - y_d = xe^{x} \\ f(x) - y_d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} xe^{x} = 0 \\ e^{x} \neq 0 \\ \boxed{x = 0} : f(0) = 2 \end{array}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C تحت d	$(0,2)$	C فوق d	

---

⑥ بين أن الخط البياني C للتابع f المعرف على R بالصيغة $f(x) = \ln(3 + e^{x})$
يقبل مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يطلب تعيينهما.

$$I = \left]-\infty, +\infty\right[\quad : \quad f(x) = \ln(3 + e^{x})$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(3) \quad :$ $y = \ln 3$ مقارب أفقي $x\acute{x}$ // عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \ln[e^{x}(3e^{-x} + 1)]$$
$$= \ln e^{x} + \ln(3e^{-x} + 1) = x + \ln(3e^{-x} + 1)$$

بفرض d مستقيم معادلته $y_d = x$ ومنه:

$$f(x) - y_d = x + \ln(3e^{-x} + 1) - x = \ln(3e^{-x} + 1)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_d) = \ln 1 = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب لـ C عند $-\infty$

مش علاقة مطالب نشتها
بالاشتراك

⑦ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \dfrac{2e^{x} - 3}{e^{x} + 1}$

1) لماذا المستقيمان d_1 الذي معادلته $y = 2$ و d_2 الذي معادلته $y = -3$ مقاربان للخط C؟

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3 \quad :$ $y = -3$ مقارب أفقي لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ? \quad \dfrac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

عندما يطلب دراسة التغيرات
نهايات + اشتقاق + نذر المشتق + جدول
وأحيانا لا نعدم المشتق

$$f(x) = \frac{e^{x}(2 - 3e^{-x})}{e^{x}(1 + e^{-x})} = \frac{2 - 3e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ $y = 2$ مقارب أفقي لـ C عند $+\infty$

Scanned by CamScanner

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$$\acute{f}(x) = \frac{2e^x(e^x+1) - e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+3e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	$+$	
$f(x)$	-3 ↗	2

3) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

نقطة التقاطع مع $y\grave{y}$ أي $x = 0 : \quad f(0) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \left(0, \frac{-1}{2}\right)$

معادلة المماس $y - f(0) = m(x-0)$

$y + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x-0)$

$T \ : \ y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\acute{f}(0) = m = \frac{5e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{5}{4}$$

4) ادرس وضع C بالنسبة إلى T ثم ارسم في معلم متجانس C, T, d_2, d_1

الوضع النسبي للمماس مع المنحني :

$$f(x) - y_T = \frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

نلاحظ انه تابع غير مألوف لدراسة وضعه النسبي ندرس تغيراته:

$$g(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$$\grave{g}(x) = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{20e^x - 5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2} = \frac{20e^x - 5(e^{2x}+2e^x+1)}{4(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{20e^x - 5e^{2x} - 10e^x - 5}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5e^{2x}+10e^x-5}{4(e^x+1)^2}$$

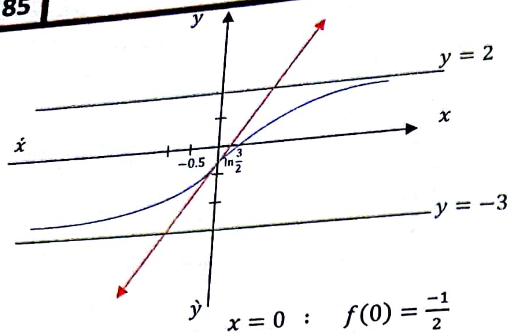
$$= \frac{-5(e^{2x}-2e^x+1)}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

$\grave{g}(x) = 0 \Rightarrow -5(e^x-1)^2 = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0} : g(0) = 0$

?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\grave{g}(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x) = f(x) - y_d$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
الوضع النسبي		C فوق T	$\left(0, \frac{-1}{2}\right)$	C تحت T	

Scanned by CamScanner



$y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$

x	0	$\frac{2}{5}$
y	$\frac{-1}{2}$	0

$\left(0,\frac{-1}{2}\right),\left(\frac{2}{5},0\right)$

نقط مساعدة:

$x=0\ :\ f(0)=\frac{-1}{2}\ :\ \left(0,-\frac{1}{2}\right)$

$y=0\ \Rightarrow 2e^x-3=0\Rightarrow x=\ln\frac{3}{2}\ :\ \left(\ln\frac{3}{2},0\right)$

---

8) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=(x-1)e^x$ ادرس نهايات التابع f عند اطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم C.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=?\quad -\infty.0$ حصلنا على حالة عدم تعيين

$f(x)=xe^x-e^x$

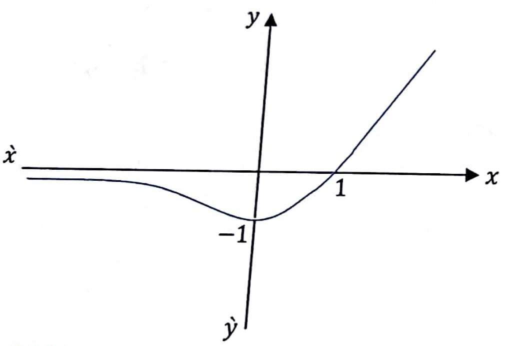
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\quad\Rightarrow$ $y=0$ مقارب منطبق على $x\acute{x}$ عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\acute{f}(x)=e^x+e^x(x-1)=e^x(1+x-1)=xe^x$

$\acute{f}(x)=0\ \Rightarrow xe^x=0\quad\Rightarrow\boxed{x=0}\ :\ f(0)=-1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$



نقطة مساعدة :

C قطع $x\acute{x}$ اي $y=0$

$(x-1)e^x=0$

$x-1=0$

$x=1$

$(1,0)$

---

9) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=e^x-x$

1) جد نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه.

$f(x)=e^x-x\quad :\quad D=R=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\quad ,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=?\qquad +\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

$f(x)=e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-0)=+\infty\quad ;\quad \boxed{\text{علماً أن } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0}$

Scanned by CamScanner

2) بين ان المستقيم d الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط C.

$f(x)-y_d=e^x-x-(-x)=e^x$

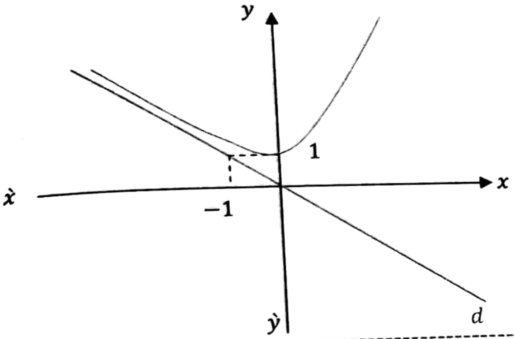
$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d)=0 \Rightarrow$ $d: y=-x$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم d و C .

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0 \Rightarrow e^x-1=0 \Longrightarrow e^x=1\ :\ \boxed{x=0} : f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



$d: y=-x$

x	0	-1
y	0	1
	$(0,0)$	$(-1,1)$

---

⑩ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$$

1) جد نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه.

$f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$ $\qquad D=R=]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) اثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$f(x)-y_d=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}-(x-1)=\dfrac{4}{e^x+1}$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=0 \Rightarrow$ $d: y=x-1$ مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

3) اثبت ان المستقيم $\grave{d}$ الذي معادلته $y=x+3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

$f(x)-y_{\grave{d}}=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}-(x+3)$

$=\dfrac{4}{e^x+1}-4=\dfrac{4-4e^x-4}{e^x+1}=\dfrac{-4e^x}{e^x+1}$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_{\grave{d}})=0 \Rightarrow$ $\grave{d}: y=x+3$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ل زعترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال 0952480990

Scanned by CamScanner

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (e^x-1)^2 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x=0} : f(0) = 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

نقطة التقاطع مع $y\acute{y}$ اي $x = 0$:

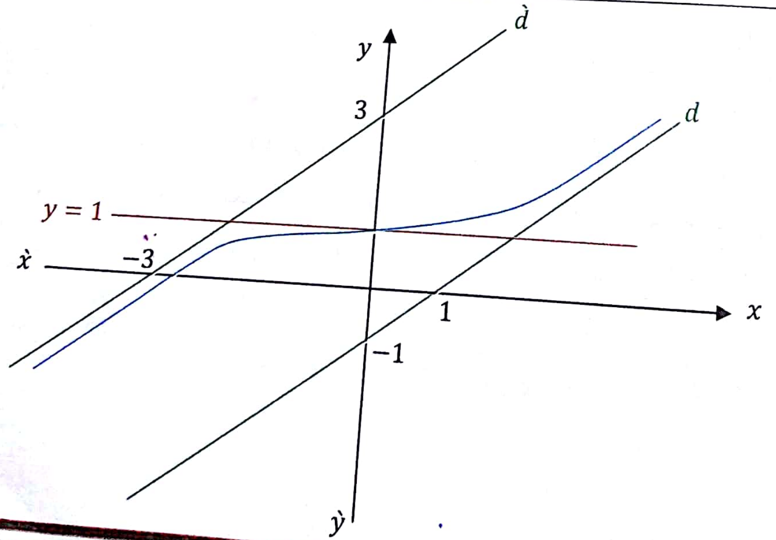
$$f(0) = 1 \quad : (0,1)$$
$$m = f'(0) = 0$$
$$y - f(0) = m(x-0)$$
$$y - 1 = 0(x-0) \Longrightarrow T: \boxed{y=1}$$

6) ادرس وضع C بالنسبة إلى T ثم ارسم في معلم متجانس d و $\acute{d}$ و T و C .

$$f(x) - y = f(x) - 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)-1$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
الوضع النسبي		C تحت T	$(0,1)$	C فوق T	

?



