

الأعداد العقدية :

* العدد التخيلي (i): نتخيل أن جذر العدد -1 هو العدد i أي : $i^2 = -1$

قوى العدد i الطبيعية:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1)(i) = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = (1)(i) = i$$

$$i^6 = i^3 \cdot i^3 = (-i)(-i) = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i^1 = (-1)(i) = -i$$

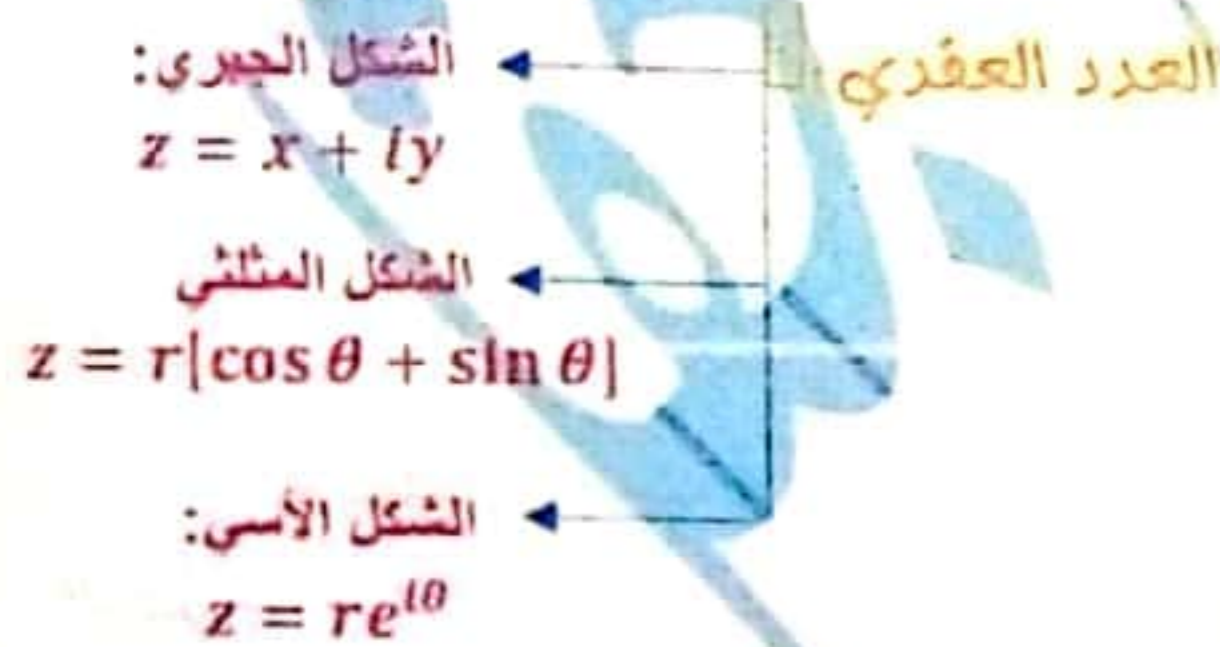
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^9 = i^5 \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$$

$$i^{10} = i^4 \cdot i^6 = 1 \cdot -1 = -1$$

نتيجة ~

قوى العدد i الطبيعية محصورة
بالمجموعة $\{+1, \pm i\}$



قواعد هامة

(1) مرافق $z = x + iy$ هو: $\bar{z} = x - yi$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$z + \bar{z} = 2x \quad (4)$$

$$z - \bar{z} = 2yi \quad (5)$$

مثال: ليكن لدينا : $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - 5i$

$$z_1 + z_2 = (3 + 4) + (2 - 5)i$$

$$= 7 - 3i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(4 - 5i)$$

$$= 12 - 15i + 8i - 10i^2$$

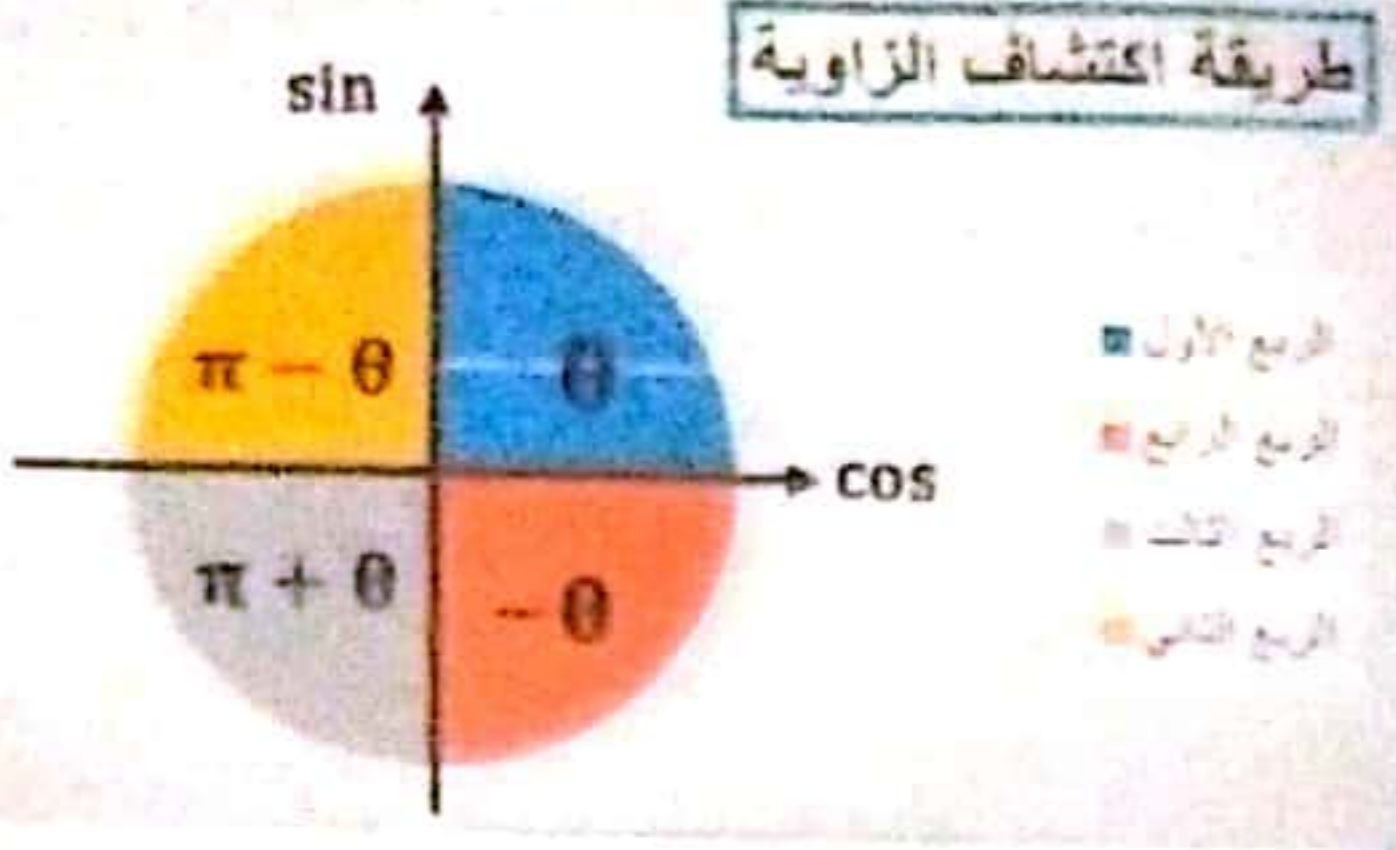
$$= 22 - 7i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4-5i} \Rightarrow \text{نضرب البسط والمقام بمرافق المقام:}$$

$$= \frac{(3 + 2i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$$

بممكنكم حضور فيديو شرح وحان
المكثفة على قناة مركز
اونلايه التعليمي على اليوتيوب
أو طلبها عبر الواتس اب
على الرقم
0955186517

التحويل من الشكل الجبري إلى المثلثي:



$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

مثال

حول العدد العقدي التالي إلى الشكل المثلثي ثم الآسي:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z = 1 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

فالشكل الآسي: $z = 1e^{i\frac{\pi}{6}}$

دستورا أويلر:

سؤال دورة: ليكن $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

المطلوب: أوجد $e^{-i\theta}$ ثم استنتج دستورا أويلر.

الحل: $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

بالجمع بين العلاقتين * و **:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

بالطرح بين * و **:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

تطبيق هام جدا: اكتب $\cos^3 x$ على شكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية x واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$

$$[\cos \theta + i \sin \theta]^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

مثال: احسب مايلي:

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{24}$$

الحل: نحوله إلى الشكل المثلثي:

$$r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{24} &= \left[\cos -\frac{\pi}{6} + i \sin -\frac{\pi}{6} \right]^{24} \\ &= \cos(-24) \frac{\pi}{6} + i \sin 24 \left(-\frac{\pi}{6} \right) \\ &= \cos 4\pi - i \sin 4\pi \\ &= 1 - i(0) = 1 \end{aligned}$$

تحليل ثلاثي الحدود:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

حلول المعادلة:

$$az^2 + bz + c = 0$$

مثال: حل المعادلة التالية في C : $z^2 + 4z + 29 = 0$

$$\Delta = 16 - 4(1)(29) = 16 - 116 = -100$$

الحل:

للمعادلة جذران عقدبان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = -2 - 5i$$

حل ما يلي: $z^2 + 4z + 29$ القاعدة: $a(z - z_1)(z - z_2)$

نوجد جذور للمعادلة:

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$z_1 = -2 + 5i$$

$$z_2 = -2 - 5i$$

$$\Rightarrow z^2 + 4z + 29$$

$$= 1[z - (-2 + 5i)][z - (-2 - 5i)]$$

$$= (z + 2 - 5i)(z + 2 + 5i)$$

إيجاد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$z = a + bi$$

تتبع ما يلي:

نفرض $\omega = x + iy$ جذر تربيعي لـ z

$$x^2 - y^2 = a \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

$$xy = \frac{b}{2} \quad (3)$$

أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

تطبيق هام

$$z = 3 + 4i$$

الحل: نفرض $\omega = x + iy$ جذر تربيعي للعدد z

$$x^2 - y^2 = 3 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{19 + 6} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad (2)$$

$$xy = 2 \quad (3)$$

$$(2) \cdot (1) \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

من اجل: $y = 1 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow$ نعوض في (3) $\Rightarrow x_1 = 2$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2 + i$$

 $x_2 = -2 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow y = 1$

$$\Rightarrow \omega_2 = -2 - i$$

مثال امتحاني هام

ليكن لدينا: $z = 1 + \sqrt{3}i$ أكتب العدد z بالشكل المثلثي ، وأثبت أن z^6 عدد حقيقي.

