الرسم البياني

أسئلة مهمة متعلقة بالرسم البياني:

السؤال الأول: مجموعة التعريف

* مجموعة التعريف: هي قيم x

ننظر إلى بداية الخط c "من اليسار" هنا بداية مجموعة التعريف نسحب خطاً إلى محور xx'.

نهاية الخط c "من اليمين" هنا نهاية مجموعة التعريف نسحب خطاً إلى محور xx'

فتكون مجموعة التعريف [مسقط نهاية الخط و مسقط بداية الخط]

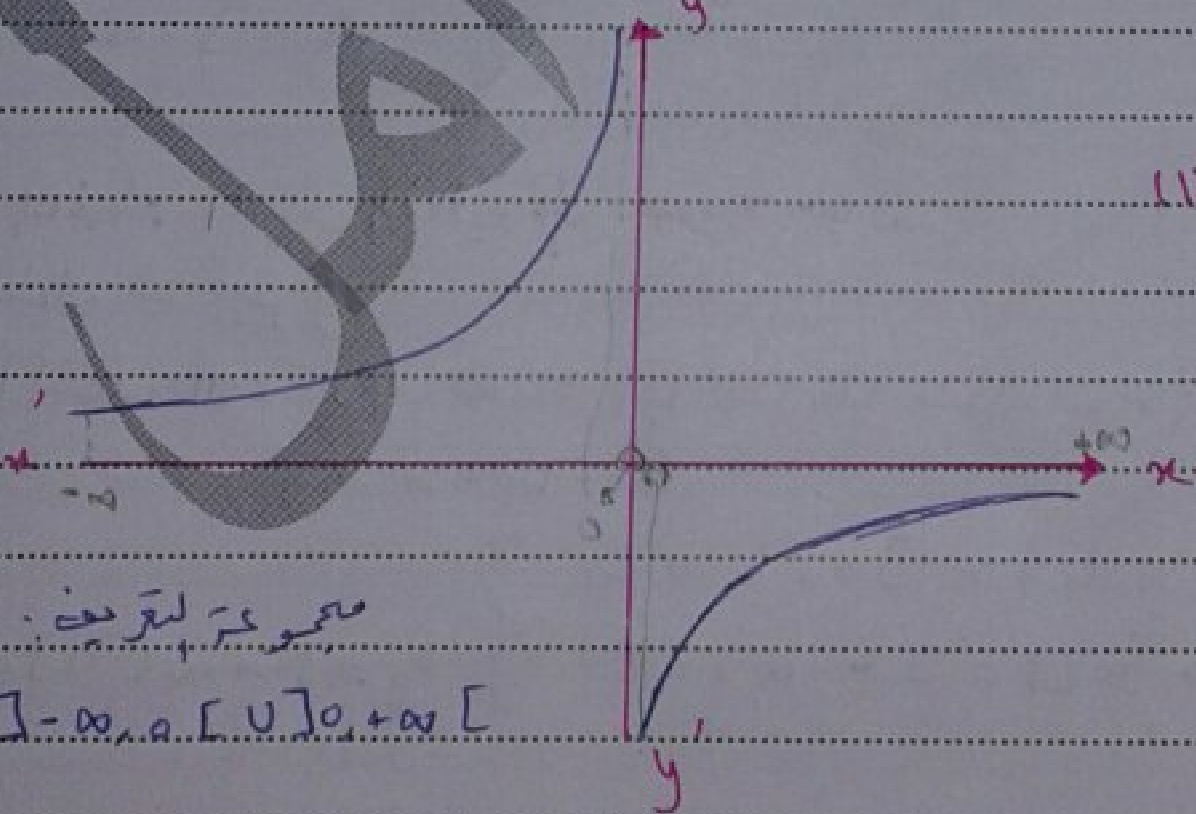
Note: إذا لم يسقط بداية c على محور xx' نقطة غير محددة نكتب $-\infty$

" " " نهاية c " " " $+\infty$

Note₂ * إذا كان في رسم c سهمين متعاكسين هنا يعني هناك قيمة لـ x لا نريدها لا تدخل في مجموعة التعريف، مثلاً عند 1 ما بنأخذها ⟸ $D_f =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