$d: y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0
	$(0,-1)$	$(1,0)$

$\acute{d}: y = x + 3$

x	0	-3
y	3	0
	$(0,3)$	$(-3,0)$

Scanned by CamScanner

⑪ ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = 2e^x - x - 2$

1) جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = ? \quad +\infty - \infty \text{ عدم تعيين}$$

$$f(x) = e^x\left(2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(2-0-0) = +\infty$$

2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 2e^x - 1 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2e^x - 1 &= 0 \\ e^x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 2}$$

$$: f(-\ln 2) = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 - 2$$

$$= \frac{2}{e^{\ln 2}} + \ln 2 - 2 = 1 + \ln 2 - 2 = -1 + \ln 2$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3) استنتج من (2) أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر،

f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty, -\ln 2]$

$0 \in f(]-\infty, -\ln 2[) =]-1+\ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $]-\infty, -\ln 2[$

f مستمر و متزايد تماماً على $[-\ln 2, +\infty[$

$0 \in f([-\ln 2, +\infty[) = [-1+\ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذر وحيد في المجال $[-\ln 2, +\infty[$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين مختلفين في R

لاحظ أن:

$f(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$ و منه الجذر الأول هو $x = 0$

4) نرمز إلى الجذر الآخر للمعادلة: $f(x) = 0$ بالرمز α أثبت أن $-2 < \alpha < -1$

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= 2e^{-1} + 1 - 2 = \frac{2}{e} - 1 < 0 \\ f(-2) &= 2e^{-2} + 2 - 2 = \frac{2}{e^2} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f(-1) \times f(-2) < 0 \\ -2 < \alpha < -1 \end{aligned}$$

5) ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x.

نلاحظ من جدول التغيرات و من حلول المعادلة $f(x) = 0$ و من سطر $f(x)$ أن:

?

إذا كان $x \in]-\infty, \alpha[$ فإن $f(x) > 0$

إذا كان $x \in]\alpha, 0]$ فإن $f(x) < 0$

إذا كان $x \in]0, +\infty[$ فإن $f(x) > 0$

Scanned by CamScanner

⑫ ليكن C_ℓ, C_E الخطان البيانيان للتابع exp واللوغاريتمي ln بالترتيب ايقبل هذان الخطان مماسات مشتركة؟

$g(x) = e^x$

T_E مماس الخط C_E في النقطة B حيث:

$x = b : g(b) = e^b : B(b, e^b)$

$\acute{g}(x) = e^x$

$m_E = \acute{g}(b) = e^b$

$T_E: y_B - e^b = e^b(x - b)$

$$\boxed{y_B = e^b x - be^b + e^b}$$

$f(x) = \ln x$

T_ℓ مماس الخط C_ℓ في النقطة A حيث

$x = a : f(a) = \ln a : A(a, \ln a)$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$

$m_\ell = \acute{f}(a) = \frac{1}{a}$

$T_\ell: y_A - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$

$$\boxed{y_A = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a}$$

لاحظ: إذا وجد مماس مشترك للخطين C_ℓ, C_E يمسهما على التوالي في A, B لكان المماسين منطبقين أي $(m_\ell = m_E)$

ومنه بالحل المشترك لهما:

$$y_A = y_B$$

$$(*) \quad \boxed{\frac{1}{a}x - 1 + \ln a = e^b x - be^b + e^b}$$

بما أن $m_\ell = m_E$ فإن: ① $\boxed{\frac{1}{a} = e^b}$:

$$a = \frac{1}{e^b} \Rightarrow a = e^{-b} \Rightarrow \boxed{\ln a = -b} \text{ ②}$$

نعوض ① و ② في * فنجد:

$$e^b x - 1 - b = e^b x \underbrace{- be^b + e^b}$$

$$-1 - b = e^b(-b + 1) \qquad \div(-b+1)$$

$$\frac{-1 - b}{-b + 1} = e^b$$

$$\frac{-(b+1)}{-(b-1)} = e^b$$

$$\frac{b+1}{b-1} = e^b$$

$$-e^b + \frac{b+1}{b-1} = 0$$

نلاحظ أن حل هذه المعادلة جبرياً صعبة جداً على الطالب وصعب إيجاد حلولها فلذلك نلجا لتحويلها إلى تابع وندرس تغيراته:

$$f(x) = -e^x + \frac{x+1}{x-1} \quad ; \quad R \setminus \{1\}$$

f مستمر واشتقاقي على المجالين $]1, +\infty[\cup]-\infty, +1[$ ومنه:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$\acute{f}(x) = -e^x + \frac{x - 1 - x - 1}{(x-1)^2} = -e^x - \frac{2}{(x-1)^2} < 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow 0$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow 0$	$-\infty$

نلاحظ من تغيرات f أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين مختلفين

احدهما $(b_1 = a_1 < 1)$ والآخر $(b_2 = a_2 > 1)$ وبالتالي:

يوجد مماسان مشتركان للخطين C_ℓ, C_E .

- احدهما يمس C_E في النقطتين $(b_2, e^{b_2}), (b_1, e^{b_1})$
- والآخر يمس C_ℓ في النقطتين $(a_2, \ln a_2), (a_1, \ln a_1)$

Scanned by CamScanner

⑬ تابع القوة : $P_a(x) = x^a$ ، بالصيغة $]0, +\infty[$ المعرف على P_a نهدف إلى دراسة التابع

ليكن a عدداً حقيقياً غير معدوم . نفرض $u(x) = a \ln x$.

نعلم ان $P_a(x) = x^a = e^{a \ln x}$

1) عيّن تبعاً لإشارة a جهة إطراد التابع u ، و استنتج جهة إطراد P_a .

لدينا $u(x) = a \ln x$ ، u اشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$ و مشتقه $\grave{u}(x) = \frac{a}{x}$

- ومنه في حال : $a > 0$ فإن $\grave{u}(x) > 0$ على المجال $]0, +\infty[$ و منه u متزايد تماماً
فيكون P_a متزايد تماماً على $]0, +\infty[$.
- واما في حال : $a < 0$ فإن $\grave{u}(x) < 0$ على المجال $]0, +\infty[$ و منه u متناقص تماماً
فيكون P_a متناقص تماماً على $]0, +\infty[$.

2) ادرس تبعاً لإشارة a نهاية P_a عند طرفي مجموعة تعريفه ، و بيّن انه في حالة $a > 0$ يمكننا ان نعرف $P_a(0) = 0$ فنحصل على تابع مستمر على $[0, +\infty[$ في هذه الحالة .

$P_a(x) = e^{a \ln x}$ معرف على المجال $]0, +\infty[$.

- في حال $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = 0 \quad ; \quad \left(\lim_{x\to 0^+} a \ln x = -\infty \,, \quad \boxed{a > 0}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x\to +\infty} a \ln x = +\infty \,, \quad \boxed{a > 0}\right)$$

- في حال $a < 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x\to 0^+} a \ln x = +\infty \,, \quad \boxed{a < 0}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = 0 \quad ; \quad \left(\lim_{x\to +\infty} a \ln x = -\infty \,, \quad \boxed{a < 0}\right)$$

وجدنا في حالة $a > 0$ ان : $\lim_{x\to +\infty} P_a(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} P_a(x) = 0$

والتابع P_a في هذه الحالة يكون متزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$ و منه فإن :

$$\lim_{x\to 0^+} P_a(x) = P_a(0) = 0$$

ومنه يتحقق شرط الاستمرار اي التابع P_a معرف و مستمر على المجال $[0, +\infty[$

3) اثبت ان P_a اشتقاقي على $]0, +\infty[$ و أن $\grave{P}_a = a\, P_{a-1}$.

