إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة وتمارين كتاب الرياضيات

الصف الثاني عشر (العلمي)

الفصل الدراسي الأول

الوحدة (١) : النهايات والاتصال

الفصل الأول : النهايات

تدريب (١) ص ١٥

أكمل :

١) $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = ١$ ٢) $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٥$

٣) $\lim_{س \to ٢} م(س)$ غ ٢٠

تدريب (٢) : ص ١٦

١) $\lim_{س \to ١} م(س) = ٢$ ٢) $\lim_{س \to -١} م(س)$ = غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ٢$ ٤) $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٣$

تمارين ومسائل

ص ١٧

ا) $\lim_{س \to ٦^+} م(س) = ٥$ ب) $\lim_{س \to ٦^-} م(س) = ٢$

ج) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ١$ د) $\lim_{س \to ٢^-} م(س)$ غ ٢٠

ه) $\lim_{س \to -٨^+} م(س) = -٦$ و) $\lim_{س \to -٨^-} م(س) = -٦$

ز) $\lim_{س \to ١٠} م(س)$ = صفر

٢) ا) $س \to ٤^-$ ب) $\lim_{س \to -٤^+} ل(س)$ = صفر

ج) $\lim_{س \to -٤^-} ل(س)$ غير موجودة د) $\lim_{س \to ٤^-} ل(س)$ غير موجودة

ه) $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ٢$

ج) $\lim_{س \to 0^+} ن(س) = \lim_{س \to 0^-} ن(س) = ٧$

د) $ك = \{-١، ١\}$ هـ) $ك = \{-٢، ٤\}$

و) $ا \in (-١، ١) \cup \{-٢، ٢، ٣\}$ ز) $ا \in [-١، ١] \cup \{-٢، ٢، ٣\}$

ثانيًا: نظريات النهايات

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to -٢} (ن(س) + ه(س) \times س) = \lim_{س \to -٢} ن(س) + \lim_{س \to -٢} ه(س) \times \lim_{س \to -٢} س$

$= -٣ + ١٠ \times -٢$

$= -٣ + ٢٠ = ١٧$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{ه(س)}{ن(س)} = \frac{\lim_{س \to ١} ه(س)}{\lim_{س \to ١} ن(س)} = \frac{٢}{٢} = ١$

٣) $\lim_{س \to ١} \sqrt{ن(س)} + \sqrt{ه(س)} + \lim_{س \to ١} ١٥$

$= \sqrt{٢} + \sqrt{٣ \times ٢} + ١٥$

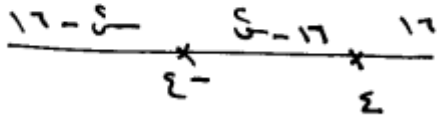
$= \sqrt{٤} + ١٥$

تدريب (٢)

١) نهـا | س − ٨ | = | ٠ − ٨ | = ٨
س ← ٠

٢) نهـا | س − ١٦ | = صفر
س ← ١٦

٣) نهـا | س٢ − ١٦ | = ٠
س ← ٤ لأن :

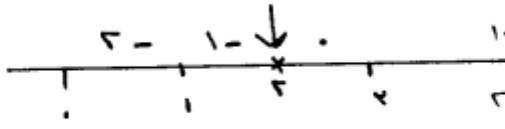


نهـا | س٢ − ١٦ | = صفر
س ← ٤+

نهـا | س٢ − ١٦ | = صفر
س ← ٤−

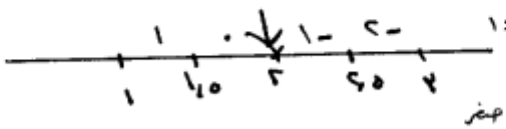
تدريب (٣)

١) نهـا [س − ٢]
س ← ١



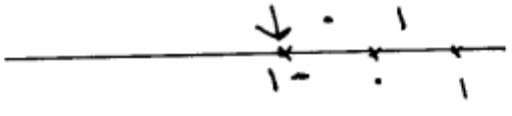
∴ غ ∉ ٣

٢) نهـا [٤ − ٢س]
س ← ١٫٥

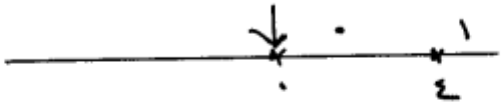


∴ غ ∈ ٣

٣) نهـا [س + ١] = ١
س ← ٠



٤) نهـا [٠٫٥ س]
س ← ٤



غ ∉ ٣ لأن

نهـا [٠٫٥ س] = ١ ، نهـا [٠٫٥ س] = صفر .
س ← ٤+ ، س ← ٤−

تدريب (٤)

أ) ١ ، ٥ ، ٣ ب) س = ٥ (٢،٣)

تدريب (٥)

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س-٢}$ غ ٠ ٢ ٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{س-٢}{س-٢}$ غ ٠ ٢

٣) $\lim_{س \to ٥} \frac{س-٥}{س-٥}$ غ ٠ ٢ لأن $\lim_{س \to ٥^+} \frac{س-٥}{س-٥}$ = موجب

$\lim_{س \to ٥^-} \frac{س-٥}{س-٥}$ غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٧} \frac{س-٥}{س-٥} = \frac{٤٩-٥}{٤٩-٥} = \frac{٤٤}{٤٤}$

تدريب (٦)

$\lim_{س \to ٠} م(س) =$ ضفر $\lim_{س \to ٤^+} م(س) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٤} م(س)$ غ ٠ ٢

تدريب (٧)

١) $\lim_{س \to ١} م(س)$ غ ٠ ٢ ٢) $\lim_{س \to ١} ل(س)$ غ ٠ ٢

٣) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ٢ل(س)) = ٨$

١) $\lim_{س \to ١^+}$ ف(س) غ.م لأن $\lim_{س \to ١^+}$ ف(س) = ٦ ، $\lim_{س \to ١^-}$ ف(س) = ٥

٢) $\lim_{س \to ١}$ ل(س) غ.م لأن $\lim_{س \to ١^+}$ ل(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ١^-}$ ل(س) = ٣

٣) $\lim_{س \to ١}$ (ف(س) + ل(س)) = ٨ لأن :

$\lim_{س \to ١^+}$ (ف(س) + ل(س)) = ٦ + ٢ = ٨ ، $\lim_{س \to ١^-}$ (ف(س) + ل(س)) = ٥ + ٣ = ٨

تمارين ومسائل

١) أ) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ن(س)) = -٦ + ٤ = -١٠$

ب) $\lim_{س \to ١} (م(س) \times ن(س)) = -٦ \times -٤ = ٢٤$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{ن(س)}{م(س)} = \frac{-٤}{-٦} = \frac{٢}{٣}$

د) $\lim_{س \to ٢} ن(س)^{٤} = \left(\lim_{س \to ٢} ن(س)\right)^{٤} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{١ - ن(س)} = \sqrt{\lim_{س \to ٤} (١ - ن(س))} = \sqrt{١ - ٣} = \sqrt{٤}$

و) $\lim_{س \to -١} \frac{ن(س)}{م(س)} = \frac{ن(-١)}{م(-١)} = \frac{-٤}{٠} =$ غير معرف

٢) أ) $\lim_{س \to ١} (٤ع(س) + ن(س)) = ١٠ + ٢ = ١٢$

ب) $١٢٥ - ٤ = ١٢١$

ج) $\frac{٥}{٢٤}$ د) $٢٥ - ٤ = ٢١$

٣) أ) $\lim_{س \to ٥+} |س - ١٢٥| =$ غير معرف ب) $\lim_{س \to ٥-} |س - ١٢٥| =$ غير معرف

ج) $\lim_{س \to ٥} |س - ١٢| =$ غير معرف د) $\lim_{س \to ٧} |س - ٤٦| =$ غير معرف

هـ) $\lim_{س \to -٤} [س - ٢]$ غير معرف و) $\lim_{س \to ١} (س[س] + |س|)$ غير معرف

ز) $\lim_{س \to -٥} \frac{|س+٥|}{س+٥}$ = غير موجود ح) $\lim_{س \to ١} \frac{|١-س|}{١-س}$ = ١

ط) $\lim_{س \to -١} \frac{س^٤+٤س+٤}{(س+٢)^٢} = \lim_{س \to -١} \frac{|س+٢|}{(س+٢)^٢}$ = غير موجود

٤) نفرض $ب \in [٦, ٨]$

٥) $ب \in (-٥٫٥)$

٦) بما أن $\lim_{س \to ٢} م(س)$ موجود $\therefore \lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^-} م(س)$

$٩ - ٤ب = ٣$ وضح $٩ - ٣ = ٤ب$

$٦ = ٤ب \Leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٣}{س - ٢}$ افرض $ص = س - ٢$

$س \to ٢$ ، $ص \to ٣$

$\lim_{ص \to ٣} \frac{(ص+٢)^٣ - ٣}{ص} = ١$

٨) $\lim_{س \to ٢} (س + ن(س)) = \lim_{س \to ٢} س + \lim_{س \to ٢} ن(س) = ٢ + ١ = ٣$

٩) $\lim_{س \to ١} م(س) + \lim_{س \to ١} ع(س)$ لان النهايتين منفصلتين

$= ٠ + ٢ = ٢$

١٠) $\lim_{س \to ٢} م(س) \times \lim_{س \to ٢} ع(س) = ١ \times ١ = ١$

١١) افرض $ص = س - ١$ $س \to ١$ ، $ص \to$ صفر

$\lim_{ص \to ٠} ٢ م(ص) + \lim_{س \to ١} ع(س) = ٤ + ٢ = ٦$

٩) $\lim_{س \to -٢} (س - ل(س)) = -١٠$

$-٢ - \lim_{س \to -٢} ل(س) = -١٠$

$\lim_{س \to -٢} ل(س) = -٢ + ١٠ = ٨ \Leftarrow$

$\therefore \lim_{س \to -٣} (ق^{٢}(س) - ٢ل(س)) = (\lim_{س \to -٣} ق(س))^{٢} - \lim_{س \to -٣} ٥ل(س)$

$= ١٦ - ١٤$

$= ٢$

١٠) $ق(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} (٤ق(س) + ٣س^{٢}) = \lim_{س \to ٢} ٤ق(س) + \lim_{س \to ٢} ٣س^{٢}$

$= ٤ \times ٥ + ١٦$

$= ٢٠ + ١٦ = ٣٦$

ثالثاً : نهايات اقترانات كسرية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥} = \lim_{س \to -٥} \frac{(س+٥)(س-٢)}{(س+٥)} = -٧$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ١}{س - ٢}$ غ.م

تدريب (٢)

١) $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{٢٥ - س^٢}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \left(\frac{١٠ - ٢س}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س-٥)(س+٥)}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-٢(٥-س)}{٥س} \times \frac{١}{(س-٥)(س+٥)} = \frac{-٢}{٥٢} \times \frac{١}{١٠} = \frac{-٢}{٥٢٠}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س^٢ + ٣٤} - ٦} \times \frac{\sqrt{س^٢ + ٣٤} + ٦}{\sqrt{س^٢ + ٣٤} + ٦}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{س^٢ + ٣٤} + ٦)}{(س^٢ + ٣٤) - ٣٦}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{س^٢ + ٣٤} + ٦)}{(س-٢)} = ١٢$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^٢ + ١} - \sqrt{١ - ٢س^٢}}{س^٢} \times \frac{\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢}}{\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(س^٢ + ١) - (١ - ٢س^٢)}{س^٢ (\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢})}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س^٢}{س^٢ (\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢})} = \frac{٣}{٢}$

تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س - ٢} - ١}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٤}{(س - ٣)(س + ٢)(\sqrt{س - ٢} + ١)}$

$= \frac{١}{٤} = ٢$

ج) $\lim_{س \to ٢^+} \frac{\sqrt{س - ٢}}{\sqrt{س - ٢}}$ ع $\cdot$ لان المقدار غير معرف في العدد ٢

تدريب (٤)

$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{س - ١} \times \frac{(\sqrt[٣]{س + ١})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤}{(\sqrt[٣]{س + ١})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س + ١) - ٨}{(س - ١)((\sqrt[٣]{س + ١})^٢ + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤)} = \frac{١}{١٢}$

$= \frac{١}{٣ + ٣ + ٤} = \frac{١}{١٠}$

تمارين ومسائل

ا) $\lim_{س \to ٧} \frac{(س+١)^{٢} - ١٨}{س - ٧} = \lim_{س \to ٧} \frac{(س+١+٩)(س+١-٩)}{س-٧}$

$= ١٨$

ب) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س} - ٢}{\frac{س}{٤} - ٤} \times \frac{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{\frac{١}{٤}(س-٧)}{(س-٧)} \times \frac{١}{(\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$

$= \frac{١}{١٢} = \frac{-١}{-٤}$

ج) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{(٢+س)^{٢}} - \frac{١}{٤} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{٤ - (٢+س)^{٢}}{٤(٢+س)^{٢}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-(٤+٤س+س^{٢})}{٤(٢+س)^{٢}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-س^{٢}-٤س-٤}{٤(٢+س)^{٢}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{٤} \left(\frac{س+٤}{(٢+س)^{٢}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{٤} \times \frac{(س+٤)}{(٢+س)^{٢}}$

$= \frac{-٤}{١٦} = \frac{-١}{٤}$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{|٣س + ١| - ٥}{س^٢ + ٧} = \lim_{س \to -٢} \frac{٣س + ١ - ٥}{س^٢ + ٧}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)(س - ٤)}{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)} = \frac{-٦}{١٢} = -\frac{١}{٢}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{٦ - س|س + ١|}{٩ - ٣س} \times \frac{٦ + س|س + ١|}{٦ + س|س + ١|}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٣٦ - س^٤(س + ١)}{(٩ - ٣س)(٦ + س|س + ١|)} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٣٦ - س^٤ - س^٥}{٣(٣ - س)(٦ + س|س + ١|)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(-س^٤ - ٤س - ١٢)}{٣(٣ - س)(٦ + س|س + ١|)} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٤ + ٤س + ١٢}{٣(٦ + س|س + ١|)}$

$= \frac{٩ + ١٢ + ١٢}{٣(٦ + ٦)} = \frac{٣٣}{٣٦}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{|س^٢ - ١٠س + ٢٥|}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{|(س - ٥)^٢|}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{|س - ٥|}{س - ٥}$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{س - ٥}{س - ٥} = ١$ ، $\lim_{س \to ٥^-} \frac{٥ - س}{س - ٥} = -١$

اذن $\lim_{س \to ٥} \frac{|س - ٥|}{س - ٥}$ غ.م

ز) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{س - ١}}$ ع٠م لأن البسط والمقام غير يقتربان من الصفر
حتى لو كان العدد ١

ح) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٣س - ٤}{س^٣ - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+٤)}{(س-١)(س^٢+س+١)} = \frac{٦}{٣} = ٢$

ط) $\lim_{س \to ٧^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤٩}}{\sqrt{س - ٧}} = \lim_{س \to ٧^+} \sqrt{\frac{(س-٧)(س+٧)}{(س-٧)}} = \lim_{س \to ٧^+} \sqrt{س+٧} = \sqrt{١٤}$

ي) $\lim_{س \to ٥،٢} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٣ - ٥٢}$ لابد من إيجاد النهاية من اليسار والعدد $٥،٢$

$\lim_{س \to ٥،٢^-} \frac{٢س - [٢س]}{(٢س-٥)(٢س+٥)^٢} = \lim_{س \to ٥،٢^-} \frac{٢س - ٥}{(٢س-٥)(٢س+٥)^٢} = \lim_{س \to ٥،٢^-} \frac{١}{(٢س+٥)^٢} = \frac{١}{١٠}$

$\lim_{س \to ٥،٢} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٣ - ٥٢} = \lim_{س \to ٥،٢^-} \frac{٢س - ٤}{(٢س-٥)(٢س+٥)^٢}$ ... ع٠م

$\therefore \lim_{س \to ٥،٢} \frac{٢س - [٢س]}{٤س^٣ - ٥٢}$ ع٠م

ج) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1+س^2} - \sqrt{1-س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(1+س^2)-(1-س^2)}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})} = \lim_{س \to 0} \frac{2س^2}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2}} = \frac{2}{2} = 1$

٢) بما أن النهاية موجودة $\therefore$ م(٣) + ٥ = صفر $\Leftarrow$ م(٣) = -٥

$\lim_{س \to 2} [م(س) - ٢س + ٣ب] = ٧$

$م(٣) - ٦ + ٣ب = ٧ \Leftarrow -٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ٧ + ١١$

$٣ب = ١٨$

$\Leftarrow ب = ٦$

٣) بما ان النهاية موجودة اذاً

$\lim_{س \to ٣+} م(س) = \lim_{س \to ٣-} م(س)$

$\lim_{س \to ٢+} \frac{٢-س}{٣-س} = -١ \equiv \lim_{س \to ٢-} ٩د - ٤ = ٩د - ٤$

$٩د - ٤ = -١ \Leftarrow ٩د = ٣ \Leftarrow د = \frac{١}{٣}$

٤) لما كان النهاية موجودة

$$أ + 2ب + 4 = 0 \quad \cdots (1)$$

$$أ + 4 + 2ب = 1$$

$$2أ + 4ب = 1 \quad \cdots (2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2)

$$أ = 3 \ ، \ ب = -\frac{5}{2}$$

1	$أ + 2ب$	$2أ + 4ب + 2$
$أ + 4$	$أ + 2ب$	2
$2أ + 4ب + 2$	$أ + 2ب$	$أ + 4$

(1)

٥) $$\lim_{س \to 0} \frac{\ln(1 + 2س)}{1 - 8^{س}} = \lim_{س \to 0} \frac{\ln 8^{س}}{8^{س} - 1}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\ln 8^{س}}{(8^{س} - 1)} \cdot \frac{(8^{س} - 1)}{\ln 8^{س}} = \lim_{س \to 0} \frac{8^{س} - 1}{س \ln 8} = 1$$

٦) بما أن النهاية موجودة

$$\lim_{س \to 3^+} ق(س) = \lim_{س \to 3^-} ل(س)$$

$$\frac{ع^2 - 7ع}{2ع^3 + 6ع + 18} = ع + 5$$

$$\frac{(ع - 3)(ع^2 + 3ع + 9)}{2(ع^3 + 3ع + 9)} = ع + 5$$

$$ع - 3 = 2ع + 10 \Leftarrow -ع = 12 \Leftarrow ع = -12$$

٧) النهاية غير موجودة عند اصفار المقام

$$س^3 - 5س + 6 = 0 \quad (س - 2)(س - ج) = 0$$

$$ج \neq 2 \ ، \ 3$$

٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٤ + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} = ٢ب - ٥$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س+٢)(س-١)}{(س-١)} \cdot \frac{س-١}{ق(س)-٦} = ٢ب - ٥$ بضرب البسط والمقام $\times -١$

$\frac{٤}{٨} = ٢ب - ٥ \Leftarrow \frac{١}{٢} = ٢ب - ٥ \Leftarrow ب = ١$

٩) نجد ان المماسية موجودة اذاً $د(٠) + ٥ = صفر$

$\lim_{س \to ٠} (د(س) - ٥ + ٣ب) = ٢ \Leftarrow -٥ - ٥ + ٢ب = ٢$

$٢ب = ٢ + ١٠$

$ب = ٤$

رابعًا: نهايات اقترانات مثلثية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٧س}{٢س} = \frac{٧}{٢}$

٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا(س-\pi)}{(س-\pi)} = ١$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{٩س}{ظاس} = ٩$

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا٤س}{س} = \frac{٤}{\pi}$

تدريب (٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س - جا٣س + ظا٥س}{٣س - ظا٢س}$ نهاية مجموع اكبر درجة بسط

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - \frac{جا٣س}{س} + \frac{ظا٥س}{س}}{٣ - \frac{ظا٢س}{س} \times ظا٢س} = \frac{١ - ٣ + ٥}{٣} = \frac{٣}{٣} = ١$

تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس}{س^{٢}} = \lim_{س \to 0} \frac{١ - (١ - ٢جا^{٢}\frac{س}{٢})}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢جا^{٢}\frac{س}{٢}}{س^{٢}} = ٢ \lim_{س \to 0} \frac{جا\frac{س}{٢}}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا\frac{س}{٢}}{س}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{جا٨س + جا٤س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا٨س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{جا٤س}{س}$

$= ٨ + ٤ = ١٢$

تدريب (٤)

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا } س}{\left(س - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - س\right)}{\left(س - \frac{\pi}{2}\right)} = -١$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢} س}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢} س\right)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}(١ - س)}{(١ - س)} = \frac{\pi}{٢}$

تمارين ومسائل

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٨س}{٧س} = \frac{٨}{٧}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س + \text{ظا}٢س - \text{جا}س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٢س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$

$= ١ + ٢ - ١ = ٢$

٣) $\lim_{س \to ٠} (\text{قا}س + \text{ظا}٥س) = \lim_{س \to ٠} \text{قا}س + \lim_{س \to ٠} \text{ظا}٥س$

$= ١ + ٠ = ١$

٤) $\lim_{س \to ٠} ٨ - س^{٢} \text{ظتا}^{٢}(٥س) \text{قا}٥س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٨ - س^{٢}}{\text{ظا}^{٢}(٥س)} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا}٥س} = ٨ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{٢}{٥}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - ٢\text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - (\text{جتا}^{٢}س + ١)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٤س - \text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^{٢}} - ٢\text{جا}٣س\text{جا}س$

$= -٦ \times ١ = -٦$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\, س}{س \text{ ظا} س} \times \frac{1 + \text{جتا}\, س}{1 + \text{جتا}\, س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س \text{ ظا} س (1 + \text{جتا}\, س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا}\, س}$

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

٧) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جتا}\, س}{2 س - 2\pi} = \frac{-1}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س - \text{جا} س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س}$

$= 1 - 1 = \text{صفر}$

٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا} س}{(\pi - 2س)^2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا} س}{(\pi - س)^2} \times \frac{1 + \text{جا} س}{1 + \text{جا} س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}^2 س}{4 (\pi - س)^2 (1 + \text{جا} س)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2 س}{4 (\pi - س)^2 (1 + \text{جا} س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\pi - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\pi - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \text{جا} س}$

$= \frac{1}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - 1}{\sin x + \cos x} \times \frac{\sin x + \cos x}{\tan 2x + 1}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x - 1}{\tan 2x + 1} \times \frac{\tan 2x + 1}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \times \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan 2x + 1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin x} + \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \times \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\tan x}$$

$$= 1 + 2 \times \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x + \sin x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{ظا \frac{\pi}{٤}(س-١)}{س^٢-١} = \lim_{س \to ١} \frac{ظا \frac{\pi}{٤}(س-١)}{(س-١)(س+١)} = \frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٨}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{٣س} \times ٣ = ١ \times ٣ = ٣$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س}{\pi - ٢س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(\frac{\pi}{٢} - س)} = \frac{١}{٢}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{٤س} + \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{٢س} = \frac{٣}{٤} + ١ = ١\frac{٣}{٤}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س(ظا ٣س + ظتا ٣س)}{س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{جتا ٣س} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{-جا ٢س}{١ + جتا ٢س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{جتا ٢س + ١}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٢س - ١}{س} \times \frac{١ + جتا ٢س}{١ + جتا ٢س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{-جا^٢ ٢س}{س(١ + جتا ٢س)} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{جتا ٢س + ١}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{-٤جا^٢ س}{س(١ + جتا ٢س)} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٤}{٢} = -٢$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٣س}{س^٢} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١}{١ + جتا ٢س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٢س - ١}{س^٢ جتا ٢س} \times \frac{١ + جتا ٢س}{١ + جتا ٢س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \frac{-جا^٢ ٢س}{س^٢ جتا ٢س (١ + جتا ٢س)}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sin(x+3)}{x^2-16}=\lim_{x\to -3}\frac{\sin(x+3)}{(x+4)(x-4)}=\lim_{x\to -3}\frac{\sin(x+3)}{(x+3)}\times\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-4}$$

$$=1\times\frac{1}{-7}=-\frac{1}{7}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$$

$$=(1-1)\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\frac{1}{0}$$

$\therefore$ غير موجود

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\tan x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=(1-1)\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)}=1$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(3\pi-3x)}{\sin(2\pi-2x)}=\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(3\pi-3x)}{(3\pi-3x)}\cdot\frac{(2\pi-2x)}{\sin(2\pi-2x)}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 4x}{x+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(\frac{5x}{2})\cos(\frac{-3x}{2})}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{5x}{2})}{\frac{5x}{2}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{3x}{2})}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

٢٢) $\frac{م}{ج} = \frac{٣}{١٠-٥} = ٦$ ، $م = ١٢$ ، $ب = \frac{٩}{٤} = \frac{٣^٢}{٢^٢}$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(٢١ - ٣س)}{-٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢(١١ - س)}{-٥س} = -\frac{جا ٢س}{-٥س}$

$= \frac{٢}{٥}$

الفصل الثاني : الاتصال

أولاً : الاتصال عند نقطة .

تدريب (١)

١) $د$ معرّفة عند $س = ٤$ $\quad د(٤) = \frac{|٤-٤|}{٨} = صفر$

احسب نهاية

$\lim_{س \to ٤^+} د(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س-٤}{٤+س} = صفر$

$\lim_{س \to ٤^-} د(س) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤-س}{٤+س} = صفر$

بما أن $\lim_{س \to ٤} د(س) = د(٤) = صفر$ ∴ $د$ متصل عند $س = ٤$

تدريب (٢)

١) $س \in ط$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

٢) $د(س) = [\![\pm س + ٥]\!]$ ، $د(س)$ متصل عند $س = ١$ ولكن غير متصل عند $س = ٢$

(ملاحظة : هناك حلول مختلفة)

تدريب (٣)

بما أن $د$ متصل ∴ $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = \lim_{س \to ٢^-} د(س) = د(٢)$

$٩أ - ٢ب = ٦ \quad ---①$

$٢أ + ب = ٦ \quad ---②$

بحل المعادلتين ينتج $أ = \frac{٦}{٧}$ ، $ب = -\frac{١٢}{٧}$

تدريب (٥)

$$م(س) = \begin{cases} (1+2س)س^2 & ، س \le 1 \\ 3س^2 - |س-1| & ، س > 1 \end{cases}$$

م(س) متصل عند س = 1 لأنها كثيرة حدود

م(س) متصل عند س > 1 لأنها متصلة لأنها كثيرة حدود

اكتب نص الاتصال عند س = 1

$$\text{نهـا}_{س \to 1^+} م(س) \stackrel{؟}{=} \text{نهـا}_{س \to 1^-} م(س) = م(1)$$

$$3 = 2 + 1 = 2$$

∴ م(س) متصل عند س = 1

طريقة (٢)

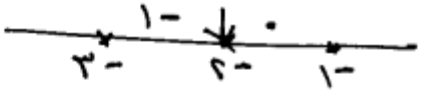
م متصل عند س = 1 لأن $\text{نهـا}_{س \to 1^+} م(س) = \text{نهـا}_{س \to 1^-} م(س) = م(1) = 3$

ل متصل عند س = 1 لأن $\text{نهـا}_{س \to 1^+} ل(س) = \text{نهـا}_{س \to 1^-} ل(س) = ل(1) = 1$

∴ م(س) متصل عند س = 1 (نظرية ٢)

تدريب (٦)

$$م(س) = \begin{cases} (س-5)^2 \times 0 & ، س \le -1 \\ (س-5)^2 \times -1 & ، -2 < س < -1 \end{cases}$$



م(س) غير متصل عند س = -2 لأن:

$\text{نهـا}_{س \to -2^+} م(س) = \text{نهـا}_{س \to -2^-} م(س) = (-2-5)^2 \times -1 = +49$

م(س) متصل عند س = 5 لأن: $\text{نهـا}_{س \to 5^+} م(س) = \text{نهـا}_{س \to 5^-} م(س) = (5-5)^2 \times 6 = 0$ ، م(5) = 0

في $\text{نهـا}_{س \to 5^+} م(س) = \text{نهـا}_{س \to 5^-} م(س) = م(5)$

تمارين ومسائل

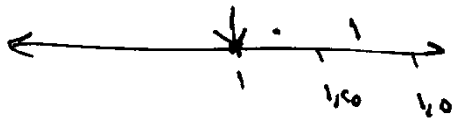
١) $س = -٥$ لأن $\lim_{س \to ٥} م(س) \neq م(٥)$

$س = ١$ لأن $\lim_{س \to ١^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١^-} م(س)$

$س = ٤$ لأن $م(٤)$ غير معرّفة

٣) $\lim_{س \to ١,٥^+} م(س) = ١$

$\lim_{س \to ١,٥^-} م(س) = ٠$



بما أن $\lim_{س \to ١,٥^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١,٥^-} م(س)$ ∴ $م$ غير متصل عند $س = ١,٢٥$

٤) $م$ غير متصل عند $س = ١$ فإن $م(١)$ غير معرّفة

٤) $م$ غير متصل عند $س = ٢$ لأن $م(٢)$ غير معرّفة

٥) $\lim_{س \to ٠^+} م(س) = \lim_{س \to ٠^+} (١ - جتا س) = صفر$

$\lim_{س \to ٠^-} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{|جتا س|}{س} = -١$

بما أن $\lim_{س \to ٠^+} م(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} م(س)$ ∴ $م$ غير متصل عند $س = ٠$

٦) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س-٢}{|س-٢|} =$ غير معرف

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{-(س-٢)}{س-٢} = -١$ ، $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) =$ غير معرف

$ل(٢) =$ غير معرف

بما ان $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ل(س)$ ∴ ل غير متصل عند $س = ٢$

٧) $م(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

بما ان $\lim_{س \to ٢} م(س) \neq م(٢)$ ∴ م غير متصل عند $س = ٢$

٨) $ك(٢) = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

$\lim_{س \to ٢^+} ك(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ك(س) =$ غير معرف

∴ $\lim_{س \to ٢} ك(س)$ غير موجود وعليه ك غير متصل عند $س = ٢$

٩) بما ان ع متصل عند $س = ٢$

فإن $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ع(٢)$

$\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \frac{ج}{٢} + ٤$

$\frac{ج}{٢} + ٤ = ٥ \Leftarrow \frac{ج}{٢} = ١ \Leftarrow ج = ٢$

١٠) $ل(١) = ٤$ ، $\lim_{س \to ١^+} ل(س) = \lim_{س \to ١^+} \frac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س-١)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س-١)}$

$= ١٢$

بما ان $ل(١) \neq \lim_{س \to ١^+} ل(س)$ ∴ ل غير متصل عند $س = ١$

١١) $م(٢) = [٢+٤] = [٦] = ٦$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٦}{ب} + \sqrt{س+٥})$

$= ٣ + ٣ = ٦$

لما ان $\lim_{س \to ٢} م(س) = م(٢)$

$\therefore$ م متصل عند $س = ٢$

١٢) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} ل(س) = ل(٢)$

$-٣ = ٤ + ب \Leftarrow ب = -٧$

١٣) $م(٣) = ٢ \times ٣ + ٥ = ٩ + ٥ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = ٢(٣)^٢ - ٤$

$= ٢ \times ٩ - ٤$

$= ١٤$

لما ان $\lim_{س \to ٣} م(س) = م(٣)$ $\therefore$ م متصل عندما $= ٣$.

ثانياً: الاتصال على فترة

تدريب (١)

د متصل على الفترة $(٥،٢)$ على جموعة كثير حدود.

د متصل على الفترة $(٧،٥)$ على جموعة كثير حدود.