* إذا كان رسم c على شكل سهمين متعاكسين هنا يعني هناك مجال لا نريده

مثل: $]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$



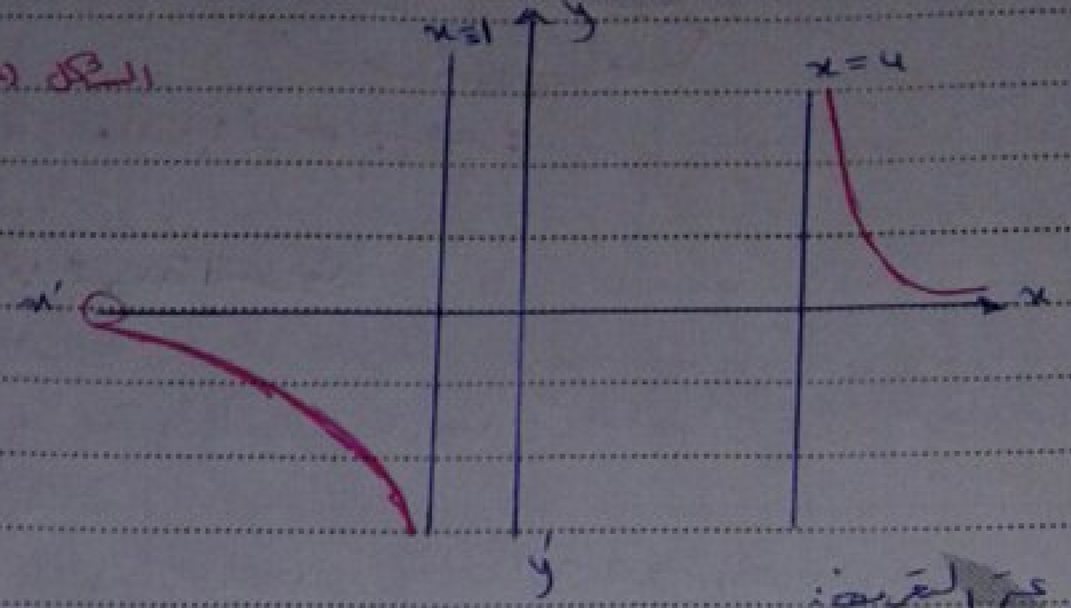
الشكل (1)

مجموعة التعريف:

$D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

مثال (2) :

الشكل (2)

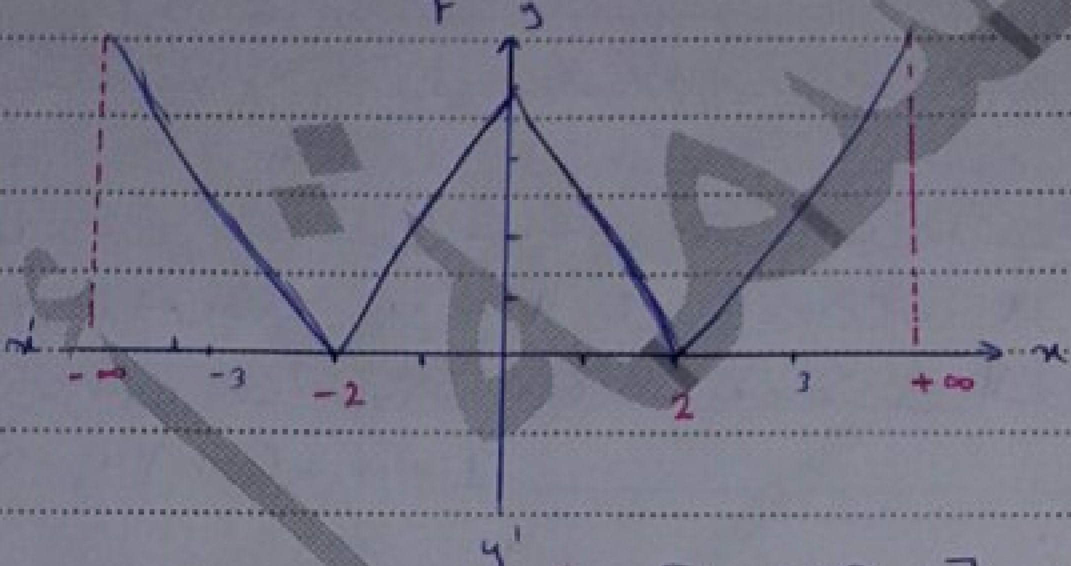


مجموعة التعريف:

$D_f =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

مثال (3)

الشكل (3)



$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

السؤال الثاني: المستقر الفعلي f صورة مجال

المستقر الفعلي هو قيم y.