$P_a(x) = e^{a \ln x}$ اشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$ ، لأن التابع $a \ln x$ اشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$ ، و

$$P_a(x) = x^a$$
$$\grave{P}_a(x) = a\, x^{a-1} = a\, P_{a-1}(x)$$
$$\grave{P}_a = a\, P_{a-1}$$

4) نفترض $0 < a < 1$ و اننا عرفنا في هذه الحالة $P_a(0) = 0$ احسب نهاية نسبة التغير $x \mapsto T(x) = \frac{P_a(x) - P_a(0)}{x}$ عند الصفر ، ماذا تستنتج؟

$$T(x) = \frac{P_a(x) - P_a(0)}{x} = \frac{x^a - 0}{x} = x^{a-1} = e^{(a-1)\ln}$$

$$\lim_{x\to 0^+} T(x) = +\infty \;\; ; \;\; \left(\lim_{x\to 0^+} (a-1)\ln x = +\infty \;, 0 < a < 1\right)$$

اي نستنتج ان التابع P_a غير اشتقاقي عند الصفر ، في حالة $0 < a < 1$

Scanned by CamScanner

5) أعد السؤال السابق في حال فرضنا أن $a > 1$

اعتماداً على ما حصلنا عليه سابقاً :

$$\lim_{x\to 0^+} T(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{(a-1)\ln} = 0 \in R \ ; \quad \left(\lim_{x\to 0^+}(a-1)\ln x = -\infty \ , \ \boxed{a>1}\right)$$

ومنه P_a اشتقاقي عند الصفر في حالة $a > 1$

6) اثبت أن $P_a \circ P_B = P_{a.B}$

لدينا :

$$P_B(x) = x^B \quad , \quad P_a(x) = x^a$$

$$(P_a \circ P_B)(x) = P_a(P_B(x)) = (x^B)^a = x^{a.B} = P_{a.B}$$

ونلاحظ أن $P_a \circ P_B$ و $P_{a.B}$ معرف على $]0,+\infty[$ و بالتالي فإن :

$$(P_a \circ P_B)(x) = P_{a.B}(x)$$

7) مقارنة تابع القوة بالتابعين الأسي و اللوغاريتمي .

1. اثبت انه في حالة $a > 0$ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln x = 0$

?

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{a\ln x}{x^a}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln x^a}{x^a}\right) = \frac{1}{a}.0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^a\ln x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}x^a . a\ln x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}x^a . \ln x^a\right) = \frac{1}{a}.0 = 0$$

2. اثبت في حالة $a > 0$ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0$

$$\frac{e^x}{x^a} = \frac{e^x}{e^{a\ln x}} = e^{x-a\ln x} = e^{x\left(1-a\frac{\ln x}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(1-a\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty$$

$$x^a e^{-x} = e^{a\ln x}.e^{-x} = e^{a\ln x-} = e^{x\left(a\frac{\ln x}{x}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^a.e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(a\frac{\ln}{x}-1\right)} = 0 \ ; \ \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{حيث} \quad \lim_{x\to+\infty} x\left(a\frac{\ln x}{x}-1\right) = -\infty\right)$$

---

14) حل كلاً من المعادلات او المتراجحات الآتية:

$\boxed{1}$ $\dfrac{e^{-x}-1}{e^x-1} = -2$

شرط الحل : $e^x - 1 \neq 0$

$e^x \neq 1 \implies x \neq 0 \implies D = R\backslash\{0\}$

$e^{-x} - 1 = -2e^x + 2$

$2e^x + e^{-x} - 3 = 0$

نضرب بـ (e^x) : $2e^{2x} + 1 - 3e^x = 0$

$2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4(2)(1) = 1$

إما $e^x = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2} \implies \boxed{x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2}$

او $e^x = \dfrac{3+1}{4} = 1 \implies x = 0 \quad \notin D$ (مرفوض)

$\boxed{2}$ $4e^{2x} + e^{-2x} \leq 5$

نضرب بـ (e^{2x}) : $4e^{4x} + 1 \leq 5e^{2x}$

$4e^{4x} - 5e^{2x} + 1 \leq 0$

$4e^{4x} - 5e^{2x} + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 4(4)(1) = 9 \implies \sqrt{\Delta} = 3$

إما $e^{2x} = \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{1}{4}$

$2x = \ln\dfrac{1}{4}$

$2x = -\ln 4$

$x = -\dfrac{1}{2}\ln 4 \implies \boxed{x = -\ln 2}$

او $e^{2x} = \dfrac{5+3}{8} = 1$

$2x = \ln 1$

$2x = 0 \implies \boxed{x = 0}$

Scanned by CamScanner

3 $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

$e^{x+1}(e^{2x}+4e^x-5)=0$

$e^{x+1}(e^x+5)(e^x-1)=0$

إما $e^{x+1}=0$ (مرفوض)

أو $e^x=-5$ (مرفوض)

أو $e^x=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

4 $e^{2x}-3ee^x+2e^2=0$

$e^{2x}-3e\,.\,e^x+2e^2=0$

$(e^x-2e)(e^x-e)=0$

إما $e^x=2e \Rightarrow \boxed{x=\ln(2e)}$

أو $e^x=e \Rightarrow \boxed{x=1}$

5 $e^x+\frac{e}{e^x}=1+e$

نضرب بـ (e^x) :

$e^{2x}+e=e^x+e\,.\,e^x$

$e^{2x}-e^x-e\,.\,e^x+e=0$

(لنحاول تحليلها باستخدام التجميع لفئات)

$e^x(e^x-1)-e(e^x-1)=0$

$(e^x-1)(e^x-e)=0$

إما $e^x=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

أو $e^x=e \Rightarrow \boxed{x=1}$

6 $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}=e^{x+2}$

$e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}-e^{x+2}=0$

$e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}-e^2\,.\,e^x=0$

$e^x\left[\underbrace{e^{2x}-(e^2-1)e^x-e^2}\right]=0$

$e^x(e^x-e^2)(e^x+1)=0$

إما $e^x=0$ (مرفوض)

أو $e^x=e^2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

أو $e^x=-1$ (مرفوض)

7 $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}<\frac{e^x-2}{e^x+2}$

$(e^x-1)(e^x+2)<(e^{2x}+1)(e^x-2)$

$e^{2x}+e^x-2<e^{3x}-2e^{2x}+e^x-2$

$e^{3x}-3e^{2x}>0$

$e^{2x}(e^x-3)>0 \qquad \div(e^{2x})$

$e^x-3>0$

$e^x>3$

$x>\ln 3$

$S=]\ln 3,+\infty[$

---

⑮ في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$(1)\quad \begin{cases} e^x-\frac{1}{e}e^y=1 & ① \\ 2e^x+e^y=4+e & ② \end{cases}$$

نضرب المعادلة ① بالعدد -2 ثم نجمع المعادلة الناتجة مع ② :

$$-2e^x+\frac{2}{e}e^y=-2$$

$$+$$

$$2e^x+e^y=4+e$$

$$\left(\frac{2}{e}+1\right)e^y=2+e$$

$$\left(\frac{2+e}{e}\right)e^y=2+e \qquad \div(2+e)$$

$$\frac{1}{e}\,.\,e^y=1$$

$$e^y=e \Rightarrow \boxed{y=1}$$

نعوض في المعادلة ① :

$$e^x-\frac{1}{e}\,.\,e=1 \Rightarrow e^x=2\ :\ \boxed{x=\ln 2}$$

Scanned by CamScanner

(3) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \end{cases}$

من المعادلة ① نجد ان:

$y = 1 - x \quad (*)$

نعوض (*) في المعادلة ② :

$3e^x - e^{-x+4} - 2e^2 = 0$ نضرب بـ (e^x)

$3e^{2x} - e^4 - 2e^2 e^x = 0$

$3e^{2x} - 2e^2 . e^x - e^4 = 0$

$\Delta = 4e^4 - 4(3)(-e^4) = 16e^4$

$\sqrt{\Delta} = 4e^2$

إما $e^x = \dfrac{2e^2 - 4e^2}{6} = \dfrac{-1}{3}e^2$ (مرفوض)

أو $e^x = \dfrac{2e^2 + 4e^2}{6} = e^2$

$e^x = e^2 \Rightarrow \boxed{x = 2} \xrightarrow{\text{نعوض في*}} \boxed{y = -1}$

(2) $\begin{cases} e^{4x} e^y = \dfrac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} e^{4x+y} = e^{-2} \\ x . y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = -2 & ① \\ x . y = -2 & ② \end{cases}$

من ① نجد ان:

$y = -2 - 4x \quad (*)$

نعوض (*) في المعادلة ② :

$x(-2 - 4x) = -2$

$-2x - 4x^2 = -2$

$4x^2 + 2x - 2 = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

إما $x_1 = \dfrac{-1-3}{4} \Rightarrow \boxed{x = -1} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} y_1 = 2$

أو $x_2 = \dfrac{-1+3}{4} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{1}{2}} \xrightarrow{\text{نعوض في *}} y_2 = -4$

ن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

a بين ان التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم C.