$\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٩$ ، $د(٣) = ٩$

$\lim_{س \to ٥^-} د(س) = ٢٥$ ، $\lim_{س \to ٥^+} د(س) = ٢٥$ ، $د(٥) = ٢٥$

∴ د متصل عند $س = ٥$ وبذلك د متصل على الفترة $[٧،٣]$

$\lim_{س \to ٧^-} د(س) = ٢٧$ ، $د(٧) = ٩$ د غير متصل عند

اذا عند $س = ٧$ فإن د متصل على الفترة $[٧،٣]$

تدريب (٢)

١) د متصل على $ح - \{٥\}$ على جموعة اقتران لأنه كثير حدود

عند $س = ٥$

$\lim_{س \to ٥} د(س) = \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)} = ١٠$

$د(٥) = ٥ + ٥ = ١٠$

وبذلك د متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية ح

تدريب (٣)

أ) عند تعريف الاقتران د.

د متصل على $(٠،١ - أ، ٠)$ على جموعة كثير حدود.

$د = \begin{cases} أ - س & ٠،١ - أ \leq س \leq أ \\ س - أ & أ \leq س \leq ٩،٠ \end{cases}$

د متصل على $(٠،١ - أ، ٩،٠)$ على جموعة كثير حدود.

عند نقطة الكوّلب.

$\lim_{س \to او^+} \frac{ه(س) - ه(او)}{س - او} = \lim_{س \to او^+} \frac{س - او}{س - او} = 1$

$\lim_{س \to او^-} \frac{ه(س) - ه(او)}{س - او} = \lim_{س \to او^-} \frac{-(س - او)}{س - او} = -1$

$ه(او) = 0$

$\therefore$ ه متصل عند $س = او$

عند الأطراف:

$\lim_{س \to 1.و^+} ه(س) = او - 1.و = 0.9\,و$ ، $ه(1.و) = 0.9\,و$

$\therefore$ ه متصل على يمين العدد 1.و .

$\lim_{س \to 9و^-} ه(س) = 9و - او = 1\!\!1\,و$ ، $ه(9و) = 9و - او$

$س \to 9و^-$

$\therefore$ ه متصل على يسار العدد 9 و

$\therefore$ ه متصل على الفترة $[1.و \ ، \ 9و]$

تدريب (٤)

بما أنه الاقتران ع متصل على الفترة $[-\pi \ ، \ \pi]$ $\therefore$ ع متصل عند $س = 0$

$\therefore \lim_{س \to 0^+} ع(س) = \lim_{س \to 0^-} ع(س) = ع(0)$

$ب(2+0) = \lim_{س \to 0^-} \frac{جا 2س}{5س} = \frac{2}{5}$

$\frac{2}{5} = 2 \Leftarrow$ ، $\boxed{ب = 1}$ $\boxed{ا = 10}$

تمارين ومسائل

١) $ه$ متصل على الفترة $(-٢،١)$ على صورة كثير حدود ـ

$ه$ متصل على الفترة $(١،٢)$ على صورة كثير حدود ـ

عند نقطة التحوّل

$\text{نهـا}_{س \to ١^+} ه(س) = ٨$ ، $\text{نهـا}_{س \to ١^-} ه(س) = ٣+٥ = ٨$

$ه(١) = ٨$

$\therefore ه$ متصل عند $س = ١$

عند الأطراف :

$\text{نهـا}_{س \to -٢^+} ه(س) = ١٧$ ، $ه(-٢) = ١٧$

$\therefore ه$ متصل على مجموعة العدد -٢

$\text{نهـا}_{س \to ٢^-} ه(س) = ١٦$ ، $ه(٢) = ١٦$

$\therefore ه$ متصل على مجموعة العدد ٢

ومنه $ه$ متصل على الفترة $[-٢،٢]$

٢) أكمل تعريف الاقتران ل

$$ل(س) = \begin{cases} ٢س - ١٠ & ٥ \leq س < ٨ \\ ١٠ - ٢س & ١ \leq س < ٥ \end{cases}$$

ل متصل على الفترة $(٥،٨)$ والفترة $(-١٠،٥)$ على صورة كثير حدود

عند نقطة التحوّل

$\text{نهـا}_{س \to ٥^+} ل(س) = ص$ ، $\text{نهـا}_{س \to ٥^-} ل(س) = ص$. $ل(٥) = ص$

$\therefore ل$ متصل عند $ص = ٥$

عند الأطراف :

$\lim_{س \to -١٠^+} م(س) = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$ ، $م(-١٠) = ٢٠$

∴ م متصل على يمين العدد -١٠

$\lim_{س \to ٨^-} م(س) = ١٦ - ١٠ = ٦$ ، $م(٨) = ٦$

∴ م متصل على يسار العدد ٨

وهذا م متصل على الفترة $[-١٠، ٨]$

(٣) ع متصل على الفترة $(-٣، ٥)$ على مجموعة اقتران نسبي معرف على مجاله

ع متصل على الفترة $(٣، ٥)$ على مجموعة اقتران كثير حدود.

عند $س = ٣$

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ع(س) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٣ - ٧س + ٦}{٢ - س} =$

$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س - ١)(س - ٢)(س + ٣)}{(٢ - س)(٣ + س)}$

$= -٢٧$

بما أن $\lim_{س \to ٣^+} ع(س) \neq \lim_{س \to ٣^-} ع(س)$ ∴ ع غير متصل عند $س = ٣$

وهذا ع متصل على $ح - \{٣\}$

(٤) ل متصل على الفترة $(-٥، ٤)$ حيث ك ثابت معرف

ل متصل على الفترة $(٤، ٥)$ متصل (ليس مطلقاً)

عند نقطة التحول $س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^+} ل(س) = \lim_{س \to ٤^-} ل(س) = ل(٤)$ ، $\lim_{س \to ٤^+} ل(س) = \lim_{س \to ٤^-} ل(س)$

∴ ل متصل عند س = ٤

ومنه ل متصل على الفترة $(-\infty, \infty)$

٥) $\lim_{س \to ٤^+} ع(س) = ٨$ ، $ه(٤) = ٤$

∴ ع غير متصل عند س = ٤ من جهة اليسار

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٨$ ، $ه(٣) = ٥$

∴ ع غير متصل عند س = ٣ من جهة اليمين

ع متصل على الفترة $(٤, ١٣)$ على جموعة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية

ومنه ع متصل على الفترة $(٤, ١٣)$

٦) ه متصل على الفترة $(٠, ٣)$ اقتران جذره معرّف على مجاله

في الفترة $(٣, ٦)$ يوجد نقطة تحوّل عند س = ٤

$\lim_{س \to ٤^+} ه(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٤^-} ه(س) = ٢$

∴ ه غير متصل عند س = ٤

عند الطرف

$\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = ١$ ، $ه(٠) = ١$

∴ ه متصل على يمين العدد ٠

$\lim_{س \to ٦^-} ه(س) = ٣$ ، $ه(٦) = ٣$

∴ ه متصل على يسار العدد ٦

ومنه ه متصل على الفترة $[٠, ٦] - \{٤\}$

٧) بما ان الاقتران ع متصل :

$$\text{بما } \lim_{س \to ٤^+} ع(س) = ٧$$

$$\text{بما } \lim_{س \to ٤^+} \frac{س^٢ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ}{س-٢} = ٧$$

بما ان المقام معطوف : $(س-٢)$ عامل من عوامل البسط

$$\text{بما } \lim_{س \to ٤^+} \frac{(س^٢ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ)}{س-٤} = \text{بما } \lim_{س \to ٤^+} \frac{(س-٢)(س + ٢ + ٢(هـ-١))}{(س-٢)} = ٧$$

$$٢ + ٢ + ٢(هـ-١) = ٧$$

$$٢(هـ-١) = ٣$$

$$هـ - ١ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \boxed{هـ = \frac{٥}{٢}}$$

٨) ع متصل على الفترة $(-\infty، ٢)$ ع لها قيمة حدية

ع متصل على الفترة $(٤، ٢)$ اقتران خطي

ع متصل على الفترة $(٤، \infty)$ اقتران نسبي معرف على مجاله.

(أي يبقى المقام $\neq ٠$) $س^٢ = ٣٦ \leftarrow س = \pm ٦$ ، $-٦ \notin (٤، \infty)$ ، $٦ \in (٤، \infty)$

عند الطرف

$$\text{بما } م(س) = ٤ \quad م(٢) = ٣ \quad \therefore م \text{ غير متصل عند } س = ٢$$

$$\text{بما } م(س) = ٣ \quad ، \text{ بما } م(س) = \frac{٢٠}{٢٦-١٦} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$$

$\therefore م$ غير متصل عند $س = ٤$

$\therefore م$ متصل على $ح - \{٢، ٤، ٦\}$

٩) في الفترة $(-١،٠)$ $هـ$ متصل لأنها مجموعة كثير حدود $(-١+س)$
في الفترة $(٠،٢)$ $هـ$ متصل (مجموع اقترانين متصلين)

نقطة التحول $س = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = صفر$ ، $\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = -١$

$\therefore هـ$ غير متصل عند $س = ٠$

الأطراف :

$\lim_{س \to -١^+} هـ(س) = -٢$

$هـ(-١) = -٢$

$\Downarrow$

$هـ$ متصل على يمين العدد -١

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = \frac{١٢}{٥} + ٢$

$هـ(٢) = \frac{١٢}{٥} + ٢$

$\Downarrow$

$هـ$ متصل على يسار العدد ٢

وعليه $هـ$ متصل على الفترة $[-١،٢] - \{٠\}$

١٠) يكون الاقتران السببي متصلاً لجميع الأعداد الحقيقية
إذا كانت المميز $ب^٢ - ٤أجـ < ٠$
للمقام

$١ - ٤ \times ٩ \times ٣ < ٠$

$١ - ٩١٢ < ٠ \Leftarrow ١ < ٩١٢$

ضم $م$ التي تحقق المتباينة $م < \frac{١}{١٢}$

أسئلة الوحدة

١) أ) $\lim_{س \to 0^+} ق(س) = 2$

ب) $\lim_{س \to 0^-} ق(س) = -2$

ج) $\lim_{س \to 3} ق(س) = 2$

د) $\lim_{س \to 4} ق(س) = 4$

هـ) $م = \{0, 2\}$

و) $ن = \{0, 2, 4\}$

٢) اطرح $2س + 1 = ص$ ، $س \to 1$ ، $ص \to 3$

$\lim_{ص \to 3} ه(ص) - \lim_{س \to 1} س + 2 = 16 + 1 = 17$

٣) بما أن النهاية موجودة

$\therefore \lim_{س \to 2^+} ق(س) = \lim_{س \to 2^-} ق(س)$

$-1 = 4 - 5د$

$5د = 3 \Leftarrow د = \frac{1}{2}$

٤) حتى تكون النهاية موجودة $\therefore (س-2)$ عامل من عوامل البسط

$0 = 4 + (3 + م) \times 2 + م$

$0 = 4 + 12 + 6 + م$

$0 = 3 + 13 + م \Leftarrow م = -10$

٥) بما أن $\lim_{س \to ٥} م(س)$ موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٥^+} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} م(س)$

$$\lim_{س \to ٥^+} \frac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} = \lim_{س \to ٥^+} \frac{(س-٥)(س+١)}{(س-٥)} = ٦$$

$س^٢ - ٤س - ٥$		$س^٢ + ٤س + ٥$		$س^٢ - ٤س - ٥$
	٥		-١	

$\lim_{س \to ٥^-} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} ٩ جتا \frac{\pi}{٥} س + ٥ = ٦$

$= -٩ + ٥ = ٦ \Leftarrow$ **$٩ = -١$**

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{١ - جتا٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{(١ - جتا٢س)} \times \frac{س + جاس}{س + جاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - جا^٢س}{١ - (١ - ٢جا^٢س)} \times \frac{١}{س + جاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - جا^٢س}{٢جا^٢س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س + جاس}$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \times ١ \times \frac{١}{٢}$

$= صفر$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٢ جاس} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{١}{جاس} - \frac{جاس}{س} \right)$

$= \frac{١}{٠} - ١ = صفر$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٢ جاس} = صفر$

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{س + \sin 2س}{3س} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{س}{3س} + \frac{\sin 2س}{3س} \right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{3س} + \lim_{س \to 0} \frac{\sin 2س}{3س} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

ج) $\lim_{س \to 1} \frac{1}{(1-س)} \left(\frac{1}{لا س} - 1 \right) = \lim_{س \to 0} \frac{1}{س - 1} \left[\frac{1 - لا س}{لا س} \right]$

$= \lim_{س \to 1} \frac{1}{(لا س)(لا س + 1)} \cdot \frac{(1 - لا س)}{لا س} = \frac{-1}{2}$

د) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 3س}{\sqrt{لا س + 1} - 1} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)}{س - 1 - \sqrt{لا س + 1}}$ بالضرب بمرافق المقام

$= \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)}{س - 1 - \sqrt{لا س + 1}} \times \frac{س - 1 + \sqrt{لا س + 1}}{س - 1 + \sqrt{لا س + 1}} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)\left[س - 1 + \sqrt{لا س + 1} \right]}{(س-1)^2 - (لا س + 1)}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)\left[س - 1 + \sqrt{لا س + 1} \right]}{س^2 - 2س + 1 - لا س - 1} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)\left[س - 1 + \sqrt{لا س + 1} \right]}{س(س-3)}$

$= 4 = \frac{12}{3}$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظا}^2(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)^2} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} + كاس)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}} \times \frac{(\frac{1}{2} + 2)}{1} = -\frac{1}{12} \times 2 + \frac{1}{12} = -\frac{2}{12} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{6}$$

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س - 1}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س - 1}{س^2 \text{جتا}^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{-(1 - \text{جتا}^2 س)}{س^2 \text{جتا}^2 س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2 \text{جتا}^2 س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{\text{جتا}^2 س}$

$= 2$

ج) $\lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} + هـ) - \text{جتا}\frac{\pi}{2}}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{-2 \text{جا}(\frac{\pi}{4} + \frac{هـ}{2}) \text{جا}(-\frac{هـ}{2})}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} -2 \times \text{جا}(\frac{\pi}{4} + \frac{هـ}{2}) \times \frac{\text{جا}(-\frac{هـ}{2})}{هـ} = -2 \times \text{جا}\frac{\pi}{4} \times -\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ملاحظة: يمكنك حل السؤال أيضا باستخدام تعريف المشتقة)

د) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}3س - \text{جتا}5س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{-2 \text{جا}4س \text{جا}(-س)}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2 \text{جا}4س \text{جا}س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}4س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س}$

$= 4$

١) بالضرب على مقام بكسر اكبر

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٤س^{٢}}{س} - \frac{ط\,ب\,س}{س}}{\frac{ب\,س}{س} - \frac{ط\,٤\,س}{س}} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{-ب}{ب - ٤} = \frac{١}{٤} \Leftarrow -٤ب = ب - ٤$$
$$-٥ب = -٤ \Longrightarrow ب = \frac{٤}{٥}$$

$$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ٢}$$ اعد في الضابط عند س = ٢

$$\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^{+}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^{+}} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)} = ٤$$

$$\lim_{س \to ٢^{-}} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^{-}} \frac{٤ - س^{٢}}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^{-}} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(س - ٢)} = -٤$$

م غير متصل عند س = ٢

$$\lim_{س \to ٢^{+}} ع(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} [٥و\,س + ٢] = ٤$$
$$\lim_{س \to ٢^{-}} ع(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} \frac{١}{س^{٣}} - ١ = -\frac{٧}{٨}$$

∴ ع(س) غير متصل عند س = ٢

ع غير متصل عند س = ٣

$$\lim_{س \to -٢^{+}} ل(س) = \lim_{س \to -٢^{+}} -٦س - [س] = -٢$$

$$\lim_{س \to -٢^{-}} ل(س) = \lim_{س \to -٢^{-}} \frac{٩ - س^{٢}}{|٢س + ١|} = \lim_{س \to -٢^{-}} \frac{(٣ - س)(٣ + س)}{-(٢س + ١)}$$

$$= \frac{(٣ + ٢)(٣ - ٢)}{-(٢ \times -٢ + ١)} = -(٥ \times \frac{١}{٣}) = -٢$$

$$ل(-\frac{١}{٢}) = -٢ \quad \therefore$$ ل متصل عند $س = -\frac{١}{٢}$

١١) ع(س) = $\sqrt{س+١}$ متصل على الفترة (٢،١) افترض جدلا عكس ما هو معرف على مجاله.

ابحث في اتصال ع على يسار العدد ٣

$\lim_{س \to ٣^-}$ ع(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ $\sqrt{س+١}$ = $\sqrt{٣}$

ع(٣) = $\sqrt{[٣]+٢}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

بما أن $\lim_{س \to ٣^-}$ ع(س) ≠ ع(٣) ∴ ع غير متصل على يسار العدد ٣

وهذا ع متصل على الفترة (٢،١)

١٢) هـ متصل على الفترة (-∞،١) على مجموعة كثيرة حدود.

هـ متصل على الفترة [١،∞) لأنه حاصل قسمة كثيرة حدود بافتراض جدلا عكس ما هو معرف مجاله مطروح منها ١.

ابحث في اتصال هـ عند س = ١

$\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ س + ١ - ١ = ١

$\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ $س^٢$ = ١

∴ $\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س)

فنهايا هـ(س) = هـ(١) = ١
س→١

وهذا هـ(س) متصل عند س = ١

هـ(س) متصل على ح.

١٣) $م$ متصل على الفترة $(-٢، -١)$ على مجموعة اقتران $س$ معرّف على مجاله

اثبت بأن اتصال $م$ على الفترة $(-١، ١)$

يوجد نقطة تشعب عند $س = ٠$

$م$ متصل على الفترة $(-١، ٠)$ على مجموعة كثير حدود

$م$ متصل على الفترة $(٠، ١)$ على مجموعة كثير حدود

اثبت بأن الاتصال عند $س = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} م(س) = ٠$

$م(٠) = ٠$ ∴ $م$ متصل عند $س = ٠$ وعليه $م$ متصل على $(-١، ١)$

عند نقطة التشعب $س = -١$

$\lim_{س \to -١^+} م(س) = \lim_{س \to -١^+} [س] = -١$

$\lim_{س \to -١^-} م(س) = \lim_{س \to -١^-} \frac{س^٢ - ١}{س + ٢} = \lim_{س \to -١^-} (س - ١) = -٢$

∴ $م$ غير متصل عند $س = -١$

عند الطرف $س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^+} م(س) \stackrel{؟}{=} م(-٢)$

$\lim_{س \to -٢^+} \frac{س^٣ - ١}{س + ٢} = \lim_{س \to -٢^+} \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س + ١)} = -٣$

$م(-٢) = -٣$

∴ $م$ متصل عند $س = -٢$ من جهة اليمين

وعليه $م$ متصل على الفترة $[-٢، ١) - \{-١\}$

١٤) $ل \times و =$ { 0 ، $س < 1$ ؛ $\frac{س-1}{س+2}$ ، $1 \leq س < 2$ ؛ $1{,}5$ ، $س = 2$

$ل \times و$ متصل على الفترة $(1{,}0)$ لأنها كثير حدود

$ل \times و$ متصل على الفترة $(2{,}1)$ لأنها ناتج قسمة اقترانين كثيرين مقام المجال المشتق لا يساوي الصفر عند نقط التحول

عند $س = 1$

$\lim_{س \to 1^+} ل \times و = صفر$ ، $\lim_{س \to 1^-} ل \times و = صفر$ ، $ل \times و(1) = 0$

$\therefore ل \times و$ متصل عند $س = 1$

عند الأطراف

$\lim_{س \to 0^+} ل \times و = 0$ ، $ل \times و(0) = 0$ $\therefore ل \times و$ متصل لأن تعريفه الصفر

$\lim_{س \to 2^-} ل \times و = \lim_{س \to 2^-} \frac{س-1}{س+2} = \frac{3}{4}$ ، $ل \times و(2) = 1{,}5$

بما أن $\lim_{س \to 2^-} ل \times و \neq ل \times و(2)$ $\therefore ل \times و$ غير متصل عند

العدد 2 وعليه $ل \times و$ متصل على الفترة $[0{,}2)$

(١٥

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ب	ب	ب	د	ب	د	ب	د	ب	ن
٢٢	١٢	١٨	{٤،٣،٢}	جـ	٩	٥	{٣،١،٥}	٤	(٢،٥)

رياضيات / العلمي / ف1

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثانية

(التفاضل)

الوحدة الثانية : التفاضل /علمي

الفصل الأول : معدّل التغير والمشتقات

أولاً : معدّل التغير

تدريب (١)

١) $\Delta س = ٣,٧ - ٤ = -٠,٣$

٢) $\Delta س = ن + ١ - ن = ١$

تدريب (٢)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٢,١) - هـ(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{٥ - (٢,١)^٢ - (٥ - ٢^٢)}{٠,١}$$

$$= \frac{-٠,٤١}{٠,١} = -٤,١$$

تدريب (٣)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٥) - هـ(٣)}{٥ - ٣} = \frac{-١ - ٠}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

تدريب (٤)

$$ع = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٣} = \frac{٥٢ - ١٩}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$$

تدريب (٥)

معدّل التغير $= ظا ١٣٥^\circ = -١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\Delta ص = هـ(٤) - هـ(٣) = ١٢ - ٦ = ٦$

ب) $\Delta ص = هـ(٢ + هـ) - هـ(٢) = (٢ + هـ)^٢ - (٢ + هـ) - (٢^٢ - ٢)$

$= ٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٢ - هـ - ٤ + ٢ = هـ^٢ + ٣هـ$

(٢) معدّل التغير $= \frac{هـ(١ + هـ) - هـ(١)}{هـ} = \frac{(١ + هـ)^٣ - ٣ - (١ - ٣)}{هـ}$

$= \frac{١ + هـ^٣ + ٣هـ - ٣ - ١ + ٣}{هـ} = هـ + ٣$

(١٦)

تدريب (٦)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص(٤) - ص(١)}{٤ - ١} = \frac{(١٢ - ص(٤) + ٢) - (٣ - ص(١) + ٢)}{٣}$$

$$= \frac{(١٢ + ٢ - ٣ - ٢) - (ص(٤) - ص(١))}{٣} = \frac{٩}{٣} - \frac{ص(٤) - ص(١)}{٣}$$

$$= ٣ - ٦ = -٣$$

(٤)

(٣) $س = ٢ - ١٠ = ١٫٩$

$ص = ٥ - ٦٠ = ٤٫٤$

النقطة $P(١٫٩ ، ٤٫٤)$

(٤) نفرض طول ضلع المربع $س$ وحدة $\Rightarrow$ مساحته $= س^٢$

معدّل التغير $= \frac{م(١٫٦) - م(٦)}{١٫٦ - ٦} = \frac{٢١٫٧٦ - ٣٦}{١٠}$

$= \frac{٢١٫٧٦}{١٠} = ١٫٢١$ سم^٢

(٥) معدّل التغير $= \frac{م(٢) - م(-١)}{٢ - (-١)} = \frac{٤ \times ٤ - ٣ م(٢) - (٤ \times ١ - ٣ م(-١))}{٣}$

$= \frac{١٦ - ٤ - ٣(م(٢) - م(-١))}{٣} = \frac{١٢}{٣} - ٣ \times \frac{م(٢) - م(-١)}{٣}$

$= ٤ - ٣ \times ٥ = -١١$

(٦) أ) $\bar{ع} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٣٠٠ - ١٢٥ - (١٠٠ - ١٢٥)}{٣}$

$= \frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣} = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥$

ب) $ع = \frac{ف(٥ن) - ف(٠)}{٥ن} = \frac{٦٠ ٥ن - ٥(٥ن)^٢}{٥ن}$

$= \frac{٥ ٥ن (١٢ - ٥ن)}{٥ن} = ٥(١٢ - ٥ن)$

(٧) معدّل التغير $= \frac{ص(٤) - ص(١)}{٤ - ١} = \frac{م^٢(٤) - م^٢(١)}{٣}$

$= \frac{(م(٤) - م(١))(م(٤) + م(١))}{٣}$

$= \frac{م(٤) - م(١)}{٣} \times (م(٤) + م(١)) = ٣ \times ٢ = ٦$

(٢)

٨) $\frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٩-٥} = ١٤$ ، $هـ(٩)-هـ(٥) = ٥٦$

$\frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٥-٢} = ٧$ ، $هـ(٥)-هـ(٢) = ١٢$

معدّل التغير $= \frac{هـ(٩)-هـ(٢)}{٩-٢} = \frac{هـ(٩)-هـ(٥)+هـ(٥)-هـ(٢)}{٧}$

$= \frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٧} + \frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٧} = \frac{٥٦}{٧} + \frac{١٢}{٧} = ١١$

٩) معدّل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = ظا\frac{٣}{٤}\pi$

$هـ(٤)-هـ(١) = -١$ ، $هـ(١) = ٥$

١٠) معدّل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = \frac{[٤+١]-١٠-١٣}{٣}$

$= \frac{٥-١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

١١) $هـ(س) = \frac{١}{س^٢+س}$ ، $س \neq ٠$

مقدار التغير $= هـ(س_٢)-هـ(١) = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} = \frac{١}{٦}$ ، $س_٢^٢+س_٢ = ٦$

$س_٢^٢+س_٢-٦ = ٠$ ، $(س_٢+٣)(س_٢-٢) = ٠$

إذن $س_٢ = ٢$ ، -٣ يحل

١٢) ميل $\overleftrightarrow{ل م}$ $= \frac{١٠-٢}{٥-١} = ٢$

ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$

ثانياً : المشتقة الأولى

التدريبيات

(١) $\text{قـ}'(-1) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{قـ}(-1+\text{هـ}) - \text{قـ}(-1)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{(-1+\text{هـ})^3 + 2(-1+\text{هـ}) - (-3)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}^3 - 3\text{هـ}^2 + 3\text{هـ} - 1 - 2 + 2\text{هـ} + 3}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(\text{هـ}^2 - 3\text{هـ} + 5)}{\text{هـ}} = 5$

٢) نفرض $5\text{هـ} = \text{ل}$ ومنه $\text{هـ} = \frac{\text{ل}}{5}$ ، ل $\to$ ٠ عندما هـ $\to$ ٠ .

$\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{قـ}(0) - \text{قـ}(5\text{هـ})}{3\text{هـ}} = \lim_{\text{ل}\to 0} \frac{\text{قـ}(0) - \text{قـ}(\text{ل})}{\frac{3\text{ل}}{5}}$

$= -\frac{5}{3} \lim_{\text{ل}\to 0} \frac{\text{قـ}(\text{ل}) - \text{قـ}(0)}{\text{ل}} = -\frac{5}{3}\,\text{قـ}'(0) = -\frac{30}{3} = -10$

(٣) $\text{قـ}'(2) = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{قـ}(\text{س}) - \text{قـ}(2)}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+1} - \frac{2}{3}}{\text{س} - 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\frac{3\text{س} - 2(\text{س}+1)}{3(\text{س}+1)}}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{3\text{س} - 2\text{س} - 2}{3(\text{س}+1)(\text{س}-2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س} - 2}{3(\text{س}+1)(\text{س}-2)} = \frac{1}{9}$

(٤) $\text{قـ}'(-1) = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{قـ}(\text{س}) - \text{قـ}(-1)}{\text{س} - (-1)} = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4\text{س} + 1 - (-3)}{\text{س} + 1}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4\text{س} + 4}{\text{س} + 1} = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4(\text{س}+1)}{\text{س}+1} = 4$

س = ١ نقطة تفرع

$\text{قـ}'_-(1) = \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{\text{قـ}(\text{س}) - \text{قـ}(1)}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{4\text{س} + 1 - 5}{\text{س} - 1}$

$= \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{4(\text{س} - 1)}{\text{س} - 1} = 4$

$\text{قـ}'_+(1) = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\text{قـ}(\text{س}) - \text{قـ}(1)}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{2\text{س} + 3 - 5}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{2(\text{س}-1)}{\text{س} - 1} = 2$

قـ (١) غير موجودة لأن $\text{قـ}'_-(1) \neq \text{قـ}'_+(1)$

(٤) $\text{نها}_{س \to ٤} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(٤)}{س - ٤} = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{\frac{٤}{س} - \frac{٤}{٤+٧س_{٢}}}{س - ٤}$ (٤)

$= \text{نها}_{س \to ٤} \frac{٤ + ٧س_{٢} - ٤س}{٤(٤+٧س_{٢})(س-٤)} = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{٧س_{٢} - ٤س}{٤(٤+٧س_{٢})(س-٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \frac{س(٧س - ٤)}{٤(٤+٧س_{٢})(س-٤)} = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{س(٧س-٤)}{٤(٤+٧س_{٢})(س-٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \frac{س(٧س-٤)}{٤(٤+٧س_{٢})(س-٤)} = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{س(٧س-٤)}{٤(٤+٧س_{٢})(س-٤)}$

$= \frac{(٤+٧س_{٢})_{٢}}{٧ - س_{٢}}$

تمارين وصائل

(١) P) $\text{ق}'(٢) = \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{\text{ق}(٢+ص) - \text{ق}(٢)}{ص} = \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{٧ - ٥(٢+ص) - (-٨)}{ص}$

$= \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{٨ - ١٥ - ٥ص + ٨}{ص} = \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{-٥ص}{ص} = -٥$

ن) $\text{ق}'(-١) = \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{\text{ق}(-١+ص) - \text{ق}(-١)}{ص} = \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{(-١+ص)^{٣} + (-١+ص)^{٢} - ٠}{ص}$

$= \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{ص^{٣} - ٣ص^{٢} + ٣ص - ١ + ١ - ٢ص + ص^{٢}}{ص} = \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{ص^{٣} - ٢ص^{٢} + ص}{ص}$

$= \text{نها}_{ص \to ٠} \frac{ص(ص^{٢} - ٢ص + ١)}{ص} = ١$

ج) $\text{ل}'(٥) = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{\text{ل}(س) - \text{ل}(٥)}{س - ٥} = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٨س - ١} - ٦}{س - ٥}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{(س-٥)(\sqrt{٨س-١}+٦)} \times \frac{\sqrt{٨س-١}+٦}{\sqrt{٨س-١}+٦} = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(\sqrt{٨س-١}+٦)}{س - ١ - ٤}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(\sqrt{٨س-١}+٦)}{(س-٥)} = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{(\sqrt{٨س-١}+٦)}{١} = \frac{١}{٣}$

تدريب (٥)

نفرض طول ضلع المربع س وحدة طول ، م(س)

فيكون م(س) = س^{٢}

$$م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع + س) = ٢س$$

م'(٠.٥) = ٢ × ٠.٥ = ١ وحدة مربعة / ث

(٥)

د) $ق(٠)$ ، $ق(٦)$ غير موجودة لأنه $س = ٠$ ، $س = ٦$ طرفي فترة.