مثلاً: الشكل (1): نوجد صورة المجالات التي تشكل مجموعة التعريف ونوجد اجتماعاتها.

$f(]-\infty, 0[) =]0, +\infty[$

$f(]0, +\infty[) =]-\infty, 0[$

$E_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

الشكل (2): المستقر الفعلي هو:

صور الأعداد ضمن المجال وليس [illegible]

$f(]-\infty, 1[) =]-\infty, 0[$

$f(]4, +\infty[) =]0, +\infty[$

$E_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

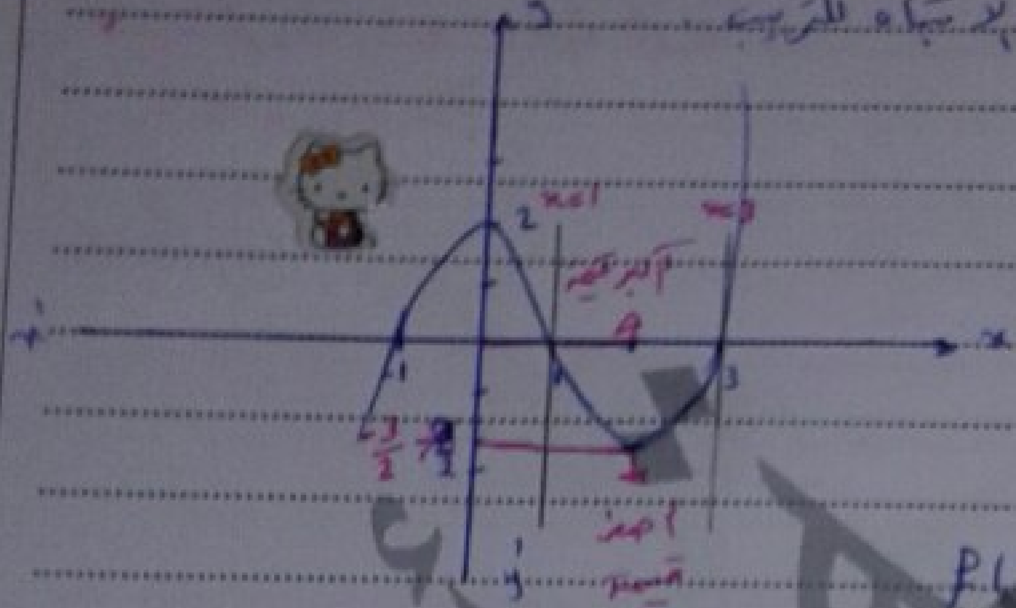
... قيم ل هنا

الشكل (3): $]a, +\infty[\; = \; [\;]$ ... $f(\,]\ldots[\,)$ ؟ هذا المجال من يكون

" من وين - لوين !!

السؤال الثالث: صورة مجال: لإيجاد صورة المجال $]a, b[$ أو $[a, b]$

* نرسم المستقيمات $x = a$ و $x = b$
* نحدد أصغر قيمة لـ y محصورة بين المستقيمين ونحدد أكبر قيمة
* نكتب f شكل مجال مع الانتباه للترتيب



الشكل (4)

* صورة المجال $[1, 3]$

$$f([1, 3]) = [-\frac{3}{2}, 0]$$

* تدريب: صورة المجال $[-1, 1]$ ؟؟

السؤال الرابع: صورة عدد: $f(x)$

من x_0 نسحب خط للخط C
من الخط نسحب خط لمحور yy' } ⇐ العدد المقابل في المحور هو صورة العدد

مثلاً:

في الشكل (4): $f(2) = -\frac{3}{2}$

$f(3) = 0$ نقطة تقاطع مع محور xx' معدوم صورها

$f(-1) = 0$ " "