- $x \in R : -x \in R$ محقق
- $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$ محقق

تابع فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

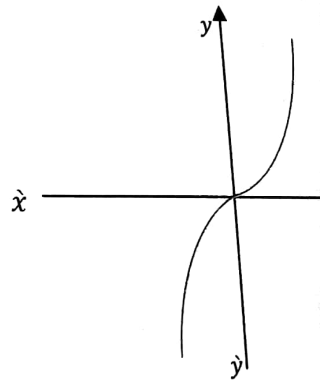
$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

نقطة مساعدة

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$(0,0)$



، معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم d

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ m = f'(0) &= \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{d:\ y = x}$$

Scanned by CamScanner

دراسة الوضع النسبي :

$f(x) - y_d = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$

نفرض أن: $g(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x} - 2x]$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = ?$ عدم تعيين $+\infty - \infty$

$$g(x) = \frac{e^x}{2}\left(1 - \frac{e^{-x}}{e^x} - \frac{2x}{e^x}\right)$$

$$g(x) = \frac{e^x}{2}\left(1 - e^{-2x} - 2\frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty(1) = +\infty$$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = ?$ عدم تعيين $-\infty + \infty$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{e^x}{e^{-x}} - 1 - \frac{2x}{e^{-x}}\right)$$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{2}(e^{2x} - 1 - 2xe^x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty(-1) = -\infty$$

$$\grave{g}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x} - 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{e^x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}(e^{2x} - 2e^x + 1) = \frac{1}{2}e^{-x}(e^x - 1)^2$$

$$\grave{g}(x) = 0 \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \Longrightarrow x = 0 \ : g(x) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\grave{g}(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
الوضع النسبي		d تحت C	$(0,0)$	d فوق C	

2) a) ليكن m عدداً حقيقياً: أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في R ، ليكن α هذا الحل.

f مستمر ومتزايد تماماً على R
$m \in f(R) = R$

إذاً للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في R وليكن α بحيث $f(\alpha) = m$

b) أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$ ثم استنتج أن $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2+1})$

$$f(x) = m$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = m$$

$$e^x - \frac{1}{e^x} = 2m \quad : (e^x) \text{ نضرب بـ}$$

$$e^{2x} - 1 = 2m \cdot e^x$$

$$e^{2x} - 2m \cdot e^x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 4(1)(-1) = 4m^2 + 4 = 4(m^2 + 1)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

إما $e^x = \frac{2m + 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m + \sqrt{m^2 + 1} \Longrightarrow \boxed{x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right) = \alpha}$

أو $e^x = \frac{2m - 2\sqrt{m^2+1}}{2} = m - \sqrt{m^2+1} < 0$ (مرفوض)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R \setminus \{0\}$ وفق: $f(x) = e^x + \ln|x|$.

وليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x) = xe^x + 1$.

1) ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $R \setminus \{0\}$.

g معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1} \ : g(-1) = -e^{-1} + 1 = \frac{-1+e}{e}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{-1+e}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ من جدول التغيرات انه أياً يكن $x \in R$: $g(x) \geq \frac{-1+e}{e}$ وبالتالي $g(x) > 0$

إذاً كانت : $x \in]0, +\infty[$; $\frac{g(x)}{x} > 0$ ، إذاً كانت : $x \in]-\infty, 0[$; $\frac{g(x)}{x} < 0$

2) ادرس تغيرات f وارسم C.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $R \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

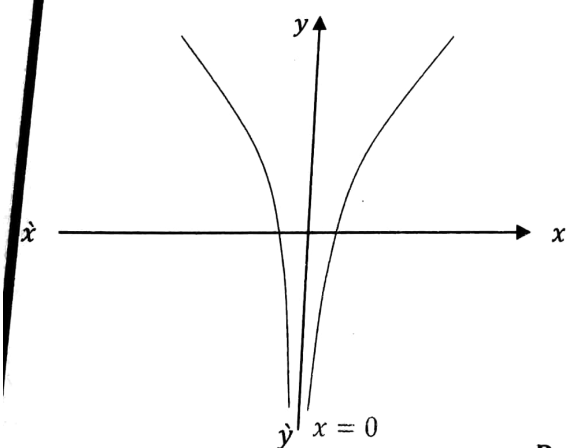
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على yy' عند $-\infty$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب منطبق على yy' عند $+\infty$

$$f(x) = \begin{cases} e^x + \ln(x) & ; x > 0 \\ e^x + \ln(-x) & ; x < 0 \end{cases} \quad , \quad f'(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ e^x + \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x + 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$ (درسنا إشارتها في الطلب 1)



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

بت أن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين مختلفين أياً يكن m من R

مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty, 0[$

$m \in f(]-\infty, 0[) =$

إذاً للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في المجال $]-\infty, 0[$

Scanned by CamScanner

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$ إذاً للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$

$m \in f(]0,+\infty[) = R$

ومنه للمعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفين في $R\backslash\{0\}$

---

18) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

1) تحقق من كلٍ من المقولات الآتية:

a) f معرف على R

شرط اللوغاريتم $e^{2x} - e^x + 1 > 0$

نفرض $e^{2x} - e^x + 1 = 0$

(مستحيلة الحل) , $\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$

إذاً فهي توافق إشارة e^{2x} اي $(e^{2x} - e^x + 1 > 0)$ محققة دوماً) إذاً $D = R$

b) يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})]$$
$$f(x) = \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

c) المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C.

$$f(x) - y_d = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$$
$$= \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y_d) = ?$ $\quad -\infty + \infty$ حالة عدم تعيين

$$f(x) - y_d = \ln[e^{-x}(e^x - 1 + e^{-x})]$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y_d) = +\infty \Rightarrow$ d ليس مقارب مائل عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = 0 \Rightarrow$ d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$

وبالتالي d مقارب مائل لـ C عند $+\infty$.

d) الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

المماس يوازي محور الفواصل $\Leftarrow m = 0$.

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$ f اشتقاقي على R

نبحث عن نقطة x_0 بحيث: $f'(x_0) = m = 0$

$$f'(x_0) = 0 \Longrightarrow 2e^{2x_0} - e^{x_0} = 0$$
$$e^{x_0}(2e^{x_0} - 1) = 0$$
$$2e^{x_0} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x_0} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_0 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$:f(-\ln 2) = \ln\left(e^{2(-\ln 2)} - e^{-\ln 2} + 1\right)$

$$= \ln\left(\frac{1}{e^{2\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \quad \Longrightarrow A\left(-\ln 2, \ln\frac{3}{4}\right)$$

الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل معادلته : $\Delta: y_\Delta = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف و مستمر و اشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ $y = 0$ مقارب أفقي منطبق على xx' عند $-\infty$

Scanned by CamScanner

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حصلنا على حالة عدم تعيين $+\infty - \infty$

$$f(x) = \ln\left[e^x\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x}\right)\right] \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

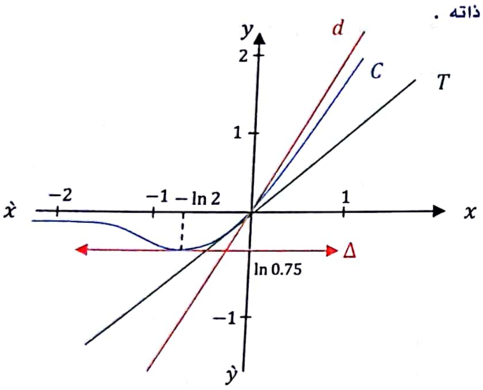
$$\acute{f}(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \Rightarrow \acute{f}(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\ln 2} : f(-\ln 2) = \ln\frac{3}{4}$$ (وذلك بالاستفادة من الطلب السابق)

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها 0 منه .

$$f(0) = 0 \; : O(0,0) \; , \quad m = \acute{f}(0) = \frac{2-1}{1} = 1 \Rightarrow T: y_T = x$$

4) ارسم كلاً من d و Δ و T ، ثم ارسم C في المعلم ذاته .



* $d: y_d = 2x$ (مقارب)

x	0	1
y	0	2
	$(0,0)$	$(1,2)$

* يوازي محور $x\grave{x}$ $\quad \Delta: y_\Delta = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

* $T: y_T = x$ (مماس)

x	0	1
y	0	1
	$(0,0)$	$(1,1)$

---

⑲ ليكن f التابع المعرف على المجال R_+^* وفق $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$.

1) ادرس تغيرات $g: x \to e^x.\acute{f}(x)$

f اشتقاقي على R_+^* :

$$\acute{f}(x) = -e^{-x}(3 + \ln x) + \frac{1}{x}e^{-x}$$

$$\acute{f}(x) = e^{-x}\left[-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right]$$

$$g(x) = e^x.\acute{f}(x) = e^x.e^{-x}\left(-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}}$$

g معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = +\infty + \infty = +\infty$$: $+\infty$ عند $y\grave{y}$ مقارب منطبق على $x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

Scanned by CamScanner

$g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$ ، $x \in]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖	$+\infty \searrow 0 \searrow$	$-\infty$

2) استنتج دراسة تغيرات f.

التابع g مستمر و متناقص تماماً و ينتقل من قيمة موجبة $(+\infty)$ إلى قيمة سالبة $(-\infty)$

و بالتالي يمر من الصفر من اجل قيمة $x = \alpha$

وبما ان $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x} > 0$ في المجال $]0,\alpha[$ ويكون فيه f متزايد تماماً .