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$ق'(٣) = \lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)}{س - ٣} = ٥$$

$$ق'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥س - ٩ - ٦}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥(س - ٣)}{س - ٣} = ٥$$

$ق(٣) = ٥$ لأنه $ق'_+(٣) = ق'(٣) = ٥$

هـ) نعيد تعريف $ق(س)$

$$ق(س) = \begin{cases} -س^٢ - ٤ & س < -٢ \\ ٤ - س^٢ & -٢ \le س \le ٢ \\ س^٢ - ٤ & س > ٢ \end{cases}$$

$$ق'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٤ - س^٢ - ٣}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{-(س^٢ - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{-(س - ١)(س + ١)}{س - ١} = -٢$$

$س = ٢$ نقطة تفرع

$$ق'(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢ - ٠}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} -(٢ + س) = -٤$$

$$ق'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤ - ٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٤$$

$ق(٢)$ غير موجودة لأنه $ق'_+(٢) \neq ق'(٢)$

و) $ق(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{ق(س) - ق(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{\frac{س}{س + ٣} - (-١)}{س + ١} + \lim_{س \to -١} \frac{\frac{س + ٣ + س}{س + ٣}}{س + ١}$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{٢س + ٣}{(س + ١)(س + ٣)} = \lim_{س \to -١} \frac{٢(س + ١)}{(س + ١)(س + ٢)} = \frac{٣}{٢}$$

٢) أ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{د(ع)} - \text{د(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^٢ - \frac{٤}{\text{ع}} - (\text{س}^٢ - \frac{٤}{\text{س}})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{\text{س ع}^٣ - ٤\text{س} - \text{ع س}^٣ + ٤\text{ع}}{\text{ع س}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع س}(\text{ع}^٢ - \text{س}^٢) - ٤(\text{س} - \text{ع})}{\text{ع س}(\text{ع} - \text{س})} = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع س}(\text{ع} + \text{س}) + ٤)}{\text{ع س}(\text{ع} - \text{س})}$

$= \frac{٢\text{س}^٣ + ٤}{\text{س}^٢}$

ب) $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{د(ع)} - \text{د(س)}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{٢\text{ع} - ٦} - \sqrt{٢\text{س} - ٦}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{٢\text{ع} - ٦} - \sqrt{٢\text{س} - ٦}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{٢\text{ع} - ٦} + \sqrt{٢\text{س} - ٦}}{\sqrt{٢\text{ع} - ٦} + \sqrt{٢\text{س} - ٦}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(٢\text{ع} - ٦) - (٢\text{س} - ٦)}{(\text{ع} - \text{س})(\sqrt{٢\text{ع} - ٦} + \sqrt{٢\text{س} - ٦})} = ٢\lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع} - \text{س}}{(\text{ع} - \text{س})(\sqrt{٢\text{ع} - ٦} + \sqrt{٢\text{س} - ٦})}$

$= ٢\lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{١}{\sqrt{٢\text{ع} - ٦} + \sqrt{٢\text{س} - ٦}} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢\text{س} - ٦}} = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س} - ٦}}$

٣) أ) $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س} - \text{هـ})}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د(س)} + \text{د(س)} - \text{د}(\text{س} - \text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د(س)}}{\text{هـ}} + \lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{د(س)} - \text{د}(\text{س} - \text{هـ})}{\text{هـ}}$ ← بفرض م = −هـ

$= \text{د}'(\text{س}) + \lim\limits_{\text{م}\to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{م}) - \text{د(س)}}{\text{م}} = \text{د}'(\text{س}) + \text{د}'(\text{س})$

$= ٢\,\text{د}'(\text{س})$

ب) $\lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع د(س)} - \text{س د(ع)}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع د(ع)} - \text{ع د(س)} + \text{ع د(ع)} - \text{س د(ع)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع د(ع)} - \text{س د(ع)}}{\text{ع} - \text{س}} + \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع د(س)} - \text{ع د(ع)}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{د(ع)}(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}} - \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}(\text{د(ع)} - \text{د(س)})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \text{د(ع)} - \lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \text{ع} \,.\, \text{د}'(\text{س}) = \text{د(س)} - \text{س د}'(\text{س})$

السؤال (٢)

ص) $\frac{د ص}{د س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{مد}(ع) - \text{مد}(س)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^3 - س^3}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^2 + ع س + س^2)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} (ع^2 + ع س + س^2) = ٣ س^2$

ك) $\frac{د ص}{د س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{مد}(ع) - \text{مد}(س)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع^2} + \sqrt{ع}\sqrt{س} + \sqrt{س^2}}{\sqrt{ع^2} + \sqrt{ع}\sqrt{س} + \sqrt{س^2}}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt{ع^2} + \sqrt{ع}\sqrt{س} + \sqrt{س^2})} = \frac{١}{٣ \sqrt{س^2}}$

(٧) $\lim_{س \to ج} \frac{ج^٢ \ln(ج) - ٢س \ln(س)}{ج - س} = \lim_{س \to ج} \frac{٢ج \ln(ج) - ٢س \ln(س)}{ج - س} \times \frac{ج + س}{ج + س}$

$= ٢ \lim_{س \to ج} \frac{ج \ln(ج) - س \ln(س)}{ج - س} + ٢ \lim_{س \to ج} \frac{\ln(س)(ج - س)}{ج - س}$

$= ٢ س \ln(س) + ٢ \ln(س)$

٤) $\lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥ + ٤ه)}{ه} = \lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥) + \ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥ + ٤ه) - \ln(٥)}{ه}$

$= - \lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ + ٤ه) - \ln(٥)}{ه} + \lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥)}{ه}$

نفرض $٤ه = م$ ومنه $ه \to ٠ \Leftarrow م \to ٠$ ، نفرض $-٢ه = ل$ ومنه $ه \to ٠ \Leftarrow ل \to ٠$

$= - \lim_{م \to ٠} \frac{\ln(٥ + م) - \ln(٥)}{\frac{م}{٤}} + \lim_{ل \to ٠} \frac{\ln(٥ + ل) - \ln(٥)}{-\frac{ل}{٢}}$

$= -٤ \lim_{م \to ٠} \frac{\ln(٥ + م) - \ln(٥)}{م} - ٢ \lim_{ل \to ٠} \frac{\ln(٥ + ل) - \ln(٥)}{ل}$

$= -٤ \ن'(٥) - ٢ \ن'(٥) = -٦ \ن'(٥) = -٦ \times ٣ = -١٨$

(٥) $\ن'(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{\ن(س) - \ن(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢) ل(س)}{س - ٢} = ٠$

$= \lim_{س \to ٢} ل(س) \times \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س - ٢}$

$= ل(٢)$

(٦) نفرض طول نصف القطر (نق) للدائرة الصغرى (ع)

فيكون م ج = نق + ٢

$\ح(نق) = ٢ نق \ط \Leftarrow ح'(نق) = ٢ \ط$

$\ح(نق + ٢) = ٢ \ط (نق + ٢)$

$= ٢ \ط نق + ٤ \ط$

$\ح'(٦) = \lim_{نق \to ٦} \frac{\ح(نق) - \ح(٦)}{نق - ٦} = \lim_{نق \to ٦} \frac{٢ \ط نق + ٤ \ط - ٦٠ \ط}{نق - ٦}$

$= ٢ \ط \lim_{نق \to ٦} \frac{نق^٢ + ٢نق - ٤٨}{نق - ٦} = ٢ \ط \lim_{نق \to ٦} \frac{(نق - ٦)(نق + ٨)}{نق - ٦} = ١٤ \ط$

(٧) $\ن'(س) = \lim_{ه \to ٠} \frac{٦ س^٢ ه - ٣ س ه^٢}{ه} = \lim_{ه \to ٠} ه(٦ س^٢ - ٣ س ه) = ٦ س^٢$

$\ن'(-٢) = ٦ (-٢)^٢ = ٢٤$

(٧)

(٨) نفرض طول ضلع المكعب ل وحدة فيكون $ح(ل) = ل^3$

$$قـ(ج) = \lim_{ل \to ج} \frac{ح(ل) - ح(ج)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} \frac{ل^3 - ج^3}{ل - ج}$$

$$= \lim_{ل \to ج} \frac{(ل - ج)(ل^2 + ج ل + ج^2)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} (ل^2 + ج ل + ج^2) = ١٢$$

(٩) نفرض طول نصف قطر الكرة نق وحدة ، $ح(نق) = \frac{٤}{٣} \pi نق^3$

$$ح'(نق) = \lim_{ع \to نق} \frac{ح(ع) - ح(نق)}{ع - نق} = \lim_{ع \to نق} \frac{\frac{٤}{٣}\pi ع^3 - \frac{٤}{٣}\pi نق^3}{ع - نق}$$

$$= \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to نق} \frac{ع^3 - نق^3}{ع - نق} = \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to نق} \frac{(ع - نق)(ع^2 + نق ع + نق^2)}{ع - نق}$$

$$= \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to نق} (ع^2 + نق ع + نق^2) = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣ نق^2 = ٤ \pi نق^2$$

ثالثاً : الاتصال والاشتقاقية

التدريبات

(١) ١) س = ٢ نقطة تفرع

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٤}{س} + ١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = \lim_{س \to ٢} (٥س - ١) = ٩$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) \neq \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

إذن هـ غير متصل عند س = ٢

٢) $هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤}{س} + ١ - ٣}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤ - ٢س}{س}}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{-٢(س - ٢)}{س(س - ٢)} = -١$

$هـ'_-(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١ - ٩}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٥(س - ٢)}{س - ٢} = ٥$

هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ لأن $هـ'(٢) \neq هـ'_+(٢)$

(٢) نبحث الاتصال عند س = ٢ لأنها نقطة تفرع

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٢ - ١) = ٣$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = \lim_{س \to ٢} \sqrt{س + ١} = \sqrt{٣}$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة وطالما هـ غير متصل عند س = ٢

إذن هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ حسب النظرية

$هـ'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١ - ١٥}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٤) = ٨$

تمارين ومسائل

(١) P) هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ١ لأن هـ غير متصل عند س = ١

ب) نبحث اتصال هـ عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٠$ إذن $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٠$

هـ(٢) = صفر . هـ متصل عند س = ٢ لأن $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$

$$هـ(س) = \begin{cases} س - ٢ & ١ \le س < ٢ \\ ٢(س-٢) & ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

$هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢(س-٢) - ٠}{س - ٢} = ٢$

$هـ'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١$

هـ'(٢) غير موجودة لأن $هـ'_+(٢) \neq هـ'_-(٢)$

ج) نجد تعريف ل(س)

نجد هـ(س) ثم قاعدتها بعد كل فترة طولها $\frac{١}{٢}$ وحدة.

$$ل(س) = \begin{cases} ٥ & -١ \le س < -\frac{٣}{٤} \\ ٤ & -\frac{٣}{٤} \le س < -\frac{١}{٢} \\ ٣ & -\frac{١}{٢} \le س < ٠ \\ ٢ & ٠ \le س < \frac{١}{٢} \end{cases}$$

$\lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{ل(س) - ل(\frac{١}{٤})}{س - \frac{١}{٤}} = \lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{٢ - ٢}{س - \frac{١}{٤}} = ٠$

س = -١ نقطة تفرع . نبحث الاتصال عند س = -١

$\lim_{س \to -١^-} ل(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to -١^+} ل(س) = ٤$

$\lim_{س \to -١} ل(س)$ غير موجودة وعليه ل غير متصل عند س = -١

ل غير قابل للاشتقاق عند س = -١ لأنه غير متصل عند هذه النقطة

(١٠)

(أ) $ه$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٠$ ، $س = ٥$ لأنها طرفا فترة.

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ٣^+} ه(س) = \lim_{س \to ٣^+} (٦س - ٣) = ١٥$$

$$\lim_{س \to ٣^-} ه(س) = \lim_{س \to ٣^-} (س^٢ + ٢س) = ١٥$$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ١٥$ ، $ه(٣) = ١٥$. إذن $ه$ متصل عند $س = ٣$

$$ه'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{ه(س) - ه(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦س - ٣ - ١٥}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦(س - ٣)}{س - ٣} = ٦$$

$$ه'_-(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{ه(س) - ه(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س + ٥)(س - ٣)}{س - ٣} = ٨$$

$ه'(٣)$ غير موجودة لأن $ه'_+(٣) \neq ه'_-(٣)$

(ب) نبحث اتصال $ه$ عند $س = ٩$

$$\lim_{س \to ٩^+} ه(س) = \lim_{س \to ٩^+} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = \lim_{س \to ٩^+} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣} = ٦$$

$ه(٩) = ٦$. $ه$ متصل عند $س = ٩$ لأن $\lim_{س \to ٩} ه(س) = ه(٩) = ٦$

$$ه'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{ه(س) - ه(٩)}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{\frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} - ٦}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩ - ٦(\sqrt{س} - ٣)}{(\sqrt{س} - ٣)(س - ٩)}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٦\sqrt{س} + ٩}{(\sqrt{س} - ٣)(س - ٩)} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)^٢}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)^٢} = \frac{١}{٦}$$

(ج) $ه$ متصل عند $س = ١$ لأن $ه(١)$ موجودة

$$\lim_{س \to ١^-} ه(س) = \lim_{س \to ١^+} ه(س)$$

$$\lim_{س \to ١^-} س^٢ = \lim_{س \to ١^+} (أ س + ب)$$

$١ = أ + ب$ وعندما $ب = -١$ $\Leftarrow$ $أ = ٢$

(٤) عندما $س = -١$

د متصل لجميع قيم $س \neq -١$ لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-١ - ٢ع - (-١ - ٢س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢س - ٢ع}{س - ع} = -٢ \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{س - ع} = ٢$$

عندما $-١ < س < ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = ٢س$$

عندما $س > ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$$

$س = -١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to -١^+} د(س) = \lim_{س \to -١^+} س^٢ = ١$$

$$\lim_{س \to -١^-} د(س) = \lim_{س \to -١^-} (-١ - ٢س) = ١$$

$\lim_{س \to -١} د(س) = ١ = د(-١)$ ، د متصل عند $س = -١$

$$د'(-١) = \lim_{س \to -١^-} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} \frac{-١ - ٢س - ١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١^-} \frac{-٢(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$$د'_+(-١) = \lim_{س \to -١^+} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$د'(-١) = -٢$

$س = ١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^-} س^٢ = ١ \quad ، \quad \lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} س = ١$$

$\lim_{س \to ١} د(س) = د(١) = ١$. د متصل عند $س = ١$

(٥-١)

$$\text{هـ}_-'(1) = \lim_{س \to 1^-} \frac{س^2 - 1}{س - 1} = \lim_{س \to 1^-} \frac{(س-1)(س+1)}{س-1} = 2$$

$$\text{هـ}_+'(1) = \lim_{س \to 1^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(1)}{س - 1} = \lim_{س \to 1^+} \frac{س - 1}{س - 1} = 1$$

هـ(1) غير موجودة لأن $\text{هـ}_-'(1) \neq \text{هـ}_+'(1)$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} -2 & س \leq -1 \\ س^2 & -1 < س < 1 \\ \text{غير معرفة} & س = 1 \\ 1 & س > 1 \end{cases}$$

(٥) نبحث الاتصال عند $س = 2$

$$\lim_{س \to 2^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 2^+} (3س - س^2) = 0$$

$$\lim_{س \to 2^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 2^-} (س^2 - 2س) = 0$$

$\lim_{س \to 2} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(2) = 0$ ، هـ متصل عند $س = 2$

$$\text{هـ}_+'(2) = \lim_{س \to 2^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{3س - س^2 - 0}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{س(3 - س)}{س - 2} = -2$$

$$\text{هـ}_-'(2) = \lim_{س \to 2^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{س^2 - 2س}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{س(س-2)}{س-2} = 2$$

هـ(2) غير موجودة لأن $\text{هـ}_+'(2) \neq \text{هـ}_-'(2)$

(٦) عندما $س = 0$ ، هـ متصل لأنه ثابت

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{0}{ع - س} = \text{صفر}$$

عندما $0 < س < 4$ ، $\text{هـ}(س) = 5 - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{5 - ع - (5 - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-(ع - س)}{ع - س} = -1$$

عندما $س > 4$ ، هـ(س) متصل داخلها عند $س = 5$ لأنه اقتران نسبي

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{1}{5 - ع} - \frac{1}{5 - س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{5 - س - (5 - ع)}{(5 - ع)(5 - س)} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - 5)(س - 5)(5 - ع)} = \frac{1}{(5 - س)^2}$$

نبحث الاستمرار عند نقاط التشعب

عند $س = ٠$:

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^+} (٥ - س) = ٥$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-}$ صفر $=$ صفر

$\lim_{س \to ٠} هـ(س)$ غير موجودة وعليه $هـ$ غير متصل عند $س = ٠$.

اذن $هـ(٠)$ غير موجودة .

$س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{١}{٥ - س} = ١ \neq \lim_{س \to ٤^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^-} (٥ - س) = ١$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ١ \neq هـ(٤) = ١$. $هـ$ متصل عند $س = ٤$

$هـ'_+(٤) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{\frac{١}{٥ - س} - ١}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{١ - (٥ - س)}{(٥ - س)(س - ٤)} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س - ٤}{(٥ - س)(س - ٤)} = ١$

$هـ'_-(٤) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٥ - س - ١}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤ - س}{س - ٤} = -١$

اذن $هـ'(٤)$ غير موجودة . مما سبق

$هـ(س) = \begin{cases} \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ ١ & ٠ < س < ٤ \\ \frac{١}{(٥ - س)^٢} & س = ٠,٤٣٥ \\ & س > ٤ \end{cases}$

(٧) $هـ(س) = \begin{cases} ١ & ١ \geq س < ٢ \\ ٢ - س & ٢ \geq س < ٣ \\ س - ٣ & ٣ < س \geq ٤ \end{cases}$

$هـ(١)$ ، $هـ(٤)$ غير موجودة لأنه $س = ١$ ، $س = ٤$ طرفي فترة

عندما $١ < س < ٢$ ، $هـ(س)$ متصل لأنه اقتران ثابت

$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{١ - ١}{ع - س} = ٠$

(١٤)

عندما $1 < س < 3$ ، $ه(س) = 2 - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{2 - ع - (2 - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{س - ع}{ع - س} = -1$$

عندما $3 < س < 4$

$ه(س) = س - 3$ متصل لأنه كثير حدود

$$ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - 3 - (س - 3)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = 1$$

نقاط التفرع، $س = 1$

$\lim_{س \to 1^-} ه(س) = 1$ ، $\lim_{س \to 1^+} ه(س) = \lim_{س \to 1^+} (2 - س) = 1$

$\lim_{س \to 1} ه(س) = 1 = ه(1)$. $ه$ متصل عند $س = 1$

$$ه'_+(1) = \lim_{س \to 1^+} \frac{ه(س) - ه(1)}{س - 1} = \lim_{س \to 1^+} \frac{2 - س - 1}{س - 1} = -1$$

$$ه'_-(1) = \lim_{س \to 1^-} \frac{ه(س - 1) - ه(1)}{س - 1} = \lim_{س \to 1^-} \frac{1 - 1}{س - 1} = \text{صفر}$$

$ه'(1)$ غير موجودة لأن $ه'_+(1) \neq ه'_-(1)$

عند $س = 3$

$\lim_{س \to 3^-} ه(س) = \lim_{س \to 3^-} (2 - س) = -1$ ، $\lim_{س \to 3^+} ه(س) = \lim_{س \to 3^+} (س - 3) = 0$

$\lim_{س \to 3} ه(س)$ غير موجود ، $ه(3) = 0$. إذن $ه$ غير متصل عند $س = 3$

$$ه'_+(3) = \lim_{س \to 3^+} \frac{ه(س) - ه(3)}{س - 3} = \lim_{س \to 3^+} \frac{س - 3 - 0}{س - 3} = 1$$

$$ه'_-(3) = \lim_{س \to 3^-} \frac{ه(س) - ه(3)}{س - 3} = \lim_{س \to 3^-} \frac{2 - س - 0}{س - 3} = -1$$

$ه'(3)$ غير موجودة لأن $ه'_+(3) \neq ه'_-(3)$

$$ه'(س) = \begin{cases} 0 & 1 < س < 2 \\ -1 & 2 < س < 3 \\ 1 & 3 < س < 4 \\ \text{غير موجودة} & س = 1، 2، 3، 4 \end{cases}$$

رابعاً : قواعد الاشتقاق ١

التدريبات

(١) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٠$ ب) $\frac{د}{دس}(س^{-٨}) = -٨ س^{-٩}$ ج) $\frac{د}{دس}(\frac{١}{س^{٧}}) = \frac{-٧}{س^{٨}}$

(٢) $\frac{د}{دس}(١٠ س^{٥} - ١٥ س^{٣}) = ٥٠ س^{٤} - ٤٥ س^{٢}$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = ٥٠ \times ١ - ٤٥ \times ١ = ٥$

(٣) أ) $\frac{د}{دس}(٨ س^{٤} - ١٠ س^{٥}) = ٣٢ س^{٣} - ٥٠ س^{٤}$ ، $\frac{د}{دس}(٣ س^{٢} - ٥٠ س^{٣}) = ٦ س - ١٥٠ س^{٢}$

ب) ميل $س = ٤٠$ ، $\frac{د}{دس}(س + ٢) = ١$

$\frac{د}{دس}(٤٠) = ١$ ، $\frac{د}{دس}(٤٠) = ١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٠$ ب) $ص = ٤٠ س^{٣}$

ج) $ص = ٠$ د) $\frac{د}{دس}(\frac{١}{١٦} س^{٤}) = \frac{١}{٤} س^{٣}$ ، $\frac{د}{دس}(\frac{١}{٤} س^{٣}) = \frac{٣}{٤} س^{٢}$

(٢) أ) $\frac{د ص}{د س} = ٢ س + ٣$ ب) $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٤}(٢ س) = \frac{١}{٢} س$

ج) $\frac{د ص}{د س} = ٤ \times ٣ س^{٢}$ د) $\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢} + ٢ س - ١$

(٣) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٣ س^{٢}$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = -٣$

ب) ميل $س = ٣$ ، $\frac{د}{دس}(س) = س^{٢} + ٣ س - ٦$

$\frac{د}{دس}(س) = ٢ س + ٣$ ، $\frac{د}{دس}(٣) = ٦ + ٣ = ٩$

ج) ميل $س = ٤,٢$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٦ - ٤ س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(س) = -٨ س$ ، $\frac{د}{دس}(٤,٢) = -٨ \times ٤,٢ = -١٩,٢$

د) ميل $س = -١$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٣ س - ١ - (-س) = ٤ س - ١$

$\frac{د}{دس}(س) = ٤$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = ٤$

(٤) أ) $\frac{د}{دس}(٦ ل(س) - ٢ ق(س)) = ٦ \times ٤ - ٢ \times ٨ = ٣٠$

ب) $\frac{د}{دس}(\frac{١}{٢} ل(س) + ق(س) + ٣ س^{٢}) = \frac{١}{٢} ل(-٢) + ق(-٢) + ٣(-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ - ٣ + ١٢ = ١١$

(١٦)

(٥) $هـ(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ب س & س \geq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + ٢س & س < ١ \end{cases}$

$هـ(١)$ موجودة ، إذن $هـ$ متصل عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^{-}} هـ(س) = \lim_{س \to ١^{+}} هـ(س)$

$٢ + ب = ٤ - ب + ٢$ ومنه $ب = ٠$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ب س & س \geq ١ \\ ٢ - ب س^{٢} & س < ١ \end{cases} = \begin{cases} ٢س^{٢} + ٢ & س \geq ١ \\ ٤ - ٢س & س < ١ \end{cases}$

$هـ'_{+}(١) = هـ'_{-}(١)$ أي $هـ(١)$ موجودة

$٤ - ٢ = ٢ + ٢ج$ ، $ج = -٦$

(٦) $هـ(س)$ متصل عند $س = ح$ بالفرض

$هـ(س) = \begin{cases} ل(س) & س \geq ح \\ ل(ح) & س < ح \end{cases}$

$هـ'_{+}(ح) = ل'(ح)$ ، $هـ'_{-}(ح) = ل'(ح)$

$هـ'_{+}(ح) = ل'(ح) = هـ'_{-}(ح)$

إذن $هـ$ قابل للاشتقاق عند $س = ح$ و أن $هـ'(ح) = ل'(ح)$

ثانياً: قواعد الاشتقاق (٢)

التدريبات

(١) $هـ(س) = (٤ - ٢س^{٣})(\frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢}س + ٣)(-٦س^{٢})$

$= ٢ - س^{٣} - ٣س^{٣} - ١٨س^{٢} = ٢ - ٤س^{٣} - ١٨س^{٢}$

---

(٢) $\frac{ص}{س} = \frac{(س^{٢} - ٤)(٦) - (٦س + ١)(٢س)}{(س^{٢} - ٤)^{٢}} = \frac{٦س^{٢} - ٤ - ١٢س^{٢} - ٢س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

$= \frac{-٦س^{٢} - ٢س - ٤}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$ ، $\frac{ص}{س}\Big|_{س=١} = \frac{-٦ - ٢ - ٤}{(-٣)^{٢}} = -\frac{٣٢}{٩}$

---

(٣) ١) $ص = \frac{-٢\sqrt{٣}}{س^{٤}} = \frac{-٢\sqrt{٣}}{س^{٣}}$

٢) $ص = \frac{٢}{س} - س^{٢}$ ، $ص = \frac{-٢}{س^{٢}} - ٢س$

فكّر وناقش $هـ(س) = \frac{س^{٣}(٤س^{٣}) - (س^{٤} - ٣)(٣س^{٢})}{س^{٦}} = \frac{٤س^{٦} - ٣س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}}$

$= \frac{س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{س^{٤} + ٩}{س^{٤}} = ١ + \frac{٩}{س^{٤}}$

---

(٤) $ق(س)$ متصل على ح.

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س \neq ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$$

$هـ_{+}(١) = ١$ ، $هـ_{-}(١) = \frac{-٤}{٤} = -١$. $هـ(١)$ غير موجودة

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س \neq ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$$

تمارين وصائل

(١) أ) $ص' = س^2(3-س^2) + (1+س^3)(2س)$

$= 3س^2 + 2س + 2س^4 = 5س^4 + 2س$

ب) $ص' = (س^3 - 2س + 1)(4) + (4س - 3)(3س^2 - 2)$

$= 4س^3 - 8س + 4 + 12س^3 - 8س - 9س^2 + 6$

$= 16س^3 - 9س^2 - 16س + 10$

ج) $ص' = \frac{(1-س)^2(2س) - س^2(-1)}{(1-س)^4} = \frac{3س^2 - 2س^3}{(1-س)^3}$

$= \frac{3س^2 - 2س^3}{(1-س)^4}$

د) $ص' = \frac{(2س+3)(2س) - (س^2-1)(2)}{(2س+3)^2}$

$= \frac{4س^2 + 6س - 2س^2 + 2}{(2س+3)^2} = \frac{2س^2 + 6س + 2}{(2س+3)^2}$

(٢) أ) $ن(س) = (س^2 + 2س)(س^2 - 3س - 6)$

$ن'(س) = (س^2 + 2س)(2س - 3) + (س^2 - 3س - 6)(2س + 2)$

$= 2س^3 - 3س^2 + 4س^2 - 6س + 2س^2 - 6س - 12س - 12$

$= 4س^3 - 3س^2 - 24س - 12$

ب) $ن(س) = \begin{cases} (3-س)(س^2+4س) & س < 3 \\ 12س & س = 3 \\ (س-3)(س^2+4س) & س > 3 \end{cases}$

$ن'(س) = \begin{cases} 3س^2 - 6س - 3س^2 & س < 3 \\ 12 & س = 3 \\ 3س^2 - 6س - 3س^2 & س > 3 \end{cases}$

$ن'(س) = \begin{cases} 3س^2 - 4س - 3 & س < 3 \\ غير موجودة & س = 3 \\ 4س - 3س^2 + 3 & س > 3 \end{cases}$

$ن'_+(3) = 27 - 12 - 3 = 12$ ، $ن'_-(3) = 12 - 27 + 3 = -12$

(19)

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^2+3)(2س-2) - (س^2-2س+3)(2س)}{(س^2+3)^2}$

$= \frac{2س^3 - 2س^2 + 6س - 6 - 2س^3 + 4س^2 - 6س}{(س^2+3)^2} = \frac{2س^2 - 6}{(س^2+3)^2}$

د) $هـ(س) = \begin{cases} \frac{س(س-1)}{(س-1)(س-3)} & 3 \neq س \leq 0 \\ \frac{-(س-1)(س-3)}{س(س-1)} & 1 \neq س < 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{س}{س-3} & 3 \neq س \leq 0 \\ 1 - \frac{3}{س} & 1 \neq س < 3 \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{3}{(س-3)^2} & 3 \neq س \leq 0 \\ \frac{3}{س^2} & 1 \neq س < 3 \end{cases}$

هـ(س) متصل على الفترة $[1, 0]$

$هـ(س) = \begin{cases} -\frac{3}{س^2} & 1 \neq س < 3 \\ \frac{3}{س^2} & 3 \neq س \leq 0 \end{cases}$

$هـ'_+(3) = \frac{1}{3}$ ، $هـ'_-(3) = -\frac{1}{3}$ ، $هـ'(3)$ غير موجودة

$هـ'(س) = \begin{cases} -\frac{3}{س^2} & 1 \neq س < 3 \\ \text{غير موجودة} & س = 3 \\ \frac{3}{س^2} & 3 < س \leq 0 \end{cases}$

(3) أ) $هـ'(س) = س \, ق'(س) + ق(س)$

$هـ'(2) = 2 \, ق'(2) + ق(2) = 2 \times -1 + 3 = 1$

ب) $هـ'(س) = 2س^3 \times ق'(س) + ق(س) \times 6س - 5$

$هـ'(2) = 16 \times -1 + 3 \times 12 - 5 = 19$

ج) $هـ'(س) = ق(س) + \frac{ق'(س)}{(ق(س))^2}$

$هـ'(2) = ق(2) + \frac{ق'(2)}{(ق(2))^2} = -1 + \frac{3}{9} = -\frac{6}{11}$

د) $هـ'(س) = \frac{(2ق(س))^2 \times 3ق'(س) - (6س+1)(2ق'(س))}{(2ق(س))^4}$

$هـ'(2) = \frac{(2ق(2))^2 \times 3ق'(2) - 13 \times 2ق'(2)}{(2ق(2))^4} = \frac{36 - 15ق'(2)}{6ق(2)} = \frac{18+15}{24} = \frac{33}{24} = \frac{11}{9}$

(٤) أ) $هـ'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$ (٥٠)

$هـ'(-٢) = ل(-٢) \times ق'(-٢) + ق(-٢) \times ل'(-٢)$

$= ٢ \times -٦ + ٤ \times -١ = -٢٢$

ب) $هـ'(س) = \frac{[ل(س)+١)\, ق'(س) - ق(س) \times ل'(س)}{(ل(س)+١)^{٢}}$

$هـ'(-٢) = \frac{[ل(-٢)+١)\, ق'(-٢) - ق(-٢) ل'(-٢)}{(ل(-٢)+١)^{٢}}$

$= \frac{٤ \times -٦ - ٣ \times -١}{(-٣+١)^{٢}} = \frac{-٢٠}{١٦} = -\frac{٥}{٤}$

(٥) أ) نعيد تعريف هـ(س) حول س = ١,٤ . هـ(س) = $س^{٢} - ٣$

$هـ'(س) = ٢س$ ، $هـ'(١,٤) = ٢,٨$

ب) نعيد تعريف $\frac{٣}{١-س^{٢}}$ حول س = ٢ ، $هـ(س) = \frac{٣}{١-س^{٢}}$

$هـ'(س) = \frac{-٣ \times ٢س}{(١-س^{٢})^{٢}}$ ، $هـ'(٢) = \frac{-٦}{٣^{٢}} = -\frac{٢}{٣}$

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^{٢}-٤)(٥) - (٥س+١)(٢س)}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

$هـ'(-١) = \frac{-٣ \times ٥ - ١ \times -٥}{(-٣)^{٢}} = \frac{-١٥+٥}{٩} = -\frac{١٠}{٩}$

(٦) $\frac{د}{دس}(ل(س) \times م(س) \times ق(س))) = \frac{د}{دس}((ل(س) \times م(س)) \times ق(س))$

$= (ل(س) \times م(س)) \times ق'(س) + ق(س)(ل(س) \times م(س))'$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ق(س)(ل(س) م'(س) + م(س) ل'(س))$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ل(س) \times ق(س) \times م'(س) + م(س) \times ق(س) \times ل'(س)$

(٧) نضع ل(س) بدلاً من م(س) ، ق(س) في السؤال السادس ينتج

$\frac{د}{دس}(ل(س))^{٣} = ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س)$

$= ٣(ل(س))^{٢} \cdot ل'(س)$.