الحل: $r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = r[\cos \theta + i \sin \theta] = 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]$$

إثبات أن z^6 عدد حقيقي:

$$\begin{aligned} z^6 &= \left[2 \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]^6 \\ &\Rightarrow 2^6 [\cos 2\pi + i \sin 2\pi] \\ &= 2^6 [1 + 0] = 2^6 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

قواعد هامة

$$a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \times \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}; w \neq 0, \quad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$|zz'| = |z| \times |z'|, \quad \arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad (2\pi)$$

$$\arg(z^n) = n \arg z \quad (2\pi), \quad |z^n| = |z|^n$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad (2\pi), \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg w \quad (2\pi); w \neq 0, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}, \quad re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r', \theta = \theta' + 2\pi), \quad \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad z\bar{z} = |z|^2$$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

مثال

ليكن لدينا: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

$$z_2 = 1 + i$$

1) اكتب بالشكل المثلثي z_1 و z_2

الحل: $z_1 \Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z_1 = 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]$$

$$z_2 \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right]$$

(2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج $\cos \frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i + \sqrt{3}i + \sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right] \\ &= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + \sqrt{2}i \sin \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

بالمطابقة:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

تحليل الشعاع بعدد عقدي:

إذا كان A, B نقطتين فإن العدد العقدي الممثل للشعاع \overline{AB} هو: $z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$ مثال: ليكن لدينا النقاط:

$$\begin{aligned} A(2, 3) \quad , \quad B(-1, 4) \quad \text{مثل الشعاع } \overline{AB} \text{ بعدد عقدي} \\ z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = (-1 + 4i) - (2 + 3i) \\ = -1 + 4i - 2 - 3i = -3 + i \end{aligned}$$

العدد العقدي الممثل لمركز الأبعاد المثلثية:

لتكن النقاط $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \lambda)$ الممثلة لأعداد عقدية z_A, z_B, z_C فإن مركز الأبعاد لهذه النقاط G والعدد العقدي الموافق له يعطى بالقانون:

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \lambda z_C}{\alpha + \beta + \lambda}$$

العدد العقدي الممثل لمركز قطع مستقيمت AB :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث ABC :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

هام : تابعوا أهم الملاحظات
الإمتحانية بصفحتي على الفيسبوك

فارس جقل

ملاحظة : لإثبات وقوع 3 نقاط على استقامة واحدة هندسياً دون استعمال الأعداد العقدية... نوجد شعاعين ونبرهن ارتباطهما خطياً.

مثال امتحاني هام

في مستو عقدي لدينا النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد:

$$a = 6 - i, \quad b = -6 + 3i, \quad c = -18 + 7i$$

بالترتيب و المطلوب : اثبت وقوع النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

الحل

(1ط) $A(6, -1), B(-6, 3), C(-18, 7)$

$$\overline{AB} = (-12, 4) \quad \overline{AC} = (-24, 8)$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{AB}$$

فالشعاعين مرتبطين = النقاط على استقامة واحدة

(2ط) $z_{\overline{AB}} = b - a = (-6 + 3i) - (6 - i)$

$$= -12 + 4i$$

$$z_{\overline{AC}} = c - a = (-18 + 7i) - (6 - i)$$

$$= -24 + 8i$$

$$z_{\overline{AC}} = 2z_{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AC} = 2\overline{AB}$$

فالشعاعان مرتبطان = النقاط على استقامة واحدة

المسافات التي نملأها بنقطة بالشكل العقدي

لتكن النقطة A الممثلة للعدد العقدي z_A والنقطة B الممثلة للعدد العقدي z_B عندها يكون البعد (المسافة) بين A, B بالعلاقة :

$$AB = |z_B - z_A|$$

تطبيق : في المثال السابق احسب المسافة بين النقطتين A, B

$$AB = |b - a| = |-12 + 4i|$$

$$= \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

زاوية شعاع مع محور الفواصل

$$(\overline{U}, \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

قياس الزاوية الموجهة بين شعاعين $\overline{CD}, \overline{AB}$

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

(قواعد هامة)

لإثبات أن Z حقيقي نبرهن ،

$$\boxed{z = z, \operatorname{Im} z = 0 \text{ أو } \arg z = 0 \text{ أو } \arg z = \pi}$$

لإثبات أن Z عكس نبرهن ،

$$\boxed{\operatorname{Re} z = 0 \text{ أو } \bar{z} = -z \text{ أو } \arg z = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \arg z = \frac{-\pi}{2}}$$

إذا كانت الأمثلة غير حقيقية في معادلات الدرجة الثانية و

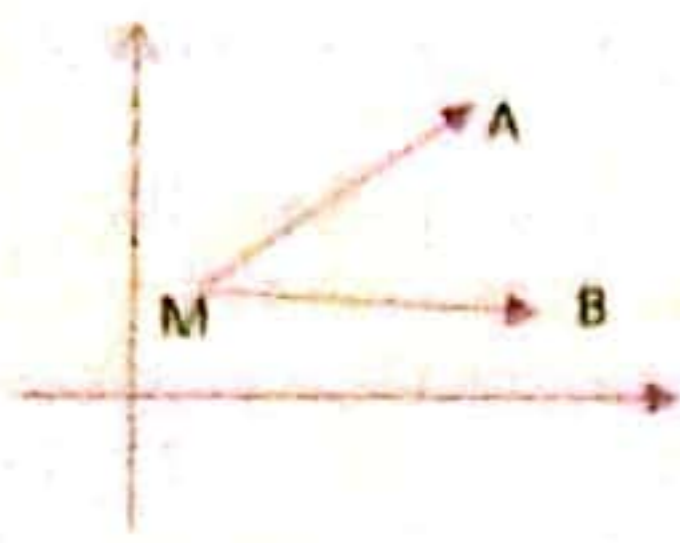
Z_1, Z_2 جذران نذكر القانونين ،

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}, \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

حالة خاصة :

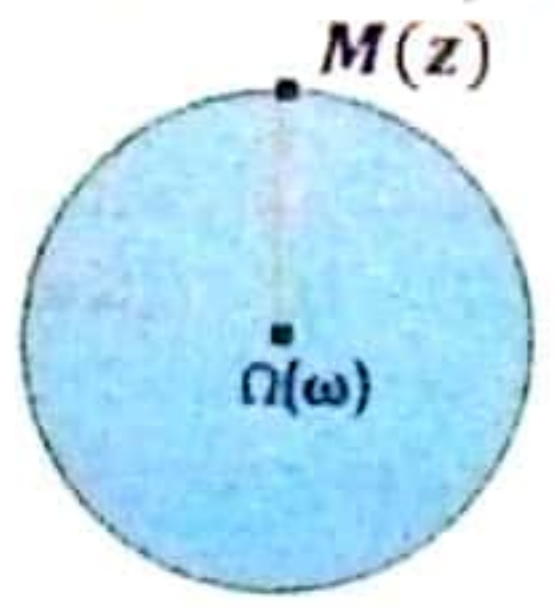
إذا كان الشعاعان لهما نفس البداية

$$(\overline{MA}, \overline{MB}) = \arg \left(\frac{z_B - z_M}{z_A - z_M} \right)$$



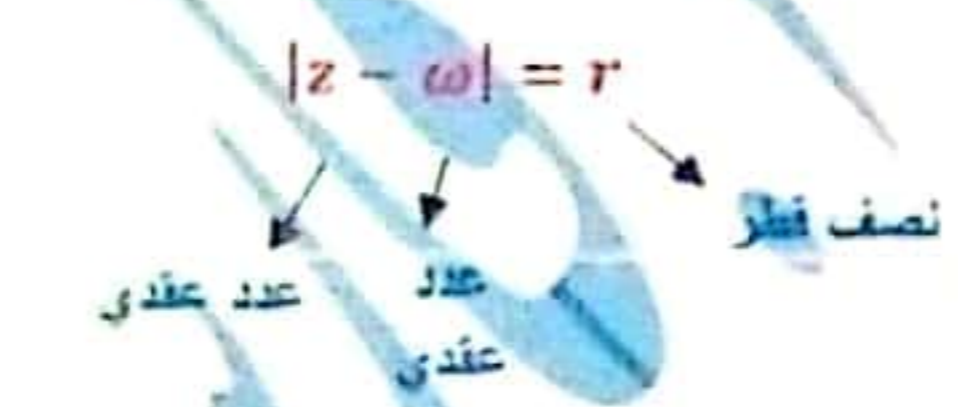
تمثيل مجموعات النقاط

الدائرة: نقول عن مجموعة النقاط (Γ) المكونه من النقاط $M(z)$ والتي تحقق الشرط :



$$|z - \omega| = r$$

أنها دائرة ومركزها $\Omega(\omega)$ ونصف قطرها r



مثال

$$|z - 2| = 4$$

ليكن لدينا: $|z - 2| = 4$ ماذا تمثل مجموعة النقاط؟؟
تمثل دائرة مركزها $\Omega(2, 0)$ ونصف قطرها 4

مثال

$$|z - 3 - 2i| = 3$$

ماذا تمثل مجموعة النقاط: $|z - 3 - 2i| = 3$
الحل:
 $|z - (3 + 2i)| = 3$
مجموعة النقاط دائرة مركزها $(3, 2)$ ونصف قطرها 3.

مدور القطعتين المستقيمتين $[AB]$

هي مجموعة النقاط M التي تحقق $MA = MB$
أي: $|z - a| = |z - b|$

* كيف نثبت ارتباط شعاعين بالاستفادة من العدد العقدي؟
او كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة؟
الشرط:

$$z = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \text{عدد حقيقي} \Rightarrow \arg(z) = 0, \pi$$

عندها نقول أن الشعاعان \overline{AB} و \overline{CD} مرتبطين خطياً والنقاط الثلاثة على استقامة واحدة:

$$\text{كيف نثبت تعامد شعاعين } \overline{BA} \text{ و } \overline{DC} \Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2}$$

$$z = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \text{عدد تخيلي} \Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2}$$

هام جدا نستخدم من القاعدة الأخيرة في برهان مثلث قائم

إذا كان لدينا: $\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
 = الشعاعان \overline{BA} و \overline{DC} متعامدان.

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

1- الصيغة العقدية للإنسحاب T

الصيغة العقدية هي: $\bar{z} = z + b$

عدد عقدي شعاعه \bar{w}

T هو انسحاب شعاعه \bar{a}

مثال M نقطة يمثلها العدد العقدي:

$z = 1 + i$

أوجد z التي تمثل النقطة M صورة M وفق انسحاب T شعاعه $\bar{a} = -2 + 3i$

الحل: $b = -2 + 3i$

$\bar{z} = z + b$

$\Rightarrow \bar{z} = 1 + i + (-2 + 3i)$

$\Rightarrow \bar{z} = -1 + 4i$

أي صورة M (-1, 4) هي صورة M (1, 1)

هام : تابعوا شروحات المكتفة على قناة (مركز أونلاين التعليمي) على اليوتيوب

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرب النقطة B بالنقطة A حيث B تمثل العدد العقدي b و A تمثل العدد العقدي a

$b = a - 1 + 3i$

الحل: B هي صورة A وفق انسحاب شعاعه $\bar{a} = -1 + 3i$ أي $B = \bar{a}(A)$

2- الصيغة العقدية للتحاكي (k):

الصيغة العقدية لها هي :

$\bar{z} - \omega = k(z - \omega)$

المركز (نقطة)

نسبة لتحاكي

مثال

أوجد z' صورة z وفق تحاكي مركزه (0)

ونسبته 4 حيث $z = (1 + i)$

الحل: $\bar{z} - (0 + 0i) = 4(z - (0 + 0i))$

$\Rightarrow \bar{z} = 4z$

$\bar{z} = 4(1 + i) = 4 + 4i$

فلم جدا :

تابعوا شروحات المكتفة على الواتس 0955186517

(ارسل كلمة بكالوريا علمي)

عين طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة: $b = 2a$

مثال

$$b - (0 + 0i) = 2(a - (0 + 0i))$$

نسبة التحوالى (2) المركز (0)

طبيعة التحويل الهندسي هو (تحوالى).