وايضاً $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x} < 0$ في المجال $]\alpha,+\infty[$ ويكون فيه f متناقص تماماً .

f معرف على $]0,+\infty[$

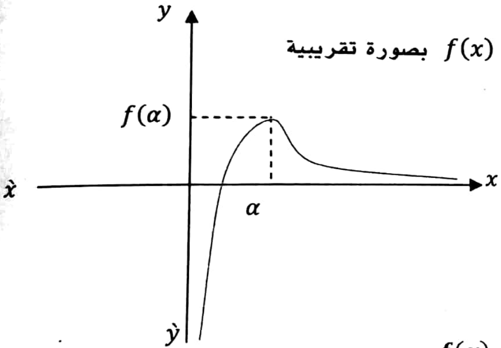
$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب شاقولي منطبق على yy' عند الـ $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ حالة عدم تعيين من الشكل $0.\infty$

$$f(x) = xe^{-x}\left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \frac{x}{e^x}\left(\frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ [redacted] $= 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب افقي منطبق على xx' عند $+\infty$

$f(x)$ بصورة تقريبية



x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow 0$

⑳ ادرس تغيرات التابع f المعرف على $R \setminus \{1\}$ بالصيغة $f(x) = \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

f معرف واشتقاقي على $R \setminus \{1\}$: $f(x) = e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow$ $y = \frac{1}{e}$ مقارب افقي // xx' عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow$ $y = \frac{1}{e}$ مقارب افقي // xx' عند $+\infty$

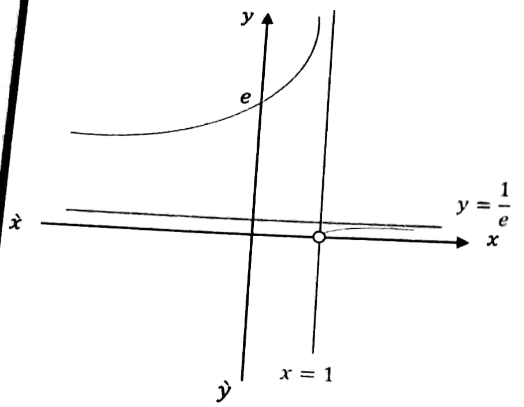
$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $x = 1$ مقارب شاقولي // yy' عند $+\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = 0$: لاحظ $(1,0)$ نقطة مقاربة (على الشكل نرسمها مفرغة)

$$f'(x) = \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2} . e^{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)^2} . e^{\frac{1+x}{1-x}} > 0$$

وائل زعترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068
علاء رحال 0952480990

Scanned by CamScanner



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\grave{f}(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{e} \nearrow +\infty$	‖	$0 \nearrow \frac{1}{e}$

نقطة مساعدة :

C قطع $y\grave{y}$ اي $x=0$

$f(0)=e$

نقطة التقاطع مع محور $y\grave{y}$ هي : $(0,e)$

㉑ ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=\ln(e^{-x}+1)$

1) a) جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \Rightarrow$ $y=0$ مقارب افقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

b) اثبت ان $f(x)=-x+\ln(e^x+1)$

$$f(x)=\ln(e^{-x}+1)$$

$$=\ln\left[e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)\right] = \ln[e^{-x}(e^x+1)]$$

$$=\ln e^{-x}+\ln(1+e^x)=-x+\ln(e^x+1)$$

c) استنتج أن الخط C يقبل مقارباً مائلاً وليكن d في جوار $-\infty$.

بفرض المستقيم $d: y_d=-x$ ومنه:

$$f(x)-y_d=-x+\ln(1+e^x)+x=\ln(1+e^x)$$

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_d)=\ln 1=0 \;\Rightarrow$ $d: y_d=-x$ مقارب مائل لـ C عند $-\infty$

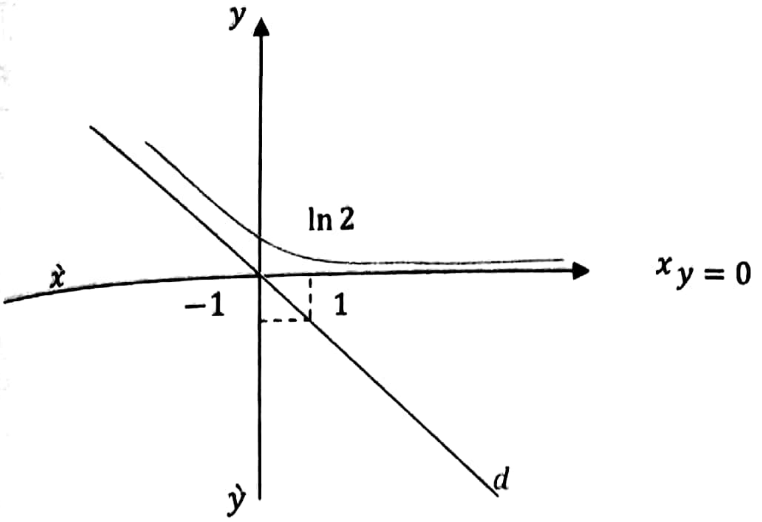
2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم في معلم واحد d ثم C

f معرف واشتقاقي على R:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ $y=0$ مقارب أفقي منطبق على $x\grave{x}$ عند $+\infty$

$$\grave{f}(x)=\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}<0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\grave{f}(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0



$d: y_d = -x$

x	0	1
y	0	-1
	$(0,0)$	$(1,1)$

نقطة مساعدة

C قطع $y\grave{y}$ اي $x = 0$

$f(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln 2$

نقطة التقاطع مع محور $y\grave{y}$ هي: $(0, \ln 2)$

3) نرمز إلى نقاط C التي فواصلها (0) و (1) و (-1) على التوالي بالرموز D, B, A

أثبت ان مماس C في A يوازي المستقيم (BD).

مماس الخط C في A يوازي المستقيم BD اي ان : $m_A = m_{BD}$

أولاً لنوجد إحداثيات النقاط D, B, A

$x_A = 0 : f(0) = \ln(2) \quad : \boxed{A(0, \ln 2)}$

$x_B = 1 : f(1) = \ln(e^{-1} + 1) = \ln\left(\frac{1}{e} + 1\right) = \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$

$= \ln(1+e) - \ln e = \ln(1+e) - 1 \quad : \boxed{B(1, \ln(e+1) - 1)}$

$x_D = -1 : f(-1) = \ln(e+1) \quad : \boxed{D\,(-1, \ln(e+1)\,)}$

$$m_{BD} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \frac{\ln(e+1) - 1 - \ln(e+1)}{1 - (-1)} = \frac{-1}{2}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

$$m_A = \grave{f}(x_A) = \grave{f}(0) = \frac{-e^0}{e^0 + 1} = \frac{-1}{2}$$

$$m_A = m_{BD} = \frac{-1}{2}$$

إذاً مماس الخط C في A يوازي BD

㉒ محل هندسي:

تأمل التابعين: $f_1: x \to e^x$ ، $f_2: x \to e^{-x}$ وخطاهما البيانيان C_2, C_1 في معلم متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

يقطع المستقيم المرسوم من $A(m, o)$ موازياً محور التراتيب الخطين C_2, C_1 في N, M بالترتيب.

1) ارسم C_2, C_1.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\grave{f}_1(x)$	$+$
$f_1(x)$	$0 \nearrow +\infty$

* $f_1(x) = e^x > 0$

f_2, f_1 معرفان على R

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ مقارب منطبق على $x\grave{x}$ عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$

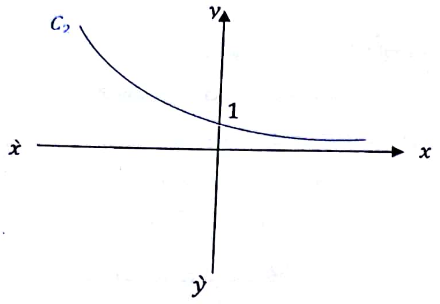
$\grave{f}(x) = e^x > 0$

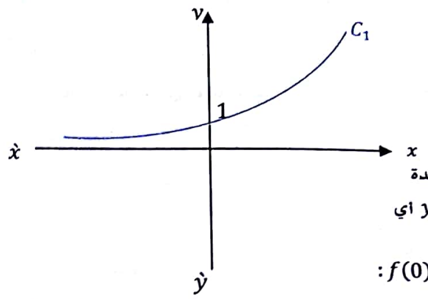
Scanned by CamScanner

** $f_2(x) = e^{-x} > 0$

نلاحظ ان : $f_1(x) = f_2(-x)$

اي : C_2 نظير C_1 بالنسبة لـ $y\acute{y}$





نقطة مساعدة

C_1 يقطع $y\acute{y}$ اي

$x = 0$

$:f(0) = 1 \Rightarrow (0,1)$

2) نرمز بالرمزين T_2, T_1 إلى مماسي C_2, C_1 في N, M بالترتيب، اكتب معادلة لكل من T_2, T_1

واستنتج ان T_2, T_1 متعامدان

بما ان المستقيم المار من $A(m,0)$ يقطع C_2, C_1 فإن فاصلتي كل N, M هي m ومنه:

$x_N = m$	$x_M = m$
$f_2(m) = e^{-m}$	$f_1(m) = e^m$
$N(m, e^{-m})$	$M(m, e^m)$
$\acute{f}_2(x) = -e^{-x}$	$\acute{f}_1(x) = e^x$
$m_{T_2} = -e^{-m}$	$m_{T_1} = e^m$
$y - e^{-m} = -e^{-m}(x - m)$	$y - e^m = e^m(x - m)$
T_2: $y_{T_2} = -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m}$	T_1: $y_{T_1} = e^m x - me^m + e^m$

$m_{T_1} \times m_{T_2} = (e^m) \times (-e^{-m}) = -e^0 = -1 \Rightarrow$ متعامدان T_1, T_2

3) اثبت ان إحداثيي P، نقطة تقاطع T_2, T_1 هما $\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$

$$\left.\begin{aligned} T_1: y_{T_1} &= e^m x - me^m + e^m \\ T_2: y_{T_2} &= -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$ بالحل المشترك

$$e^m x - me^m + e^m = -e^{-m}x + me^{-m} + e^{-m}$$

$$e^m x + e^{-m}x = me^m + me^{-m} - e^m + e^{-m}$$

$$(e^m + e^{-m})x = m(e^m + e^{-m}) - (e^m - e^{-m}) \qquad \div (e^m + e^{-m})$$

$$\boxed{x = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}}$$

نعوض في T_1 :

$$y = e^m\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}\right) - me^m + e^m$$

$$= me^m - \frac{e^{2m} - 1}{e^m + e^{-m}} - me^m + e^m$$

$$= -\frac{e^{2m} - 1}{e^m + e^{-m}} + e^m = \frac{-e^{2m} + 1 + e^{2m} + 1}{e^m + e^{-m}} = \frac{2}{e^m + e^{-m}}$$

$$P\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$$

Scanned by CamScanner

4) لتكن النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.

a) احسب بدلالة m إحداثيي النقطة I.

$$M(m,e^m) \quad , \quad N(m,e^{-m})$$

$$I\left(\frac{m+m}{2},\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right) \Rightarrow I\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$$

b) جد Γ المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول m في R.

لاحظ ان النقطة I إحداثييها $\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$ فمعادلة المحل الهندسي Γ للنقطة I هي: $y=\frac{e^m+e^{-m}}{2}$

اي ان Γ هو الخط البياني للتابع $f(x)$ المعرف على R وفق: $f_I(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

c) ارسم مجموعة النقاط I في المعلم الذي رسمت فيه الخطين C_2 , C_1 .

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$: D=R$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

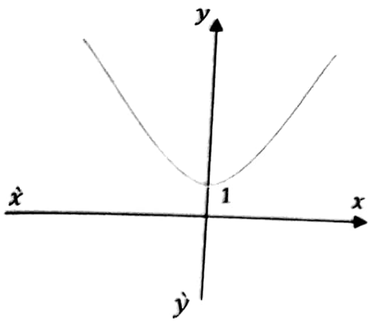
f معرف واشتقاقي على R

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \\ f'(x)&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=0$$

$$e^x-e^{-x}=0$$

$$e^x=e^{-x} \Rightarrow x=0 \;:\; f(0)=1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



لسهولة الرسم:

سنرسم نقط المحل الهندسي للنقطة I فقط

ورسمنا سابقاً C_2 , C_1 .

5) a) احسب بدلالة m، مركبات الشعاعين $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{IP}$

$$A(m,0) \quad , \quad P\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}},\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right) \quad , \quad I\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AP}=\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}-m\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}-0\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{IP}=\left(m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}-m\right)\vec{i}+\left(\frac{2}{e^m+e^{-m}}-\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{4-(e^m+e^{-m})^2}{2(e^m+e^{-m})}\right)\vec{j}$$

$$=\left(-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}\right)\vec{i}+\left(\frac{2-e^{2m}-e^{-2m}}{2(e^m+e^{-m})}\right)\vec{j}$$

Scanned by CamScanner

b) استنتج ان المستقيم (IP) مماس للخط Γ في النقطة I وان الطول AP ثابت.

$$* \quad m_{IP}=\frac{y_P-y_I}{x_P-x_I}=\frac{\frac{2}{e^m+e^{-m}}-\frac{e^m+e^{-m}}{2}}{m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}-m}=\frac{\frac{2-e^{2m}-e^{-2m}}{2(e^m+e^{-m})}}{-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}}$$

$$m_{IP}=\frac{2-e^{2m}-e^{-2m}}{-2(e^m-e^{-m})}=\frac{-(e^{2m}-2+e^{-2m})}{-2(e^m-e^{-m})}=\frac{(e^m-e^{-m})^2}{2(e^m-e^{-m})}=\frac{1}{2}(e^m-e^{-m})$$

$$\boxed{m_{IP}=\frac{1}{2}(e^m-e^{-m})} \quad ①$$

لكن $f_I(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$$f'_I(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \quad , \quad I\left(m,\frac{e^m+e^{-m}}{2}\right) \text{ حيث}$$

$$\boxed{f'_I(m)=\frac{1}{2}(e^m-e^{-m})} \quad ②$$

من ① و ② نجد ان: $f'_I(m)=m_{IP}$ ومنه IP مماس للخط Γ في I.

$$** \quad \|\overrightarrow{AP}\|=\sqrt{\frac{(e^m-e^{-m})^2}{(e^m+e^{-m})^2}+\frac{4}{(e^m+e^{-m})^2}}=\sqrt{\frac{e^{2m}-2+e^{-2m}+4}{(e^m+e^{-m})^2}}=\sqrt{\frac{e^{2m}+2+e^{-2m}}{(e^m+e^{-m})^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(e^m+e^{-m})^2}{(e^m+e^{-m})^2}}=\sqrt{1}=1$$

ومنه فإن $\|\overrightarrow{AP}\|=1$ ثابت.

ابحث عن نهاية كل من المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية :

1 $u_n=\dfrac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{3}$$

2 $u_n=\dfrac{e^{2n}}{(1+n)^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=? \quad \frac{+\infty}{+\infty} \text{ عدم تعيين}$$

$$u_n=\frac{e^{2n}}{1+2n+n^2}=\frac{e^{2n}}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1\right)}$$

$$=\left(\frac{e^n}{n}\right)^2\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty\left(\frac{1}{1}\right)=+\infty$$

3 $u_n=\ln(2+e^{-n})$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$$

4 $u_n=e^{1+\frac{-1}{n}+\frac{-1}{n^2}}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=e$$

5 $u_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$$u_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

نفرض : $\begin{cases}\frac{1}{n}=t\\ n\to+\infty \Rightarrow t\to 0\end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{t\to 0}\left[\frac{e^t-1}{t}\right]=1$$

6 $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=e^2$$

Scanned by CamScanner

㉔ المشتق من المرتبة n:

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$

ولتكن $f^{(1)} = \acute{f}$ و $f^{(2)} = \acute{\acute{f}}$ وهكذا...... $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية للتابع f $(n \geq 1)$.

1) احسب $f^{(1)}$ و $f^{(2)}$.

$$f^{(1)}(x) = \acute{f}(x) = (2x+1).e^x + e^x(x^2 + x - 1)$$
$$= e^x(2x + 1 + x^2 + x - 1) = (x^2 + 3x)e^x$$

$$f^{(2)}(x) = \acute{\acute{f}}(x) = (2x+3).e^x + e^x(x^2 + 3x)$$
$$= e^x(2x + 3 + x^2 + 3x) = (x^2 + 5x + 3)e^x$$

2) a) اثبت أن: $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ مع $a_{n+1} = a_n + 2$ و $b_{n+1} = b_n + a_n$.

لنثبت صحة الخاصة السابقة بالتدريج:

- لنثبت تحقق الخاصة من اجل $n = 1$, $n = 2$

$$n = 1\begin{cases} f^{(1)}(x) = (x^2 + 3x)e^x = (x^2 + 3x + 0)e^x \\ f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x \xrightarrow{n=1} f^{(1)}(x) = (x^2 + a_1 x + b_1)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 3 \\ b_1 = 0 \end{matrix}$$

$$n = 2\begin{cases} f^{(2)}(x) = (x^2 + 5x + 3)e^x = (x^2 + (3+2)x + 3)e^x \\ f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x \xrightarrow{n=2} f^{(2)}(x) = (x^2 + a_2 x + b_2)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_2 = 3 + 2 \\ b_2 = 3 = 0 + 3 \end{matrix}$$

لاحظ ان $a_2 = 3 + 2$ و $b_2 = 3 = 0 + 3$

$a_2 = a_1 + 2$ و $b_2 = b_1 + a_1$

ومنه $\boxed{a_{n+1} = a_n + 2 \quad \text{و} \quad b_{n+1} = b_n + a_n}$

فالخاصة صحيحة من أجل $n = 1$ و $n = 2$

- نفرض ان الخاصة صحيحة من أجل n أي: $\boxed{f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x}$ صحيحة .
- لنثبت صحة الخاصة من أجل $n + 1$ أي : $\boxed{f^{(n+1)}(x) \stackrel{?}{=} (x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1})e^x}$

لدينا : $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$

نشتق : $[f^{(n)}(x)]' = f^{(n+1)}(x) = (2x + a_n)e^x + e^x(x^2 + a_n x + b_n)$

$$L_1 = f^{(n+1)}(x) = e^x[2x + a_n + x^2 + a_n x + b_n]$$
$$= e^x[x^2 + a_n x + 2x + a_n + b_n]$$
$$= e^x[x^2 + (a_n + 2)x + (a_n + b_n)]$$
$$= e^x[x^2 + a_{n+1}\, x + b_{n+1}] = L_2$$

فالخاصة صحيحة من أجل $n + 1$.