$f(1) = 0$ " "

* نقطة تقاطع مع محور xx' ⇐ صورتها 0 مثال: $f(1) = 0$
* نقطة تقاطع مع محور yy' ⇐ x هي 0 ، $f(0) = 2$

بسمة أمل

السؤال الخامس: نهايات:

النهايات هي قيم y

بالشكل (1):

"نقترب من العدد صفر" $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

* تنطلق الدالة من C حيث يكون C يمين المقارب x=0 — $\lim_{x\to 0^{+}} f(x) = -\infty$

* تنطلق الدالة من C حيث يكون C يسار المقارب — $\lim_{x\to 0^{-}} f(x) = +\infty$

حسب الوضع النسبي

الشكل (2):

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 4^{+}} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

الشكل (3):

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

السؤال السادس: صورة مشتقة $f'(x_0)$

نعتمد على فكرة "المشتق هو ميل المستقيم الذي يمس x_0"

الخطوات: هنا نختار نقطتين من الخط ثم نطبق

$$f'(x_0) = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

"فرق الترتيبات" / فرق الفواصل

- إذا كان مقابل x_0 في المنحنى قمة أو ذروة "↔" نكتب $f'(x_0) = 0$

السؤال السابع: إيجاد معادلة مستقيم أو مماس:

هنا نلاحظ $(x_0, f(x_0))$ ونقطة ثانية اختيارية

$$f'(x_0) = m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

معادلة المستقيم $d: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

بسمة أمل

حالات خاصة:

• إذا كان $m = 0$ ⟸ معادلة المماس $y = f(x_0)$ ⟸ المماس أفقي

• إذا كان $m = \infty$ ⟸ معادلة المماس $x = x_0$ ⟸ المماس شاقولي

مثال: في الشكل (5)

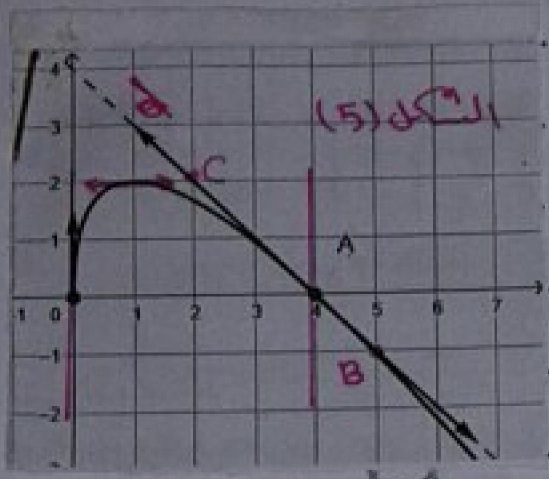
1- عين D_f

2- عين E_f

3- احسب $f(4)$ و $f'(4)$ و $f'(1)$ و $f'(0)$

4- اكتب معادلة المماسات الأفقية والشاقولية

5- أوجد صورة المجال $[0,4]$



الحل:

1) $D_f = [0, +\infty[$ قيم x

2) $E_f =]-\infty, 2]$ قيم y

3) $f(4) = 0$ نقطة تقاطع الخط مع محور xx'

* $f'(4)$: نختار نقطتين من المستقيم d

$B(5,-1)$ و $A(4,0)$

$$f'(4) = m = \frac{-1-0}{5-4} = \frac{-1}{1} = -1 \quad f'(4) = -1$$

* لو اخترنا A و C: $C(2,2)$

$$f'(4) = m = \frac{2-0}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$$

* $f'(1) = 0$

$f'(0) = \infty$ "التابع غير اشتقاقي عند $x=0$"