عين طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة:

$$(b - 1) = -(a - 1)$$

طبيعة التحويل الهندسي هو تحاكي مركزه (1, 0) ونسبته $k = -1$

3- الصيغة العقديّة للدوران (R):

$$z - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$$

زاوية الدوران المركز

مثال

R دوران مركزه $A(2 - i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ حيث $z = 1 + i$ أوجد \hat{z} صورة z

$$\hat{z} - (2 - i) = e^{i\frac{2\pi}{3}} (z - (2 - i))$$

$$\Rightarrow \hat{z} - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) (1 + i - 2 + i)$$

$$\Rightarrow \hat{z} - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) (-1 + 2i)$$

الحل

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي:

$$\textcircled{1} b - 1 = e^{i\pi} (a - 1)$$

دوران مركزه (1, 0) وزاويته π .

$$\textcircled{2} b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}} (a + 1 - i)$$

$$b - (-1 + i) = e^{i\frac{\pi}{4}} (a + 1 - i)$$

B صورة A وفق دوران مركزه (-1, 1) وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

الحل

فهم جيداً

4- المبرهنة العقديّة للتناظر الممحوري:

لدينا حالتين:

1- حالة أولي ، محور التناظر (ox) عندها يكون: $\bar{z} = z$

2- حالة ثانيّة: محور التناظر (oy) عندها يكون:

$$\bar{z} = -\text{Re}(z) + i\text{Im}(z) = -\bar{z}$$

مثال: عين \bar{z} صورة z وفق S التناظر المحوري الذي محوره ox حيث $z = 1 + i$

مثال

الحل: محور التناظر ox $\Leftrightarrow \bar{z} = 1 - i$

مثال: عين \bar{z} صورة z وفق S التناظر المحوري الذي محوره oy حيث $z = 1 + i$

مثال

الحل: محور التناظر oy $\Leftrightarrow \bar{z} = -1 + i$

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي:

$$b = \bar{a}$$

الحل: طبيعة التحويل الهندسي تناظر محوري.

B في صورة A وفق تناظر محوره (ox).

5- المبرهنة العقديّة للتناظر المركزي:

$$\bar{z} = 2\omega - z$$

مثال: عين \bar{z} صورة z وفق S التناظر الذي مركزه $A(1 - 3i)$ حيث $z = 1 + i$.

مثال

الحل: $\bar{z} = 2(1 - 3i) - (1 + i)$

$$= 2 - 6i - 1 - i$$

$$= 1 - 7i$$

تلميح: مراجعة الاختبارات الموجودة

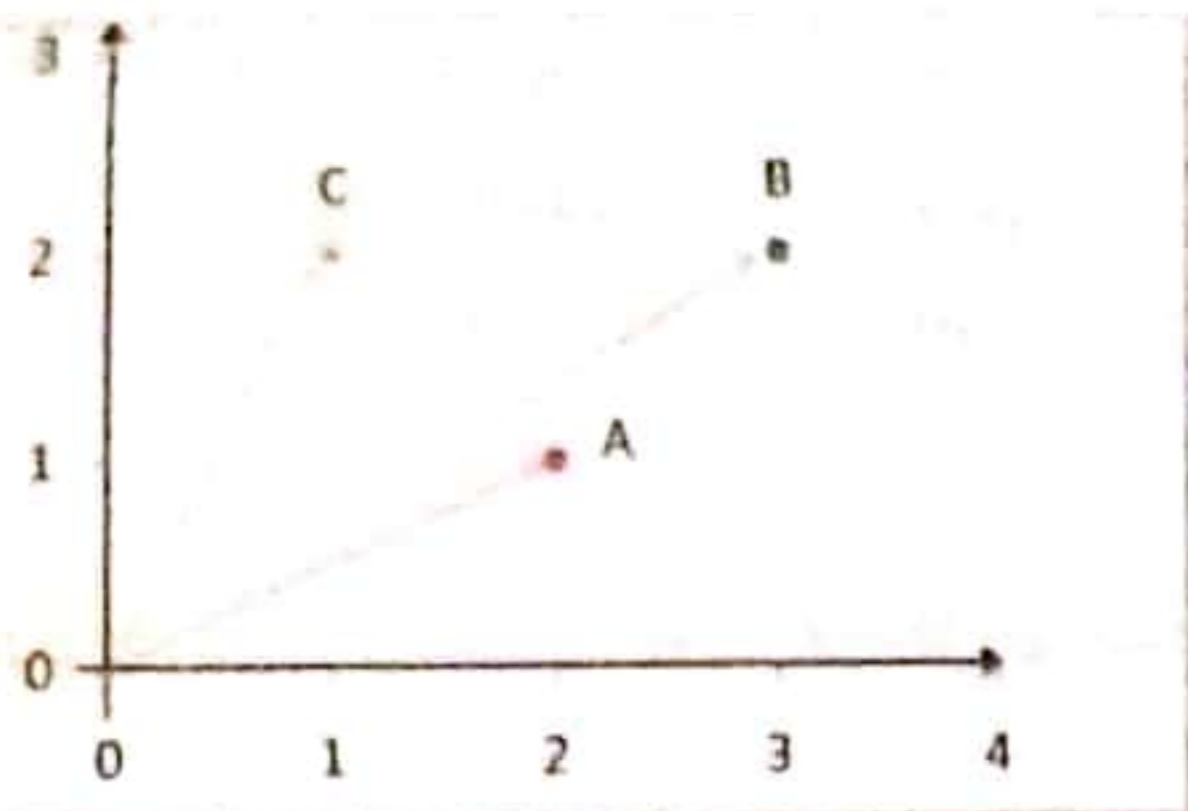
في مجموعة (نماذج واختبارات

الأسئلة فإرس جمل) على الفيس

بوك

بنك الأسئلة الهامة

السؤال الأول : في مستو محدث بمعلم متجانس $(0, \bar{i}, \bar{j})$



1. أوجد الأعداد المركبة الآتية : z_3, z_2, z_1 إذا علمت أنها ممثلة بالنقاط C, B, A بالترتيب .
2. أثبت أن المثلث ABC قائم في A .

السؤال الثاني : عين العددين العقديين z_1, z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_2 - z_1 + 3 = 0 \\ \bar{z}_2 + 2\bar{z}_1 + 3 = 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

السؤال الثالث : ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد . أثبت أن $\frac{wz-z}{w-1}$ تخيلي بحت .

السؤال الرابع : تحقق أن $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ جذر للمعادلة $z^2 + z + 1 = 0$ ، ثم أوجد الجذر الآخر z_2

السؤال الخامس : أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 4 - 2\sqrt{5}i$.

السؤال السادس : حل في \mathbb{C} المعادلتين التاليتين :

$$z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0$$

$$z^2 - (1 + 2i)z + 3 + 3i = 0$$

السؤال السابع : اكتب العدد العقدي z بالشكل الأسّي :

$$z = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

السؤال الثامن : اكتب العدد المركب $z = 1 + e^{2i\theta}$ بالشكل الأسّي حيث θ عدد حقيقي يحقق $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

السؤال التاسع : أوجد معادلة من الشكل : $az^2 + bz + c = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية

والعدد z_1 جذر لها حيث $z_1 = 2 + i$.

السؤال العاشر : إذا كانت $M(z)$ صورة العدد المركب z . عين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق :

$$|z - 1 + 2i| = |z - 3 - 5i|$$

السؤال الحادي عشر : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(0, \bar{i}, \bar{j})$. لدينا النقاط C, B, A التي

تمثلها الأعداد العقدية : $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \sqrt{3} - i, z_C = 3\sqrt{3} + i$.

1. اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

2. عين (\mathcal{E}) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً .

3. عين (\mathcal{F}) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً .

السؤال الثاني عشر : ليكن العددين المركبان $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$

1. اكتب كلا من z_1 , z_2 بالشكل الأسّي .
2. اكتب بالشكل الجبري وبالشكل الأسّي $z = \frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كل من $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ ثم أوجد $(z)^{48}$

السؤال الثالث عشر : تتأمل النقاط A, B, C, D الممثلة للأعداد العقدية $a = -1$, $b = 2 + i\sqrt{3}$,

$c = 2 - i\sqrt{3}$, $d = 3$ بالترتيب .. والمطلوب :

1. ارسم النقاط A, B, C, D . ثم احسب AB, BC, AC واستنتج طبيعة المثلث ABC .

2. عين $\arg \frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC .

3. أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 2)$.

السؤال الرابع عشر : لدينا في مجموعة الأعداد العقدية C كثير الحدود $P(z)$

المعزف كما يلي : $P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$

(1) بين أنه إذا كان a جذراً لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضاً

(2) تحقق أن $1 + i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ واستنتج جذراً آخر له ثم اكتب هذا الجذر بالشكل الجبري .

(3) اكتب الجذرين السابقين بالشكل الأسّي .

(4) لتكن الأعداد العقدية التالية : $a = 1 + i$, $b = -1 + i$, $c = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$, $d = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$

ولتكن النقاط الممثلة لها في معلم متجانس A, B, C, D حيث m عدد حقيقي . عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربع

السؤال الخامس عشر : لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $1 + i - z$ والمطلوب :

1. أثبت أن z^m عدداً حقيقياً

2. جد العدد z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق تحاكي مركزه $A(1 + i)$ نسبته 3

السؤال السادس عشر : لتكن الأعداد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

1. اكتب بالشكل الأسّي كل من $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

2. اكتب بالشكل الجبري $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(z_2)^6$ و $(z_3)^{24}$

3. أوجد الجذرين التربيعيين ل z_2 بالشكل الجبري

4. حل المعادلة التالية بالمجهول z في C : $z^3 + 6z^2 = -29z + 2z^2$

السؤال السابع عشر : ليكن المثلث ABC في المستوي نشئ على ضلعيه AC و BC وخارجه

المربعين $CBB'D$, $ACEA'$ كما في الشكل المجاور .

لتكن الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'

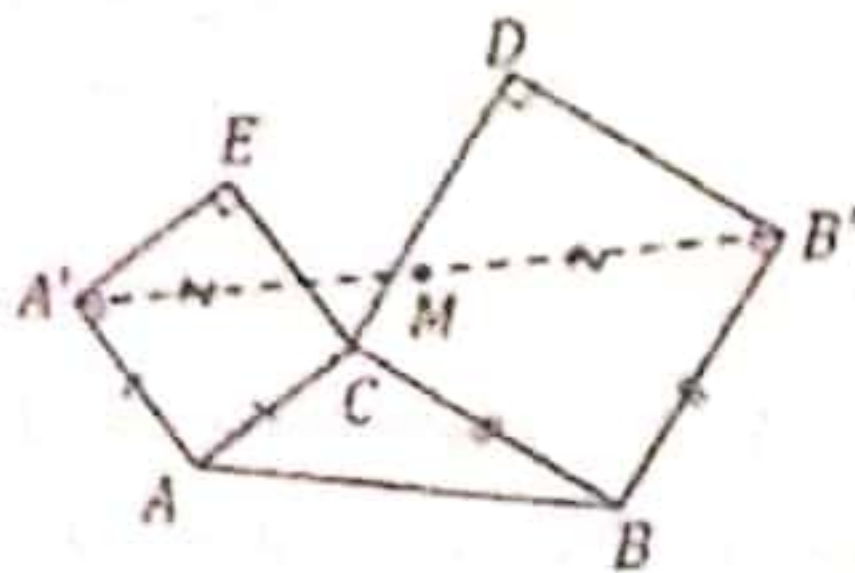
1. B' هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عينه

و اكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b, c

2. أثبت أن $a' = i(c - a) + a$

3. عين العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

4. كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي



السؤال الثامن عشر :

نتأمل النقاط D, C, B, A الممثلة للأعداد العقدية

$$d = 3, c = 2 - i\sqrt{3}, b = 2 + i\sqrt{3}, a = -1$$

1. ارسم النقاط A, B, C, D ثم احسب AB', BC, AC واستنتج طبيعة المثلث ABC
2. عين $\arg \frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC
3. أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1), (B, 2), (C, 2)$

السؤال التاسع عشر : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$ نتأمل النقاط C, B, A

الممثلة للأعداد العقدية : $a = \sqrt{3} + i, c = ia, b = (1+i)a$ بالترتيب .. والمطلوب :

1. اكتب b بالشكل الجبري ثم احسب $|b|$ و $\arg b$ ثم استنتج $\cos \frac{5\pi}{12}$ ثم اكتب c بالشكل الجبري
2. برهن أن المثلث AOC قائم و متساوي الساقين ثم بين أن النقطة B هي صورة النقطة A وفق انسحاب شعاعه \overline{OC}
3. استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع

السؤال العشرون : لتكن النقطتان A, B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية

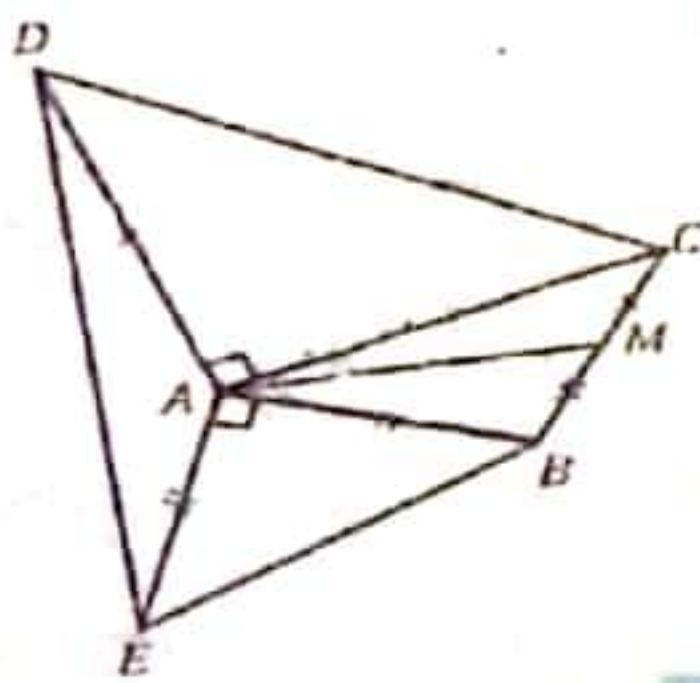
$$P(z) = z^2 + (1 + 2i)z + 3 + 3i \text{ وليكن } z_B = -3i, z_A = -1 + i$$

1. أثبت أن z_A حلاً للمعادلة $P(z) = 0$ ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة
2. جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$
3. اكتب z_A بالشكل الأسّي

السؤال الواحد والعشرون : نتأمل في المستوي مثلثا ABC مباشر التوجيه كفيماً ، لتكن M منتصف AC وليكن

AEB, ACD مثلثين قائمين في A متساوي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبداء النقطة A

و نرمز بالرمزين b, c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين C, B



1. احسب بدلالة b, c الأعداد العقدية e, d, m الممثل للنقاط E, C, M بالترتيب
2. احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$
3. نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المنقلة $(B, 1), (C, 1), (E, 3), (D, 2)$ ، احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC

السؤال الثاني والعشرون : ليكن a عدد حقيقي من المجال $[0, \pi]$ و z عدد عقدي

$$f(z) = z^3 - (1 - 2\sin \alpha)z^2 + (1 - 2\sin \alpha)z - 1$$

1. تحقق أن العدد 1 جذر لكثير الحدود $f(z)$
2. عين العددين العقديين a, b بحيث $f(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$
3. حل في C المعادلة $f(z) = 0$

السؤال الثالث و العشرون : لتكن لدينا الأعداد العقدية :

$$a = 1, b = e^{i\frac{\pi}{3}}, c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

1. اكتب c بالشكل الأسّي و اكتب d بالشكل الجبري
 2. و ضع النقاط A و B و C و D في مستو مزود بمعلم متجانس
 3. أثبت أن الرباعي $OACB$ معين
- السؤال الرابع و العشرون : ليكن لدينا كثير الحدود $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ والمطلوب :

1. أثبت أن $p(-1) = 0$
2. اكتب $p(z)$ بالشكل $p(z) = (z + 1)Q(z)$
3. حل المعادلة $p(z) = 0$
4. A, B, C ثلاث نقاط تمثل حلول المعادلة ، أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

السؤال الخامس و العشرون :

ليكن لدينا كثير الحدود $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ والمطلوب :

1. عين عددين حقيقيين a, b يحققان : $p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
2. حل في C المعادلة $p(z) = 0$

السؤال السادس و العشرون : لتكن الأعداد العقدية الممثلة للنقاط :

$$Z_A = 3, Z_B = 1 + 2i, Z_C = -1 + 2i$$

1. مثل هذه الأعداد في مستو عقدي
2. جد Z_N صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
3. جد Z_R ليكون الرباعي $OQNR$ متوازي أضلاع
4. أثبت تعامد المستقيمين OR, AB و أثبت أن $OR = \frac{1}{2}AB$

السؤال السابع و العشرون : لتكن الأعداد العقدية :

$$a = 1 + \frac{3}{4}i, b = 2 - \frac{5}{4}i, c = 3 + \frac{7}{4}i$$

1. و ضع النقاط A, B, C في شكل و ما العلاقة التي تربط الأعداد العقدية الممثلة للشعاعين $\overline{AB}, \overline{AC}$
2. استنتج أن المثلث (ABC) قائم و متساوي الساقين
3. احسب العدد العقدي Z_A ليكون الشكل $ABA'C$ مربعا

السؤال الثامن والعشرون : لتكن الأعداد العقدية :

$$a = 2 - 2i, b = -1 + 7i, c = 4 + 2i, d = -4 - 2i, w = -1 + 2i$$

أثبت وقوع النقاط A, B, C, D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

السؤال التاسع والعشرون : ليكن العددان العقديان z_B, z_A حيث $\arg(z_A) = \alpha$ و

$$\arg(z_B) = -\beta$$

1. اكتب z_B, z_A بالشكل الجبري
2. اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الجبري والأسّي
3. استنتج قيمة $\alpha + \beta$



السؤال الثلاثون :

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نتأمل النقاط C, B, A

التي تمثلها الأعداد العقدية : $a = 1 - i, b = -1 + i, c = \sqrt{3}(1 + i)$ بالترتيب.. والمطلوب :

1. اكتب a, b, c بالشكل الأسّي
2. احسب \arg وطويلة العدد العقدي $\frac{b-a}{c-a}$ ثم بين نوع المثلث ABC
3. احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ معين
4. احسب العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

السؤال الواحد والثلاثون : ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$. المطلوب :

1. بين أن $|w| = 1$ ، ثم اكتب العدد w بالشكل الأسّي
2. ليكن z عدد عقدي ما أثبت أن $Z = \frac{z-2w}{1-w}$ عدد حقيقي

جلسة امتحانية لمراجعة العقديّة

السؤال الرابع، في المستوى العقدي المنسوب
إلى معلم متباينة (O, u, v) تتأمل النقاط
A, B, C, M التي تتلوا على الترتيب الأعداد
العقديّة $a = -i$, $b = 1 - i$, $d = 2i$,
 $m = -1 + i$ والطلب:

[1] مثل الأعداد $a = -i$, $b = 1 - i$,
 $d = 2i$, $m = -1 + i$ في المستوى.

[2] احسب العدد العقدي C الممثل للنقطة C
صورة النقطة D وفق دوران مركزه O
وزاوية $\frac{\pi}{2}$.

[3] أثبت أن النقاط M, O, B تقع على
الاستقامة واحدة.

[4] احسب $\arg \frac{d-c}{m}$ واستنتج، أن
(OM) و (OC) متعامدان.

[5] تخال في C ما يلي إلى عوامل فطرية من
الدرجة الأولى: $Z^3 + 4Z^2 + 29Z$.

[6] عن العددين العقديين w , Z المحققان
لمجموعة المعادلتين:

$$\begin{cases} 2Z - w = -3 \\ 2\bar{Z} + \bar{w} = -3 + 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

[7] أوجد صورة m وفق تحالي مركزه b
ونضبة 3.

السؤال الخامس، في المستوى العقديّان

$$Z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad Z_2 = 1 + i$$

والطلب:

[1] أكتب بالشكل القطبي كلا من الأعداد Z_1 , Z_2

[2] أكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$ واستنتج $\cos \frac{\pi}{12}$.

السؤال الثامن، لنفك النقطة M التي يمثّلها العدد العقدي

$Z = -1 + i$ والطلب:

[1] أثبت أن Z^8 عدد حقيقي.

[2] جد العدد العقدي Z^1 الممثل للنقطة M
م وفق دوران مركزه $A(1 + i)$ وزاوية $\frac{\pi}{4}$
وأكتب بالشكل الأسّي.

السؤال التاسع:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متباينة
(O, u, v) تتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما

على الترتيب العددا العقديان: $Z_A = 4$,
 $Z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

ولتكن I منتصف [AB] والطلب:

[1] مثل النقطتين A, B في معلم متباينة (O, u, v)
وأكتب Z_B بالشكل الأسّي.

[2] بين طبيعة المثلث OAB، وأثبت أنه قياس
الزاوية (\vec{u}, \vec{OI}) هو $\frac{\pi}{8}$.

[3] أكتب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I
بالصيغة الجبرية والاسية واستنتج $\sin(\frac{\pi}{8})$.

[4] أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$Z = -8 + 8\sqrt{2}i$$

المبدأ الأساسي في العد: تجربة تمر بمرحلتين أو (طريقتين) m و n فإن عدد الطرق الكلية للقيام بالتجربة هي: $m \times n$

مثال: حديقة لها أربع أبواب بكم طريقة يمكن الدخول والخروج من باب آخر لهذه الحديقة؟

أكل: عدد طرق الدخول: 4

عدد طرق الخروج: 3

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$12 = 3 \times 4 \text{ طريقة}$$

قانون العائلي: $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\bullet n! = n(n-1)!$$

خواصه:

$$5! = 5 \times 4!$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3!$$

$$\bullet (n+1)! = (n+1)n!$$

$$\frac{100!}{99!} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100 \text{ اختصر:}$$

$$\bullet 0! = 1$$

$$\bullet 1! = 1$$

مثال

سؤال: متى نستخدم العائلي؟

عندما نبدل عناصر مجموعة بين بعضها البعض. (نبادل عناصر المجموعة في أماكن تساوي عددها)

مثال: نبادل ثلاث كرات مختلفة الألوان (أخضر، أحمر، أسود) بين بعضها البعض. بكم

طريقة يمكن ذلك؟

$$\text{أكل: } 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \text{ طرق}$$

ماهي هذه الطرق؟

6 طرق



يمكنكم الاستماع إلى
الشروحات الصوتية لهذه
المكثفة عبر الواتس اب على
الرقم 0955186517
أو على قناة التلغرام
(المدرسة فارس جفلا)

لدينا بطاقتان مرقمتان [1, 2] بكم طريقة يمكن تبديلها

$$2! = 1 \times 2 = 2 \quad \text{أكل : طريقة}$$

الترتيب: (القوائم دون تكرار)

بشكل عام عند اختيار جزء من مجموعة ونريد ترتيبها على أماكن عددها يساوي هذا الجزء عندها نستخدم الترتيب.. أو هو ترتيب r عنصر من مجموعة فيها n عنصر.

القانون:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

مثال: $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3$

مثال: لدينا عشر أشخاص نريد اختيار ثلاث أشخاص من أجل تشكيل لجنة مكونة من (مدير ، نائب مدير ، أمين سر) بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل: نلاحظ ان الجزء الذي سنختاره من المجموعة يساوي عدد الأماكن ، لذلك نستخدم قانون الترتيب.

طريقة $P_{10}^3 = 8 \times 9 \times 10 = 720$

طريقة أخرى : عدد طرق اختيار المدير 10

عدد طرق اختيار نائب المدير 9

عدد طرق اختيار أمين السر 8

حسب المبدأ الأساسي في العدد:

طريقة $8 \times 9 \times 10 = 720$

التوافيق : هو عدد المجموعات الجزئية من مجموعة منتهية. أو التوفيق هو مجموعة جزئية من مجموعة منتهية.

سؤال: متى نستخدم قانون التوافيق؟

عندما لا يكون هناك أهمية للترتيب في المسألة.

