# المقارب المائل

• ليكن التابع $f(x)$ و المستقيم $\Delta : y = ax + b$ نقول أن $\Delta$ مقارب مائل للخط $c$ في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ أو كليهما إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

• الوضع النسبي للخط $c$ ومقارب المائل نعتمد على الإشارة: (إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$).

$f(x) - y_\Delta > 0 \Rightarrow$ $c$ فوق المقارب

$f(x) - y_\Delta < 0 \Rightarrow$ $c$ تحت المقارب.

• **مثال:** ليكن التابع $f(x) = x + 2 + \frac{5}{x-3}$ والمستقيم $\Delta : y = x + 2$

المطلوب:

1) أثبت أن $\Delta$ مقارب مائل للخط $c$ بجوار $\mp\infty$.

2) ادرس الوضع النسبي للخط $c$ و مقاربه.

الحل:

1)

$$f(x) - y_\Delta = \cancel{x + 2} + \frac{5}{x-3} - (\cancel{x+2})$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{5}{x-3}$$

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ مقارب مائل للخط $c$ بجوار $\mp\infty$ . $D: y = x+2$

② ندرس إشارة $f(x) - y_D = \frac{5}{x-3}$

| $x$ | $-\infty$ | $5$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| بسط | $+$ | ‖ | $+$ |
| مقام | $-$ | ‖ | $+$ |
| | $-$ | ‖ | $+$ |
| | $c$ تحت مقارب | | $c$ فوق مقارب |

على المجال $]5, +\infty[$ نلاحظ أن $f(x) - y_D > 0$ على المجال $]-\infty, 5[$ نلاحظ أن $f(x) - y_D < 0$

2. مثال: ليكن التابع $f(x) = 2x+1+\frac{5}{x^2}$ أثبت أن $y: 2x+1$ مقارب مائل للخط $c$ جوار $\mp\infty$ وادرس الوضع النسبي:

$$f(x) - y_D = \frac{5}{x^2}$$

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \frac{5}{\infty} = 0 \Rightarrow$ مقارب مائل $D: y = 2x+1$ للخط $c$ جوار $\mp\infty$ .

الوضع النسبي: نلاحظ أن $f(x) - y_D > 0$ أياً كانت قيم $x \Rightarrow c$ فوق المقارب دوماً

**مثال:** ليكن التابع $f(x)=x+1-\frac{6}{x^2}$ أثبت أن $\Delta: y=x+1$
مقارب للخط c جوار $\mp\infty$ وادرس الوضع النسبي:

$$f(x)-y_\Delta = -\frac{6}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = -\frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow$$ $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل للخط c
جوار $\mp\infty$ .

الوضع النسبي: نلاحظ أن $f(x)-y_\Delta<0$ أياً كانت قيم $x$
c تحت المقارب دوماً.

**مثال:** ليكن التابع $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$ والمستقيم $\Delta: y=2x+1$

$$f(x)-y_\Delta = \frac{2x^2-7x-3}{x-4}-(2x+1) \quad : \text{ط}_1 .$$

$$= \frac{2x^2-7x-3-2x^2+7x+4}{x-4}$$

$$f(x)-y_\Delta = \frac{1}{x-4} \Rightarrow \lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$$

$\Delta: y$ مقارب مائل بجوار $\mp\infty$ .

دراسة الوضع النسبي: نعتمد على إشارة $f(x)-y_\Delta = \frac{1}{x-4}$

| $x$ | $-\infty$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| بسط | $+$ | $\|\|$ | $+$ |
| مقام | $-$ | $\|\|$ | $+$ |
| | $-$ c تحت | $\|\|$ | $+$ c فوق |

(2) :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+1 \\
\hline
x-4 & 2x^2-7x-3 \\
 & \mp 2x^2 \pm 8x \\
\hline
 & 1x-3 \\
 & \mp 1x \pm 4 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

$$f(x) = 2x+1+\frac{1}{x-4}$$

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{1}{x-4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$$

$\Delta: y = 2x+1$ مقارب مائل للخط $C$ في جوار $\mp\infty$ ،

**فكرة إيجاد مقارب مائل:**
**(هاااام)**

(a) حين وجود المقارب المائل لا وجود للأفقي والعكس صحيح

(b) شكل معادلة المقارب: $\Delta: y = ax+b$

لنوجد $a$ نقوم بـ: $\lim \frac{f(x)}{x} = a$

ثم نقوم بـ: $\lim f(x) - ax = b$

فنتبع المجاهيل $a$ ، $b$ و نكتب المعادلة.