4) $f'(1) = 0$ ⟸ $y = f(1)$ معادلة مماس أفقي

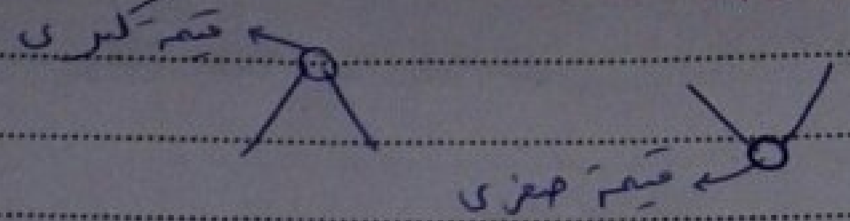
$y = 2$

$f'(0) = \infty$ ⟸ $x = 0$ معادلة مماس شاقولي

5) بين المستقيمين $x=0$ و $x=4$

$f([0,4]) = [0,2]$ ← أصغر قيمة لـ y هي 0، أكبر قيمة هي 2

السؤال الثامن: القيم الحدية:



في الأشكال السابقة:

- الشكل (1): لا يوجد قيم حدية
- الشكل (2): لا يوجد قيم حدية
- الشكل (3): $f(-2)=0$ ، $f(2)=0$ قيم صغرى
  - $f(0)=4$ قيمة كبرى
- الشكل (4): $f(0)=2$ قيمة كبرى
  - $f(2)=\frac{3}{2}$ قيمة صغرى
- الشكل (5): $f(1)=2$ قيمة كبرى

السؤال التاسع: حلول المتراجحة

1) $f(x) > y_\Delta$ أو $f(x) < y_\Delta$

في هذه الحالة نعتمد الوضع النسبي بين C & Δ

* $f(x) > y_\Delta \Leftarrow f(x) - y_\Delta > 0 \Leftarrow$ C فوق Δ

⟵ حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون فيها C أعلى من Δ

* $f(x) < y_\Delta \Leftarrow f(x) - y_\Delta < 0 \Leftarrow$ C تحت Δ

⟵ حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون فيها Δ أعلى من C.

2) $f(x) >$ عدد أو $f(x) <$ عدد أو $f(x) \geq$ عدد أو $f(x) \leq$ عدد

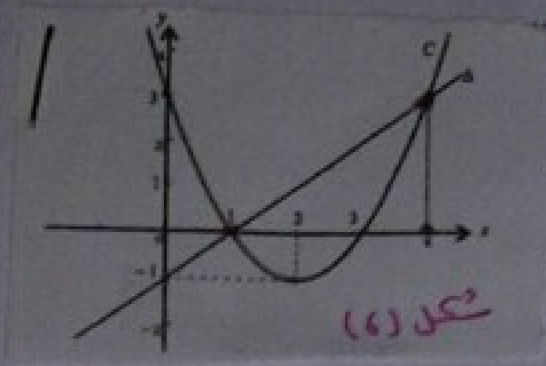
أفضل طريقة هي رسم جدول التغيرات ثم استنتاج حلول المتراجحة من السطر الثالث. أو "من الطريقة التي قبل".

مثلاً: في الشكل (3) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$ ؟

x	$-\infty$	(-3)	-2		0		2	(3)	$+\infty$
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$+\infty$ ↘	في (5)	0	↗	4	↘	0 ↗	في (5)	$+\infty$

نضع الأعداد التي صورتها 5؟؟ حلول المتراجحة:

$]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$



سؤال دورة 2018 دورة أولى:

في الشكل المرسوم جانباً، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR، والمطلوب:

1- دل على القيمة الحدية للتابع (الصغرى).

2- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3- ما حلول المعادلة $f(x)=y_\Delta$ ؟

4- اكتب معادلة المستقيم Δ

طلب إضافي: 5- ما هي حلول المتراجحة $f(x)\le y_\Delta$ ؟

الحل:

1- $f(2)=-1$ قيمة صغرى حدية للتابع f

2- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3- $f(x)=y_\Delta$ "نقاط التقاطع بين C و Δ فقط بدنا الإكسات"

يتقاطع الخط C_f مع Δ في نقطتين حيث تكون الحلول هي: $x=1$ و $x=4$

4- نختار نقطتين: $(1,0)$ $(4,3)$

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-0}{4-1}=\frac{3}{3}=1$

$\Delta: y-0=1(x-1)$

$\Delta: y=x-1$

5- $f(x)\le y_\Delta \Rightarrow f(x)-y_\Delta\le 0$ "حدد مجال الإكسات يكون فيه Δ فوق C"

حلول المتراجحة: $[0 , 4]$

السؤال المباشر: حل المعادلة "$f(x)=$ عدد"

نرسم مستقيم أفقي معادلته "y= عدد" ونعد (نحسب) نقاط تقاطع هذا المستقيم مع الخط البياني.