القانون: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ أو $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$

مثال: $\binom{5}{3} = \frac{P_5^3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ أو $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$

$$576 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 \times 4$$

② عدد طرق اختيار الكتاب الأول 1

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني 6

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث 5

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس 2

عدد طرق اختيار الكتاب السابع 1

حسب المبدأ الأساسي في العدد:

$$720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 1$$

مراجعة الاختبارات الموجودة
في مجموعة (نماذج واختبارات
الأساتذ فارس جفل) على الفيس
بوك

تجربة برنولي

نستخدم تجربة برنولية عندما نقوم باختبار ما:

يكون عدد مرات تكرار التجربة n مرة ((على نحو مستقل))

ونهتم بوقوع حدث محدد احتمال وقوعه (p) واحتمال عدم وقوعه q

ونريد حساب احتمال تحقق الحدث عدداً k من المرات

مثال: في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات ، احسب احتمال الحصول على الوجه H مرتين.

الحل:

قانون برنولي: (القانون الحداني)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$n = 3, \quad K = 2, \quad P = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$q = 1 - p$$

مثال دورة 2017 الأولى

لدينا تجربة إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار وليكن احتمال ظهور الشعار $\frac{1}{3}$ والمطلوب:

ما هي قيم المتغير العشوائي، نظم جدولاً بها، واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

$$n = 3, \quad k = 0, \quad p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3}$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{27} = \frac{8}{27}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

$$E(X) = \sum_{r_i} r_i \cdot P(X = r_i)$$

$$= 0 + \frac{12}{27} + \frac{12}{27} + \frac{3}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

r_i	$P(X = r_i)$
0	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

أو طريقة ثانية حسب بيروني:

$$v(X) = n p \cdot q = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad E(X) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

ملاحظة هامة:

عندما يكون في التجربة صندوقين متماثلين ونختار أحدهما فإننا نعطي لكل صندوق احتمال $\frac{1}{2}$ وننظم مخطط...

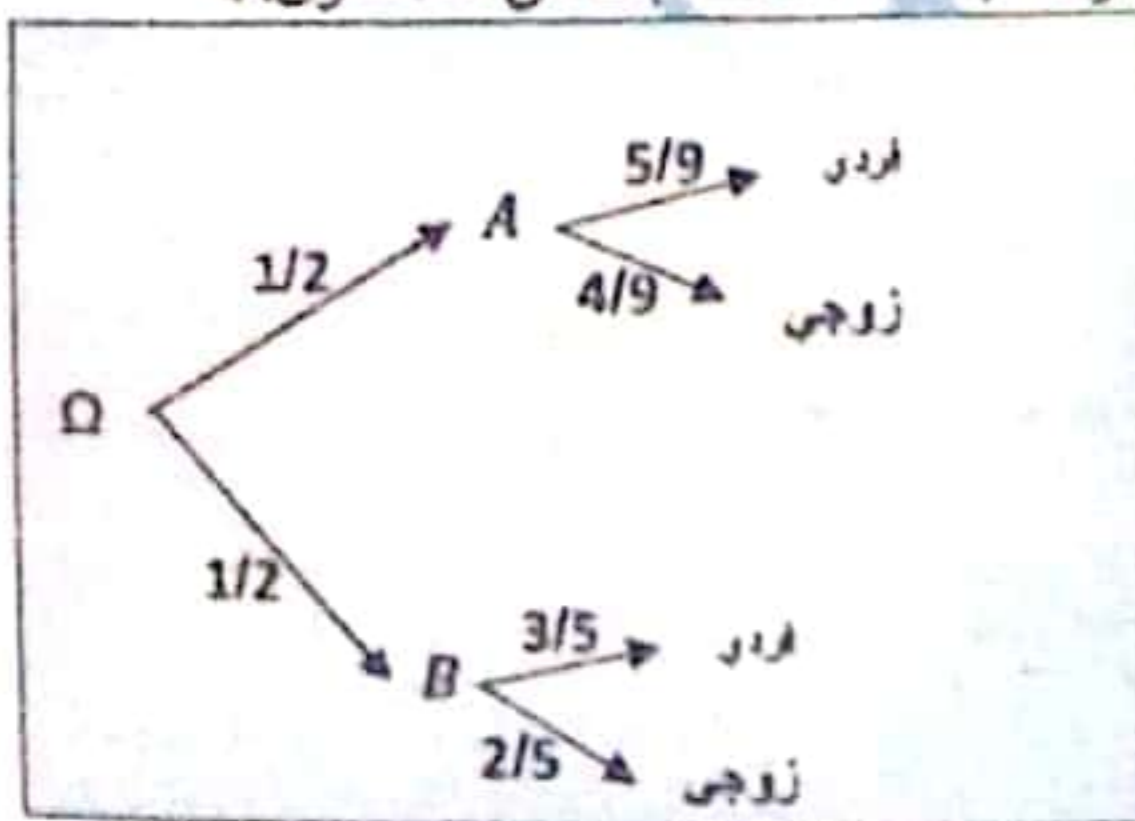
مثال امتحاني

لدينا صندوقان A, B:

يحتوي الصندوق A بطاقات مرقمة من 1 إلى 9 ويحتوي الصندوق B بطاقات مرقمة من 1 إلى 5.. نختار أحد الصندوقين عشوائياً ونسحب منه بطاقة فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجي، فما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من الصندوق A.

بفرض C حدث البطاقة المسحوبة زوجي.

بفرض A حدث البطاقة من A.



$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \dots$$

أحسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة فردية.

بفرض E حدث ظهور بطاقات فردية.

$$P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} =$$

ما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من B علماً أنها تحمل رقم فردي.
 بفرض B حدث البطاقة المسحوبة من B.
 بفرض E حدث البطاقة تحمل رقم فردي.

قانون الاحتمال الشرطي:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}} = \dots$$

مسألة امتحانية متوقعة

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية والمطلوب:

1. ما عدد الاختبارات في هذه التجربة.

2. أكمل الجدول المجاور.

3. أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري

للمتحول العشوائي X.

K	
P(X = k)	

الحل:

1. عدد الاختبارات: $n = 4$

2. نحتاج P: $P(X = 4) = \binom{4}{4} P^4 (1 - P)^0$

$$\frac{16}{81} = 1 \cdot P^4 \Rightarrow P^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow P = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{81}$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27} = \frac{8}{81}$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$= 4 \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$$

$$E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$v(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{v(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

فارس جفل



وددت أن كل علم أعلمه يعلمه الناس أوجر عليه ، ولا

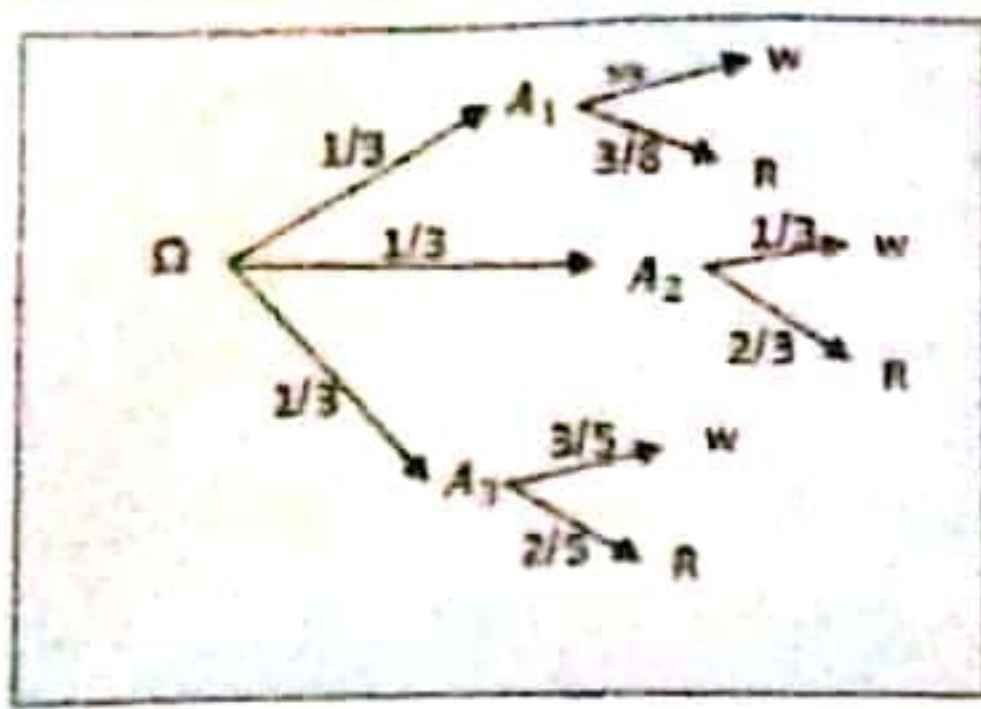
بعمدوس

هذا قول الإمام الشافعي

أما فولي

وددت أن لا أموت قبل أن أرى طلابي مناع علم وصناعل نور

بسر درب الحياة



في المخطط الشجري المرسوم جانباً:

الرمز W يدل على عدد الكرات البيضاء.

والرمز R يدل على عدد الكرات الحمراء.

نختار عشوائياً كرة واحدة، والمطلوب:

① ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

② إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء، ما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

الحل:

$$P(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \quad \text{①}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{2}{15}$$

$$P(A_1|R) = \frac{P(A_1 \cap R)}{P(R)} \quad \text{②}$$

منشور ذي الحدين

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} (a)^n (b)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

مثال: تطبيق امتحاني. انشر $(x + 2)^5$

$$= \binom{5}{0} (x)^5 (2)^0 + \binom{5}{1} (x)^4 (2)^1 + \binom{5}{2} (x)^3 (2)^2 + \binom{5}{3} (x)^2 (2)^3$$

$$+ \binom{5}{4} (x)^1 (2)^4 + \binom{5}{5} (x)^0 (2)^5$$

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين

مثال هام

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$$

$$T_r = \binom{6}{r} (x^2)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{6}{r} (x)^{12-2r} \left(\frac{1}{x^r}\right)$$

$$= \binom{6}{r} (x)^{12-2r} (x)^{-r}$$

قانون الحد العام

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= \binom{6}{r} (x)^{12-3r}$$

مع العلم أنك المستقل عن x يكون.

$$12 - 3r = 0 \Rightarrow r = 4$$

$$T_4 = \binom{6}{4} (x^2)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 15$$

الحد الخامس

الاستقلال الاحتمالي

شرط الاستقلال الاحتمالي: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

مثال: في تجربة رمي ثلاث قطع نقود متوازنة معاً. إذا كان الحدث A ظهور شعار واحد على الأكثر والحدث B ظهور كتابتين فقط هل الحدثان A . B مستقلان احتمالياً.