(٨) $هـ(س)$ اقتران متصل عند $س = ١$، لأنه نهايا $\lim_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١) = ٤$

(c1)

$$هـ'(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ١٢س^{٣} & ، س < ١ \end{cases}$$

$هـ'_{+}(١) = ١٢$ ، $هـ'_{-}(١) = ١٢$ ، إذن $هـ'(١) = ١٢$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ١٢س^{٣} & ، س < ١ \end{cases}$$

(٩) نعيد تعريف $هـ(س)$

$$هـ(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+٦س) & س \geq ٠ \\ -س(س^{٢}+٦س) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+٦س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣}-٦س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$$

وهو اقتران متصل على ع.

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$$

$هـ'_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $هـ'(٠) = ٠$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$$

(١٠) $هـ$ متصل عند $س = ج$، لأنه قابل للاشتقاق عند $س = ج$

$$\lim_{س \to ج^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ج^{-}} هـ(س)$$

$$٤ - ٨ب + ج = ٤ج - ٢ب \Leftarrow ٢ب + ج = ٠ \quad ...(١)$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ج س - ب & ، س \leq ج \\ -٣ب س^{٢} + ج & ، س > ج \end{cases}$$

$هـ'(ج) = هـ'_{+}(ج)$

$$٤ج - ب = -١٢ب + ج \Leftarrow ١١ب + ٣ج = ٠ \quad ...(٢)$$

$$٣ج + ١١ب = ٠ \quad ...(٢)$$

$$ج + ٣ب = ٠ \quad ...(١) \times ٣ \text{ ثم الطرح}$$

$$٢ب = -٦ \Leftarrow ب = -٣$$

نجد $ج$ من المعادلة (١) : $ج = -٣ب = ٩ + ٢ = ١١$

ثالثاً : المشتقات العليا

التدريبات / تدريب (١) فرع (أ)

(أ) $هـ(س) = ١٥س^{٢} - ٨س + ٦$

$هـ'(س) = ٣٠س - ٨$ ، $هـ'(-١) = -٣٠ - ٨ = -٣٨$

(ب) $هـ(س) = \frac{ن}{١٠} س^{ن-١}$ ، $هـ'(س) = \frac{ن(ن-١)}{١٠} س^{ن-٢}$

$هـ''(س) = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠} س^{ن-٣}$

$٩ س^{٢} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠} س^{ن-٣}$

$ن - ٣ = ٢$ ومنه $ن = ٥$ ، $٩ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{ب}$ ومنه $ب = ٦$

(ج) $هـ(س)$ اختبر اتصاله عند $س = ٠$ لأن نهايتها $= هـ(٠)$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

١) $هـ'_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $هـ'(٠)$ موجودة وتساوي صفر

$هـ'_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٠$ ، $هـ'(٠)$ موجودة وتساوي صفر

٢) $$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س \leq ٠ \end{cases}$$

$$هـ''(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

٣) $$هـ''(س) = \begin{cases} ٦ & س > ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$$

$هـ''_{+}(٠) = ٦$ ، $هـ''_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $هـ''(٠)$ غير موجودة

تدريبات (أ) فرع (ج)

$هـ(س) = س^{٦} + ١٤س^{٤} - ٣س^{٣} - ١٠س + س^{٢} + ٧$

$هـ'(س) = ٦س^{٥} + ٥٦س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢س - ١٠$

$هـ''(س) = ٣٠س^{٤} + ١٦٨س^{٢} - ١٨س + ٢$

$هـ''(-١) = ٣٠ + ١٦٨ + ١٨ + ٢ = ٤٨٢$

تمارين ومسائل

(١) ١) $ص = ١٢س^{٢} - ٧س - ٦$

$ص' = ٢٤س - ٧$

٢) $ص = س + \frac{١}{س}$

$ص' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

٣) $ه(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+س) & س < ٠ \\ -س(س^{٢}+س) & س > ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+س^{٢} & س < ٠ \\ -س^{٣}-س^{٢} & س > ٠ \end{cases}$ وهو اقتران متصل على ح

$ه'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+٢س & س < ٠ \\ -٣س^{٢}-٢س & س > ٠ \end{cases}$

$ه'_{+}(٠) = ٠$ ، $ه'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $ه'(٠) = ٠$.

$ه''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$ ، $ه''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$

$ه''_{+}(٠) = ٢$ ، $ه''_{-}(٠) = -٢$ ، إذن $ه''(٠)$ غير موجودة.

$ه''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$

٤) $ه(س) = (س^{٢}+٣س)(٣س^{٢}) + (س^{٣}+١)(٥س+٤)$

$= ٣س^{٤} + ١٥س^{٣} + ٥س^{٤} + ٣س^{٣} + ٥س + ٤$

$= ٥س^{٤} + ١٨س^{٣} + ٥س + ٤$

$ه''(س) = ٢٠س^{٣} + ٥٤س^{٢} + ٥$

$ه''(-١) \times ه(-١) = (-٢٠ + ٥٤ + ٥)(٥ - ١٨ + ٥ + ٤)$

$= ٩ \times ٣٠ = -٧٠$

(٣) $ه(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ه''(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ه'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$

$٤ = ن(ن-١)(ن-٢)$ وعندما $ن - ٣ = ١$ وعندما $ن = ٤$

$٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٤!$

(٤) $ص = \frac{س^{٢}}{-٤}$ ، $ص' = \frac{س^{٤}}{٤ \times ٤ س} = \frac{١}{٨} س^{٣}$ ، $\frac{د ص}{د س^{٣}} = \frac{١}{٨}$ (٤ ج)

(٥) $ص = ٣س^{٤} + ٩س^{٣} - ١٢س^{٢} - ١$

$ص' = ١٢س^{٣} + ١٨س^{٢} - ١٢$

د) $١٢س^{٣} + ١٨س^{٢} - ١٢ = ٠$ ، $س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

$(س - ١)(س + ٢) = ٠$ ومنه $س = -٢ ، \frac{١}{٢}$

ر) مجموعة $P : (س - ١)(س + ٢) < ٠$

$س \in (-\infty ، -٢] \cup [\frac{١}{٢} ، \infty)$

هـ) مجموعة $P : (٢ - س)(س + ٤) < ٠$

$س \in (-٤ ، \frac{١}{٢})$

(٦) أ) $ص = ٣س^{٤} + ١٥س^{٣} - ٦س^{٢}$

$ص' = ١٢س^{٣} + ٩٠س^{٢} - ٦س$ ، $ص'' = ٣٦س^{٢} + ٣٠٠س - ٦$

ب) $ص = ٢٤س^{٣} + ٢٠س^{٢} + ٥$

ج) $ص = ٦٤س + ٢٠$ ، $ص'' = ٦٤$

(٧) أ) $ص = ٢س^{٣} - ٦س$ ، $ص'(س) = ٢$

$ص''(س) = ٦س^{٢} - ٦$ ، $ص''(١) = صفر$

ب) $ص = \frac{١}{٤} س^{٤} - س^{٢}$

$ص' = س^{٣} - ٢س$ ، $ص'(-١) = -١ + ٢ = ١$

ج) $ص = -\frac{١}{س^{٢}}$ ، $ص' = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

$ص'' = \frac{-٢ \times ٣س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦}{س^{٤}}$

$ص^{(٤)} = \frac{٧ \times ٤ س^{٣}}{س^{٥}} = \frac{٢٤}{س^{٥}}$ ، $ص^{(٤)}(١) = ٤٢$

(٨) $هـ(س) = س^٢ ل(س) + ل(س) \times ٢س$

$هـ'(س) = س^٢ ل'(س) + ل'(س) \times ٢س + ل(س) \times ٢ + ٢س \times ل(س)$

$= س^٢ ل'(س) + ٤س ل(س) + ٢ ل(س)$

$هـ''(س) = س^٢ ل''(س) + ل''(س) \times ٢س + ٤س \times ل'(س) + ل'(س) \times ٤ + ٢ ل'(س)$

$= س^٢ ل''(س) + ٦س ل'(س) + ٦ ل'(س)$

(٩) $(ل \times ق)'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$

$[ل \times ق)''(س) = ل(س) \times ق''(س) + ق'(س) \times ل'(س) + ق'(س) \times ل'(س) + ل''(س) \times ق(س)$

$= (ل'' \times ق)(س) + ٢(ل' \times ق')(س) + (ل \times ق'')(س)$

(١٠) $هـ(س) = ٢س^٣ + ب س + ح$

$هـ(١) = ٣$ ومنه $٢ + ب + ح = ٣$ ... (١)

$هـ'(س) = ٦س^٢ + ب$

$هـ'(١) = -٦$ ومنه $٦ + ب = -٦$ ... (٢)

$هـ''(س) = ١٢س$

$هـ''(١) = ٤$ ومنه $١٢ = ٤$

ضد معادلة (٢) : $ب = -١٨$ وضد معادلة (١) : $ح = ١٩ \Leftarrow هـ(س) = ٢س^٣ - ١٨س + ١٩$

(١١) $\frac{ل(س) ق(س) - ل(س) ق(س)}{(ق(س))^٢}$

$= \frac{ل(س) ق'(س) + ق(س) ل'(س) - (ل'(س) ق(س) + ق(س) ل(س))}{(ق(س))^٢}$

$= \frac{ل(س) ق'(س) - ل'(س) ق(س)}{(ق(س))^٢}$

(١٢) $ق(س) = ل(س) هـ(س) + هـ(س) ل'(س)$

$ق'(س) = ل(س) هـ'(س) + هـ(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ(س)$

$= ل(س) هـ'(س) + هـ(س) ل''(س) + ٢ ح$ لكن $ل \times هـ = ح$

$ل'(س) + هـ'(س) = ٠$ ، بالتعويض في المعادلة نحصل على

$ل''(س) هـ'(س) + هـ''(س) ل'(س) = ٠$

$ق''(س) = ل(س) هـ''(س) + هـ'(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ'(س)$

$= ل(س) هـ''(س) + هـ(س) ل''(س)$

(٥٤)

١٣) $ق(س) = ٤ب س^{٣} - \frac{١٦}{س^{٢}}$

$ق'(س) = ١٢ب س^{٢} + \frac{١٦ \times ٢ س}{س^{٤}} = ١٢ب س^{٢} + \frac{٣٢}{س^{٣}}$

$ق''(س) = ٢٤ب س - \frac{٣٢ \times ٢ س^{٢}}{س^{٦}} = ٢٤ب س - \frac{٩٦}{س^{٤}}$

$ق''(١) = ٩٠ \quad ، \quad ٢٤ب - ٩٦ = ٩٠$

$٢٤ب = ١٨٦$ وضح $ب = ٢$

١٤) $ق(س) = ١ - ٧(م - ٣) س$

$ق'(س) = -٧(م - ٣)$

$-٧(م - ٣) < ٠ \quad ، \quad م - ٣ > ٠$ وضح $م > ٣$

سابعاً: مشتقة الاقترانات المثلثية

التدريبات

(١) $هـ(س) = ٢ جتا س + ٦$

$هـ(\frac{\pi}{٣}) = ٢ \times \frac{١}{٢} + ٦ = ٧$

(٢) $هـ(س) = س جتا س + جا س$

$هـ(\frac{\pi}{٢}) = \frac{\pi}{٢} \times ٠ + ١ = ١$

(٣) $هـ(س) = ظا س = \frac{١}{جتا س}$

$هـ(س) = \frac{-(-جا س)}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا س} \times \frac{جا س}{جتا س} = ظا س ظا س$

$هـ(س) = ظتا س = \frac{١}{ظا س}$

$هـ(س) = \frac{-جتا س}{جا^٢ س} = -\frac{١}{جا س} \times \frac{جتا س}{جا س} = -ظتا س ظتا س$

$هـ(س) = ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$

$هـ(س) = \frac{جتا س \times جتا س - جا س \times -جا س}{جتا^٢ س}$

$= \frac{جتا^٢ س + جا^٢ س}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا^٢ س} = قا^٢ س$

(٤) $هـ(س) = ظا س ظا س + ظا^٢ س$

$هـ(\frac{\pi}{٦}) = \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٢$

تمارين ومسائل

١) أ) $ص' = ٣ جتا س + جا س$

ب) $ص' = س^٢ جتا س + جا س \times ٢س$

$= س^٢ جتا س + ٢س جا س$

ج) $ص' = \frac{جتا س \cdot س - جا س}{جتا^٢ س} = \frac{جتا س + س جا س}{جتا^٢ س}$

د) $ص' = ظا^٢ س - \sqrt{٣}$ ، هـ) $ص = ١$ ، $ص' = ٠$

و) $ص' = -ظتا س \, ظا س - (س \times -ظتا^٢ س + ظا س \times ١)$

$= -ظتا س \, ظا س + س ظتا^٢ س - ظا س$

ز) $ص' = جتا س$ ، $ص'' = -جا س = -ص$

$ص'' + ٦ص = -ص + ٦ص = ٥ص$

(٣) أ) $م'(س) = جا س (-جا س) + جتا س \, جتا س$

$= جتا^٢ س - جا^٢ س$

$م'(\frac{\pi}{٣}) = (\frac{١}{٢})^٢ - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ب) $م'(س) = -جا س + جتا س$ ، $م'(س) = -جتا س - جا س$

$م'(\frac{٣\pi}{٤}) = -\frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢} = -\sqrt{٢}$

ج) $م'(س) = \frac{(١ + جا س)(-جا س) - جتا س \, جتا س}{(١ + جا س)^٢}$

$= \frac{-جا س - جا^٢ س - جتا^٢ س}{(١ + جا س)^٢} = \frac{-جا س - ١}{(١ + جا س)^٢}$

$م'(\pi) = \frac{-جا \pi - ١}{(١ + جا \pi)^٢} = -١$

د) $م'(س) = س جا س ظا س + جا س$

$م'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi}{٤} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{\pi}{٩} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

هـ) $م'(س) = \frac{جا س (جا^٢ س + ١) - (ظا س + س) جتا س}{جا^٢ س}$

$م'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{\frac{٣}{٤}(\frac{٣}{٤} + ١) - (\sqrt{٣} + \frac{\pi}{٣}) \times \frac{١}{٢}}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢} = \frac{\frac{٣}{٤} - \frac{\pi}{٦}}{\frac{٣}{٤}}$

$= \frac{٩ - ٢\pi}{٩}$

(٤) أولاً : ص = جتاس

ص' = − جاس ، ص'' = − جتاس

ص + ص'' = جتاس − جتاس = ٠

ثانياً ص = جاس

ص' = جتاس ، ص'' = − جاس

ص + ص'' = جاس − جاس = ٠

(٥) P) هـ'(س) = ١ − جاس

١ − جاس = ٠ وعندما جاس = ١

إذاً س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{2}$

ب) هـ(س) = ظاس ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{1}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

هـ'(س) = ٠ إذا كان جاس = ٠

س = − π ، ٠ ، π

(٦) ص' = P جتاس − ب جاس

$(\text{ص}')^2 + \text{ص}^2 = (\text{P جتاس} - \text{ب جاس})^2 + (\text{P جاس} + \text{ب جتاس})^2$

$= \text{P}^2\text{جتا}^2\text{س} - 2\text{P ب جاس جتاس} + \text{ب}^2\text{جا}^2\text{س} + \text{P}^2\text{جا}^2\text{س} + 2\text{P ب جاس جتاس} + \text{ب}^2\text{جتا}^2\text{س}$

$= \text{P}^2(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}) + \text{ب}^2(\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س})$

$= \text{P}^2 \times 1 + \text{ب}^2 \times 1 = \text{P}^2 + \text{ب}^2$.

(٧) P) ص' = − ظتاس ظتاس

ص'' = − ظتاس × − قتا^{2}س + ظتاس (قاس ظتاس)

= قتا^{3}س + ظتاس ظتا^{2}س

ب) ص' = س (− جاس) + جتاس − ٤ جتاس

= − س جاس − ٣ جتاس

ص'' = − س جتاس + جاس (− ١) + ٣ جاس = ٤ جاس − س جتاس

(٨) لكي تكون $ه$ قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$ يجب أن تكون متصلة عند $س = ٠$.

(٩)

$$\lim_{س \to ٠^+} ه(س) = \lim_{س \to ٠^-} ه(س) \quad \text{و} \quad ه(٠) = ب$$

$$ه(س) = \begin{cases} -جا س & س < ٠ \\ ٩ & س = ٠ \end{cases}$$

$$ه'_+(٠) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{ه(س) - ه(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{جتا س - ١}{س}$$

$$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{جتا س - ١}{س} \times \frac{جتا س + ١}{جتا س + ١} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{جتا^٢ س - ١}{س(جتا س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{-جا^٢ س}{س(جتا س + ١)} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{-جا س}{س} \times \lim_{س \to ٠^+} \frac{جا س}{جتا س + ١}$$

$$= -١ \times ٠ = ٠$$

$$ه'_-(٠) = ٩ = ه'_+(٠) \quad \text{إذن } ٩ = ٠$$

(٩) نعيد تعريف $ه(س)$.

$$ه(س) = \begin{cases} جا س & س \geq \pi \\ -جا س & س < \pi \end{cases}$$

$$ه'_+(\pi) = \lim_{س \to \pi^+} \frac{ه(س) - ه(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جا س - ٠}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جا س}{س - \pi}$$

نفرض $س - \pi = هـ$. عندما $س \to \pi^+$ ، فإن $هـ \to ٠^+$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{-جا(\pi + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{-(-جا هـ)}{هـ} = ١$$

$$ه'_-(\pi) = \lim_{س \to \pi^-} \frac{ه(س) - ه(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^-} \frac{جا س - ٠}{س - \pi}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{جا(س + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{جا هـ}{هـ} = ١$$

إذن $ه'(\pi) = ١$ ، أي أن $ه$ قابلة للاشتقاق عند $س = \pi$

(١٠) $ه(س) = جتا س - \frac{١}{٢}$

$جتا س - \frac{١}{٢} = ٠$ ، $جتا س = \frac{١}{٢}$

إذن $س = \frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

ثامناً : قاعدة السلسلة

التدريبات :

(١) نفرض ع = س^{٣} − س فيكون ص = ع^{٦} ، ع = س^{٣} − س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = ٦ ع^{٥} \times (٣ س^{٢} - ١)$

$= ٦ (س^{٣} - س)^{٥} (٣ س^{٢} - ١)$

٢) هـ (س) = ٢ − $\frac{١}{س^{٢}}$ ، هـ (س) = جتا س

(هـ ○ ص)′ (س) = هـ′ (هـ (س)) . هـ′ (س) = (٢ − $\frac{١}{جا^{٢} س}$) × جتا س

= ٢ جتا س − ٢ جتا س ظتا س

(٣) $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ (قا س + ظا س) (قا س ظا س + قا^{٢} س)

$\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٠}$ = ٢ (١ + ٠) (١ × ٠ + ١) = ٢

(٣) ١) هـ (س) = ٤ قا ع س ظا ع س

٢) هـ′ (س) = ٧ (س^{٣} + ٢ س − ٨)^{٦} (٣ س^{٢} + ٢)

٣) هـ′ (س) = ٤ جا^{٣} (س^{٢}) جتا (س^{٢}) × ٢ س = ٨ س جا^{٣} (س^{٢}) جتا (س^{٢})

(٤) نقسم الطرفين بالنسبة إلى س

هـ′ (س^{٣} − ١) (٣ س^{٢}) = − $\frac{١}{س^{٢}}$ − ٢ س

س^{٣} − ١ = ٧ عندما س = ٢

هـ′ (٧) (١٢) = − $\frac{١}{٤}$ − ٤

هـ′ (٧) × ١٢ = − $\frac{١٧}{٤}$ ، هـ′ (٧) = − $\frac{١٧}{٤}$ × $\frac{١}{١٢}$ = − $\frac{١٧}{٤٨}$

(١) ب) $\frac{ص}{س} = ٨(س^٣ - ٢س + ٤)^٧ (٣س^٢ - ٢)$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{-٥(س^٢+١)^٤(٢س)}{(س^٢+١)^١٠} = \frac{-١٠س}{(س^٢+١)^٦}$

د) $\frac{ص}{س} = \frac{(١-س^٣)^٤(٤س^٣) - س^٤(٤(١-س^٣)^٣ \times -٣س^٢)}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٤س^٣(١-س^٣)^٤ + ١٢س^٦(١-س^٣)^٣}{(١-س^٣)^٨}$

$= \frac{٤س^٣(١-س^٣)^٣(١-س^٣+٣س^٣)}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٤س^٣(١+٢س^٣)}{(١-س^٣)^٥}$

هـ) $\frac{ص}{س} = -جا(س^٢ - س) \times (٢س - ١) = (١-٢س) جا(س^٢-س)$

(٢) $ه(س) = ٢س - ٢$ ، $و(س) = ٣س^٢$

$(ه \circ و)'(١) = ه'(و(١)) \times و'(١)$

$= ه'(١) \times ٣ \times ٢ = ٢ \times ٣ = ٦$

$(و \circ ص)'(١) = و'(ه(١)) \cdot ه'(١) = و'(-١) \times$ صفر $=$ صفر

(٣) ب) $(ه \circ ص)'(٢) = ه'(و(٢)) \cdot و'(٢)$

$= ه'(٣) \times ٦ - ٦ = ٤ \times ٦ - ٦ = ٢٤$

د) $ه(س^٢) \times ٢ = س \Rightarrow ه'(٣) \times ٢٧ \times ٢ = \sqrt{٣}$

$\Rightarrow ه'(٣) = \frac{\sqrt{٣}}{٨}$

(٤) نفرض $ع = و(س)$ فيكون $ص = جا^ن ع$ ، $ع = و(س)$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \cdot \frac{ع}{س} = ن جا^{ن-١} ع \times جتا ع \times و'(س)$

$= ن جا^{ن-١}(و(س)) \times جتا(و(س)) \times و'(س)$

(٥) ب) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} \cdot \frac{ل}{س}$

$= جا^٢ ع \times (٣س^٢ - ١) = جا^٢(س^٣ - س) \times (٣س^٢ - ١)$

د) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} \cdot \frac{ل}{س} = (٢ل + ٢) \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}}$

$= (٢\sqrt{س^٢+١} + ٢) \times \frac{س}{\sqrt{س^٢+١}} = ٢س + \frac{٢س}{\sqrt{س^٢+١}}$

(٣٢)

(٦) $ص'' = -جا(س + \frac{\pi}{2})$ ، $ص'' = -جتا(س + \frac{\pi}{2})$

$ص + ص'' = جتا(س + \frac{\pi}{2}) - جتا(س + \frac{\pi}{2}) = صفر$

(٧) $\frac{د ص}{د س} = ظا^٢ س + ظا^٢ س قا^٢ س = ظا^٢ س(١ + ظا^٢ س)$

$= ظا^٢ س قا^٢ س = ظا^٤ س$

(٨) أ) $ه$ اقتران فردي $\Leftrightarrow$ أي أن $ه(-س) = -ه(س)$

باشتقاق الطرفين:

$-ه'(-س) = -ه'(س)$ ومنه $ه'(-س) = ه'(س)$

إذن $ه'(س)$ اقتران زوجي

ب) $ه$ اقتران زوجي $\Leftrightarrow$ أي أن $ه(-س) = ه(س)$

باشتقاق الطرفين:

$-ه'(-س) = ه'(س)$ ومنه $ه'(-س) = -ه'(س)$

إذن $ه'(س)$ اقتران فردي

(٩) أ) $\frac{د ص}{د س} = ٢ جا ٣س جتا ٣س \times ٣ = ٣ جا ٦س$

عندما $س = \frac{\pi}{٩}$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٣ جا \frac{٦\pi}{٩} = ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

ب) $\frac{د ص}{د س} = ٤(س + \frac{١}{س})^٣ (١ - \frac{١}{س^٢})$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = ٤(١+١)^٣ (١-١) = صفر$

(١٠) أ) $ص' = س جا^٢(\frac{١}{س}) \times -\frac{١}{س^٢} + جا(\frac{١}{س}) \times ١$

$= -\frac{١}{س} جا^٢(\frac{١}{س}) + جا(\frac{١}{س})$

$ص'' = -\frac{١}{س} \times ٢ جا(\frac{١}{س}) جتا(\frac{١}{س}) \times -\frac{١}{س^٢} + جا^٢(\frac{١}{س}) \times \frac{١}{س^٢} + جا^٢(\frac{١}{س}) \times \frac{١}{س^٢}$

$= \frac{٢}{س^٣} جا(\frac{١}{س}) ظا(\frac{١}{س}) + \frac{١}{س^٢} جا^٢(\frac{١}{س}) - \frac{١}{س^٢} جا^٢(\frac{١}{س})$

$= \frac{٢}{س^٣} جا^٢(\frac{١}{س}) ظا(\frac{١}{س})$

ب) $ص' = \dfrac{\text{س} \times \text{٢ جا ٢ س} - \text{جتا ٢ س}}{\text{س}^2} = -\dfrac{\text{٢ س جا ٢ س} + \text{جتا ٢ س}}{\text{س}^2}$

$ص'' = -\dfrac{\text{س}^2(\text{٤ س جتا ٢ س} + \text{٢ جا ٢ س} - \text{٢ جا ٢ س}) - (\text{٢ س جا ٢ س} + \text{جتا ٢ س}) \times \text{٢ س}}{\text{س}^4}$

$= \dfrac{-\text{٤ س}^3 \text{ جتا ٢ س} + \text{٤ س}^2 \text{ جا ٢ س} + \text{٢ س جتا ٢ س}}{\text{س}^4}$

$= \dfrac{\text{٤ س جا ٢ س} + \text{٢ جتا ٢ س} - \text{٤ س}^2 \text{ جتا ٢ س}}{\text{س}^3}$

(١١) $ص'(\text{جا ٢ س}) \times \text{٢ جتا ٢ س} = -\text{قتا ٢ س ظتا ٢ س} \times ٢$

$\text{جا ٢ س} = \frac{1}{2}$ اذا كان $\text{٢ س} = \frac{\pi}{6}$ ومنه $\text{س} = \frac{\pi}{12}$

$ص'(\tfrac{1}{2}) \times \text{٢ جتا } \frac{\pi}{6} = -\text{قتا } \frac{\pi}{6} \text{ ظتا } \frac{\pi}{6} \times ٢$

$ص'(\tfrac{1}{2}) \times ٢ \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -٢ \times \sqrt{3} \times ٢$

$ص'(\tfrac{1}{2}) = -٤\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -٤$

(١٢) $\dfrac{dص}{dس} = ص'(\text{س}^2 + \text{٢ س})(\text{٢ س} + ٢)$

$\dfrac{dص}{dس}\Big|_{\text{س}=1} = ص'(٣) \times ٤ = ٥ \times ٤ = ٢٠$

(١٣) $\dfrac{dص}{dس} = \dfrac{\text{٢ س} + \frac{3}{2\sqrt{\text{٣ س}}}}{2\sqrt{\text{س}^2 + \sqrt{\text{٣ س}}}} = \dfrac{\text{٤ س}\sqrt{\text{٣ س}} + ٣}{٤\sqrt{\text{٣ س}} \times \sqrt{\text{س}^2 + \sqrt{\text{٣ س}}}}$

(١٤) $ص(\text{٤ س}) = \text{٢ س}$

$ص'(\text{٤ س}) \times ٤ = ٢$

$ص'(\text{٤ س}) = \frac{1}{2}$

نفرض $\text{س} = ١$ ، $ص'(٤) = \frac{1}{2}$

(٣٣)

(١٥) $ق(س) = ٣س^٤ + ٢$ ، $ق'(س) = ٦س$ ، $ق''(س) = ٦$

$ه(س) = ٦س$ ، $ه'(س) = ٦$ ، $ه''(س) =$ صفر

ب) $(ق \circ ه)'(١) = ق'(ه(١)) \times ه'(١)$

$= ق'(٦) \times ٦ = ٦ \times ٣ \times ٦ = ١٠٨$

ن) $(ق \circ ه)'(ج) = ق'(ه(ج)) \times ه'(ج)$

$= ق'(١) \times ٦ = ٦ \times ١ \times ٦ = ٣٤$

د) $(ق \circ ه)''(س) = \left((ق \circ ه)'(س)\right)'$

$= \left(ق'(ه(س)) \times ه'(س)\right)' = \left(ق'(٣س^٤) \times ٦س\right)'$

$= (١٨س^٤ \times ٦س)' = (١٠٨س^٣)' = ٣٢٤س^٢$

$(ق \circ ه)''(-١) = ٣٢٤$

ر) $(ق \circ ه)''(س) = \left((ق \circ ه)'(س)\right)' = \left(ق'(ه(س)) \times ه'(س)\right)'$

$= ق''(ه(س)) \times ه'(س) + ه''(س) \times ق'(ه(س)) \times ه'(س)$

$= ق''(٦س) \times$ صفر $+ ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٠٨$

تاسعاً: الاشتقاق الضمني

التدريبات

(١) ١) $٦س - ٨ص ص' = ٠$

$٨ص ص' = ٦س$ ومنه $ص' = \frac{٣}{٤} \times \frac{س}{ص}$

٢) $٢س \cdot ص' + ٢ص - ٣ص^{٢} ص' = ١ + ٢ص'$

$٢س ص' - ٣ص^{٢} ص' - ٢ص' = ١ - ٢ص$

$ص'(٢س - ٣ص^{٢} - ٢) = ١ - ٢ص$ ومنه $ص' = \frac{١ - ٢ص}{٢س - ٣ص^{٢} - ٢}$

٣) $٢س + ص' = ظا^{٢}ص \cdot ص'$

$ص'(١ - ظا^{٢}ص) = -٢س$ ومنه $ص' = \frac{٢س}{ظا^{٢}ص - ١}$

(٢) ١) $\frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} - جاس = ٠$ ومنه $ص' = ٢\sqrt{ص}\ جاس$

٢) $٢(س - ص)(١ - ص') - ص' = ٠$

$٢(س - ص) - ص'(٢(س - ص)) - ص' = ٠$

$ص'(٢س - ٢ص + ١) = ٢(س - ص)$ ومنه $ص' = \frac{٢(س - ص)}{٢س - ٢ص + ١}$

(٣) $-جاص ص' = ١$ ، $ص' = -\frac{١}{جاص}$

نجد جاص بدلالة س:

$جا^{٢}ص = ١ - جتا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$

$جاص = \sqrt{١ - س^{٢}}$ ، $-\sqrt{١ - س^{٢}}$ يُحذف

$ص' = -\frac{١}{جاص} = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

(٤) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د س}$ ، $\frac{د س}{د ن} = ٣ جتا٣ن$