الخاصة السابقة صحيحة من أجل $n \geq 1$.

ستنتج أن a_n و b_n أعداد عادية .

لأن $a_1 = 3$, $b_1 = 0$ فهما عددان طبيعيان من أجل $n = 1$

$a_2 = 5 = a_1 + 2$, $b_2 = 3 = 0 + 3 = b_1 + a_1$ فهما عددان طبيعيان من أجل $n = 2$

$a_{n+1} = a_n + 2$ مجموع عددين طبيعيين هو عدد طبيعي .

$b_{n+1} = b_n + a_n$ مجموع عددين طبيعيين هو عدد طبيعي .

مع ملاحظة أن كل عدد طبيعي هو عدد عادي .

Scanned by CamScanner

3) في هذا السؤال نريد كتابة a_n و b_n بدلالة n .

a) اثبت ان المتتالية (a_n) حسابية ، استنتج كتابة a_n بدلالة n .

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

$$a_{n+1} - a_n = 2 \quad \text{(ثابت)}$$

فهي متتالية حسابية أساسها $r = 2$ و حدها الأول $a_1 = 3$.

دستور الحد العام في المتتالية الحسابية :

$$a_n = a_m + (n-m)r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad : \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$= 3 + (n-1)(2)$$

$$= 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

$$\boxed{a_n = 2n + 1}$$

b) تحقق من ان $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$ (أياً يكن $n \geq 1$) ، ثم استنتج b_n بدلالة n

$$b_{n+1} = a_n + b_n$$

و منه $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2}$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + b_{n-3}$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + b_{n-4}$$

$$\vdots$$

$$b_n = a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

نجد ان b_n مجموع حدود متوالية من متتالية حسابية حدها الأول $a_1 = 3$ و عدد حدودها $(n-1-1+1 = n-1)$

لدينا : $a_n = 2n+1$ ، فيكون حدها الأخير $a_{n-1} = 2(n-1)+1$

$$= 2n - 2 + 1 = 2n - 1$$

$$b_n = S = (n-1)\left(\frac{2n-1+3}{2}\right) = (n-1)\left(\frac{2n+2}{2}\right) = (n-1)\left(\frac{2(n+1)}{2}\right) = (n-1)(n+1)$$

و منه نكتب $b_n = (n-1)(n+1)$

معادلة تفاضلية :

1) لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2\grave{y} + 3y = 0$ عين جميع حلول (E) .

$$\grave{y} = \frac{-3}{2}\, y$$

$a = \frac{-3}{2}$ حلولها : $y = f_k(x) = k.e^{\frac{-3}{2}x}$ حيث : $k \epsilon R$

) لتكن $(\grave{E})$ المعادلة التفاضلية $2\grave{y} + 3y = x^2 + 1$

a) عين كثير حدود من الدرجة الثانية f يحقق المعادلة $(\grave{E})$.

ليكن كثير الحدود من الدرجة الثانية $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ \grave{y} = 2ax + b \end{cases}$

لدينا $2\grave{y} + 3y = x^2 + 1$

Scanned by CamScanner

بالتعويض :
$$2(2ax+b)+3(ax^2+bx+c)=x^2+1$$
$$4ax+2b+3ax^2+3bx+3c=x^2+0x+1$$
$$3ax^2+(4a+3b)x+(2b+3c)=x^2+0x+1$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases} 3a=1 \rightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}} \\ 4a+3b=0 \rightarrow 4\left(\frac{1}{3}\right)+3b=0 \rightarrow \boxed{b=-\frac{4}{9}} \\ 2b+3c=1 \rightarrow 2\left(\frac{-4}{9}\right)+3c=1 \rightarrow 3c=1+\frac{8}{9}=\frac{17}{9} \rightarrow \boxed{c=\frac{17}{27}} \end{cases}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}}$$

b) بين انه إذا كان g حلاً للمعادلة $(\grave{E})$ كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E)

و برهن بالعكس انه إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة $(\grave{E})$.

- بما ان g هو حل للمعادلة: $(\grave{E}): 2\grave{y}+3y=x^2+1$

إذاً: $2\grave{g}+3g=x^2+1 \quad (*)$

وبما ان f هو حل للمعادلة $(\grave{E})$ ايضاً إذاً: $2\grave{f}+3f=x^2+1 \quad (**)$

بطرح $(**)$ من $(*)$ طرفاً لطرف نجد:

$$2\grave{g}+3g-2\grave{f}-3f=0$$
$$2\grave{g}-2\grave{f}+3g-3f=0$$
$$2(\grave{g}-\grave{f})+3(g-f)=0$$
$$2(g-f)'+3(g-f)=0$$

اي $g-f$ هو حل للمعادلة $(E): \quad 2\grave{y}+3y=0$

- إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة $(E): \quad 2\grave{y}+3y=0$

$$2(g-f)'+3(g-f)=0$$
$$2\grave{g}-2\grave{f}+3g-3f=0$$
$$2\grave{g}+3g-(2\grave{f}+3f)=0 \quad (*)$$

لكن f حل للمعادلة التفاضلية :

$$\grave{E}: \quad 2\grave{y}+3y=x^2+1$$
$$2\grave{f}+3f=x^2+1$$

بالتعويض في $(*)$ نجد ان:

$$2\grave{g}+3g-(x^2+1)=0$$
$$2\grave{g}+3g=x^2+1$$

و منه g حلاً للمعادلة $(\grave{E}): 2\grave{y}+3y=x^2+1$.

c) استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية (E) .

$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$ حلاً للمعادلة $(\grave{E})$.

$y=ke^{-\frac{3}{2}x} \; ; k\in R$ حلاً للمعادلة (E) ومنه :

$$y=k.e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27} \quad ; k\in R$$

Scanned by CamScanner

(25) نتامل المعادلة التفاضلية $(E) : \grave{y} + 3y = 2e^{-x}$

1) عين العدد a ليكون التابع $x \to ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E) .

$y = ae^{-x}$ فإن $\grave{y} = -ae^{-x}$ نعوض في المعادلة (E) :

$$-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$$

$$2ae^{-x} = 2e^{-x}$$

$$(\div e^{-x} \neq 0) \qquad 2a = 2 \ \to \boxed{a = 1}$$

2) ليكن العدد a الذي وجدناه في ① و ليكن g تابعاً اشتقاقياً على R نعرف التابع $h : x \to g(x) - ae^{-x}$

اثبت ان التابع g حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا و فقط إذا كان h حلاً للمعادلة التفاضلية $(F) : \grave{y} + 3y = 0$

بما ان $a = 1$ إذاً $h(x) = g(x) - e^{-x}$ و منه $g(x) = h(x) + e^{-x}$

يجب ان نثبت ان:

$g(x) = h(x) + e^{-x}$ حل للمعادلة $(E) : \grave{y} + 3y = 2e^{-x} \Leftrightarrow h(x) = g(x) - e^{-x}$ حل للمعادلة $(F) : \grave{y} + 3y = 0$

اولاً : بفرض $g(x) = h(x) + e^{-x}$ حل للمعادلة $(E) : \ \grave{y} + 3y = 2e^{-x}$

$\grave{g}(x) = \grave{h}(x) - e^{-x}$ نعوض في المعادلة :

$$\grave{y} + 3y = 2e^{-x}$$

$$\grave{h}(x) - e^{-x} + 3(h(x) + e^{-x}) = 2e^{-x}$$

$$\grave{h}(x) - e^{-x} + 3h(x) + 3e^{-x} = 2e^{-x}$$

$$\grave{h}(x) + 3h(x) = 0$$

إذاً $h(x)$ حل للمعادلة $(F) : \grave{y} + 3y = 0$.

ثانياً : $h(x) = g(x) - e^{-x}$ حل للمعادلة $(F) : \grave{y} + 3y = 0$:

$\grave{h}(x) = \grave{g}(x) + e^{-x}$ نعوض في المعادلة :

$$\grave{y} + 3y = 0$$

$$\grave{g}(x) + e^{-x} + 3(g(x) - e^{-x}) = 0$$

$$\grave{g}(x) + e^{-x} + 3g(x) - 3e^{-x} = 0$$

$$\grave{g}(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$$

إذاً $g(x)$ حل للمعادلة التفاضلية $(E) : \grave{y} + 3y = 2e^{-x}$.