أكل:

$$\Omega = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$$

$$A = \{(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(H, T, T), (T, T, H), (T, H, T)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

نعوض في الشرط: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\frac{3}{8} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} \neq \frac{3}{16}$$

المساواة خاطئة فالحدثان غير مستقلان احتمالياً

تلقى قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$.
نعرف X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار.
اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وثباته.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{الحل:}$$

$$P(X = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

(T, T, T)

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 3 = \frac{12}{27}$$

(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)

$$P(X = 2) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 3 = \frac{6}{27}$$

(H, T, H) $\times 3$

$$P(X = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

(H, H, H)

r_i	0	1	2	3
$P(X = r_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
r_i^2	0	1	4	9

التوقع:

$$E(X) = \sum_{r=1}^n r_i \cdot P(X = r_i)$$

$$= 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{12}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} + 3 \cdot \frac{1}{27}$$

$$= \frac{27}{27} = 1$$

النتائج:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = 0 + \frac{12}{27} + \frac{24}{27} + \frac{9}{27} = \frac{45}{27}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{45}{27} - 1 = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

يحتوي مغلف تسع بطاقات مرقمة بالأرقام (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) نسحب من المغلف ثلاث بطاقات معاً وليكن X متغيراً عشوائياً يدل على مجموع أرقام البطاقات المحسوبة، اكتب قيم المتغير العشوائي X لم أحسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \square$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{10}{84} \square$$

(0,0,0)

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84} \square$$

(0,0,1)

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84} \square$$

(0,1,1)

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84} \square$$

(1,1,1)

التوقع الرياضي:

r_i	0	1	2	3
$P(X = r_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

$$E(X) = \sum_{r=1}^r r_i P(X = r_i) \square$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{10}{84} + 1 \cdot \frac{40}{84} + 2 \cdot \frac{30}{84} + 3 \cdot \frac{4}{84} \square$$

$$= \frac{40 + 60 + 12}{84} = \frac{112}{84} \square$$

أعد المسألة السابقة في حالة السحب على التتالي دون اعادة. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \square$$

(0,0,0) □

$$P(X = 1) = \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \right) \times 3 \square$$

(0,0,1) × 3 □

$$P(X = 2) = \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \right) \times 3 \square$$

(1,1,0) × 3 □

$$P(X = 3) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \square$$

(1,1,1) □

تمرين رقم 10 كوي فرع امتحاني : يحوي مغلف اربع بطاقات مرقمة بالأرقام 0, 1, 1, 1 نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة ليكن X متغير عشوائي يدل على مجموعهما. أكتب قيم المتغير العشوائي X لم أحسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\} \square$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \square$$

$$(0,0) \square$$

$$P(X = 1) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 2 = \frac{6}{16} \square$$

$$(1,0) \times 2 \square$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \square$$

$$(1,1) \square$$

ونتظم جدول

مثال: يحوي صندوق 8 بطاقات متماثلة و مرقمة كما يلي: 0, 0, 2, 2, 3, 3, 3, 3 نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة.

1- إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان تحملان الرقم ذاته فما احتمال أن يكون هذا الرقم هو 3؟

أجل :

بفرض A حدث البطاقتان تحملان الرقم ذاته
بفرض B حدث أن يكون هذا الرقم هو 3

$$P((B|A)) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \square$$

$$A = \{(0,0), (2,2), (3,3)\} \square$$

$$= \frac{\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}} = \dots \dots \dots \square$$

2- إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان مختلفتان فما احتمال أن يكون مجموعهما زوجي؟

بفرض C حدث البطاقتان المسحوبتان مختلفتان

بفرض D حدث أن يكون مجموعهما زوجي

الحل:

$$P((D|C)) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

$$C = \{(0,2), (0,3), (2,3)\}$$

$$= \frac{2 \left(\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7}\right)}{2 \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{8}\right) + 2 \left(\frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7}\right) + 2 \left(\frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7}\right)} \square$$

هام : تابعوا نماذج و توقعات جميع

المواد على صفحة (مركز أولادين

التعليمي) على القيس بوك

بنك المسائل الهامة

السؤال الأول : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً .. احسب احتمال ظهور الوجه H مرتين على الأقل .

السؤال الثاني : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً .. وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار نظم جدول القانون الاحتمالي واحسب التوقع والتباين ..

السؤال الثالث : ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، اكمل الجدول التالي :

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

- (1) ما عدد النجاحات ؟
- (2) ما التوقع الرياضي للمتحول ؟
- (3) أوجد التباين والانحراف .

السؤال الرابع : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء ، نسحب من الصندوق كرتين على التوالي مع إعادة وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	

اكمل الجدول المجاور واحسب التوقع والتباين .

السؤال الخامس : صندوق يحوي 4 كرات زرقاء و 3 خضراء و 1 صفراء ، نسحب من الصندوق ثلاث كرات عشوائياً على التوالي دون إعادة .. وليكن X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الزرقاء بين الكرات المسحوبة .
اعد المسألة السابقة في حال السحب معاً وعلى التوالي مع إعادة .

السؤال السادس : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء و 1 سوداء ، نسحب من الصندوق 3 كرات على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة .

- (1) كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
 - (2) كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه .
- اعد المسألة السابقة في حال السحب دون إعادة وفي حال السحب معاً .

السؤال السابع : لدينا 7 كتب مختلفة 4 منها للمؤلف A و 3 منها للمؤلف B بكم طريقة يمكن ترتيبها على رف على أن يكون ثلاث كتب للمؤلف A على أحد الطرفين ؟؟

السؤال الثامن: لدينا الأعداد $\{0,2,3,4,5,6\}$ بكم طريقة يمكن تشكيل عدد من ثلاث أرقام على أن يكون من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500؟

السؤال التاسع: يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ضعف الكرات البيضاء

1. ن سحب عشوائياً كرة .. ما احتمال أن تكون حمراء اللون ؟
2. ن سحب من الصندوق ثلاث كرات على التوالي و مع إعادة .. ونعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث . عيّن قيم X و اكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .

السؤال العاشر: يشتري أحد المحلات 80% من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع A و يشتري الباقي منها من المصنع

B .. نفترض أن نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5% وفي المصنع B هي 8% .. نختار عشوائياً قطعة غيار من المحل

1. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة .
2. إذا كانت القطعة معيبة ، فما احتمال أن تكون من إنتاج المصنع B .

السؤال الحادي عشر: صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة 1,2,3 و الصندوق (II)

يحتوي كرات مرقمة 1,2 ن سحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ونسحب عشوائياً كرة من الصندوق (II) فإذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين من الصندوقين ..

اكتب مجموعة قيم X و عيّن جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .

السؤال الثاني عشر: X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول غير المكتمل المجاور ل X .

k	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$		

1. ما عدد الاختبارات في التجربة ؟ واكمل الجدول .
2. ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X ؟ وما تباين المتحول العشوائي X .

السؤال الثالث عشر: أوجد الحد الذي يحوي x^3 في منشور ذي الحدين $(x^2 + \frac{1}{x})^9$

والحد المستقل عن x في منشور $(x - \frac{1}{x^2})^{12}$

السؤال الرابع عشر: ماهي أمثال الحد $x^2 y$ في منشور $(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y})^8$

السؤال الخامس عشر: نتأمل صندوقين يحتوي الصندوق الأول على 3 كرات مرقمة بالأعداد 1, 2, 3 و يحوي

الصندوق الثاني 4 كرات مرقمة بالأعداد 2, 3, 4, 5 ن سحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم ن سحب كرة من الصندوق الثاني و المطلوب :

1. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار
2. ليكن A الحدث : (إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم 3) وليكن B الحدث : (مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من 5) هل الحدثان A, B مستقلان احتمالياً ؟ علل اجابتك
3. نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين اكتب مجموعة قيم X و اكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي و تباينه

السؤال السادس عشر : لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

1. ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانوات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S
2. ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانوات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 50

السؤال السابع عشر : يواجه حارس مرمى عددا من ضربات الجزاء ، إذا صد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n + 1$ يساوي 0.6 نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 وليكن A_n الحدث (يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n)

1. احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A'_1)$
2. استنتج أن $P(A_2) = 0.74$
3. نعرف $P_n = P(A_n)$:

- (1) برهن أن $P_{n+1} = (0.2)P_n + 0.6$
 - (2) لتعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ بالصيغة $u_n = P_n - 0.75$ بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية أساسها 0.2
- واستنتج عبارة P_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

السؤال الثامن عشر : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين . يسحب اللاعب كرتين على التوالي دون إعادة .. ما احتمال ان يحصل اللاعب نقطة واحدة فقط

السؤال التاسع عشر : لدينا n صندوقاً u_1, u_2, \dots, u_n حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء و كرة واحدة حمراء وكل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين و كرة واحدة حمراء . نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n نرسم R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1. احسب $P(R_1)$
2. أثبت أن $P(R_2) = \frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$
3. أثبت أن $P(R_k) = \frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \leq k \leq n$
4. نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$

- (1) أثبت أن المتتالية $(x_k)_{k \geq 1}$ هندسية . عين أساسها وحدها الأول
- (2) أكتب x_k بدلالة k واستنتج $P(R_k)$ بدلالة k

السؤال العشرون : يحتوي صندوق على خمس كرات ، ثلاث حمراء اللون وتحمل الأرقام 0, 1, 2 وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام 0, 1 نسحب عشوائياً كرتين على التوالي دون إعادة من هذا الصندوق

1. الحدث A : " الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته " ، احسب $P(A)$
2. نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ، ثم احسب توقعه الرياضي .

السؤال الواحد و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضريتي جزاء احتمال تسجيل الأولى $\frac{8}{10}$ إذا سجل الأولى فإن

احتمال تسجيل الثانية $\frac{7}{10}$. بفرض A التسجيل ، B الإخفاق ..المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال تسجيل الركلة الثانية
3. إذا علمت أنه سجل في الركلة الثانية ما احتمال التسجيل في الأولى

السؤال الثاني و العشرون : ترمي سعاد حلقتين لادخالهما في وتر ، احتمال نجاح سعاد في الحلقة الأولى يساوي

احتمال فشلها . إذا نجحت بالحلقة الأولى فإن احتمال نجاحها بالثانية $\frac{1}{3}$ وإذا فشلت في الأولى فإن احتمال فشلها في الثانية $\frac{4}{5}$ و المطلوب :

1. ارسم مخططا شجرياً
2. احسب احتمال نجاحها في الحلقة الثانية
3. إذا علمت أنها نجحت في الحلقة الثانية ما احتمال نجاحها في الأولى (النجاح A ، الفشل B)

السؤال الثالث و العشرون : صندوق أول يحوي 3 كرات حمراء R و واحدة زرقاء B و صندوق ثاني يحوي

كرتين حمراء R و واحدة زرقاء B ، نسحب كرة من الصندوق الأول و نضعها في الثاني ثم نسحب كرة من II و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال الثانية حمراء
3. إذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال الأولى حمراء

السؤال الرابع و العشرون : نلقي قطعة نقود C_1 متوازنة ثم نلقي قطعة نقود C_2 غير متوازنة . احتمال ظهور

الشعار $\frac{2}{3}$ و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار احسب $E(X), V(X)$

السؤال الخامس و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضريتي جزاء على هدف . احتمال تسجيل الهدف في الضربة

الأولى A يساوي $\frac{3}{5}$ و في الثانية B يساوي $\frac{4}{5}$ و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات تسجيل الهدف . احسب $E(X)$

السؤال السادس و العشرون : يتواجه لاعبان A, B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من خمس أدوار

يكسب اللاعب A الدور بالاحتمال $\frac{2}{3}$ و يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار . ما احتمال فوز B

السؤال السابع و العشرون : صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات خضراء نسحب من الصندوق ثلاث

كرات معا . X متحول عشوائي يأخذ القيمة 5 عند ظهور ثلاث كرات حمراء و يأخذ القيمة 3 عند ظهور كرتين حمراء و كرة خضراء و يأخذ القيمة 0 فيما عدا ذلك . احسب $E(X)$

السؤال الثامن و العشرون : في مدرستنا يمارس 30% لعبة التنس نسبة الذكور 60% و 55% لا يمارسون

التنس . ما احتمال اختيار طالبة لاتمارس التنس

السؤال التاسع و العشرون : يحتوي صندوق كرتين حمراء R وكرتين بيضاء W نسحب كرة من الصندوق نسجل

لونها ونعيدها ثم نضاعف عدد الكرات منها ثم نسحب كرة ثانية و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال الثانية حمراء
3. اذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الأولى حمراء

السؤال الثلاثون : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص

بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاضمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

السؤال الواحد و الثلاثون : يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 1, 2, 3, 4, 5 نسحب من الصندوق

كرتين على التالي مع الإعادة

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2. كم عدد النتائج المختلفة و التي تشمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

السؤال الثاني و الثلاثون : يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند ادخال كود

مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أي من القيم : 0, 1, 2, 3, 4, 5