$\frac{د ص}{د س} = (-جا٣ن) \times ٣ \times \frac{١}{٣ جتا٣ن} = -ظا٣ن$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = -٣ ظا^{٢}٣ن \times \frac{د ن}{د س} = -٣ ظا^{٢}٣ن \times \frac{١}{٣ جتا٣ن}$

$= -ظا^{٣}٣ن$

$\left.\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}\right|_{ن = \frac{\pi}{٣}} = -(-١)^{٣} = ١$

تمارین وسائل

(۱) ۴) $۳س + ۸ص \frac{دص}{دس} = ۰$ ، $\frac{دص}{دس} = -\frac{۱}{۴} \times \frac{س}{ص}$

ن) $\frac{دص}{دس} = \frac{۳س^۲ + ۸س}{۲(۳س + ۴س^۲)}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۱}{ص^۲} \times \frac{۳س^۲ + ۸س}{۴ص(۳س + ۴س^۲)} = \frac{۳س^۲ + ۸س}{۴ص^۲(۳س + ۴س^۲)}$

ع) $۳س^۲ + ۳ص^۲ \frac{دص}{دس} = س \frac{دص}{دس} + ص$

$\frac{دص}{دس}(۳ص^۲ - س) = ص - ۳س^۲$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{ص - ۳س^۲}{۳ص^۲ - س}$

ی) $جتا(س ص)(س \frac{دص}{دس} + ص) = ۲س$

$(س \frac{دص}{دس} + ص) = \frac{۲س}{جتا(س ص)}$ ، $س \frac{دص}{دس} = \frac{۲س}{جتا(س ص)} - ص$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۲}{س جتا(س ص)} - \frac{ص}{س}$

(۲) ۴) $۳(س ص)^۲(س \frac{دص}{دس} + ص) = ۴$

$س \frac{دص}{دس} + ص = \frac{۴}{۳(س ص)^۲}$

$س \frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳(س ص)^۲} - ص$ وضع $\frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳س^۲(س ص)^۲} - \frac{ص}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳}(\frac{۱}{س^۲ ص^۲}) - \frac{ص}{س}$

$\frac{د^۲ص}{دس^۲} = \frac{۴}{۳} \times \frac{-(س^۲ \times ۲) ص \frac{دص}{دس} + ۳س^۲ ص^۲}{س^۶ ص^۴} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

$= -\frac{۴}{۳} \times \frac{س^۲ ص (۲ س \frac{دص}{دس} + ۳ ص)}{س^۶ ص^۴} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

$= -\frac{۴}{۳} \times \frac{۲ س \frac{دص}{دس} + ۳ ص}{س^۴ ص^۳} - \frac{س \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

(۵) $۸س + ۶ص \cdot ص = ۰$ ، $ص = -\frac{۴}{۳} \times \frac{س}{ص}$

$ص = -\frac{۴}{۳}(\frac{ص - س \cdot ص}{ص^۲})$

ج) $\frac{ص}{س} = س(-حاص).ص + جتاص$

$\frac{ص}{س}(1 + س حاص) = جتاص$ ، $\frac{ص}{س} = \frac{جتاص}{1+س حاص}$

$\frac{ص}{س^2} = \frac{(1+س حاص)(-حاص)ص - جتاص(س جتاص.ص + حاص)}{(1+س حاص)^2}$

$= \frac{-(حاص)(ص)(1+س حاص) - جتاص(س ص جتاص + حاص)}{(1+س حاص)^2}$

$= -\frac{حاص(ص + جتاص ص) + س ص}{(1+س حاص)^2}$

د) $جتاس = \frac{ص}{\sqrt{ص^2+1}}$ وفيه $ص = \sqrt{ص^2+1}\ جتاس$

$ص = \sqrt{ص^2+1}(-حاس) + جتاس \times \frac{ص}{\sqrt{ص^2+1}}$

$= -\sqrt{ص^2+1}\ حاس + \frac{ص\ جتاس}{\sqrt{ص^2+1}}$

٣) أ) $٨س ص + ٨ص - حاص.ص = ٠$

$ص(٨س - حاص) = -٨ص$ وفيه $ص = \frac{-٨ص}{٨س - حاص}$

$ص\Big|_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})} = \frac{-٨ \times \frac{\pi}{2}}{٨ \times \frac{\pi}{4} - 1} = \frac{-٤\pi}{٢\pi - 1} = \frac{٤\pi}{1 - ٢\pi}$

ب) $٣س^2 - (٢س ص + ٢ص) + ٣ص^2 . ص = ٠$

$ص(٣ص^2 - ٢س) = -٣س^2 + ٢ص$

$ص = \frac{-٣س^2 + ٢ص}{٣ص^2 - ٢س}$ ، $ص\Big|_{(1,-1)} = \frac{-٣ \times ١ + ٢}{٣ - ٢} = -١$

ج) $\frac{ص}{س} = ٣ - \frac{س}{٤} = \frac{١٢ - س}{٤}$ وفيه $\frac{ص}{س} = \frac{٤}{١٢ - س}$

$\frac{ص}{س^2} ص = \frac{(١٢ - س) - س \times ١}{(١٢ - س)^2}$ وفيه $ص = \frac{-١}{(١٢ - س)^2}$

$ص\Big|_{(٤, ٢)} = \frac{-١}{٨^2} = -\frac{١}{٦٤}$

(٣٧)

(٤) $\text{جتا}(س+ص) \times (١+ص') = ص^{٤}(-\text{جا}س) + ٢ص ص' \text{جتا}س$

$ص' \text{جتا}(س+ص) + \text{جتا}(س+ص) = ٢ص ص' \text{جتا}س - ص^{٤}\text{جا}س$

$ص'(\text{جتا}(س+ص) - ٢ص \text{جتا}س) = -\text{جتا}(س+ص) - ص^{٤}\text{جا}س$

$$ص' = \frac{\text{جتا}(س+ص) + ص^{٤}\text{جا}س}{٢ص\text{جتا}س - \text{جتا}(س+ص)}$$

(٥) $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

$ص' = -\sqrt{ص} \times \frac{١}{\sqrt{س}}$

يكون المماس أفقياً إذا كان $ص' = ٠$ أي أن:

$\sqrt{س} = ٣$ ومنه $س = ٩$. يكون المماس أفقياً عند النقطة (٩، ٠)

٦) $ص' = \frac{٣}{٢}(٢س+١)^{\frac{١}{٢}} \times ٢ = \frac{٤}{٣\sqrt{٢س+١}}$

٧) $١ = -\text{جتا}ص \cdot ص'$ ومنه $ص' = \frac{١}{-\text{جتا}ص} = -\text{قا}ص$

$ص'' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times ص' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times -\text{قا}ص$

$= \text{ظا}ص \text{قا}^{٢}ص$

٨) $ص \times -٢\text{جا}٢س + ص' \text{جتا}٢س = س \times ٢\text{جتا}ص \times ص' + \text{جا}٢ص$

$ص'(\text{جتا}٢س - ٢س \text{جتا}ص) = \text{جا}٢ص + ٢ص \text{جا}٢س$

$$ص' = \frac{\text{جا}٢ص + ٢ص\text{جا}٢س}{\text{جتا}٢س - ٢س\text{جتا}ص}$$

$ص'|_{(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})} = \frac{\text{جا}\pi + ٢ \times \frac{\pi}{٢}\text{جا}\frac{\pi}{٢}}{\text{جتا}\pi - ٢ \times \frac{\pi}{٤}\text{جتا}\frac{\pi}{٢}} = \frac{٠ + \pi}{-\frac{\pi}{٢}} = -٢$

(٩) $س ص'' + ص = جتا س$

$ص'' = \frac{جتا س - ص}{س}$

$ص''' = \frac{س(-حا س - ص') - (جتا س - ص)١}{س^{٢}} = \frac{-س حا س - س ص' - جتا س + ص}{س^{٢}}$

$س ص''' + ٢ ص'' + س ص' = \frac{-س حا س - س ص' - جتا س + ص}{س} + ٢ \times \frac{جتا س - ص}{س} + س ص'$

$= \frac{-س حا س - س ص' - جتا س + ص + ٢ جتا س - ٢ ص + س^{٢} ص'}{س}$

بالتعويض عن $س ص'$ بـ $حا س$ و $س ص'$ بـ $جتا س - ص$

$= \frac{-س^{٢} ص - س ص' + س ص' + س^{٢} ص}{س} = صفر$

(١٠) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د س} = (\frac{١}{٤ ن})(٣ ن^{٢} + ٢) = \frac{٣}{٤} ن + \frac{١}{٢ ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{٣}{٤} \times \frac{د ن}{د س} + \frac{-٢ \times د^{٢} ن / د س^{٢}}{(٢ ن)^{٢}} = \frac{٣}{٤} \times ٤ ن - \frac{\frac{١}{٤ ن^{٢}} \times ٢}{(٢ ن)^{٢}}$

$= ٣ - \frac{١}{٣(٢ ن)}$

$\left. \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \right|_{ن = ١} = ٣ - \frac{١}{٨} = \frac{١}{١٦}$

(١١) $١ + ص' = جتا ص \times ص'$

$ص'' = جتا ص \times ص' + ص' (- حا ص) \times ص'$

$(ص')^{٢} جا ص = ص'' (جتا ص - ١)$

$(ص')^{٢} = ص'' \times \frac{جتا ص - ١}{حا ص} = ص'' (ظتا ص - \overline{ظتا ص})$

(١٢) $ص' = جتا س + س ص' + ص$ ، $ص'' = - حا س + س ص'' + ص' + ص'$

$ص'' (١ - س) = ٢ ص' - حا س$ ، $ص'' = \frac{٢ ص' - حا س}{١ - س}$

$ص'' + ص = \frac{٢ ص' - حا س}{١ - س} + ص = \frac{٢ ص' - حا س + ص - س ص}{١ - س}$

$= \frac{٢ ص' + ١(ص - (حا س + س ص))}{١ - س} = \frac{٢ ص'}{١ - س}$

لأن $ص = حا س + س ص$

مراجعة

(١) معدّل التغير $= \frac{ق(س+ص)-ق(س)}{ص}$

$= \frac{ظا(س+ص)-ظاس}{ص} = \frac{\frac{ظاس+ظاص}{١-ظاس\,ظاص}-ظاس}{ص}$

$= \frac{\frac{ظاس+ظاص-ظاس(١-ظاس\,ظاص)}{١-ظاس\,ظاص}}{ص} = \frac{ظاس+ظاص-ظاس+ظا^{٢}س\,ظاص}{ص(١-ظاس\,ظاص)}$

$= \frac{ظاص(١+ظا^{٢}س)}{ص(١-ظاس\,ظاص)} = \frac{ظاص\,قا^{٢}س}{ص(١-ظاس\,ظاص)}$

(٢) $ق'(\frac{\pi}{٤}) = نها_{ص\to٠} \frac{ق(\frac{\pi}{٤}+ص)-ق(\frac{\pi}{٤})}{ص} = نها_{ص\to٠} \frac{جا(\frac{\pi}{٤}+ص)-١}{ص}$

$= نها_{ص\to٠} \frac{جا\frac{\pi}{٤}\,جتا ص + جتا\frac{\pi}{٤}\,جا ص - ١}{ص} = نها_{ص\to٠} \frac{جتا ص - ١}{ص}$

$= نها_{ص\to٠} \frac{-٢جا^{٢}\frac{ص}{٢}}{ص} = نها_{ص\to٠} -جا\frac{ص}{٢} \times نها_{ص\to٠} جا\frac{ص}{٢} = -١ \times صفر = صفر$

(٣) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+س+١ & ٠ \le س < ١ \\ ٤س+١ & ١ \le س < ٢ \\ ٤س+٢ & ٢ \le س < ٣ \\ ٤س+٣ & س = ٣ \end{cases}$ وهو اقتران متصل على $[٠,٣]-\{٢\}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س+١ & ٠ < س < ١ \\ ٤ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & ٢ < س < ٣ \end{cases}$

$ق'_{+}(١) = ٢+١ = ٣$ ، $ق'_{-}(١) = ٤$ ، إذن $ق'(١)$ غير موجودة

$ق'(٢)$ غير موجودة ، لأن $ق(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س+١ & ٠ < س \le ١ \\ ٤ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & ٢ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠, ١, ٢, ٣ \end{cases}$

(٤٠)

(٤) د) $ه'(س) = \sqrt{٨س+٥} \times ل'(س) + ل(س) \times \frac{١}{\sqrt{٨س+٥}}$

$ه'(-١) = \sqrt{٣} \times ل'(-١) + ل(-١) \times \frac{١}{\sqrt{٨(-١)+٥}} = ٢ \times ٢ + ١ \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = ٤\frac{١}{٣}$

ه) $ه'(س) = \frac{(س^{٢}-س)(٢ل(س) \cdot ل'(س)) - (ل(س))^{٢}(٢س-١)}{(س^{٢}-س)^{٢}}$

$ه'(-١) = \frac{(٢)(٢ل(-١) ل'(-١)) - (ل(-١))^{٢}(-٣)}{٢^{٢}} = \frac{٣ \times ١ \times ٢ - ١ \times -٣}{٤} = \frac{١١}{٤}$

ج) $ه'(س) = ل'(س) - \frac{س ل'(س) - ل(س)}{س^{٢}}$

$ه'(-١) = ل'(-١) - \frac{-١ ل'(-١) - ل(-١)}{(-١)^{٢}}$

$= ٢ - \frac{-١ \times ٢ - ١}{١} = ٢ + ٣ = ٥$

د) $ه'(س) = (جا^{٣}\frac{\pi}{٣} ل(س)) + \frac{\pi}{٣} ل'(س)$

$ه'(-١) = جا^{٣}(\frac{\pi}{٣} ل(-١)) \times \frac{\pi}{٣} ل'(-١) = (\frac{\pi}{٣} جا^{٢}\frac{\pi}{٣}) \times ٢$

$= \frac{٣}{\pi} \times ٤ \frac{\pi}{٢} = \frac{٧}{٣}$

(٥) د) $ص = س جا^{٢}س + ظا س$

$ص' = س \times ٢ جا س جتا س + جا^{٢}س + قا^{٢}س$

$= ٢ س جا س ظا س + ٢ جا^{٢}س = ٢ جا^{٢}س (س ظا س + ١)$

$= ٢ جا^{٢}س (١ + ص)$

ب) جتا ص . $\frac{د ص}{د س} = ١$ ومنه $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{جتا ص}$

نجد جتا ص بدلالة س

جتا^{٢}ص + جا^{٢}ص = ١ ، جتا^{٢}ص + س^{٢} = ١

إذن جتا^{٢}ص = ١ − س^{٢} ومنه جتا ص = $\sqrt{١-س^{٢}}$ لأن ص ∈ $(٠, \frac{\pi}{٢})$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{جتا ص} = \frac{١}{\sqrt{١-س^{٢}}}$

٦) $\frac{د س}{د ن} = ٢$ ، ومنه $\frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د س} = (٣ن - ٤) \times \frac{١}{٢} = ن - ٢$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢}$

عندما ن = ٦ ، $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{١}{٢}$

٧) ل(س) = ٢ هـ(س) . ق(س) + ٢ ق(س) . هـ(س)

= ٢ ق(س) . [هـ(س) + ق(س)] = صفر

٨) هـ(س) اقترانه متصل طالما

١) هـ(س) = $\begin{cases} ٤(س+١)^٣ & س < ٠ \\ ٤(س-١)^٣ & س \geq ٠ \end{cases}$

ب) هـ$_+$(٠) = −٤ ، هـ$_-$(٠) = ٤ وعليه هـ(٠) غير موجودة ⇐ هـ(س) = $\begin{cases} ٤(س+١)^٣ & س < ٠ \\ ٤(س-١)^٣ & س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \end{cases}$

٩) ٣ ص^٢ صَ = هـ(٤س^٣ − س)(٨س − ١)

صَ = $\frac{هـ(٤س^٣ - س)(٨س - ١)}{٣ ص^٢}$

نجد ص عندما س = −١ ، ص^٣ = هـ(٥) = −٨ ومنه ص = −٢

صَ $|_{س=-١}$ = $\frac{هـ(٥)(-٩)}{(-٣)^٢}$ = $\frac{٤ \times -٩}{١٢}$ = −٣

١٠) هـ(س) = (جتا ق(س)) ق(س)

هـَ(س) = (جتا ق(س)) . قَ(س) + ق(س) (−ا ق(س)) × قَ(س)

هـَ(١) = جتا ق(١) × قَ(١) − ق(١) ا ق(١) × قَ(١)

= (جتا $\frac{\pi}{٣}$) × ٤ − صفر = $\frac{١}{٢} \times ٤$ = ٢

١١) ق(س) = ٣س^٢ + ٢ ، هـ(س) = ٦س ، ق(س) = ٦ − س

(هـ ○ ص)َ(س) = هـَ(ق(س)) . قَ(س)

(هـ ○ ص)َ(٢) = هـَ(ق(٢)) . قَ(٢) = هـَ(١٢) × ١

= ٧ × ١٢ = ٨٤

١٥) $(هـ \circ ص)''(س) = ((هـ \circ ص)'(س))'$ ، $هـ''(س) = ٦$ ، $ص''(س) = ٦$

$= (هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س) \cdot ص'(س) + هـ'(ص(س)) \cdot ص''(س)$

$(هـ \circ ص)''(٢) = هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢) \cdot ص'(٢) + هـ'(ص(٢)) \cdot ص''(٢)$

$= هـ''(١٢) \times ٦ \times ١٢ \times ١٢ + ٣٤٨ \times ٦ = ١٨٧٢$

١٦) $ل'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(ص(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٢ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$ص'(١) = -٥ ص'(١)$ ومنه $ص'(١) = -\frac{٢}{٥}$

١٣) $\frac{د ص}{د س} = س ص'(س) + ص(س)$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + ص(-١) = -١ \times ٢ + ٦ = ٤$

١٤) $جتاص \cdot ص' = قا^٢ س$ ومنه $ص' = \frac{قا^٢ س}{جتاص}$

$جتاص \times ص' + ص'(-جاص) \cdot ص' = قا س قا س ظا س$

$ص'' جتاص - (ص')^٢ جاص = قا^٢ س ظا س$

باستبدال جاص بـ ظا س

$ص'' جتاص - (ص')^٢ جاص = قا^٢ س$ جاص بالقسمة على جتاص

$ص'' - (ص')^٢ ظاص = قا^٢ س ظاص$

ظاص $(قا^٢ س + (ص')^٢) = ص''$. اذن ظاص $= \frac{ص''}{قا^٢ س + (ص')^٢}$

١٥) $هـ'(٣س - ١)(٣) = \frac{-٢س}{س^٤} + \frac{س^٢}{٢}$

$هـ(٣س - ١) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{س^٢} - \frac{س^٣}{٣})$ ، $٣س - ١ = ٥$ عندما $س = ٢$

$هـ(٥) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٤} - \frac{٨}{٣}) = \frac{١}{٣}(-\frac{٢٩}{١٢}) = -\frac{٢٩}{٣٦}$

١٦) $- جاص \cdot ص' - (س ص' + ص) = ٢$

$- جاص \cdot ص'' + ص'(- جتاص \cdot ص') - (س ص'' + ص' + ص') = ٠$

$ص'' جاص + (ص')^٢ جتاص + س ص'' + ٢ ص' = ٠$

$ص''(س + جاص) + ص'(٢ + ص' جتاص) = ٠$

(٤٣)

(١٧) $ص = أ جتا س + ب جا س$

$(ص)^٢ + ص_١^٢ = أ^٢ جتا^٢ س + ب^٢ جا^٢ س + ٢أ ب جا س جتا س$

$+ أ^٢ جا^٢ س + ب^٢ جتا^٢ س - ٢أ ب جا س جتا س$

$= جتا^٢ س (أ^٢ + ب^٢) + جا^٢ س (أ^٢ + ب^٢)$

$= (أ^٢ + ب^٢)(جتا^٢ س + جا^٢ س) = أ^٢ + ب^٢$

(١٨) $٣ص^٢ ص_١ = هـ(س^٣ - س)(٤س - ١)$

عندما $س = ٠$ يكون $ص^٢ = هـ(٠) = -٨$ ومنه $ص = -٢$

$٣(-٢)^٢ ص_١ |_{س=٠} = هـ(٠) \times ٨$.

$١٢ ص_١ |_{س=٠} = ٤ \times ٨$ ، $ص_١ |_{س=٠} = \frac{٣٢}{١٢} = \frac{٨}{٣}$

(١٩) أ) $هـ(س) = ٣س^٢ - ٢س$ ، $هـ'(س) = ٦س - ٢$ ، $هـ''(س) = ٦$

$ق(س) = ٦س + ١$ ، $ق'(س) = ٦$

$(هـ \circ ق)'(١) = هـ'(ق(١)) \cdot ق'(١)$

$= هـ'(٤) \times ٨ = ٢٢ \times ٨ = ١٧٦$

ب) $(هـ \circ ق)''(س) = ((هـ \circ ق)'(س))' = (هـ'(ق(س)) \cdot ق(س))'$

$= هـ''(ق(س)) \cdot ق'(س) + ق(س) (هـ''(س) \cdot ق(س))$

$(هـ \circ ق)''(١) = هـ''(ق(١)) \cdot ق'(١) + ق(١) (هـ''(ق(١)) \cdot ق(١))$

$= هـ''(٤) \times ٦ + ٨ (هـ''(٤) \times ٨)$

$= ٢٢ \times ٦ + ٨ \times ٦ \times ٨ = ٦٤٢$

(٢٠) أ) $س = ٠$ ب) $س = -١٩٠٫٦$ ج)

(٢١) أ) جـ ب) ب ج) د د) أ

هـ) ب و) د ز) جـ

رياضيات / العلمي / ف1

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثالثة

(تطبيقات التفاضل)

تطبيقات هندسية

تدريب (١) ص ١٦٢ :

$ق(س) = \sqrt{س + ٣}$ عند $(١ ، ٢)$

ميل المماس $= ق'(س)\Big|_{س=١} = \frac{١}{٢\sqrt{س+٣}}\Big|_{س=١} = \frac{١}{٢\times ٢} = \frac{١}{٤}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ١)$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = -٤(س - ١)$

تدريب (٢) ص ١٦٢ :

$ق(س) = \frac{٤}{س}$ ، $\phi(س) = س$

يتقاطعان عندما $ق(س) = \phi(س) \Leftarrow \frac{٤}{س} = س \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

ميل المماس لـ $ق(س)$ عند $س = -٢$ هو $ق'(-٢) = \frac{-٤}{س^٢}\Big|_{س=-٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

ميل المماس لـ $\phi(س)$ عند $س = -٢$ هو $\phi'(-٢) = ١$

وحيث أن $\phi'(-٢) \times ق'(-٢) = ١ \times -١ = -١$ ∴ متعامدان

تدريب (٣) ص ١٦٣ :

$ق(س) = جا س$: $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ميل المماس $=$ المشتقة $= ق'(س) = جتا س$

عند $س = ٠ \Leftarrow جتا س = ١$ ، $ق(٠) = ٠$ ∴ $(٠ ، ٠)$

عند $س = \pi \Leftarrow جتا س = -١$ ، $ق(\pi) = ٠$ ∴ $(\pi ، ٠)$

عند $س = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow جتا س = ٠$ ، $ق(\frac{\pi}{٢}) = ١$ ∴ $(\frac{\pi}{٢} ، ١)$

تدريب (٤) ص ١٦٤ :

$ق(س) = ج س^٣ + د س^٢ + هـ س + ج$ ، ميل المماس $= ق'(س) = ٣ج س^٢ + ٢د س + هـ$

$ق'(٠) = ظا ١٣٥° = -١$

$٤ج + ٢د + هـ = -١ \Leftarrow ٣ج + ٢د + هـ = -١$

$ق(٠) = ٢ \Leftarrow ج = ٢$

$٣ج + ٢د + هـ = -١ \Leftarrow ٦ + ٢د + هـ = -١ \Leftarrow ٢د + هـ = -٧$

$٤ج + ٢د + هـ = -١ \Leftarrow ٨ + ٢د + هـ = -١ \Leftarrow ٢د + هـ = -٩$

$-٧ - هـ = -٩ \Leftarrow هـ = -٢$

$٢د - ٢ = -٧ \Leftarrow ٢د = -٥ \Leftarrow د = -\frac{٥}{٢}$

تدريب (٥) ص ١٦٥

$f(x) = 5 - x^2$ ، النقطة (٣، ٠) لا تقع على منحنى $f(x)$

افرض أن النقطة (x_1, y_1) تقع على منحنى $f(x) \Leftarrow y_1 = 5 - x_1^2$

ميل المماس عند $(x_1, y_1) = f'(x_1) = -2x_1$

معادلة المماس: $y - 0 = -2x_1(x - 3)$

$f(x_1) = y_1 \Leftarrow 5 - x_1^2 = -2x_1(x_1 - 3)$

$5 - x_1^2 = -2x_1^2 + 6x_1 \Leftarrow x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \Leftarrow (x_1 - 1)(x_1 - 5) = 0$

$x_1 = 1$ أو $x_1 = 5$

نقطة المماس الأولى (١، ٤) ومعادلة المماس الأولى: $y - 4 = -2(x - 1)$

" " الثانية (٥، -٢٠) " " الثانية: $y + 20 = -10(x - 5)$

تمارين ومسائل
ص ١٦٦

١) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ ، $f'(x) = 2x + 6$

ميل المماس عند (١، ٢) $= f'(1) = 8$

٢) $f(x) = x^3$ يتقاطع مع المستقيم $y = x + 6$ عندما

$f(x) = y \Leftarrow x^3 = x + 6 \Leftarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftarrow x = 2$

ميل المماس $= f'(2) = 3(2)^2 = 12$

معادلة المماس: $y - 8 = 12(x - 2)$

عند (٢، ٨)

٣) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ، $f'(x) = 3x^2 - 3$

ميل المماس $= f'(x) = \tan\frac{\pi}{4} \Leftarrow 3x^2 - 3 = 1 \Leftarrow 3x^2 = 4 \Leftarrow x^2 = 1 \Leftarrow x = 1$

النقطة (١، ١)

٤) $(y - 4)^2 = x + 2 \Leftarrow 2(y - 4) \times \frac{dy}{dx} = 1 \Leftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 8}$

ميل المنحنى = ميل المستقيم $\Leftarrow \frac{1}{2y - 8} = \frac{1}{2} \Leftarrow 2y = 6 \Leftarrow y = 3$

∴ النقطة (-١، ٣)

٥) $ق(س) = س^٤ - ٤س + ٣$ ، $ق'(س) = ٢س - ٤$ ، ميل المماس $= -٢$

ميل المماس المتناظر مع $س_١ = ق'(س_١) = -٢ \Leftarrow ٢س_١ - ٤ = -٢ \Leftarrow س_١ = ١$

$(١، ٠)$

معادلة المماس: $ص - ٠ = -٢(س - ١) \Leftarrow ص = -٢س + ٢$

٦) $ق(س) = \frac{١}{س^٢}$ عند $(١، ٢)$ ، $ق'(س) = \frac{-٢}{س^٣}$

ميل المماس $= ق'(١) = -٢$ ، ميل العمودي $= \frac{١}{٢}$

معادلة المماس: $ص - ٢ = -٢(س - ١)$

معادلة العمودي: $ص - ٢ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

٧) $ق(س) = س^٣ + ب س + جـ$ عند $(٠، ٢)$ ، $ق'(س) = ٣س^٢ + ب$

$ق(١) = ٢ \Leftarrow \boxed{جـ = ٢}$

$ق'(١) =$ ميل المستقيم $= ١ \Leftarrow ق'(١) = ب = ١ \Leftarrow \boxed{ب = ١}$

٨) $ق(س) = \frac{س^٣}{٣}$ ، معادلة المستقيم $٢س - ص + جـ = ٠$ ، $ق'(س) = \frac{س^٢}{٣}$ ، $ص = ٢$

$ق'(س_١) = ص \Leftarrow \frac{س^٢}{٣} = ٢ \Leftarrow س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

$ق(١) = ص_{س=١} \Leftarrow \frac{١}{٣} = ٢ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = -\frac{٥}{٣}}$

$ق(-١) = ص_{س=-١} \Leftarrow ٢ = -٢ + جـ \Leftarrow \boxed{جـ = ٤}$

٩) العلاقة $س = ص^٢ - ٤ص$ تقاطع مع محور الصادات عندما $س = ٠$

$ص^٢ - ٤ص = ٠ \Leftarrow ص(ص - ٤) = ٠ \Leftarrow ص = ٠$ ، $ص = ٤$

النقطة الأولى $(٠، ٠)$ ، النقطة الثانية $(٠، ٤)$

معادلة المماس الأولى: ميل المماس $= ١ = ٢ص \cdot ص' - ٤ص' \Leftarrow ص' = \frac{١}{٤ - ٢ص}$

$ص - ٠ = -\frac{١}{٤}(س - ٠)$

معادلة المماس الثانية:

$ص - ٤ = \frac{١}{٤} \times س$

١٠) العلاقة $ص^2 + ٦ص = س^3 + ٢س - ٢$ ، $ص^2 + ٦ص + ٩ = س^3 + ٢س + ٧$

$(ص+٣)^2 = (س+١)^3 + ٦$

$(ص+٣)^2 = (س+١)^3 + (\sqrt{٦})^2$

العلاقة تمثل معادلة دائرة مركزها $(-١، -٣)$ ونصف قطرها $\sqrt{٦}$

١١) $ق(س) = ٣ظتا س + ق\sqrt{٣}$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$ ، النقطة $(\frac{\pi}{٤}، ٥)$

$ق(\frac{\pi}{٤}) = ٥ - ٣ظتا \frac{\pi}{٤} + ق\sqrt{٣} = ٥ - ٣ + ق\sqrt{٣} = ق\sqrt{٣} + ٢$

$ق'(س) = ٣قتا^2 س + ق\sqrt{٣} ظا س$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) = ٣(\sqrt{٢})^2 + ق\sqrt{٣} = ٦ + ق\sqrt{٣}$

ميل المماس $= ق'(\frac{\pi}{٤}) = ٦ + ق\sqrt{٣}$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٦ + ق\sqrt{٣}}$

معادلة المماس: $ص - ٥ = (٦ + ق\sqrt{٣})(س - \frac{\pi}{٤})$

معادلة العمودي: $ص - ٥ = \frac{-١}{٦ + ق\sqrt{٣}}(س - \frac{\pi}{٤})$

١٢) منحنى $ص = ق(س)$ يمر بالنقطة $(١، ٢)$ ومنحنى $ق'(س) = س^3 - \frac{٣}{٢}س^2 + \frac{٣}{٢}$

$ق(س) = \frac{١}{٤}س^4 - \frac{١}{٢}س^3 + \frac{٣}{٤}س^2 + ج$

$٢ = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤} + ج \Rightarrow ج = ١$

$ق(س) = \frac{١}{٤}س^4 - \frac{١}{٢}س^3 + \frac{٣}{٤}س^2 + ١$

ميل المماس $= ق'(١) = ١ - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢} = ١$

معادلة المماس: $ص - ٢ = ١(س - ١)$

$ص = س + ١$

١٣) ميل المماس $= ق'(٤) = \frac{\sqrt{٢٥}}{٢}|_{س=٤} = \frac{٥}{٢}$ ، معادلة المماس: $ص - ٣ = \frac{٥}{٢}(س - ٤)$