مثلاً: في الشكل (1): حل المعادلة $f(x)=0$ هو مجموعة خالية

في الشكل (2): حل المعادلة $f(x)=2$ حل وحيد

في الشكل (3): المعادلة $f(x)=2$ أربعة حلول

السؤال الحادي عشر: ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x)=m$ أو $f(x)=\lambda$

مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

* حلول المعادلة بيانياً هي: فواصل نقاط تقاطع C_f مع المستقيم $y=m$ (d)

الطريقة:

1- نقوم برسم مستقيم d أسفل المعلم بالتوازي مع محور الفواصل $x'x$ ونحرك هذا المستقيم للأعلى ونستنتج من عدد نقاط تقاطع المستقيم d مع C_f في كل مرة.

2- كلما تغيرت عدد نقاط التقاطع نتوقف وهكذا يتم المناقشة.

مثال: الشكل المجاور C_f خط بياني للتابع f والمطلوب:

1- أوجد D_f

2- أوجد $f(D_f)$ المستقيم $\Delta = 1$

3- بين ما للتابع من مقاربات أفقية أو شاقولية.

4- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

5- أوجد ما للتابع من قيم حدية

6- استنتج جدول تغيرات f

شكل (7)

الحل:

1- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

2- E_f:

$f(]-\infty,-2[)=]1,+\infty[$

$f(]-2,2[)=]0,-\infty[=]-\infty,0[$

$f(]2,+\infty[)=]1,+\infty[$

$\Rightarrow E_f=]1,+\infty[\cup]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ (مشترك)

$E_f=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

3- $x=2$ و $x=-2$ مقارب شاقولي للخط C

$y=1$ مقارب أفقي للخط C

4- حل المعادلة $f(x)=m$:

* $m \in]-\infty,0[$ المعادلة حلان مختلفان

* $m=0$ المعادلة حل وحيد

* $m \in]0,1[$ المعادلة مستحيلة الحل

* $m \in]1,+\infty[$ المعادلة حلين مختلفين

5- $f(0)=0$ قيمة كبرى محلية

6-

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

السؤال الثاني عشر: هل التابع زوجي؟ هل التابع فردي؟

فردي: متناظر بالنسبة للمبدأ

زوجي: متناظر بالنسبة للمحور yy' "يعني yy' بيقسم الرسم لقسمين متساويين متناظرين"

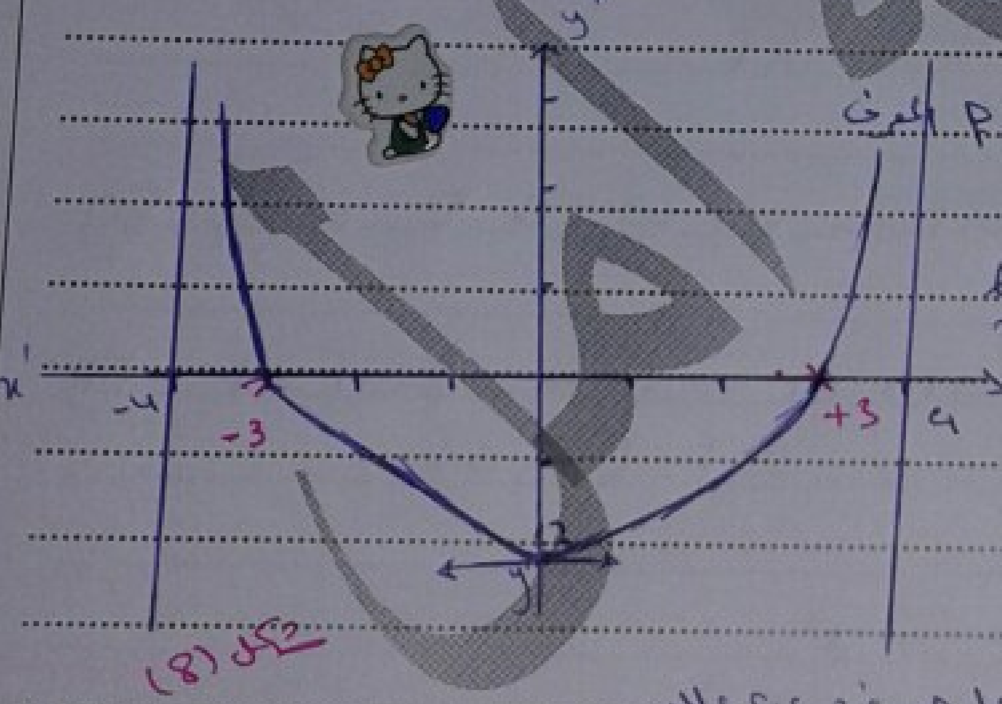
دورة 2017: دورة أولى:

نتأمل في الشكل المجاور الخط C للتابع f المعرف على $]-4,4[$

1. احسب $\lim_{x\to -4} f(x)$ و $\lim_{x\to 4} f(x)$ واستنتج معادلة كل مقارب للخط C

2. احسب $f(0)$ و $f'(0)$

3. حل المعادلة $f(x)=0$



شكل (8)

طلب إضافي: 4- هل f زوجي؟ هل هو فردي؟ علل

الحل:

1 $\lim_{x\to -4} f(x)=+\infty$ ، $x=-4$ مقارب شاقولي

* $\lim_{x\to 4} f(x)=+\infty$ ، $x=-4$ مقارب شاقولي

2 $f(0)=-2$ ، $f'(0)=0$ "مماس أفقي"

3 $f(x)=0$ يعني نقاط تقاطع C مع محور xx' ، $x_1=-3$ و $x_2=+3$

4 التابع f زوجي لأنه متناظر بالنسبة للمحور yy'

دورة 2017 م ثانية:

- تأمل الشكل المرسوم جانباً:

C هو الخط البياني للتابع f المعرف على

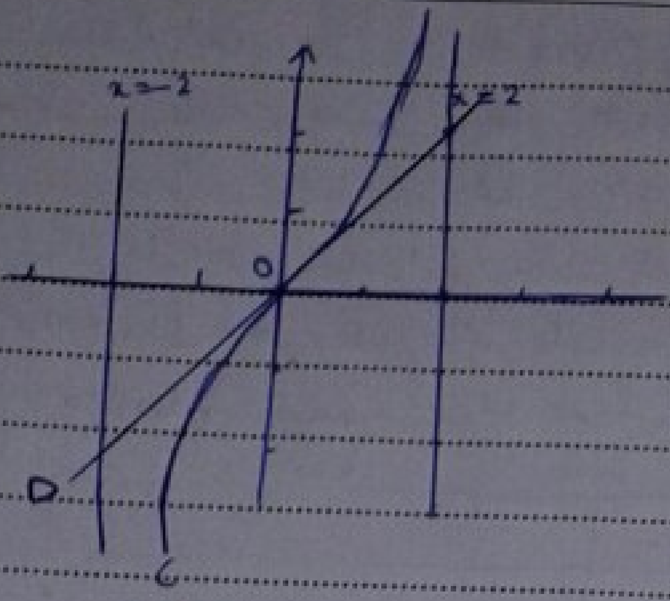
$I =]-2,2[$

1- احسب $\lim_{x\to -2} f(x)$ ، $\lim_{x\to 2} f(x)$

2- أوجد $f(0)$ ، $f'(0)$

3- هل التابع f زوجي أم فردي؟

4- اكتب معادلة المماس Δ



شكل (9)

الحل:

1. $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$

2. $f(0) = 0$

$f'(0)$:

نختار نقطتين: $(0,0)$ ، $(1,1)$

$f'(0) = \frac{1-0}{1-0} = 1$

3. التابع f فردي لأن C متناظر بالنسبة للمبدأ O

4. $m = f'(0) = 1$ ، $(0,0)$

$\Delta : y - 0 = 1(x - 0)$

$\Delta : y = x$

Ibtesam.omar

* * * * *

إنما الصلاة على النبي غنيمة

من حازها حاز الكرامة والمُلك

فتن بالصلاة على النبي مردداً

صلى عليك الله ما دار الفلك

بسمة أمل