1. ماهو عدد الرمazes التي تصلح للقفل
2. ماهو عدد الرمazes التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

مخطط حالات السحب

نوع السحب	الترتيب	القانون	المقام	العكس
السحب معاً	لا يوجد أهمية للترتيب	توافيق $\binom{()}{()}$	توافيق	لا يوجد عكس هي نفسها (3,2) (2,3)
على التالي دون إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	يتناقص	يوجد عكس مختلفة عن (3,2) (2,3)
على التالي مع إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	لا يتناقص	يوجد عكس مختلفة عن (3,2) (2,3)

جلسة مراجعة [قبلك نواقص + افعالك]

السؤال الأول: في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخصم فعال ،

كم نسبة قوامها مهندس واحد وعاملان بكمنا متكافئاً لنسبة أعمال الخدمة

السؤال الثاني: في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن شعبة

مسئلة عن نوعية أسئلة: [1] بكم طرفة بركة للطالب أنت خيار الأسئلة؟

[2] بكم طرفة بركة الاختيار إذا كانت الأسئلة ثلاثة الأختيارية إختيارية؟

السؤال الثالث: في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخصم فعال ،

بكم طرفة بركة اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب رئيس وأمين سر؟

السؤال الرابع: في الشكل المجاور تناظر شبكة مستطيلة من المستطيلات المتوازية

شكل فيما بينها متوازيات أضلاع والقطوع الخمسة عدد متوازيات الأضلاع

في الشبكة



السؤال الخامس: المهذوف بجوب (9) كرات متفائلة منها (4) كرات صفراء،

و(5) كرات صفراء نحسب عشوائياً من المهذوف ثلاث كرات معاً، تناظر

للخول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة المسح ثلاث

كرات صفراء والقيمة 3 إذا كانت نتيجة المسح كرتين صفراء وكرتة

صفراء والقيمة صفر فيما عدا ذلك والطلوب:

[1] نظم فوك القانون الاحتمالي واهمسة توقعه الرياضيات وتباينه

والحدوث المياري

[2] أعبء المسأل العائفة في حال المسح ملك التناجب مع إعادة

[3] أعبء المسألة المسألة في حال المسح ملك التناجب دون إعادة

السؤال السادس: بيت في مشور $(x^2 - \frac{2}{x})^{12}$ الى الذي بجوب

x^2 والحد المشترك عند x

السؤال السابع: ناقص فطمة تقود سيارة لمدة ثلاث ساعات متتالية

بكونه اهتقال فتهور المشاري كل اربعة ساعات $\frac{1}{4}$ ، عمره لا يتعداه اثنان

الذي يولد ملك عدد مرات فتهور المشاري

اكتب مجموعة قيم الخول العشوائي X ، واكتب هوية نظرية الاحتمالي

واهمسة توقعه الرياضيات وتباينه .

السؤال الثامن: المهذوف بجوب 11 كرتة متفائلة فيها 7 كرات صفراء،

وداهة: ببهاء 3 كرات صفراء نحسب عشوائياً من الهذوف كرتين ملك

التناجب مع إعادة وتناظر الخول العشوائي X الذي يولد ملك عدد الكرات

البهاء المحوب والمطلوب عيب قيم الخول العشوائي X ثم نظم جدول

قانون الاحتمالي واهمسة توقعه الرياضيات

السؤال التاسع: بجوب هذوف 6 بطاقات مرفقة بالترقيم

1. 2. 3. 4. 5. 6 نسحب عشوائياً بطاقتين ملك التناجب

دون إعادة ليكن X الخول العشوائي الذي يولد ملك أصغر رقمين

الطاقتين المحسوبين والمطلوب:

[1] عيب مجموع قيم الخول العشوائي X واكتب هوية قانون الاحتمالي

[2] اهمسة التوقع الرياضيات E (X) والتباين V (X) .

السؤال العاشر: اكمل الى روك المجاور الذي يملك القانون الاحتمالي لنزوح

من الخول العشوائية (X, Y) علماً ان الخول العشوائية X, Y

مستقلة احتمالياً .

		0	1	2	قانون X
X \ Y	0				0.4
	1			0.04	
	2				
قانون Y		0.3			

الفلم مصنوع في الورقة B وبالرغم من ذلك الحين الفلم غير صالح للاستعمال والمطلوب

1) أعط فتيلاً سحرياً للقرعة

2) اشرح احتمال أن يكون الفلم صالح للاستعمال

3) إذا كانت الفلم صالحاً للاستعمال فما احتمال أن يكون وهو ما يبي الورقة A

4) نحبه عشوائياً من الورقة A نكتب ما وليكن X المتحول العشوائي

الذي يمثل عدد الأفلام المسحوبة الصالحة للاستعمال، اكتب $P(X=0)$

السؤال الخامس عشر: ليكن X متحول عشوائي يملك عدد النتائج

في قرعة برنولي الكه ده غير المكتمل المار وهو القانون الاحتمالي

للمتولد X المكتمل ثلاث نتائج فإذا علمت أن احتمال النجاح

يعارب $\frac{2}{3}$ ر

$$P(X=0) = \frac{1}{27} \quad P(X=1) = \frac{6}{27}$$

1) اكتب $P(X=2)$ و $P(X=3)$

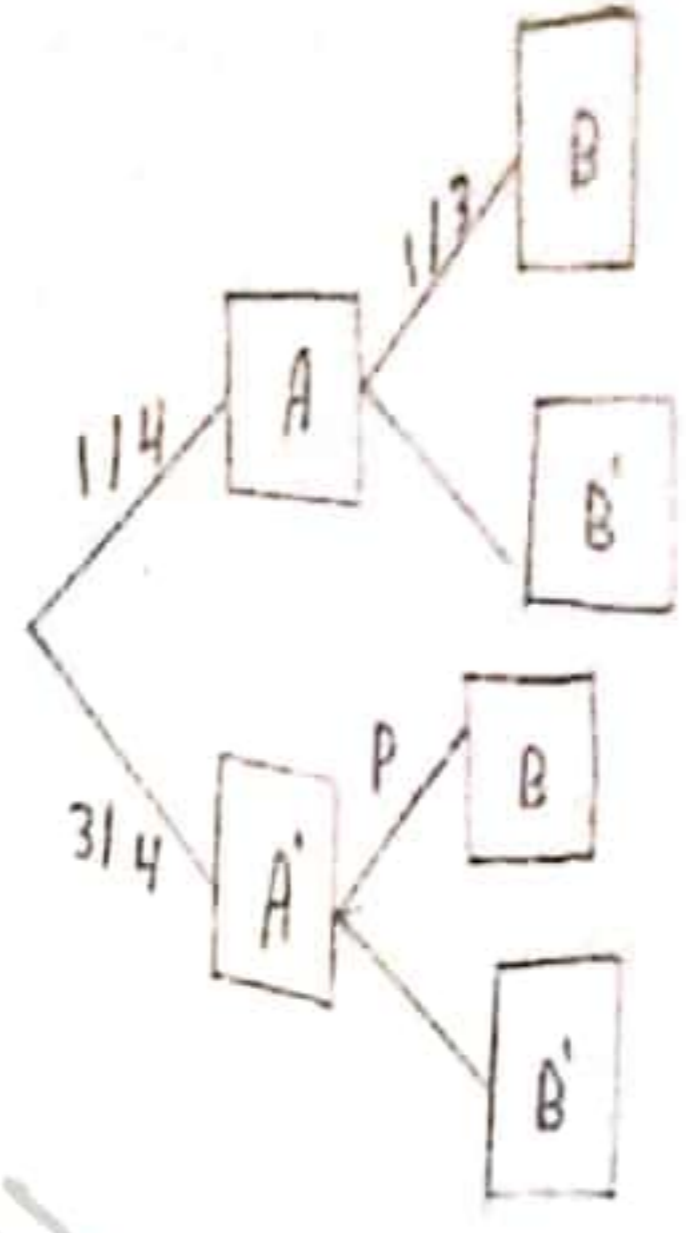
2) ما التوزيع الرياضي للمتولد العشوائي X ؟

3) ما كثافة المتولد العشوائي X ؟

K	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	-	-

نوع المسألة	التدريب	القانون	القيام	العكس
المسألة معاً	كبحث أهمية للتدريب	توزيع $\binom{1}{1}$	نواحيق	لا يوجد عكس (3.2) لفظ (2.3)
ملك التناهي دونه وإعادة	يوسف أهدبة للتدريب	اله الأساس $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	يقاومها	يوسف عكس (2.3) لفظ (3.2)
على التناهي مع إعادة	يوسف أهدبة للتدريب	اله الأساس $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	لا	يوسف عكس (2.3) لفظ (3.2)

السؤال الرابع عشر: ليكن A و B هبتين مرتبطتين بتجربة عشوائية معروفة بالموظف التجريب المار كنه فنار فيه P هت يكون كذبات A و B مستقلة احتمالياً



السؤال الثاني عشر: يعتبر أحد المولات 70% من قطع الميار التي

فيها هت المصنع A ويعتبر الباقى من هت المصنع B. نقرعه أن نحصه

الإنتاج الميعت في المصنع A هت 15 و في المصنع B هت 18

فتار عشوائياً فلهة عيار من المول والمطلوب:

1) ارفه احتمال أن تكون القطعة ميعة

2) إذا كانت القطعة ميعة، ما احتمال أن تكون من إنتاج المصنع B.

السؤال الثالث عشر: نأملك محمد نرد متولد فيه أربع دهور ملونة

بالأسود ودرهات ملونات بالأحمر نلقب الحجر هتس مرات متتالية

وليكن X متغير عشوائي يفرق بتب: العترة عدد الدهور السوداء

والمطلوب: 1) اكتب مجموعة قيم المتغير X

2) اكتب قانون الاحتمالي ونظم هت دتول

السؤال الرابع عشر: يهتق مصنع وروشتي A و B لتفيع الأفلام. عندما

ورد طلب عدد من الأفلام قدره 1000 فلم، هتت الورقة A منها 600

تلاً و هتت البقية الورقة B. هناك نسبة 5% من أفلام الورقة

A غير صالحة للاستعمال في هت تكون نسبة 2% من أفلام الورقة

B غير صالحة للاستعمال نسبة عشوائياً تلاً من الطلب. نرور بالرمز

A إلى الحت و الفلم مصنوع في الورقة A وبالرغم من ذلك الحت

ملحق تدريبي .. الجزء الثاني

المسألة الأولى :

ليكن العدد المركب $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{i+1}$. اكتب z بالشكل الأسّي ثم أوجد كلا من جذريه التربيعيين بالشكل الأسّي

المسألة الثانية :

لتكن الأعداد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

(1) اكتب بالشكل الأسّي كل من $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1, z_2, z_3

(2) اكتب بالشكل الجبري $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(z_2)^6$

المسألة الثالثة :

مغلف فيه 6 بطاقات متماثلة تحمل الأرقام 1, 1, 0, 0, -1, -1 . نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع الإعادة :

(1) إذا كان الحدث A الحصول على بطاقتين مجموع رقميهما 0 والحدث B الحصول على بطاقتين جداء رقميهما (0)

هل الحدثان A, B مستقلان احتمالياً؟

(2) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين 0 فما احتمال أن يكون جداء رقميهما 0

(3) نعتبر X متغيراً عشوائياً يدل على جداء رقمي البطاقتين المسحوبتين . أوجد مجموعة قيم X واكتب جدول التوزيع الاحتمالي

واحسب توقعه الرياضي

المسألة الرابعة :

ليكن n عدداً طبيعياً $2 \leq n \leq 8$

(1) يحوي صندوق على كرات متماثلة 3 كرات بيضاء و n كرة حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق **كرتين** على التتالي دون إعادة و لنفترض أن الحدث A إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل حمراء و الحدث B الكرتان المسحوبتان من لون واحد بحيث

$$P(A|B) = \frac{2}{3} \text{ والمطلوب احسب قيمة } n$$

(2) بفرض أن $n = 4$ ليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم اكتب جدول قانونها الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