$ص = \frac{٥}{٢}س - ٧$

المماس يقطع السينات عندما $ص = ٠ \Rightarrow س = \frac{١٤}{٥}$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times \frac{١٤}{٥} \times ٧ = \frac{٤٩}{٥}$ وحدات مربعة

١٤) ميل المماس عند $(٢، ١) = ق'(١) = ٢س$ عندما $س = ١ = ٢$ ، ميل العمودي عند $(٢، ١) = -\frac{١}{٢}$

معادلة المماس: $ص - ٢ = ٢(س - ١) \Rightarrow ص = ٢س$ تقطع محور السينات عند $س = ٠$

معادلة العمودي: $ص - ٢ = -\frac{١}{٢}(س - ١) \Rightarrow ص = -\frac{١}{٢}س + \frac{٥}{٢}$ تقطع محور السينات عند $س = ٥$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢ = ٥$ وحدات مربعة

تطبيقات فيزيائية

تدريب (١) ص ١٦٩ :

$ف(ن) = ٤ جا٣ن - ٥ جتا٣ن$

$ف(\frac{\pi}{٢}) = ٤ جا\frac{\pi}{٢} - ٥ جتا\frac{\pi}{٢} = ٤ - ٠ = ٤$ متر

$ف'(ن) = ١٢ جتا٣ن + ١٥ جا٣ن \Leftarrow ف'(\frac{\pi}{٢}) = ١٢ جتا\frac{\pi}{٢} + ١٥ جا\frac{\pi}{٢} = ٠ + ١٥ = ١٥$ م/ث

$ف''(ن) = -٣٦ جا٣ن + ٤٥ جتا٣ن \Leftarrow ف''(\frac{\pi}{٢}) = -٣٦ جا\frac{\pi}{٢} + ٤٥ جتا\frac{\pi}{٢} = -٣٦ + ٠ = -٣٦$ م/ث^٢

تدريب (٢) ص ١٦٩ :

$ف(ن) = ن^٣ - ٩ن^٢ + ١٥ن$ ، $ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٨ن + ١٥ = ٠ \Leftarrow ٣(ن-١)(ن-٥) = ٠$

$ن = ١$ ث ، $ن = ٥$ ث

$ف''(ن) = ٦ن - ١٨ \Leftarrow ف''(١) = ٦ - ١٨ = -١٢$ م/ث^٢ ، $ف''(٥) = ٣٠ - ١٨ = ١٢$ م/ث^٢

تدريب (٣) ص ١٧٠ :

$ف(ن) = ٥٠ن - ٥ن^٢ \Leftarrow ف'(ن) = ٥٠ - ١٠ن \Leftarrow ع(ن) = -٥٥ \Leftarrow ١٠ن = ٥٥$

$\Leftarrow ن = ٨$ ث ، أي بعد ٨ ثوانٍ يكون الجرم على ارتفاع أقصى

$ف(٨) + ل = ٠ \Leftarrow ٥٠ - ٣٢٠ + ل = ٠ \Leftarrow ل = ٢٧٠$ م ارتفاع البرج

تمارين ومسائل ص ١٧١

١) $ف(ن) = ن^٣ - ٦ن^٢ + ٩ن + ٣$

٢) $ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٢ن + ٩ \Leftarrow ع(١) = ٩$ م/ث

٣) $ع(ن) = ٠ \Leftarrow ٣(ن-١)(ن-٣) = ٠ \Leftarrow ن = ١$ ث ، $ن = ٣$ ث

$ت(ن) = ف'(ن) = ٦ن - ١٢ \Leftarrow ت(١) = -٦$ م/ث^٢ ، $ت(٣) = ٦$ م/ث^٢

٤) $ف(ن) = ٢ جا(\frac{\pi}{٦}ن) + \frac{\pi}{٣}ن$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٢ \times \frac{\pi}{٦} جتا\frac{\pi}{٦}ن + \frac{\pi}{٣} = جتا\frac{\pi}{٦}ن + \frac{\pi}{٣} \Leftarrow \frac{\pi}{٣} = -جتا\frac{\pi}{٦}ن$

$ن = \frac{\pi}{٣} \Leftarrow ت(ن) = ف''(ن) = -جتا\frac{\pi}{٦}ن \Leftarrow ت(\frac{\pi}{٣}) = -جتا\frac{\pi}{٦} = \frac{١}{٢}$ م/ث^٢

٥) $ف(ن) = ٦,٩ن - ٤,٩ن^٢$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٦,٩ - ٩,٨ن \Leftarrow ع(ن) = ٠ \Leftarrow ن = \frac{٦,٩}{٩,٨} = ٢$ ث

$ف(٢) = ٦,٩ \times ٢ - ٤,٩ \times ٤ = ١٣,٨ - ١٩,٦ = -٥,٨$ م

$ت(ن) = ف''(ن) = -٩,٨$ م/ث^٢

ج) $ع(٤) = ٦,٩ - ٩,٨ \times ٤ = -٦,٩$ م/ث

د) $ف(ن) = ١٢٨ن - ١٦ن^٢ \Leftarrow ع(ن) = ف'(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن \Leftarrow ف'(ن) = ٠ \Leftarrow ن = ٤$ ث

$ع(٨) = -١٢٨$ ، $ع(٠) = ١٢٨$ ، $ع(٤) = ٠$

هـ) $ت(ن) = ف''(ن) = -٣٢$ قدم/ث^٢ ، $ع(٠) = ١٢٨$ قدم/ث

و) $ع(٧,٥) = ١٢٨ - ٣٢ \times ٧,٥ = ٤$ قدم/ث ، $ف(٧,٥) = ١٢٨ \times ٧,٥ - ١٦ \times ٥٦,٢٥ = ٥٦$ قدم

ه) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(ن) = ٨٠ ⇒ ٩٦ن − ١٦ن² = ٨٠ ⇒ ١٦(ن − ١)(ن − ٥) = ٠

ع(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ع(١) = ٦٤ قدم/ث ، ع(٥) = −٦٤ قدم/ث

و) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف′(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇒ ن = ١٠/٤

ف(١٠/٤) = ٩٦ × ١٠/٤ − ١٦ × (١٠/٤)² = ٢٠٤ قدم

ز) ف(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ن − ١٦ن² = ٠ ⇒ ن = ٦ ثانية

ح) ع(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ع(٦) = −٩٦ قدم/ث

ط) ع(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇒ ن = ٣ ثانية ، أقصى ارتفاع = ف(٣) = ١٤٤ قدم

ي) ف(٦) = ٠ ⇒ ١٤٤ − ١٦(٣ − ك)² = ٠ ⇒ (٣ − ك)² = ٩ ⇒ ٣ − ك = ±٣

⇒ ك = ٦ ثانية

ك) ف(ن) = ١٤٤ − ١٦(ن − ٣)² ⇒ أقصى ارتفاع = ١٤٤ قدم

ل) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف′(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ف″(ن) = −٣٢ ⇒ التسارع = ٣٢ قدم/ث²

م) ف(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ن − ١٦ن² = ٠ ⇒ ن = ٦ ثانية

ن) ع(٦) = −٩٦ قدم/ث

س) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٣) = ١٤٤ قدم

ع) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٤) = ١٤٠ قدم

المسافة = ١٤٤ + (١٤٤ − ١٤٠) = ١٤٨ قدم

ف) ن = √(٩ + ٢٤٠) / ٤ = ٣ + ٢√٦٠ ث

ص) ع(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇒ ن = ٣ ثانية ، زمن الصعود + زمن الهبوط = ٦ ث

ق) ع(ن) = ٠ ⇒ ٩٦ − ٣٢ن = ٠ ⇒ ن = ٣ ث ، ف(٣) = ١٤٤ − ١٦(٣ − ٣)² = ١٤٤ قدم

ر) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ، ع(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ع(٣) = ٩٦ − ٣٢(٣) = −٩٦ قدم/ث

ش) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف′(ن) = ٩٦ − ٣٢ن ⇒ ف″(ن) = −٣٢ ⇒ التسارع = ٣٢ قدم/ث²

ت) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٦) = ٠ ⇒ ٩٦ − ١٦(٦ − ك)² = ٠ ⇒ (٦ − ك)² = ٦ ⇒ ٦ − ك = ±٦

⇒ ك = ١٢ ثانية

ث) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٣) = ١٤٤ قدم

خ) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٤) = ١٤٠ قدم

المسافة = ١٤٤ + (١٤٤ − ١٤٠) = ١٤٨ قدم

ذ) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٦) = ٠ ⇒ ٩٦ − ١٦(٦ − ك)² = ٠ ⇒ (٦ − ك)² = ٦ ⇒ ٦ − ك = ±٦

⇒ ك = ١٢ ثانية

ض) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٣) = ١٤٤ قدم

ظ) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٤) = ١٤٠ قدم

المسافة = ١٤٤ + (١٤٤ − ١٤٠) = ١٤٨ قدم

غ) ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن² ⇒ ف(٦) = ٠ ⇒ ٩٦ − ١٦(٦ − ك)² = ٠ ⇒ (٦ − ك)² = ٦ ⇒ ٦ − ك = ±٦

⇒ ك = ١٢ ثانية

المعدلات المرتبطة بالزمن

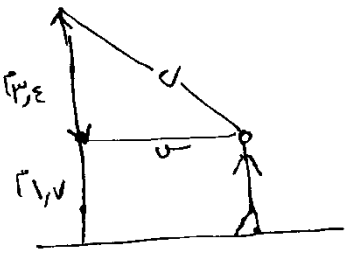
تدريب (١) ص ١٧٥ :

$\frac{ds}{dt} = -10$ سم/ث ،

ا) $ح = \frac{4}{3}\pi نق^3 \Rightarrow \frac{dح}{dt} = 4\pi نق^2 \cdot \frac{dنق}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dح}{dt}\right|_{نق=10} = 4 \times \pi \times 10^2 \times 10 = 4000\pi$ سم^3/ث

ب) $م = 4\pi نق^2 \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 8\pi نق \cdot \frac{dنق}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dم}{dt}\right|_{نق=5} = 8 \times \pi \times 5 \times -10 = -400\pi$ سم^2/ث

تدريب (٢) ص ١٧٦ :

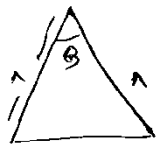


$\frac{ds}{dt} = 2$ م/ث ، $\left|\frac{dل}{dt}\right|_{س=3م} =$

$ل = \sqrt{س^2 + (3,4)^2} \Rightarrow \frac{dل}{dt} = \frac{2س \times \frac{ds}{dt}}{2\sqrt{س^2 + (3,4)^2}}$

$\left|\frac{dل}{dt}\right|_{س=3م} = \frac{2 \times 3 \times 2}{2\sqrt{9 + (3,4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{20,56}}$ م/ث

تدريب (٣) ص ١٧٧



$\frac{dθ}{dt} = 0,2$ د/ث

ا) $م = \frac{1}{2} \times 64 \times جا\theta \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 32 \times جتا\theta \times \frac{dθ}{dt}$

$\left|\frac{dم}{dt}\right|_{θ=60°} = 32 \times جتا60° \times 0,2 = 3,2$ سم^2/ث

ب) $\left|\frac{dم}{dt}\right|_{θ=120°} = 32 \times جتا120° \times 0,2 = -3,2$ سم^2/ث

تمرين (١) ص ١٧٩

$\frac{ds}{dt} = -1000$ سم/ث حيث :

$ح = س^3 \Rightarrow \frac{dح}{dt} = 3س^2 \frac{ds}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dح}{dt}\right|_{س=10سم} = 3 \times 100 \times -1000 = -300000$ سم^3/ث

$م = 6س^2 \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 12س \frac{ds}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dم}{dt}\right|_{س=10سم} = 12 \times 10 \times -1000 = -120000$ سم^2/ث

تمرين (٢) ص ١٧٩

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}$ م/ث ، $\left|\frac{dy}{dt}\right| =$

$s = 24$ م

$s^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - s^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-s}{\sqrt{25-s^2}} \times \frac{ds}{dt}$

$= \frac{-24}{\sqrt{25-16}} \times \frac{1}{2} = -\frac{12}{3} = -4$ م/ث

٣) تدريب (٣) :

$\frac{dv}{dt} = 12$ سم^3/ث ، $\left|\frac{dh}{dt}\right| =$

$h = 14$ سم

$\frac{r}{h} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

$r = \frac{2}{7} h$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \frac{4}{49} h^2 \times h = \frac{4\pi}{147} h^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{49} h^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow 12 = \frac{4\pi}{49} \times 14^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{147}{49\pi} = \frac{3}{\pi}$ سم/ث

٤) تدريب (٤) :

$\frac{dh}{dt} = 2.4$ كم/ساعة ، $\frac{ds}{dt} = 3.2$ كم/ساعة

$\left|\frac{dl}{dt}\right| =$

$h = 4.8$ كم

$s = 6.4$ كم

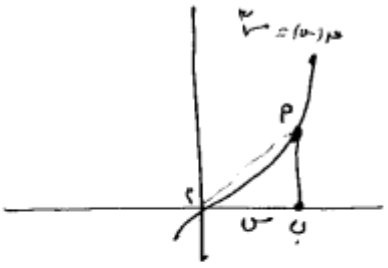
$l = \sqrt{s^2 + h^2 - 2sh\cos\theta^\circ} = \sqrt{s^2 + h^2 + sh}$

$\frac{dl}{dt} = \frac{2s\frac{ds}{dt} + 2h\frac{dh}{dt} + s\frac{dh}{dt} + h\frac{ds}{dt}}{2\sqrt{s^2 + h^2 + sh}}$

$= \frac{2 \times 6.4 \times 3.2 + 2 \times 4.8 \times 2.4 + 6.4 \times 2.4 + 4.8 \times 3.2}{2\sqrt{6.4^2 + 4.8^2 + 6.4 \times 4.8}}$

$= \frac{40.96 + 23.04 + 15.36 + 15.36}{2\sqrt{40.96 + 23.04 + 30.72}} = \frac{94.72}{2\sqrt{94.72}} = \frac{\sqrt{94.72}}{2} = 4.86$ كم/ساعة

تمرين (5)



$\frac{ds}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{س=3\\ن=1ث}} = ؟$

$ص = \frac{1}{2} \times س \times س^3 = \frac{1}{2} س^4$

$\frac{dy}{dt} = 4س^3 \frac{ds}{dt}$ ، ن = 1 ث طبعًا س = 2 سم

$\left|\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{س=2\\ن=1ث}} = 4 \times 8 \times 2 = 64$ سم/ث

تمرين (6)

$\frac{dل}{dن} = 10$ سم/ث ، $\left|\frac{dخ}{dن}\right|_{ن=\frac{\pi}{6}} = ؟$

$ل = 8$ جتا $ن \Rightarrow ل = 0 \Leftarrow 8$ جتا $ن = 0 \Rightarrow \frac{dل}{dن} = 0 \Rightarrow \frac{dخ}{dن} = 0$

$خ = \sqrt{ل^2 + 8^2 - 2 \times ل \times 8 \times$ جتا $ن}$

$\frac{dخ}{dن} = \frac{ل \times \frac{dل}{dن} - 8 \times \frac{dل}{dن} \times$ جتا $ن$

$\left|\frac{dخ}{dن}\right|_{ن=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{100 - 80 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \times 10}{\sqrt{100 - 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{10\sqrt{37}}{\sqrt{100 - 40\sqrt{3}}}$ سم/ث

تمرين (7)

$\frac{dس}{dن} = 4$ سم/ث ، $\left|\frac{dص}{dن}\right|_{س=10} = ؟$

$ص = 100 - س^2$

$\frac{dص}{dن} = -2س \frac{dس}{dن} \Rightarrow \left|\frac{dص}{dن}\right|_{\substack{س=10\\ن=1ث}} = -20 \times 4 = -80$ سم/ث

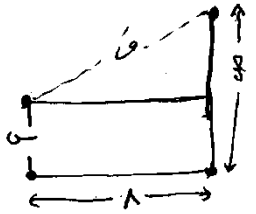
تمرين (8)

$\frac{dس}{dن} = 3$ سم/ث ، $\left|\frac{dم}{dن}\right|_{س=10} = ؟$

$م = 4س^2 - س^3$

$\frac{dم}{dن} = 8س \frac{dس}{dن} - 3س^2 \frac{dس}{dن} \Rightarrow \left|\frac{dم}{dن}\right|_{\substack{س=10\\ن=1ث}} = (80 - 300) \times 3 = -660$ سم/ث

تمرين (٩) :



$\frac{ds}{dt} = 2$ م/ث ، $\frac{dص}{dt} = 1$ م/ث ، $\left|\frac{df}{dt}\right| =$

ص = ٣ ث مقدار ثابت

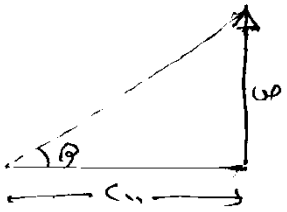
$ف = \sqrt{(ص-س)^2 + 64}$ ⇒ $\frac{df}{dt} = \frac{2(ص-س)\left(\frac{dص}{dt} - \frac{ds}{dt}\right)}{2\sqrt{(ص-س)^2+64}}$

$\frac{df}{dt} = \frac{(8-2)(2-1)}{\sqrt{36+64}} = \frac{6}{10} = 0.6$ م/ث

$س = \frac{ds}{dt} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ م

$ص = \frac{dص}{dt} \times 3 = 2 \times 3 = 6$ م

تمرين (٦) :



$\frac{dص}{dt} = 100$ م/ث ، $\left|\frac{dθ}{dt}\right| =$

ص = ٤٠٠

$ظاθ = \frac{ص}{100}$

$قاθ \frac{dθ}{dt} = \frac{1}{100} \frac{dص}{dt}$

$\frac{dθ}{dt} = \frac{1}{100} \times 100 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ راديان/ث

$قاθ = ظاθ + 1$

$ظاθ = \frac{400}{100} = 4$

$قاθ = 4 + 1 = 5$

النقط الحرجة

تدريب (١)

$$ق(س) = س^3 - 12س + 1 \quad ; \quad س \in [-3, 3]$$

$$ق'(س) = 3س^2 - 12$$

$$ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12 = 0 \Leftarrow س = \pm 2$$

$ق'(س)$ غير موجودة عند $س = \pm 3$

∴ النقط الحرجة هي

$$(-3, -17), (-2, 17), (2, -15), (3, 3), (-3, 19)$$

تدريب (٢)

$$ق(س) = جتاس - جا^2 س \quad ; \quad س \in [0, 2\pi]$$

$$ق'(س) = -جاس - 2جاس جتاس$$

$$ق'(س) = 0 \Leftarrow -جاس(1 + 2جتاس) = 0 \Leftarrow جاس = 0 \Leftarrow س = \pi$$

$$\Leftarrow جتاس = -\frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$ق'(س)$ غير موجودة عندما $س = 0, 2\pi$

النقط الحرجة $(0, 1), (\pi, -1), (\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}), (\frac{4\pi}{3}, \frac{5}{4})$

تدريب (٣)

$$ق(س) = \sqrt[3]{س^4} \quad ; \quad س \in [-2, 4]$$

$$ق'(س) = \frac{4}{3} س^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{س}}$$

$ق'(س) = 0$ لا يوجد قيم لـ $س$

$ق(س)$ غير موجودة عندما $س = \pm 2, س = 0$

∴ النقط الحرجة $(-2, \sqrt[3]{16}), (0, 0), (2, \sqrt[3]{16})$

تدريب (٤)

$$ق(س) = |س^2 - 2س| \quad ; \quad س \in [1, 4]$$

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 2س & ; \ 2 \leq س \leq 4 \\ -س^2 + 2س & ; \ 1 \leq س < 2 \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} 2س - 2 & ; \ 2 < س < 4 \\ -2س + 2 & ; \ 1 < س < 2 \end{cases}$$

$ق'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = 2$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 1 \notin (1, 2)$

$س = 1 \notin (2, 4)$

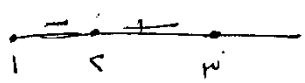
$ق(س)$ غير موجودة عندما $س = 2$

لأن $ق'(2) \neq ق'(2)$

كذلك عند اطراف الفترة عند $س = 1, 4$

∴ النقط الحرجة هي

$$(1, 1), (2, 0), (3, 3), (4, 8)$$



تمرين (1)

ه) $ص(س) = س^4 + 4س + 1$ ، $س \in [-2, 2]$

$ص'(س) = 4س^3 + 4 = 0 \Leftarrow س^3 = -1 \Leftarrow س = -1$

$ص(-1) = 1 - 4 + 1 = -2$

$ص(-2) = 16 - 8 + 1 = 9$

$ص(2) = 16 + 8 + 1 = 25$

∴ النقط الحرجة هي $(-2, 9)$ ، $(-1, -2)$ ، $(2, 25)$

$ص(س)$ غير موجودة عندما $س = 2$

$ص(س) = 0 \Leftarrow 4 - س^2 = 0 \Leftarrow س = \pm 2$

$ص(-2) = 0$ ، $ص(2) = 0$

$ص(س) = \begin{cases} 4 - س^2 & ، -2 \le س \le 2 \\ س^2 - 4 & ، س < -2 \text{ أو } س > 2 \end{cases}$

$ص'(س) = \begin{cases} -2س & ، -2 < س < 2 \\ 2س & ، س < -2 \text{ أو } س > 2 \end{cases}$

$ص'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $ص'(س)$ غير موجودة عندما $س = \pm 2$

∴ النقط الحرجة $(-2, 0)$ ، $(0, 4)$ ، $(2, 0)$

و) $ص(س) = |س^2 - 1|$ ، $س \in [-2, 3]$

$ص(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س \le -1 \text{ أو } س \ge 1 \\ 1 - س^2 & ، -1 < س < 1 \end{cases}$

$ص'(س) = \begin{cases} 2س & ، س < -1 \text{ أو } س > 1 \\ -2س & ، -1 < س < 1 \end{cases}$

$ص'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $ص'(س)$ غير موجودة عندما $س = \pm 1$

∴ النقط الحرجة $(-1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$

ز) $ص(س) = |جتاس|$ ، $س \in [0, 2\pi]$

$ص(س) = \begin{cases} جتاس & ، 0 \le س \le \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2} \le س \le 2\pi \\ -جتاس & ، \frac{\pi}{2} < س < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$ص'(س) = \begin{cases} -جاس & ، 0 < س < \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2} < س < 2\pi \\ جاس & ، \frac{\pi}{2} < س < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$ص'(س) = 0 \Leftarrow س = \pi$ ، $ص'(س)$ غير موجودة عندما $س = \frac{\pi}{2}$ ، $س = \frac{3\pi}{2}$

∴ النقط الحرجة $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ، $(\pi, 0)$ ، $(\frac{3\pi}{2}, 1)$

ح) $ص(س) = س^3 - 3س^2 + 4$ ، $س \in [-1, 3]$

$ص'(س) = 3س^2 - 6س = 0 \Leftarrow 3س(س - 2) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $س = 2$

$ص'(س)$ غير موجودة عندما $س = 3$

$ص(-1) = -1 - 3 + 4 = 0$

$ص(0) = 4$

$ص(2) = 8 - 12 + 4 = 0$

$ص(3) = 27 - 27 + 4 = 4$

∴ النقط الحرجة $(-1, 0)$ ، $(0, 4)$ ، $(2, 0)$ ، $(3, 4)$

ط) $ص(س) = 3س^{\frac{2}{3}} - 2س$ ، $س \in [-1, 1]$

$ص'(س) = 2س^{-\frac{1}{3}} - 2 = 0 \Leftarrow 2 = \frac{2}{س^{\frac{1}{3}}} \Leftarrow س^{\frac{1}{3}} = 1 \Leftarrow س = 1$

$ص'(س)$ غير موجودة عندما $س = 0$

$ص(-1) = 3 + 2 = 5$

$ص(0) = 0$

$ص(1) = 3 - 2 = 1$

∴ النقط الحرجة $(-1, 5)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 1)$

ي) $ص(س) = \begin{cases} 3 - س & ، -1 \le س \le 1 \\ س^2 + 1 & ، 1 < س \le 3 \end{cases}$ ، $س \in [-1, 3]$

$ص'(س) = \begin{cases} -1 & ، -1 < س < 1 \\ 2س & ، 1 < س < 3 \end{cases}$

$ص'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $ص'(س)$ غير موجودة عندما $س = 1$

∴ النقط الحرجة $(0, 3)$ ، $(1, 2)$

ك) $ص(س) = \begin{cases} 2 & ، -1 \le س \le 1 \\ س^3 & ، 1 < س \le 3 \end{cases}$ ، $س \in [-1, 3]$

$ص'(س) = \begin{cases} 0 & ، -1 < س < 1 \\ 3س^2 & ، 1 < س < 3 \end{cases}$

$ص'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $ص'(س)$ غير موجودة عندما $س = 1$

∴ النقط الحرجة $(0, 2)$ ، $(1, 2)$

ل) $ص(س) = \begin{cases} 3 - س^2 & ، -1 \le س \le 2 \\ 3س - 4 & ، 2 < س \le 3 \end{cases}$ ، $س \in [-1, 3]$

$ص'(س) = \begin{cases} -2س & ، -1 < س < 2 \\ 3 & ، 2 < س < 3 \end{cases}$

$ص'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $ص'(س)$ غير موجودة عندما $س = 2$

∴ النقط الحرجة $(0, 3)$ ، $(2, -1)$

تعويض (٥):

$ق(س) = س^3 + أ س^2 + ب س + ٤$ له نقطة حرجة عند $س = -1 ، ٣$

$ق'(س) = ٣س^2 + ٢أ س + ب$

$ق'(-1) = ٠ \Leftarrow ٣ - ٢أ + ب = ٠ \Leftarrow -٢أ + ب = -٣$

$ق'(٣) = ٠ \Leftarrow ٢٧ + ٦أ + ب = ٠ \Leftarrow ٦أ + ب = -٢٧$

$٨أ = -٢٤ \Leftarrow أ = -٣ ، ب = -٩$

تمرين (٣)

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = -٣ ، س = ٠$

$ق(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = -٣ ، س = ٣$

$\therefore$ النقط الحرجة $(-٣ ، ق(-٣))$ ، $(-٢ ، ق(-٢))$ ، $(٠ ، ق(٠))$ ، $(٣ ، ق(٣))$

تمرين (٤)

$ق(س) = \frac{س^3 - ١}{س^3 + ١} \Leftarrow ق'(س) = \frac{(س^3 + ١)(٣س^2) - (س^3 - ١)(٣س^2)}{(س^3 + ١)^2} = \frac{(٣س^2)(س^3 + ١ - س^3 + ١)}{(س^3 + ١)^2}$

$ق'(س) = \frac{٦س^2}{(س^3 + ١)^2} \Leftarrow ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٦س^2 = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ق(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س^3 + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$ لا ينتمي لمجال

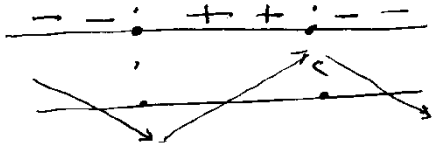
النقطة الحرجة $(٠ ، ١)$

التزايد والتناقص

تدريب (1)

$ق(س) = س^3 - 3س^2 - 2 \Rightarrow ق'(س) = 3س^2 - 6س \Rightarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س(س-2) = 0$

$س = 0 \ ، \ س = 2$

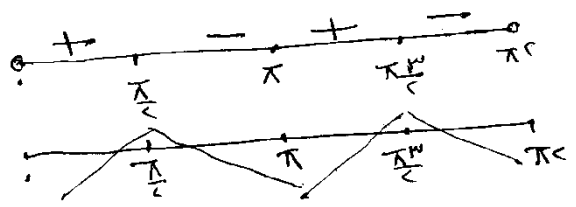


نلاحظ أن اقتران $ق(س)$ متزايد في الفترة $[0, 2]$ ومتناقص في $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

تدريب (2):

$ق(س) = جا^2 س \ ، \ س \in [0, 2\pi] \Rightarrow ق'(س) = 2 جاس \ جتاس \ ، \ س \in (0, 2\pi)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 2 جاس \ جتاس = 0 \Leftarrow جاس = 0 \ ، \ جتاس = 0 \Leftarrow س = \pi \ ، \ س = \frac{\pi}{2} \ ، \ س = \frac{3\pi}{2}$

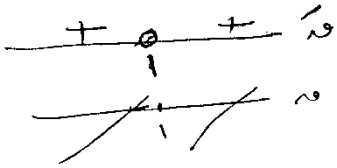


$ق$ متزايد في $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

$ق$ متناقص في $[\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

تدريب (3):

$ق(س) = \sqrt[3]{س - 1} \Rightarrow ق'(س) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(س-1)^2}}$

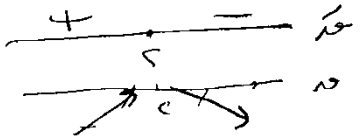


$ق(س)$ متزايد في $ح$

تمارين ومسائل

1)

أ) $ق(س) = 4س - س^2 \Rightarrow ق'(س) = 4 - 2س = 0 \Leftarrow س = 2$

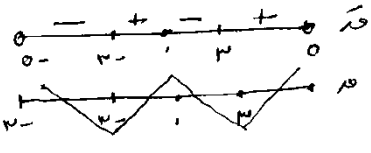


$ق(س)$ متزايد في $(-\infty, 2]$

$ق(س)$ متناقص في $[2, \infty)$

ب) $ق(س) = |س^2 - 9| = \begin{cases} س^2 - 9 & ، \ س \leq -3 \\ 9 - س^2 & ، \ -3 \leq س \leq 3 \\ س^2 - 9 & ، \ س \geq 3 \end{cases} \Rightarrow ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، \ س < -3 \\ -2س & ، \ -3 < س < 3 \\ 2س & ، \ س > 3 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow$ يوجد $س = -3 \ ، \ 0 \ ، \ 3$

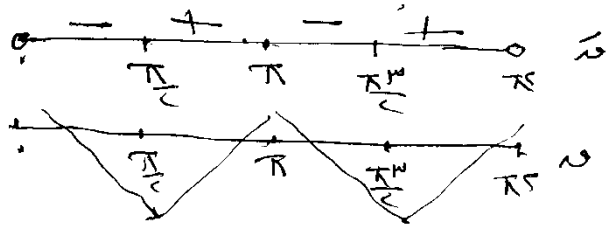


$ق(س)$ متزايد في $[-3, 0] \cup [3, \infty)$

$ق(س)$ متناقص في $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$

ق) $ق'(س) = جتا^2 س - جا^2 س = جتا 2س = 0 \Leftarrow 2س = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Leftarrow س = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow$ غير معرفة $\Leftarrow$ لا يوجد

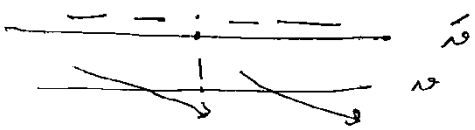


ق متزايدة في $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$

ق متناقصة في $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$

د) $ق(س) = (1 - س)^3 \Leftarrow ق'(س) = -3(1-س)^2 \Leftarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

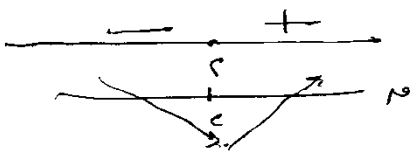
ق متناقصة في ح



هـ) $ق(س) = (2 - س)^4 \Leftarrow ق'(س) = -4(2-س)^3 \Leftarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 2$