3) حل المعادلة التفاضلية (F) و استنتج مجموعة حلول (E) .

$$(F): \quad \grave{y} + 3y = 0$$

$$\grave{y} = -3y \qquad : a = -3$$

حلها :

$$f_k(x) = k.e^{-3x} \quad ; \quad k \in R$$

إذاً (F) $h(x) = ke^{-3x}$

- وبما ان $h(x)$ هو حل للمعادلة (F) إذاً

$$g(x) = h(x) + e^{-x}$$

لكن

وهي مجموعة حلول (E) المطلوبة :

$$g(x) = ke^{-3x} + e^{-x}$$

ليكن n عدداً طبيعياً اكبر او يساوي 2 .

1) a) حل المعادلة التفاضلية (1) الآتية :

$$\grave{y} - \frac{1}{n}y = 0$$

$$\grave{y} = \frac{1}{n}y, \quad a = \frac{1}{n}$$

حلها : $y = f_k(x) = ke^{\frac{1}{n}x}$ حيث : $k \in R$

Scanned by CamScanner

b) نتامل المعادلة التفاضلية (2) الآتية : $\grave{y}-\frac{1}{n}y=-\frac{x+1}{n(n+1)}$

عين a , b ليكون التابع $x \to g(x)=ax+b$ المعرف على R حلاً للمعادلة (2) .

$\begin{cases} g(x)=ax+b \\ \grave{g}(x)=a \end{cases}$ نعوض في المعادلة التفاضلية

$$a-\frac{1}{n}(ax+b)=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

$$a-\frac{a}{n}x-\frac{b}{n}=\frac{-x}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{-a}{n}x+\left(a-\frac{b}{n}\right)=\frac{-1}{n(n+1)}x-\frac{1}{n(n+1)}$$

بالمطابقة :

$$\begin{cases} \frac{-a}{n}=\frac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{n+1}} \\ a-\frac{b}{n}=\frac{-1}{n(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n+1}-\frac{b}{n}=\frac{-1}{n(n+1)} \end{cases}$$

$$\frac{-b}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}-\frac{1}{n+1}$$

$$b=\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

إذاً $g(x)=\frac{1}{n+1}x+1$ هو حل للمعادلة (2)

c) 1. اثبت انه ليكون تابع h معرف على R حلاً للمعادلة (2) يلزم و يكفي أن يكون $h-g$ حلاً للمعادلة (1)

$$\boxed{(1): \grave{y}-\frac{1}{n}y=0 \text{ حلاً للمعادلة } h-g \Leftrightarrow (2): \grave{y}-\frac{1}{n}y=-\frac{x+1}{n(n+1)} \text{ حلاً للمعادلة } h}$$

أولاً : h حلاً للمعادلة (2) أي :

$$\grave{h}-\frac{1}{n}h=-\frac{x+1}{n(n+1)} \qquad (*)$$

لكن من الطلب (b) نجد أن $g(x)$ حلاً للمعادلة (2) فإن :

$$\grave{g}-\frac{1}{n}g=-\frac{x+1}{n(n+1)} \qquad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\grave{h}-\frac{1}{n}h=\grave{g}-\frac{1}{n}g$$

$$\grave{h}-\grave{g}-\frac{1}{n}h+\frac{1}{n}g=0$$

$$(\grave{h}-\grave{g})-\frac{1}{n}(h-g)=0$$

$$(h-g)'-\frac{1}{n}(h-g)=0$$

إذاً $h-g$ حلاً للمعادلة التفاضلية (1) .

ثانياً : $h-g$ حلاً للمعادلة (1) فإن :

$$(h-g)'-\frac{1}{n}(h-g)=0$$

$$\grave{h}-\grave{g}-\frac{1}{n}h+\frac{1}{n}g=0$$

$$\grave{h}-\frac{1}{n}h=\grave{g}-\frac{1}{n}g \qquad (*)$$

من الطلب (b) وجدنا أن g حلاً للمعادلة التفاضلية (2) أي :

$$\grave{g}-\frac{1}{n}g=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

نعوض في $(*)$:

$$\grave{h}-\frac{1}{n}h=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

إذاً h حلاً للمعادلة التفاضلية (2)

Scanned by CamScanner

2. استنتج من ذلك حلول المعادلة (2) .

$g(x) = \frac{1}{n+1}x + 1$ حل للمعادلة التفاضلية (2) .

$y = ke^{\frac{1}{n}x}$ حل للمعادلة التفاضلية (1) .

y حل للمعادلة التفاضلية (2) إذا كان $y - g$ هو حل للمعادلة التفاضلية (1):

$$y - g(x) = ke^{\frac{1}{n}x} \quad : k \in R$$

$$y = ke^{\frac{1}{n}x} + g(x)$$

$$\boxed{y = ke^{\frac{1}{n}x} + \frac{1}{n+1}x + 1} \quad (I)$$

3. و من بينها عيّن تلك الحلول f التي تحقق $f(0) = 0$

نعوض في (I) :

$$0 = ke^{0} + 0 + 1$$

$$k = -1$$

$$\boxed{y = -e^{\frac{1}{n}x} + \frac{1}{n+1}.x + 1}$$

2) نتامل التابع f_n المعرف على R بالعلاقة : $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$

a) ادرس إشارة $\grave{f}_n(x)$ واستنتج جدول تغيرات التابع f_n

اثبت على الخصوص أن التابع f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة يطلب تعيينها

$f_n(x)$ معرف و مستمر و اشتقاقي على R :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty \qquad (n \geq 2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = ? \qquad +\infty - \infty \text{ عدم تعيين}$$

$$f_n(x) = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1} - \frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1} - \frac{e^{\frac{x}{n}}}{n.\frac{x}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty\left(0 + \frac{1}{n+1} - \infty\right) = -\infty$$

$$\grave{f}_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}}$$

$$\grave{f}_n(x) = 0$$

$$\frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

$$e^{\frac{x}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

$$\ln e^{\frac{x}{n}} = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \Rightarrow \boxed{x = n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$f_n\left(n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = 1 + \frac{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n+1} - e^{\frac{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n}}$$

$$= 1 + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - e^{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= 1 + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Scanned by CamScanner

x	$-\infty$		$n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

$$M\left(n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ و } \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$$

أ) اثبت ان الخط البياني C_n للتابع f_n يقبل مقارباً مائلاً d_n ، اعط معادلة للمستقيم d_n

ارسم كلاً من d_2 و C_2 .

نفرض لدينا المستقيم $d_n: y_{d_n} = 1+\frac{x}{n+1}$ و منه :

$$f_n(x) - y_{d_n} = 1+\frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}} - \left(1+\frac{x}{n+1}\right) = -e^{\frac{x}{n}}$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f_n(x) - y_{d_n}\right) = 0 \quad \Rightarrow$ $d_n: y = 1+\frac{x}{n+1}$ مقارب مائل للخط C_n عند $-\infty$

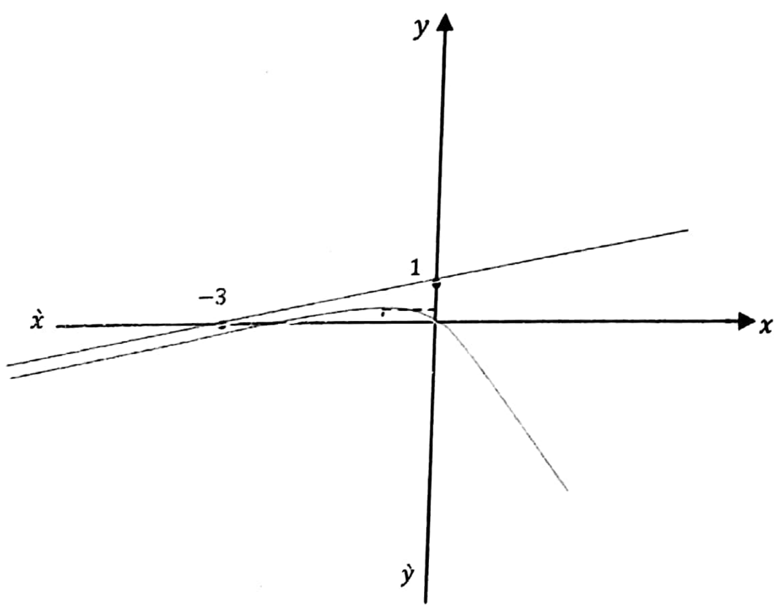
$\lim_{x\to+\infty}\left(f_n(x) - y_{d_n}\right) = -\infty \quad \Rightarrow$ d_n ليس مقارب مائل لـ C_n عند $+\infty$

الرسم : من اجل $n=2$:

$$f_2(x) = 1+\frac{1}{3}x - e^{\frac{1}{2}x} \quad , \quad d_2: y_{d_2} = 1+\frac{1}{3}x$$

x	$-\infty$		$2\ln\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

x	0	-3
y	1	0
	$(0,1)$	$(-3,0)$



Scanned by CamScanner