**مثال:** ليكن التابع $f$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1}$

المطلوب:

أثبت أن $f(x)$ يقبل مقارب أفقي عند $\mp\infty$ ، ومن ثم أوجده:

الحل:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = +\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \mp\infty} 2x^2 + x + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to \mp\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}$$

لا وجود للمقارب الأفقي $\Leftarrow$ يقبل مقارب مائل.

شكل المقارب: $D: y = ax + b$

• نوجد $a$:

$$\frac{f(x)}{x} = a \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{x} = \frac{+\infty}{\infty}$$ ح.ع.ت

$$\Rightarrow \frac{|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{\cancel{x} \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \boxed{\sqrt{2} = a}$$

• نوجد $b$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = b$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}\, x = +\infty - \infty$$ ح.ع.ت

بعد الضرب بالمرافق :

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2x^2}+x+1-\cancel{2x^2}}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}\,x} = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}\,x}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{2x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow D: y = \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

* تمرين 18 ص 71 وظيفة ...

**مثال :** ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R .
وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ المطلوب :

① احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

② a- اكتب ثلاثي الحدود $x^2+4x+5$ بالصيغة القانونية
(أي الإتمام لمربع كامل ؟).

(b) استنتج وجود مقارب مائل للخط c في جوار $\mp\infty$ :

الحل :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} x^2+4x+5 = \boxed{+\infty}$$

(1)

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

(2) [a]

$$x^2+4x+5$$

$$(x^2+4x+4)-4+5$$

$$(x+2)^2+1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$$

[b]

$$y_\Delta = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$$

$y_\Delta = x+2$ مقارب مائل للخط c بجوار $+\infty$

$y_\Delta = -x-2$ مقارب مائل للخط c بجوار $-\infty$

• أيضاً يوجد طريقة بالقسمة الإقليدية

# المقارب المائل مع التوابع المثلثية:

**مثال:** ليكن التابع f وفق : $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$

المطلوب :

1- أثبت أن $D: y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ .

2- ادرس الوضع النسبي :

**الحل:**

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = \text{ح.ع.ت}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) - y_\Delta \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

$D: y = x$ مقارب مائل للخط c بجوار $+\infty$.

الوضع النسبي :

| $x$ | $2\pi k$ | | $2\pi k + \pi$ | | $2\pi k + 2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | | $+$ | | $-$ | |
| $x > 0$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{\sin x}{x}$ | | $+$ | | $-$ | |
| | | c فوق مقارب | | c تحت مقارب | |

| $x$ | $2\pi k$ | $2\pi k+\pi$ | $2\pi k+2\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\sin x$ | + | | − |
| $x<0$ | − | | − |
| $\frac{\sin x}{x}$ | − | | + |
| | c تحت مقارب | | c فوق مقارب |

2. مثال: ليكن التابع $f(x)=x+\frac{\cos x}{x}$ المطلوب:

① أثبت أن $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط c.

② ادرس الوضع النسبي.

الحل: ①

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\cos x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=0 \quad \text{ع.غ.ت}$$ (نستخدم الإحاطة)

$\Rightarrow$ $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط c بجوار $+\infty$.

② الوضع النسبي:

| $x$ | $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ | $\frac{\pi}{2}+2\pi k+\pi$ | $\frac{\pi}{2}+2\pi k+2\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\cos x$ | − | | + |
| $x>0$ | + | | + |
| $\frac{\cos x}{x}$ | − | | + |
| | c تحت مقارب | | c فوق مقارب |

| $x$ | $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ | | $\frac{\pi}{2}+2\pi k+\pi$ | | $\frac{\pi}{2}+2\pi k+2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | | $-$ | | $+$ | |
| $x<0$ | | $-$ | | $-$ | |
| $\frac{\cos x}{x}$ | | $+$ | | $-$ | |
| | | C فوق مقارب | | C تحت مقارب | |

وظيفة:
$$f(x)=\frac{x+3+\sin x}{x^2}$$

$$\Delta: y = x$$