ق متزايدة في $(-\infty, 2]$

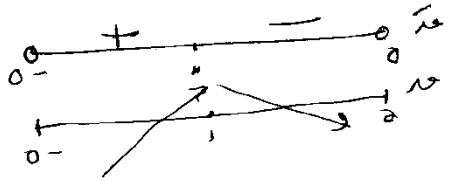
ق متناقصة في $[2, \infty)$



و) $ق(س) = \sqrt{25 - س^2} \Leftarrow ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{25-س^2}} \Leftarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

ق متزايدة في $[-5, 0]$

ق متناقصة في $[0, 5]$

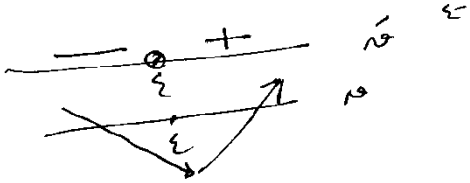


ز) $ق(س) = \sqrt[3]{(س-4)^2} = (س-4)^{\frac{2}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{2}{3}(س-4)^{-\frac{1}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{2}{3\sqrt[3]{س-4}}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow$ غير موجود $\Leftarrow س = 4$

ق متناقصة في $(-\infty, 4]$

ق متزايدة في $[4, \infty)$

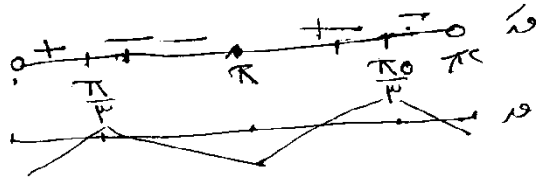


ح) $ق(س) = جتا س - \frac{1}{2} جتا 2س \Leftarrow ق'(س) = -جا س + جا 2س = -جا س + 2 جا س جتا س = جا س (2 جتا س - 1)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow جا س = 0 \Leftarrow س = \pi$ أو $جتا س = \frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

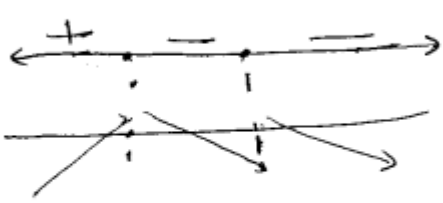
ق متزايدة في $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\pi, \frac{5\pi}{3}]$

ق متناقصة في $[\frac{\pi}{3}, \pi] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$



ب) $ق(س) = \begin{cases} 3-س^2 ، & س \leq 1 \\ \frac{س}{س^2} ، & س > 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $ق'(س) = \begin{cases} -2س ، & س \leq 1 \\ \frac{-2}{س^3} ، & س > 1 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

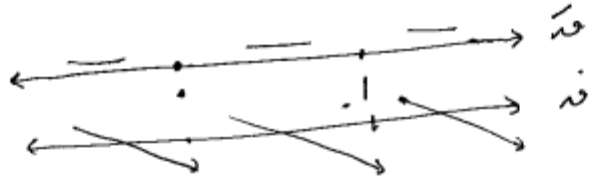


$ق(س)$ متزايدة في $(-\infty, 0]$

$ق(س)$ متناقصة في $[0, \infty)$

ج) $ق(س) = \begin{cases} 4-س^3 ، & س < 1 \\ \frac{3}{س} ، & س \geq 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $ق'(س) = \begin{cases} -3س^2 ، & س < 1 \\ \frac{-3}{س^2} ، & س \geq 1 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

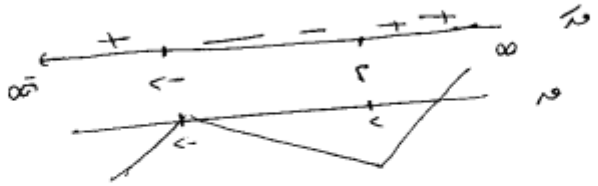


$ق(س)$ متناقصة في $ح$

الفترتين

د) $ق(س)$ متزايدة في $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$ق(س)$ متناقصة في $[-2, 2]$

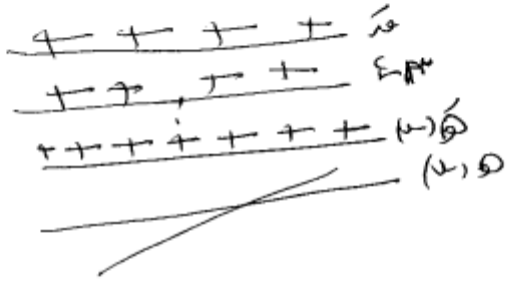


هـ) $ك(س) = ق(س) + س^3$

$ك'(س) = ق'(س) + 3س^2$

بما أن $ك'(س) > 0$

$\therefore$ $ك(س)$ متزايدة في $[-9, 9]$



تدريب (١)

$م(س) = س^3 - 6س^2 + 9س + 2$ ، $س \in [-1, 5]$

$م'(س) = 3س^2 - 12س + 9 = 0 \Rightarrow$ ح $م'(س) = 0$ عند $س = 3$ ، $س = 1$

$م'(س) = 3(س^2 - 4س + 3) = 3(س - 3)(س - 1) = 0$

$س$	-1		3	5
$م'(س)$		$+$	0	$-$
$م(س)$	-18	↗	2	↘

$\therefore$ القيمة العظمى المطلقة $= 2$ عند $س = 3$

القيمة الصغرى المطلقة $= -18$ عند $س = -1$

تدريب (٢)

$م(س) = |س^2 - 4|$ ، $س \in [-3, 4]$

$$م(س) = \begin{cases} س^2 - 4 & \text{إذا } س \leq -2 \text{ أو } س \geq 2 \\ -س^2 + 4 & \text{إذا } -2 < س < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ح'(س) = \begin{cases} 2س & \text{إذا } س < -2 \text{ أو } س > 2 \\ -2س & \text{إذا } -2 < س < 2 \end{cases}$$

ح'(س) غير موجودة عند $س = \pm 2$

ح'(س) $= 0 \Leftarrow س = 0$

$س$	-3		-2		2	4
$م'(س)$	$-$	$-$	غير موجودة	$+$	0	$-$
$م(س)$	5	↘	0	↗	4	↘

القيمة العظمى المطلقة $= 5$ عند $س = -3$

القيمة الصغرى المطلقة $= 0$ عند $س = \pm 2$

تدريب (٣)

$م(س) = س^4 - 4س^3 + 1$ ، $س \in [-3, 4]$

$م'(س) = 4س^3 - 12س^2 = 0 \Rightarrow$ ح $م'(س) = 0$ عند $س = 3$ ، $س = 0$

$س$	-3		0	3	4
$م'(س)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$م(س)$	136	↘	1	↗	-26

القيمة العظمى المطلقة $= 136$ عند $س = -3$

القيمة الصغرى المطلقة $= -26$ عند $س = 3$

تدريب (٤)

$م(س) = س + 2\cos س$ ، $س \in [0, 2\pi]$ ، ح $م(س) = 1 + 2\cos س = 0$

$\cos س = -\frac{1}{2} \Rightarrow س = \frac{2\pi}{3}$ حيث $س \in [0, 2\pi]$

$س$	0		$\frac{2\pi}{3}$	2π
$م'(س)$	$+$	$+$	0	$+$
$م(س)$	2	↗	$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$	↗

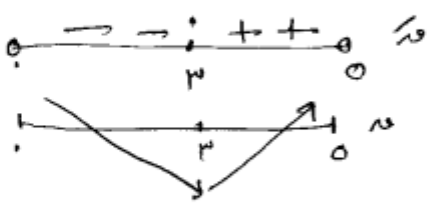
القيمة العظمى المطلقة $= 2\pi$ عند $س = 2\pi$

القيمة الصغرى المطلقة $= 0$ عند $س = 0$

تمارين ومسائل

أ) $م(س) = س^3 - 6س^2 + 9 \Rightarrow م'(س) = 3س^2 - 12س + 9$

$م'(س) = 0 \Leftrightarrow س = 1$ أو $س = 3$



للاقتران $م$ عند $س = 1$: قيمة صغرى محلية

$م(1) = 4$

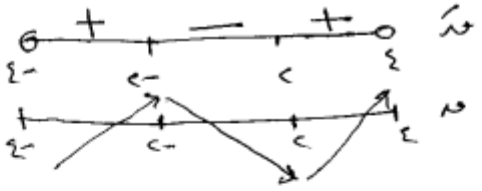
للاقتران $م$ عند $س = 3$: قيمة صغرى محلية وهي مطلقة

$م(3) = 0$

قيمة عظمى مطلقة عند $س = 0$ هي $م(0) = 4$

ب) $م(س) = س^3 - 12س \Rightarrow م'(س) = 3س^2 - 12 \Rightarrow م'(س) = 0 \Leftrightarrow س = \pm 2$

للاقتران $م(س)$:



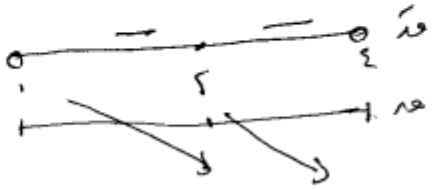
قيمة عظمى محلية عند $س = -2$ هي $م(-2) = 16$

$=$ صغرى محلية عند $س = 2$ هي $م(2) = -16$

$=$ مطلقة في $[-2, 4]$

$=$ عظمى $= 16$

ج) $م(س) = (س - 2)^3 \Rightarrow م'(س) = 3(س - 2)^2 \Rightarrow م'(س) = 0 \Leftrightarrow س = 2$



للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $س = 0$ هي $م(0) = 8$

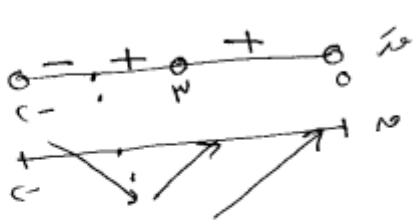
$=$ صغرى $=$ عند $س = 4$ هي $م(4) = -8$

د) $م(س) = \begin{cases} 3س + 1 & ، 0 \leq س \leq 3 \\ 4س - 2 & ، 3 < س \leq 4 \end{cases} \Rightarrow م'(س) = \begin{cases} 3 & ، 0 < س < 3 \\ 4 & ، 3 < س < 4 \end{cases}$

غير موجود عند $س = 3$

$م'(س) = 0 \Leftarrow 0 = 0$

للاقتران $م(س)$:

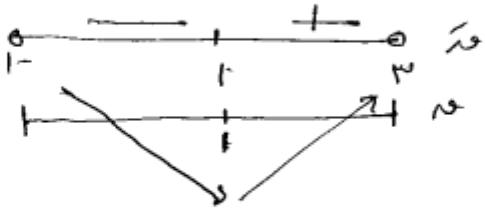


قيمة صغرى محلية عند $س = 0$ هي $م(0) = 1$ وهي مطلقة

قيمة عظمى مطلقة عند $س = 4$ هي $م(4) = 14$

ه) $م(س) = |(س-1)^3| = \begin{cases} (1-س)^3 & ، س < 1 \\ (س-1)^3 & ، س \geq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow م'(س) = \begin{cases} -3(1-س)^2 & ، س < 1 \\ 3(س-1)^2 & ، س > 1 \end{cases}$

للاقتران $م(س)$:

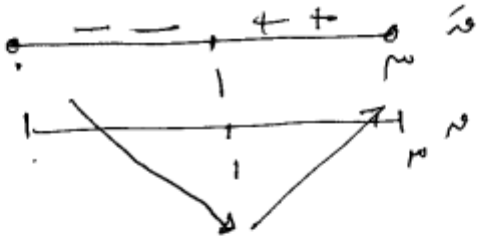


قيمة صغرى محلية عندما $س = 1$ لأن $م(1) = 0$ وهي مطلقة
فيمة عظمى مطلقة هي (8)

و) $م(س) = \frac{1}{4}س^4 - \frac{1}{3}س^3 ; س \in [0, 3]$

$م'(س) = س^3 - س^2 \Rightarrow م'(س) = 0 \Leftarrow س^2(س-1) = 0 \Leftarrow س = 0 , 1$

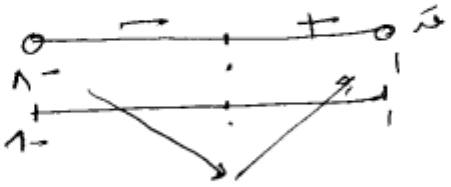
للاقتران $م(س)$:



قيمة صغرى محلية عندما $س = 1$ لأن $م(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$
= صغرى مطلقة هي $\frac{1}{12}-$
= عظمى مطلقة هي $م(3) = \frac{27}{4} - 9 = \frac{-45}{4}$

ز) $م(س) = \sqrt[3]{س^2} , [-8, 1]$

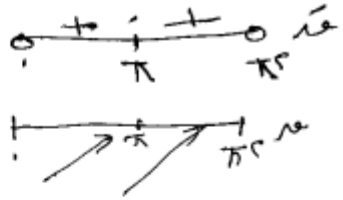
$م'(س) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$



للاقتران $م(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 0$ لأن $م(0) = 0$
= مطلقة هي $م(0) = 0$
قيمة عظمى مطلقة هي $م(-8) = 4$

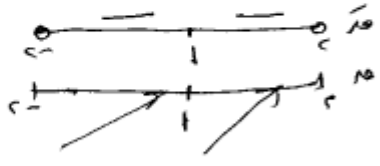
ح) $م(س) = س + جاس \Rightarrow م'(س) = 1 + جتاس \Rightarrow م'(س) = 0 \Leftarrow جتاس = -1 \Leftarrow س = \pi$



قيمة صغرى للاقتران $م(س)$
عندما $س = 0$ لأن $م(0) = 0$
قيمة عظمى مطلقة للاقتران $م(س)$
عندما $س = 2\pi$ لأن $م(2\pi) = 2\pi$

ط) $م(س) = (1-س)^3 , س \in [-2, 2] \Rightarrow م'(س) = 3(1-س)^2 \Leftarrow م'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

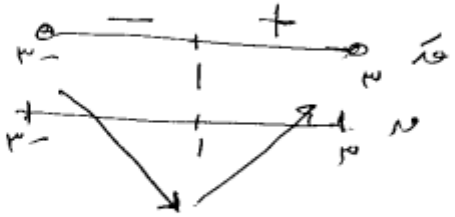
للاقتران $م(س)$:



قيمة عظمى مطلقة هي $م(-2) = 27$
صغرى مطلقة هي $م(2) = -1$

ي) $د(س) = (1-س)^3$ ، $س \in [-3, 3]$

$د'(س) = 3(1-س)^2$ ⟸ $د'(س) = 0$ ⟸ $س = 1$

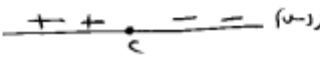


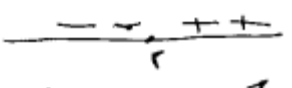
الاقتران $د(س)$:

قيمة صغرى محلية هي $د(1) = 0$ وطرفه

قيمة عظمى مطلقة هي $د(-3) = 256$

ج) $هـ(س) = (1 - د(س))^3$ ⟸ $و(س) = 3د'(س)(1-د(س))^2$ ⟸ $و(-1) = 0$ ، $د'(-1) = 0$ ⟸ $س = -1$ ، $س = 2$

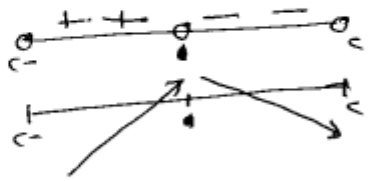




الاقتران $هـ(س)$ قيمة صغرى محلية

عند $س = ب$ هي $هـ(ب) = (1 - د(ب))^3 = (1-3)^3 = (-2)^3 = -8$

م) مجموعة قيم $س$ التي عندها نقطة حرجة للاقتران $د(س)$ هي $\{-2, 0, 2\}$



ن) الاقتران متزايد في الفترة $[-2, 0]$

ومتناقص في $[0, 2]$

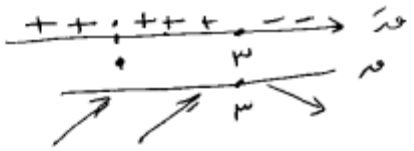
ح) الاقتران فيه قيمة عظمى محلية عند $س = 0$

ع) $د$ الاقتران نقطة حرجة عند $س = 0$ ، $س = 3$ وهي $(0, د(0))$ ، $(3, د(3))$

ن) معنى الاقتران متزايد في $(-\infty, 3]$

ومتناقص في $[3, \infty)$

ح) الاقتران فيه قيمة عظمى محلية عند $س = 3$



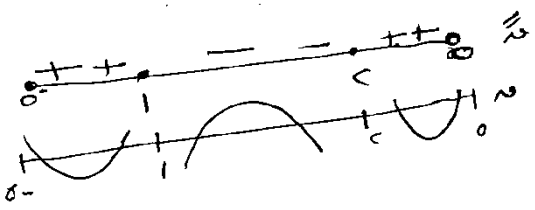
التقعر

تدريب (١)

$$\text{ه}(س) = س^4 - 6س^3 + 24س^2 + 5 \quad ، \quad [-5 ، 5]$$

$$\text{ه}'(س) = 4س^3 - 18س^2 + 48س \Leftarrow \text{ه}''(س) = 12س^2 - 36س + 48$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow 12(س^2 - 3س + 2) = 0 \Leftarrow (س-1)(س-2) = 0 \Leftarrow س = 1 ، س = 2$$



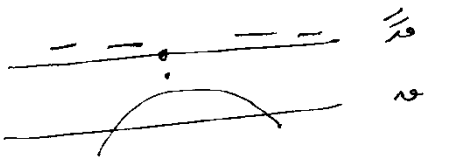
الاقتران مقعر للأعلى في الفترات
$[-5 ، 1] \cup [2 ، 5]$

الاقتران مقعر للأسفل في الفترة $[1 ، 2]$

تدريب (٢) :

$$\text{ه}(س) = س^{\frac{4}{3}} \Leftarrow \text{ه}'(س) = \frac{4}{3}س^{\frac{1}{3}} \Leftarrow \text{ه}''(س) = \frac{-2}{9}س^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{ه}''(س) = \frac{-2}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س^4}} \Leftarrow \text{ه}''(س) \text{ غير موجودة عندما } س = 0$$

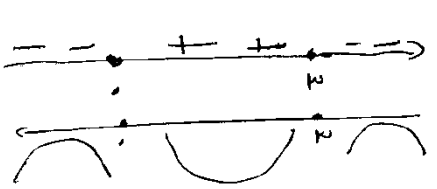


الاقتران مقعر للأسفل في الفترة $(-\infty ، \infty)$

تدريب (٣) :

$$\text{ه}(س) = 6س^3 - س^4 \Leftarrow \text{ه}'(س) = 18س^2 - 4س^3 \Leftarrow \text{ه}''(س) = 36س - 12س^2$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow (12س)(3-س) = 0 \Leftarrow س = 0 ، س = 3$$



للاقتران نقطتي انعطاف هما
$(0 ، 0)$ ، $(3 ، 81)$

تدريب (٤) :

$$\text{ه}(س) = س^3 - 12س + 3 \Leftarrow \text{ه}'(س) = 3س^2 - 12 \Leftarrow \text{ه}''(س) = 6س$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow س = 0 \Leftarrow \text{ه}'(0) = -12$$

$\text{ه}''(س) = 6س$ ، في: $س > 0$ ، $\text{ه}''(2) = 12 > 0$

$\therefore$ عند $س = 2$ يوجد قيمة صغرى محلية

$\therefore$ عند $س = -2$ يوجد قيمة عظمى محلية

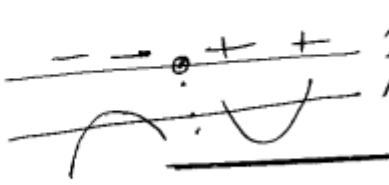
تمارين ومسائل

أ) $ق(س) = س + \frac{4}{س}$ ⇐ $ق'(س) = 1 - \frac{4}{س^2}$ ⇐ $ق''(س) = \frac{8}{س^3} = \frac{8}{س^3}$

$ق'(س) = 0$ لا يوجد قيم لـ $س$ ⇐ $ق'(س)$ غير موجودة عندما $س = 0$

مقعر لأعلى في $(0, \infty)$ ، مقعر لأسفل في $(-\infty, 0)$

متخذا $ق(س)$ مقعر لأسفل في $(-\infty, 0)$

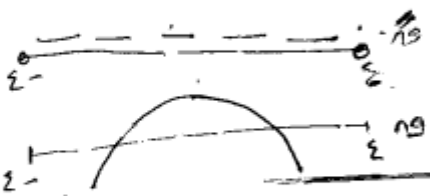


ب) $ق(س) = \sqrt{16 - س^2}$ ⇐ $ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{16 - س^2}}$

$ق''(س) = \frac{-\sqrt{16 - س^2} + س \times \frac{س}{\sqrt{16 - س^2}}}{16 - س^2} = \frac{-\frac{16 - س^2}{\sqrt{16 - س^2}} - \frac{س^2}{\sqrt{16 - س^2}}}{16 - س^2} = \frac{-16 + س^2 - س^2}{(16 - س^2)^{\frac{3}{2}}}$

$ق''(س) = \frac{-16}{(16 - س^2)^{\frac{3}{2}}}$ ⇐ $ق''(س) = 0$

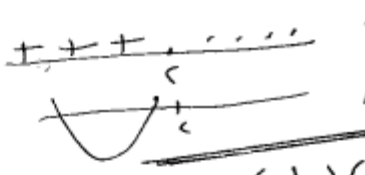
متخذا $ق(س)$ مقعر لأسفل في $[-4, 4]$



جـ) $ق(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، \ س < 1 \\ 5 - س & ، \ 1 \le س \le 2 \end{cases}$ ⇐ $ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، \ س < 1 \\ -1 & ، \ 1 < س < 2 \end{cases}$

⇐ $ق''(س) = \begin{cases} 2 & ، \ س < 1 \\ 0 & ، \ 1 < س < 2 \end{cases}$

متخذا $ق(س)$ مقعر لأعلى في $(-\infty, 2)$

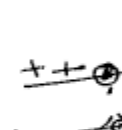


$ق(س) = \left(\frac{1}{س} - 1\right)^2$ ⇐ $ق'(س) = 2\left(\frac{1}{س} - 1\right)\left(\frac{-1}{س^2}\right) = 2\left(\frac{1}{س^3} - \frac{1}{س^2}\right)$

$ق''(س) = 2\left(\frac{-3س^2}{س^6} + \frac{2س}{س^4}\right)$ ⇐ $ق''(س) = 0$ ⇐ $س = 0$ ، $س = \frac{3}{2}$

متخذا $ق(س)$ مقعر لأعلى في $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

مقعر لأسفل في $\left(0, \frac{3}{2}\right]$



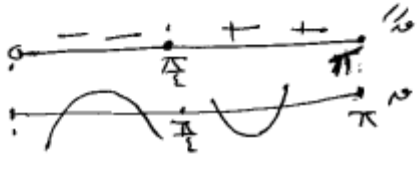
د) $ق(س) = جتاس - جاس + 1$

$ق'(س) = -جاس - جتاس$ ⇐ $ق''(س) = -جتاس + جاس$ ⇐ $ق''(س) = 0$ ⇐ $جاس = جتاس$

$س = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ $\notin (0, 2\pi)$

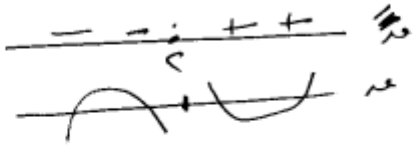
متخذا $ق(س)$ مقعر لأعلى في $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

مقعر لأسفل في $\left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$



ج) $ق(س) = س^3 - 6س^2 + 9س + 2 \Rightarrow ق'(س) = 3س^2 - 12س + 9 \Rightarrow ق''(س) = 6س - 12$

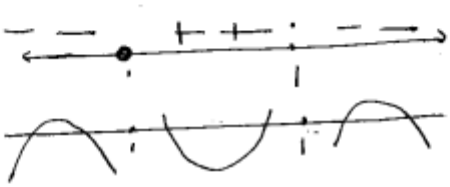
$ق''(س) = 0 \Leftarrow س = 2$



للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 2$ وهي $(2، 4)$

د) $ق(س) = س^{\frac{5}{3}} - س^{\frac{1}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{5}{3} س^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}} \Leftarrow ق''(س) = \frac{10}{9} س^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{9} س^{-\frac{4}{3}}$

$ق''(س) = 0 \Leftarrow \frac{10}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س}} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س^4}} = 0 \Leftarrow س = -1$



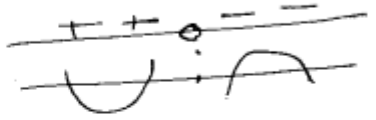
نختبر الاقتران $ق(س)$: نقطتا انعطاف عند $س = 0$ ، $س = -1$

وهي: $(0، 0)$ ، $(-1، 0.5)$

مقعر للأعلى في $[0، 1]$

مقعر للأسفل في $(-\infty، -1]$ ، $[1، \infty)$

هـ) $ق(س) = س^{\frac{3}{5}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{3}{5} س^{-\frac{2}{5}} \Leftarrow ق''(س) = -\frac{6}{25} س^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6}{25} \times \frac{1}{\sqrt[5]{س^7}}$



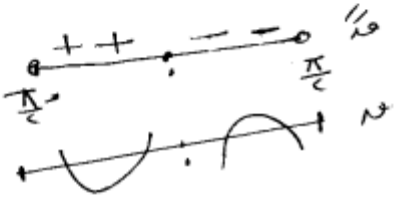
مقعر لما لا نهاية سالبا $(-\infty، 0]$

مقعر للأعلى $[0، \infty)$

نقطة انعطاف عند $س = 0$ هي $(0، 0)$

و) $ق(س) = س - ظا س \Rightarrow ق'(س) = 1 - قا^2 س \Leftarrow ق''(س) = -2 قا^2 س ظا س = -2 \frac{جا س}{جتا^3 س}$

للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 0$ وهي $(0، 0)$



ز) $ق(س) = جا س - جتا س \Rightarrow ق'(س) = جتا س + جا س \Leftarrow ق''(س) = 0 \Leftarrow جا س = -جتا س$

$س = \frac{3\pi}{4} ، \frac{7\pi}{4}$

$ق''(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} < 0 \Leftarrow$

$\therefore$ للاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = \frac{3\pi}{4}$

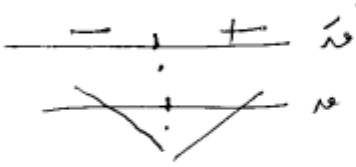
$ق''(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} > 0$

$\therefore$ للاقتران قيمة صغرى محلية عند $س = \frac{7\pi}{4}$

ب) $م(س) = س^4 \Rightarrow م'(س) = 4س^3 \Rightarrow م'(س) = 12س^2$

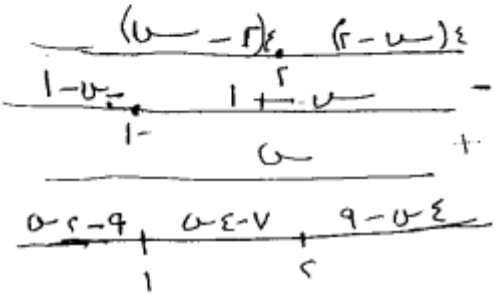
$م'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $م'(1) = -$ تفشل ونرجع إلى اختبار المشتقة الأولى

للاقتران يوجد قيمة عظمى محلية عند $س = 0$



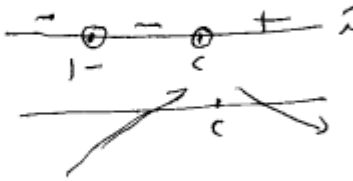
ج) $م(س) = |س - 1| + |س + 1| + س$

$$م(س) = \begin{cases} 3س - 9 & س \leq -1 \\ -س + 7 & -1 < س \leq 2 \\ 3س - 9 & س > 2 \end{cases}$$



$$م'(س) = \begin{cases} 3 & س < -1 \\ -1 & -1 < س < 2 \\ 3 & س > 2 \end{cases}$$ غير موجود عند $س = -1$، 2

$$\Rightarrow م'(س) = \begin{cases} 0 & س < -1 \\ 1 & -1 < س < 2 \\ 0 & س > 2 \end{cases}$$



يفشل اختبار المشتقة الأولى ونرجع إلى اختبار المشتقة الثانية

∴ للاقتران $م(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = 2$

د) $م(س) = س + \frac{س}{س^2 - 1}$ ، $م'(س) = 1 - \frac{س^2 + 1}{(س^2 - 1)^2}$ ، $م'(س) = 0 \Leftarrow س = \pm\sqrt{2}$

$$\frac{س^4 - 2س^2 - 3}{(س^2 - 1)^2} = 0 \Leftarrow س = \pm\sqrt{3}$$

$م''(س) = \frac{6س}{(س^2 - 1)^3}$ ، $م''(\sqrt{3}) = \frac{6\sqrt{3}}{(2)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 0$

∴ قيمة صغرى محلية عند $س = \sqrt{3}$

هـ) $م(س) = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د$ ، $م'(س) = 3أ س^2 + 2ب س + جـ$ ، $م''(س) = 6أ س + 2ب$

$م(1) = أ + ب + جـ + د = 5$ ---①

$م(2) = 8أ + 4ب + 2جـ + د = 10$ ---②

$م'(2) = 12أ + 4ب + جـ = 3$ ---③

$م''(2) = 12أ + 2ب = 0$ ---④

$\Rightarrow$ ② − ① $\Rightarrow 7أ + 3ب + جـ = 5$ ---⑤

⑤ − ③ $\Rightarrow -5أ - ب = 2 \Rightarrow ب = -5أ - 2$

④ $\Rightarrow 12أ + 2(-5أ - 2) = 0 \Rightarrow 2أ = 4 \Rightarrow \boxed{أ = 2}$

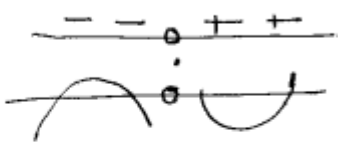
$\boxed{ب = -12}$

$\boxed{جـ = 30}$

$\boxed{د = -19}$

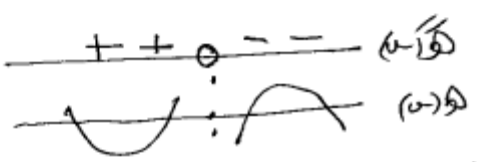
ومنه $م(س) = 2س^3 - 12س^2 + 30س - 19$

٥) $ق(س) = \frac{1}{س^2}$ ⇒ $ق'(س) = \frac{-2}{س^3}$ ، $ق''(س) = \frac{6}{س^4}$



مختار ق(س) مقعر للأعلى في $[0, \infty)$
" " " للأسفل في $(-\infty, 0)$
لا يوجد له نقطة انعطاف لان ق(س) غير معرف عند س = ٠
وغير متصل عند س = ٠

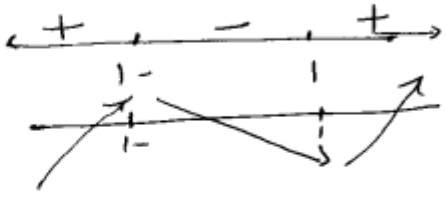
$ك(س) = س^{\frac{1}{3}}$ ⇐ $ك'(س) = \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}}$ ، $ك''(س) = -\frac{2}{9} س^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س^5}}$



مختار ك(س) مقعر للأسفل في $[0, \infty)$
" " " للأعلى في $(-\infty, 0]$
للاقتران نقطة انعطاف عند س = ٠ ومتصل عند س = ٠

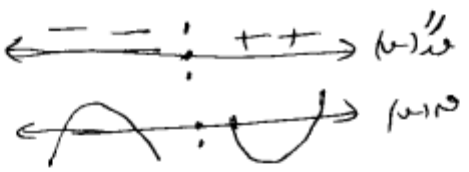
٦) أ) ق(س) متزايد في $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
ق(س) متناقص في $[-1, 1]$

ب) ق'(س) = ٠ ⇐ س = ± ١



١) للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = -١
" " " صغرى محلية عند س = ١

٢) ق(-١) = ٠ ، ق''(-١) < ٠ ⇐ ق(-١) قيمة عظمى محلية
ق(١) = ٠ ، ق''(١) > ٠ ⇐ ق(١) = صغرى محلية

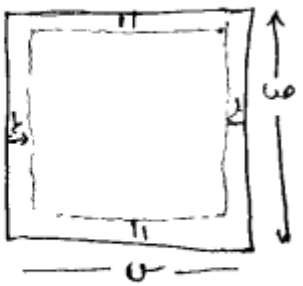


د) مختار ق(س) مقعر للأعلى في $[0, \infty)$
" " " للأسفل في $(-\infty, 0]$

ج) للاقتران نقطة انعطاف عند س = ٠ وهي (٠، ق(٠))

تطبيقات القيم العظمى

تدريب (٢):



$م = س \times ص = 128 \Leftarrow ص = \frac{128}{س}$

$م = (س-4)(ص-3) = س ص - 3س - 4ص + 12$

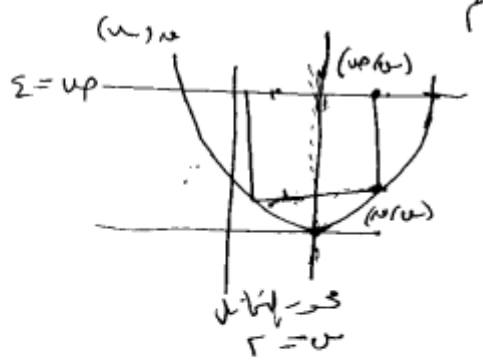
$م = 128 - 3س - \frac{512}{س}$

$م' = 0 \Leftarrow 3 - \frac{512}{س^2} = 0 \Leftarrow س^2 = 64 \Leftarrow س = 8$

$م'' = \frac{1024}{س^3} \Leftarrow م''|_{س=8} = \frac{1024}{512} = 2 > 0$

∴ أكبر مساحة تكون عندما $س = 8$ سم، $ص = 16$ سم

تدريب (٣):



$م = 2(س-2)(ص-ص)$

$م = 2(س-2)(4 - (س^2 - 4س + 4))$

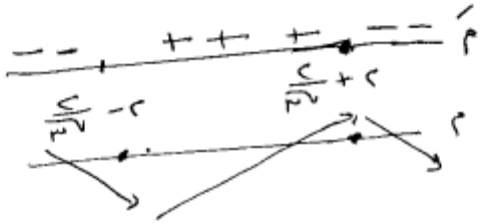
$م = 2(س-2)(4س - س^2)$

$م = 2(6س^2 - س^3 - 8س)$

$م' = 2(12س - 3س^2 - 8) = -2(3س^2 - 12س + 8) = 0 \Leftarrow س = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

∴ أكبر مساحة للمستطيل عندما

$س = (2 + \frac{2}{\sqrt{3}})$ سم



تدريب (٤):

$م = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times جا\theta = 32 جا\theta$

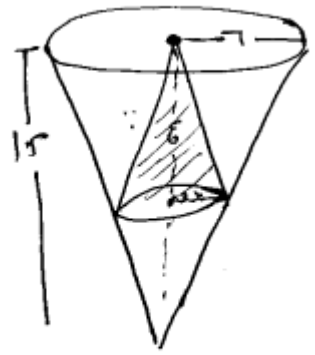
$م' = 32 جتا\theta = 0 \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$م'' = -32 جا\theta$

$م''|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = -32 < 0 \Leftarrow$ أكبر مساحة للمثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$

أي عندما المثلث قائم الزاوية

تدريب (5) :



من التشابه

$\frac{\text{نق}}{٦} = \frac{١٢ - ع}{١٢}$

$١٢\,\text{نق} = ٦(١٢ - ع)$

$٢\,\text{نق} = ١٢ - ع$

$ع = ١٢ - ٢\,\text{نق}$

$ح = \frac{\pi}{٣}\,\text{نق}^{٢}\,ع$

$ح = \frac{\pi}{٣}\,\text{نق}^{٢}(١٢ - ٢\,\text{نق})$

$ح = \frac{٢\pi}{٣}(٦\,\text{نق}^{٢} - \text{نق}^{٣})$

$ح' = \frac{٢\pi}{٣}(١٢\,\text{نق} - ٣\,\text{نق}^{٢}) \Rightarrow ح' = ٠ \Leftarrow \text{نق}(٤ - \text{نق})(٣\pi) = ٠ \Rightarrow \text{نق} = ٠ \text{ ، نق} = ٤$

$ع = ١٢ - ٢\,\text{نق}$ ، عندما نق = ٠ ⇐ ع = ١٢

عندما نق = ٤ ⇐ ع = ٤

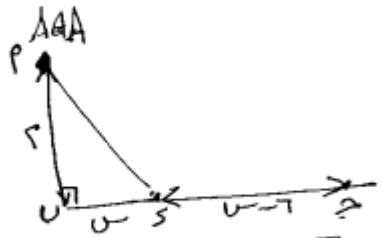
$ح'' = \frac{٢\pi}{٣}(١٢ - ٦\,\text{نق}) = ٤\pi(٢ - \text{نق})$

$ح''(٠) = ٨\pi > ٠$ ∴ قيمة صغرى

$ح''(٤) = -٨\pi < ٠$ ، قيمة عظمى ، نق = ٤ ، ع = ٤

∴ أكبر حجم $= ح(٤) = \frac{٢\pi}{٣}(٤)^{٣}(٦ - ٤) = \frac{٦٤}{٣}\pi$ م^{٣}

تدريب (6)



$ل = ١٠٠٠٠ + ٥٤٠٠٠ \sqrt{س^{٢} + ٤}$

$ل = ١٠٠٠٠ (٥\sqrt{س^{٢} + ٤} + ٣(٦ - س))$

$ل(س) = ١٠٠٠٠ (٥\sqrt{س^{٢} + ٤} + ٣س - ١٨)$ ؛ $س \in [٠ ، ٦]$

$ل' = ١٠٠٠٠ \left(\frac{٥ \times ٢س}{٢\sqrt{س^{٢} + ٤}} + ٣\right)$

$ل'(س) = ٠ \Leftarrow \frac{٥س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} = -٣$

$٢٥س^{٢} = ٩(س^{٢} + ٤)$

$١٦س^{٢} = ٣٦ \Rightarrow س^{٢} = \frac{٣٦}{١٦} = \frac{٩}{٤}$

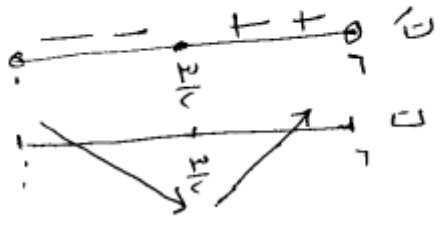
$س = \frac{٣}{٢}$ ؛ $س = -\frac{٣}{٢}$ مرفوض

$ل = ١٠٠٠٠ (٥\sqrt{\frac{٩}{٤} + ٤} + ٣(٦ - \frac{٣}{٢}))$

$= ١٠٠٠٠ (\frac{٢٥}{٢} + \frac{٩}{٢}) = ١٠٠٠٠ \times ١٧ = ١٧٠٠٠٠$ جنيه

∴ أقل تكلفة ممكنة عندما $س = \frac{٣}{٢}$

وأكبر تكلفة ممكنة عندما $س = ٦$



تمارین و مسائل

تمرین (۱) صفحه ۲۱۵

$$ع = س + \frac{۱}{س} = \frac{س^۲+۱}{س} \; ; \; س \in [\frac{۱}{۲}, ۲]$$

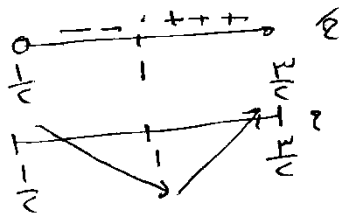
$$ع' = ۱ - \frac{۱}{س^۲} \Rightarrow ع' = ۰ \Leftarrow ۱ - \frac{۱}{س^۲} = ۰ \Leftarrow س = ۱ \; ، \; س = -۱ \notin$$

$$ع(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۲}$$

$$ع(۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

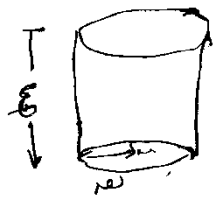
$$ع(۲) = ۲ + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

نتیجه: کمترین عدد مجموعه برابر ۲ و بیشترین عدد $\frac{۵}{۲}$ است.



ب) $ع = ۸ \Rightarrow ۸ = ۸ \pi ر^۲ ع \Rightarrow ۸ = ۸ \pi ر^۲ \times ۱۰۰ \Rightarrow ر^۲ = \frac{۱}{۱۰۰}$

$ر = \frac{۱}{۱۰}$ سم



$ح = ۲ \pi ر ع + \pi ر^۲$

$ح = ۲ \times ۳ \times ۸ + ۳ \times \frac{۱}{۱۰۰}$

$ح = ۴۸ + \frac{۳}{۱۰۰}$

$ح = ۴۸ + ۰/۰۳ = ۴۸/۰۳$ سم^۲

$ح' = ۴ \pi ر ع + ۲ \pi ر^۲ \Rightarrow ۰ = ۴ \pi ر ع + ۲ \pi ر^۲ \Rightarrow ۰ = ۴ \times ۳ \times ۸ + ۲ \times ۳ \times ر^۲$

$ر^۲ = \frac{-۹۶}{۶} \Rightarrow ر^۲ = -۱۶ \notin \; ، \; ر^۲ = ۰ \Rightarrow ر = ۰$

$ح'' = ۴ \pi ع + ۴ \pi ر \Rightarrow ح''(۰) = ۴ \pi ع > ۰$ ، $ع = ۸$ سم

$ح$ دارای مینیمم نسبی است.

$ح_{min} = ۲ \pi ر^۲ ع = ۲ \times ۳ \times ۰ \times ۸ = ۰$ سم^۲

اول تکلیف شرط $ع = ۱۰$ سم

$۸ = ۱۰ ر \Rightarrow ر = \frac{۴}{۵}$

$ح = ۲ \pi ر ع + \pi ر^۲ \Rightarrow ح = ۲ \pi \times \frac{۴}{۵} \times ۱۰ + \pi \times \frac{۱۶}{۲۵}$

$ح = ۱۶ \pi + \frac{۱۶}{۲۵} \pi = \frac{۴۰۰ \pi + ۱۶ \pi}{۲۵} = \frac{۴۱۶ \pi}{۲۵}$ سم^۲

ج) $ح = ۲ \pi ر ع + \pi ر^۲ \Rightarrow ح = ۲ \pi ر \times \frac{۸}{ر^۲} + \pi ر^۲$

$ح = \frac{۱۶ \pi}{ر} + \pi ر^۲$

$ح' = -\frac{۱۶ \pi}{ر^۲} + ۲ \pi ر \Rightarrow ۰ = -\frac{۱۶ \pi}{ر^۲} + ۲ \pi ر$

$۲ \pi ر = \frac{۱۶ \pi}{ر^۲} \Rightarrow ر^۳ = ۸ \Rightarrow ر = ۲$ سم

$ح'' = \frac{۳۲ \pi}{ر^۳} + ۲ \pi \Rightarrow ح''(۲) = ۶ \pi > ۰$

$ح$ دارای مینیمم نسبی است.

$ح_{min} = ۲ \pi \times ۲ \times ۸ + \pi \times ۴ = ۳۲ \pi + ۴ \pi = ۳۶ \pi$ سم^۲

$ع = \frac{۸}{ر^۲} = \frac{۸}{۴} = ۲$ سم

د) $ف = ۱۰ س + ۱۰ ص$

$۱۰۰ = س^۲ + ص^۲ \Rightarrow ص = \sqrt{۱۰۰ - س^۲}$

$ف = ۱۰ س + ۱۰ \sqrt{۱۰۰ - س^۲}$

$ف' = ۱۰ + ۱۰ \times \frac{-۲س}{۲\sqrt{۱۰۰ - س^۲}} \Rightarrow ۰ = ۱۰ - \frac{۱۰ س}{\sqrt{۱۰۰ - س^۲}}$

$\frac{۱۰ س}{\sqrt{۱۰۰ - س^۲}} = ۱۰ \Rightarrow س = \sqrt{۱۰۰ - س^۲} \Rightarrow س^۲ = ۱۰۰ - س^۲$

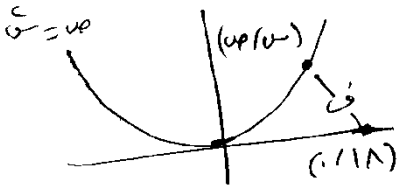
$۲ س^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow س^۲ = ۵۰ \Rightarrow س = ۵\sqrt{۲}$

$ص = \sqrt{۱۰۰ - ۵۰} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$

$ف'' = -\frac{۱۰ \sqrt{۱۰۰ - س^۲} + \frac{۱۰ س^۲}{\sqrt{۱۰۰ - س^۲}}}{۱۰۰ - س^۲} \Rightarrow ف''(۵\sqrt{۲}) < ۰$

$ف$ دارای ماکزیمم نسبی است.

$ف_{max} = ۱۰ \times ۵\sqrt{۲} + ۱۰ \times ۵\sqrt{۲} = ۱۰۰\sqrt{۲}$ سم

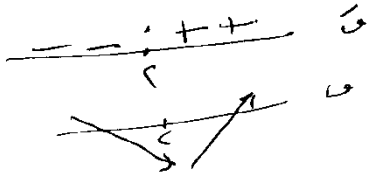


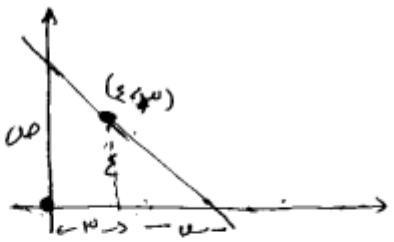
۳) $ص = \sqrt{(س-۱۸)^۲ + س^۴} = \sqrt{س^۴ + (س-۱۸)^۲}$

$ص' = \frac{۴س^۳ + ۲(س-۱۸)}{۲\sqrt{س^۴ + (س-۱۸)^۲}} \Rightarrow ص' = ۰ \Leftarrow ۴س^۳ + ۲(س-۱۸) = ۰$

$۲س^۳ + س - ۱۸ = ۰ \Leftarrow س = ۲$

$ص(۲) = \sqrt{۱۶ + ۲۵۶} = \sqrt{۲۷۲}$





مقارنات بنسب

$$\frac{ص}{س+٣} = \frac{٤}{٣} \Rightarrow ص = \frac{٤}{٣}(س+٣)$$

$$ح = \frac{١}{٢} \times (س+٣) \times ص$$

$$ح = \frac{١}{٢} \times (س+٣) \times \frac{٤}{٣}(س+٣)$$

$$ح = \frac{٢}{٣}(س+٣)^{٢}$$

$$م = \frac{ح}{س} = \frac{\frac{٢}{٣}(س+٣)^{٢}}{س}$$

$$م = \frac{٢}{٣}\left(س + ٦ + \frac{٩}{س}\right)$$

$$م' = \frac{٢}{٣}\left(١ - \frac{٩}{س^{٢}}\right) \Rightarrow م' = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Rightarrow س = ٣ \quad (-٣ \notin)$$

$$م'' = \frac{١٨}{س^{٣}} \Rightarrow م''(٣) = \frac{١٨}{٢٧} = \frac{٢}{٣} > ٠$$

∴ المقدار أصغر ما يمكن عندما $س = ٣$ ، $ص = ٧$ ← المستقيم يمر بالنقطة $(٦،٠)$ و النقطة $(٤،٣)$

ميل المستقيم $= \frac{٤-٠}{٣-٦} = -\frac{٤}{٣}$

معادلة المستقيم $ص - ٠ = -\frac{٤}{٣}(س - ٦) \Rightarrow ص = -\frac{٤}{٣}س + ٨$

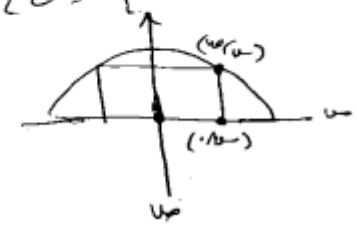
٥) $ح = \frac{١}{٢} \times ص \times س \times جا\theta \Rightarrow ح = \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٥ \times جا\theta$ عندما $\theta = \frac{\pi}{٣}$ ← $ح = \frac{٢٥}{٤}\sqrt{٣}$ متر

$ح' = ٠ \Leftarrow جتا\theta = ٠ \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{٢}$ أكبر ما يمكن عندما $\theta \in (٠، \frac{\pi}{٢})$

$ح = \frac{٢٥}{٤} جا\theta$ ← $ح$ تتزايد عندما $\theta \in (٠، \frac{\pi}{٢})$ ← $ح' = \frac{٢٥}{٤} جتا\theta$

$ح' = ٠ \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{٢}$ ← $ح'' = -\frac{٢٥}{٤} جا\theta$ ← $ح''(\frac{\pi}{٢}) = -\frac{٢٥}{٤} < ٠$

$\theta = \frac{\pi}{٢} = ٥٤°$



٦) $ص = ٨ - س$ ، $ع = ٢١ - ٤س$

$ح = ٢\pi س ص$

$ح = ٢\pi س(٨ - س)$

$ح = ١٦\pi س - ٢\pi س^{٢}$

$ح' = ١٦\pi - ٤\pi س$

$ح' = ٠ \Leftarrow س = ٤$

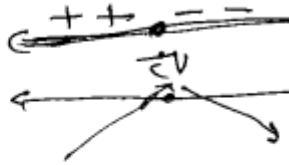
$ع = ٢١ - ٤(٤) = ٥$

$ح'' = -٤\pi$

$ح''(٤) = -٤\pi < ٠$

∴ الحجم أكبر ما يمكن عندما $س = ٤$

$ح = ٢\pi(٤)(٥) = ٤٠\pi$ وحدة مكعبة



٧) $ع = ١٢ - ٤س$

عندما $س = ٢$ ← $ع = ٤$

$ح = \frac{١}{٣}\pi س^{٢} ع$

$ح = \frac{١}{٣}\pi(٢)^{٢}(٤) = \frac{١٦}{٣}\pi$ سم^{٣}

$ح = \frac{١}{٣}\pi س^{٢}(١٢ - ٤س)$

$ح = ٤\pi س^{٢} - \frac{١}{٣}\pi س^{٣}$

$ح' = ٨\pi س - \pi س^{٢}$

$ح' = ٠ \Leftarrow س = ٨$

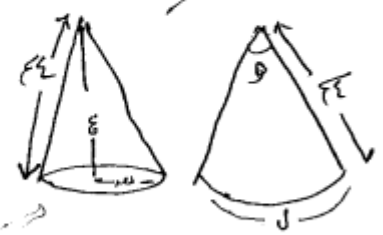
$ع = ١٢ - ٤(٨) = -٢٠$ مرفوض

$ح'' = ٨\pi - ٢\pi س$

$ح''(٨) = -٨\pi < ٠$

∴ الحجم أكبر ما يمكن عندما $س = ٨$

$ح = \frac{١}{٣}\pi(٨)^{٢}(٤) = \frac{٢٥٦}{٣}\pi$ سم^{٣}



٨) $ع = ٨ جتا\theta$ ، $ف = ٨ جا\theta$

$ح(\theta) = \frac{١}{٣}\pi ف^{٢} ع$

$ح(\theta) = \frac{١}{٣}\pi(٨ جا\theta)^{٢}(٨ جتا\theta)$

$ح(\theta) = \frac{٥١٢}{٣}\pi جا^{٢}\theta جتا\theta$

$ح'(\theta) = \frac{٥١٢}{٣}\pi(جا^{٢}\theta(-جا\theta) + جتا\theta(٢ جا\theta جتا\theta))$

$ح'(\theta) = \frac{٥١٢}{٣}\pi(-جا^{٣}\theta + ٢ جتا^{٢}\theta جا\theta)$

$ح'(\theta) = \frac{٥١٢}{٣}\pi جا\theta(-جا^{٢}\theta + ٢ جتا^{٢}\theta)$

$ح'(\theta) = ٠ \Leftarrow \theta = ٠$ مرفوض ، $-جا^{٢}\theta + ٢ جتا^{٢}\theta = ٠$

$-جا^{٢}\theta + ٢(١ - جا^{٢}\theta) = ٠$

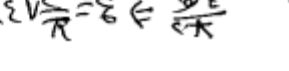
$-جا^{٢}\theta + ٢ - ٢ جا^{٢}\theta = ٠$

$-٣ جا^{٢}\theta = -٢$

$جا^{٢}\theta = \frac{٢}{٣}$

$جا\theta = \sqrt{\frac{٢}{٣}}$

$\theta = ٥٤.٧°$



∴ الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما $\theta = ٥٤.٧°$

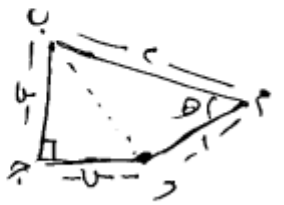
٨) الربح = البيع − التكلفة ⇐ ر(س) = ١٥٠ س − ٠,١ س² − ٥٠ س − ٢٠٠

ر(س) = ١٥٠ س − ٠,١ س² − ٢٠٠ ⇐ ر′(س) = ١٥٠ − ٠,٢ س ⇐ ر′(س) = ٠

س = ١٥٠ / ٠,٢ = ١٥٠٠ / ٢ = ٧٥٠

ر″ = −٠,٢ < ٠ ⇐ ر(٧٥٠) قيمة عظمى

الربح يمكن سنوياً عندما س = ٧٥٠ قطعة



٩) م = ½ × ٢ × ١ × جتاهـ + ½ × ٢ × ٢ × جاهـ

م = جتاهـ + جاهـ

م = جاهـ − جتاهـ + ٥/٤ ، ٠ < هـ < ٣٦٠

م′(هـ) = جتاهـ + جاهـ

م′(هـ) = ٠ ⇐ جتاهـ = −جاهـ ⇐ هـ = ٣π/٤

م″(هـ) = −جاهـ + جتاهـ ⇐ م″(٣π/٤) = −√٢/٢ + √٢/٢ = −√٢ < ٠

∴ الكمية المطلوبة تكون عندما هـ = ٣π/٤ = ١٣٥°

١٠) م = ٢ × (٤ + س)/٢ × (٤ − س) = (س + ٤)(٤ − س)

م(س) = (س + ٤)(٤ − س) ∴ −٤ ≤ س ≤ ٤

م′(س) = (س + ٤)(−١) + (٤ − س)(١)

م′(س) = −٢س

م″(س) = −٢

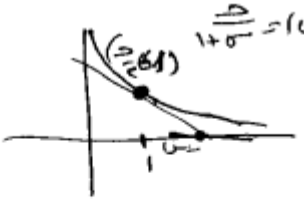
م′(س) = ٠ ⇐ −٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ، ص = ١٦

م″(٠) = −٢ < ٠

∴ الكمية المطلوبة تكون عندما س = ٠

وهي م(٠) = (٤)(٤) = ١٦ وحدة مربعة.

أسئلة الوحدة



١) ميل المماس = $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = \left|\frac{-١}{(١+س)^{٢}}\right|_{س=١} = \frac{-١}{٤}$

معادلة المماس هي: $ص - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}(س - ١) \Rightarrow ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{٣}{٤}$

المماس يقطع محور الصادات عندما $س = ٠ \Rightarrow ص = \frac{٣}{٤}$

المماس يقطع محور السينات عندما $ص = ٠ \Rightarrow س = ٣$

$م = \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة

٢) $ف(ن) = \frac{ن}{٢} - جتا ن \Rightarrow ف'(ن) = \frac{١}{٢} - ٢ حتا ن جتا ن$

$ف'(ن) = \frac{١}{٢} - جتا ٢ن \Rightarrow ف'(ن) = ٠ \Rightarrow جتا ٢ن = \frac{١}{٢} \Rightarrow ٢ن = \frac{\pi}{٣} \Rightarrow ن = \frac{\pi}{٦}$

$ن = \frac{٥\pi}{٦} = ١٥٠° \Rightarrow ٢ن = \frac{٥\pi}{٣} = ٣٠٠° \Rightarrow ن = \frac{٥\pi}{١٢}$

$ف''(ن) = -٢ جتا ٢ن$

$ف''(\frac{\pi}{١٢}) = -٢ جتا \frac{\pi}{٦} = -٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

$ف''(\frac{٥\pi}{١٢}) = -٢ جتا \frac{٥\pi}{٦} = -٢ \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

٣) $ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٣} - ٧٢س} \Rightarrow ق'(س) = \frac{٣س^{٢} - ٧٢}{٣\sqrt[٣]{(س^{٣} - ٧٢س)^{٢}}}$

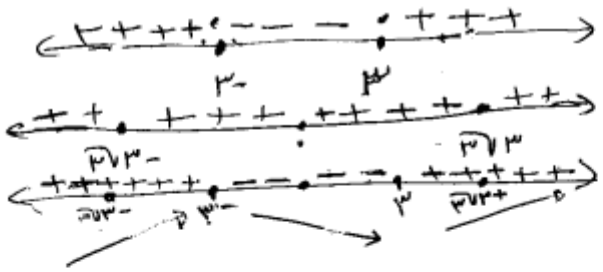
$ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٧٢ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣\sqrt{٣}$

$ق'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = ٠ ، س = \pm ٣\sqrt{٣}$

٥) $ق(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٧٢ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$

٦) فترات التزايد هي: $(-\infty ، -٣] ، [٣ ، \infty)$

فترة التناقص هي: $[-٣ ، ٣]$



٧) للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = -٣$

قيمة صغرى محلية عند $س = ٣$

٨) $ق(س) = ٢س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ٤$ ، $ق'(س) = ٦س^{٢} + ٢ب س + جـ$ ، $ق''(س) = ١٢س + ٢ب$

$ق(٠) = ٥ \Rightarrow \boxed{جـ = ٥}$

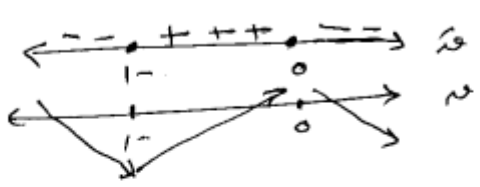
$ق'(١) = -٩ \Rightarrow ٦ + ٢ب + ٥ = -٩ \Rightarrow ب = -١٠$

$ق'(٢) = ٢٤ - ٢٠ + ٥ = ٩$

$ق(١) = ٢ - ١٠ + ٥ + ٤ = ١$ إذن $(١ ، ق(١))$ نقطة تماس $\Leftarrow (١ ، ٠)$ نقطة تماس

ومنه $أ = ١$ ، $ب = -٦$ ، $جـ = ٠ \Rightarrow ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥$

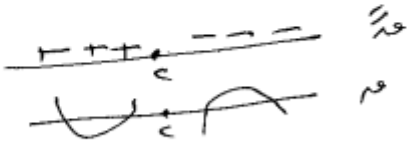
س٣) النقط الحرجة هي التي $ق'(س) = 0$ أو $ق'(س)$ غير معرفة
$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = -1$ أو $س = 5$ وهي $(-1، ق(-1))$ ، $(5، ق(5))$



ب) الاقتران $ق$ متزايد في $[-1، 5]$
$\Leftarrow$ $ق$ متناقصاً في $(-\infty، -1] \cup [5، \infty)$

ج) الاقتران $ق$ له قيمة عظمى محلية عندما $س = 5$
$\Leftarrow$ $\Leftarrow$ قيمة صغرى محلية عندما $س = -1$

د) الاقتران $ق$ له نقطة انعطاف عندما $س = 2$
$\Leftarrow$ $\Leftarrow$ مقعر للأسفل في $[2، \infty)$



هـ) الاقتران $ق$ له نقطة انعطاف عندما $س = 2$

س٤: $ق(س) = \begin{cases} ج س^2 + 5س + 6 & ، س \leq 1 \\ د س + ب & ، 1 < س < 3 \\ ج س^2 + 5س + 6 & ، س \geq 3 \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} ج س^2 + 5س + 6 & ، س \leq 1 \\ م & ، 1 < س < 3 \\ ج س^2 + 5س + 6 & ، س \geq 3 \end{cases}$

$س = 1$ ، $ق$ غير موجودة

أ) الاقتران $ق$ له نقطة حرجة في $\{-1، 0، 1، 3\}$

ب) $ق$ متزايد في $[0، 3]$
$\Leftarrow$ متناقصاً في $[-1، 0]$

ج) الاقتران $ق$ له قيمة صغرى محلية عندما $س = 0$

د) $ق(0) = 0 \Leftarrow ج = 0$

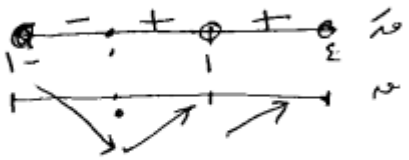
$ق(3) = 9 ج + 3 ب + 6 = 27 ج + 3 ب + 6 \Leftarrow 3 ب = 1 - 24 ج$

$ق(1) = ج + 5 + 6 = ج + ب + 6 \Leftarrow ب = 1 - ج$

$3 ب = 1 - 24 ج$

$3 - 3 ج = 1 - 24 ج \Leftarrow 21 ج = -2 \Leftarrow ج = -\frac{2}{21}$

$ب = 1 + \frac{2}{21} = \frac{23}{21}$



س٥) من التشابه: $\frac{ص}{8} = \frac{س}{10} \Leftarrow ص = \frac{4}{5} س$

$\frac{ع}{6} = \frac{8 - س}{10} \Leftarrow ع = \frac{3}{5}(8 - س)$

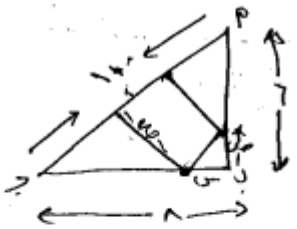
$ح = ص \times ع \times ل = \frac{4}{5} س \times \frac{3}{5}(8 - س) \times 6 = \frac{72}{25} س (8 - س)$

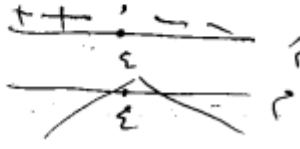
$ح = \frac{72}{25}(8س - س^2)$

$ح' = \frac{72}{25}(8 - 2س) = 0 \Leftarrow س = 4$

$ح'' = \frac{72}{25}(-2) < 0$ ، $ح$ له قيمة عظمى عندما $س = 4$

$\therefore$ أكبر حجم $= \frac{72}{25} \times 4 \times 4 \times 6 = \frac{2304}{25}$ سم^3





رقم الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
الرمز	جـ	د	ﻫ	د	ﻫ	د	د	جـ	ب	د	جـ