المسألة الخامسة :

يحوي صندوق 10 كرات متماثلة منها 4 بيضاء و 6 حمراء

(1) نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن واحد

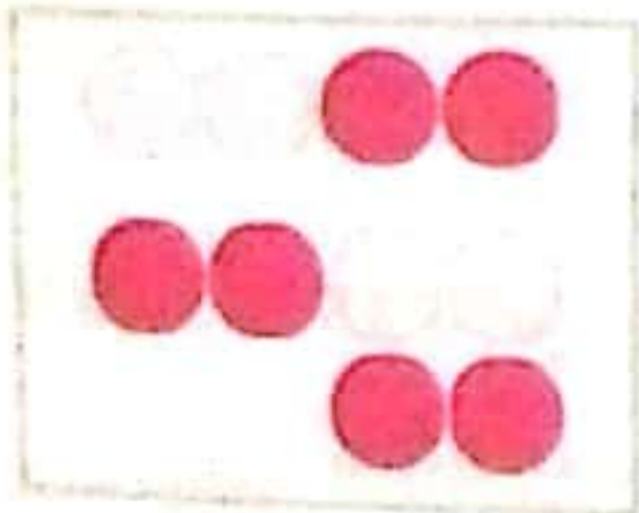
أ- احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرة حمراء

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يقرب بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة ،

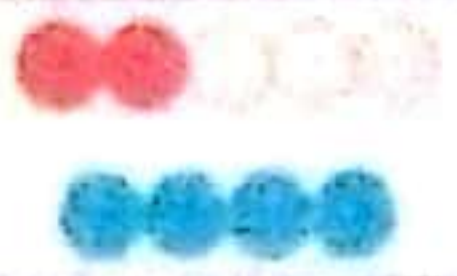
نظم جدول القانون الاحتمالي لـ X ، واحسب توقعه الرياضي

(3) نسحب من الصندوق في آن واحد 3 كرات خمس مرات على التتالي مع الإعادة ، احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء مرتين بالضبط



المسألة السادسة :

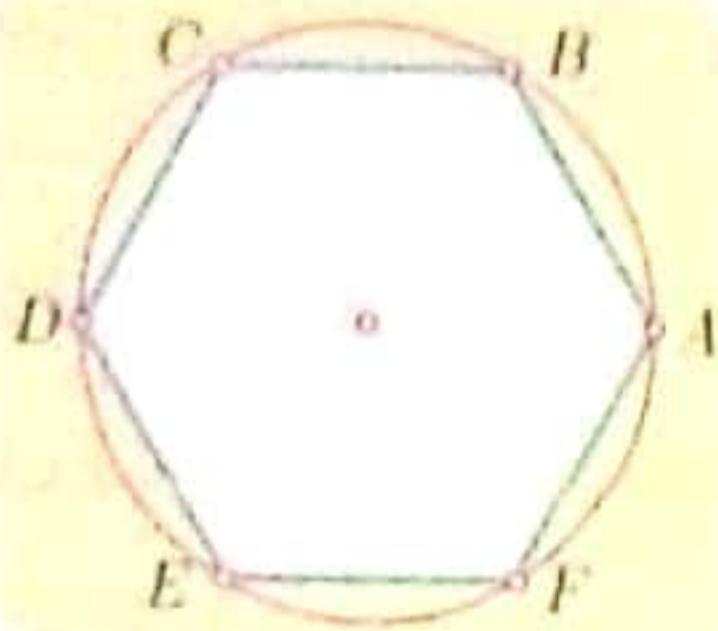
يحتوي صندوق (9) كرات متماثلة (2 حمراء) و (3 بيضاء) و (4 زرقاء) ن سحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة ،



- 1) ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .
- 2) ن سحب كرة واحدة .. نعطي للكرة الحمراء القيمة (0) والكرة البيضاء القيمة (1) والكرة الزرقاء القيمة (2) نعزف متغيراً عشوائياً X يدل على رقم الكرة المسحوبة.. اكتب جدول توزيعه و احسب توقعه الرياضي .

المسألة السابعة :

ليكن كثير الحدود $F(x) = (1 + ax)^5(1 + bx)^4$ حيث a, b عدنان طبيعيان فإذا علمت أن أمثال x تساوي 62 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a + b$ ؟



المسألة الثامنة :

في الشكل المرسوم جانبها لدينا ست نقاط A, B, C, D, E, F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم نجري التجربة الآتية :

نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث :

- 1) ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟
- 2) ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟
- ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟

المسألة التاسعة :

$ABCDE$ هرم قاعدته مربع $ABCD$ و (EA) يعامد القاعدة .. نفرض المثلث $(A, \frac{1}{2}AB, \frac{1}{2}AD, \frac{1}{2}AE)$

أوجد $\overline{EA} \cdot \overline{BC}$ و $\overline{EB} \cdot \overline{ED}$ ، ثم استنتج $\cos(BED)$ ، ثم عين G مركز الأبعاد للنقاط $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1), (E, 4)$

المسألة العاشرة :

$ABCDEFGH$ مكعب I, J, K, L هي بالترتيب منتصفات $[AB], [BC], [CG], [AE]$

ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة $3\overline{EM} = 2\overline{EI}$

جد إحداثيات جميع النقاط ثم أثبت أن الأشعة $\overline{LM}, \overline{CJ}, \overline{HK}$ مرتبطة خطياً .

المسألة الحادية عشر :

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[FH]$

- 1) جد إحداثيات الرؤوس وأثبت أن المثلث ABG قائم واحسب مساحة المثلث ABG
- 2) جد معادلة المستوي (ABG) واحسب بعد F عن (ABG) واستنتج حجم $ABGF$
- 3) أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ) وهل تقع النقاط I, J, K, F في مستو واحد .

النجاح يأتي بمهارة
المثلث يأتي بمهارة



المسألة الثالث عشر :

ABCD رباعي وجوه منتظم و P و Q و R و S وفق :

$$\overline{DS} = \frac{1}{4} \overline{DC} \quad \overline{HR} = \frac{1}{4} \overline{BA} \quad \overline{AQ} = \frac{1}{4} \overline{AD} \quad \overline{BP} = \frac{1}{4} \overline{BC}$$

- (1) أثبت أن P هو مركز الأبعاد للنقطتين (C, 1), (B, 4) وأن Q هو مركز الأبعاد للنقطتين (A, 1), (D, 3).
- (2) ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, 1), (B, 4), (C, 1), (D, 3) بين أن تقع على (PQ).
- (3) أثبت أن G تقع أيضا على (RS) ثم استنتج كون المستقيمان (PQ) و (RS) متقاطعين.
- (4) إذا كان طول حرف رباعي الوجوه (2) ، احسب $\overline{AB} \cdot \overline{CA}$ و $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ واستنتج تعامد المستقيمين (AB) و (CD).

المسألة الثالث عشر :

لتكن النقاط : $E(1, -1, 1)$, $D(0, 4, 0)$, $C(4, 0, 0)$, $B(1, 0, -1)$, $A(2, 1, 3)$

- (1) هل C, D, E تقع على استقامة واحدة. أوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم (CD) و المستقيم المار من E و يعامد (CD) لمجد نقطة التقاطع.
- (2) أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على (CDE) ثم جد معادلة (CDE) و استنتج المسقط القائل ل A على (CDE).
- (3) أوجد عددين a, b يحققان $\overline{AD} = a\overline{AB} + b\overline{AC}$ هل A, B, C, D تقع في مستو واحد.
- (4) جد معادلة المستوي العمودي على (CDE) ويمر من A و B و جد معادلة المستوي المحوري للقطعة [AB].
- (5) عين إحداثيات S منتصف [AB] و نظيرة S بالنسبة إلى C.

المسألة الرابعة عشر :

لدينا الشعاعان $\vec{v}(1, 3, 2)$, $\vec{u}(2, 1, -1)$ والنقطة $B(1, 0, -1)$, $A(1, -1, 3)$

- (1) بين أن \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطيا ثم اكتب معادلة المستوي P المار من A و الموجه بالشعاعين \vec{u} و \vec{v} .
- (2) أوجد معادلة المستوي Q المار من B الموازي للمستوي P ثم أوجد البعد بين P و Q و أوجد مجموعة النقاط التي تحقق $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$.

المسألة الخامسة عشر :

① نتأمل هرمأ ABCD - S قاعدته مربع و رأسه S و طول كل حرف من حروفه و أضلاع قاعدته يساوي 4

$$\text{احسب } \overline{SA} \cdot \overline{SB}, \overline{SA} \cdot \overline{SC}, \overline{SA} \cdot \overline{AC}$$

② مكعب ABCDEFGH طول ضلعه a فيه I منتصف [EF] و J منتصف [CG] احسب

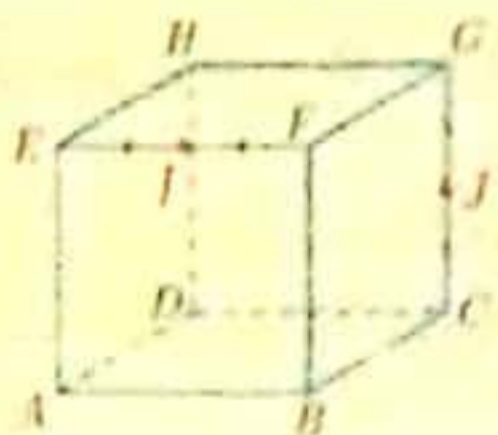
$$\overline{JH} \cdot \overline{JD}, \overline{EI} \cdot \overline{IA}, \overline{EI} \cdot \overline{GJ}, \overline{EI} \cdot \overline{FC}, \overline{EI} \cdot \overline{EA}$$

المسألة السادسة عشر :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط

$A(-1, 2, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(0, -1, 2)$ ولتكن (P) مجموعة النقاط M من الفضاء بحيث $AM = BM$

- (1) بين أن (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x - y + 2z - 4 = 0$
- (2) عين معادلة المستوي (Q) الذي يمر من A و يوازي (P)
- (3) اكتب نميلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يمر من C و يعامد (P)
- عين إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D)
- احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D)
- (4) عين معادلة المستوي المحوري للقطعة [AC]



المسائل السابعة عشر :

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة $A(1, 2, 0)$ والمستويات :
 $P : 2x - y + 2z - 2 = 0$
 $Q : x + y + z - 1 = 0$
 $R : x - z - 1 = 0$ والمطلوب :

1. أثبت أن المستويين P, Q متقاطعان بفصل مشترك Δ اكتب تمثيلاً وسيطياً له
2. تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A
3. أثبت أن المستويات P, Q, R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

المسائل الثامنة عشر :

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء ، تكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته
ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة . عتبن مجموعة القيم التي يأخذها X
واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي

المسألة التاسعة عشر :

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد العقدية :
 $a = 6 - i, b = -6 + 3i, c = -18 + 7i$ بالترتيب والمطلوب :

1. أحسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة
2. بفرض $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته \square احسب \square
3. جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً

المسائل العشرون :

نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتان $A(2, 1, -2), B(-1, 2, 1)$

والمستوي $P: 3x - y - 3z - 8 = 0$ والمطلوب :

1. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثم عتبن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

المسائل الواحدة والعشرون :

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1, 0, 1), B(0, 1, 1)$

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2, 2, 1)$.
2. أثبت أن المستقيمين $d, (AB)$ متعامدان .

نتأمل في معلم متجانس $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب :

1. اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A, C, H, F, D
2. اكتب معادلة للمستوي (ACH)
3. أثبت أن المستوي P الذي معادلته $-2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH)
4. بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F, I, D على استقامة واحدة
5. اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1, -1, 1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

المسائل الثالثة والعشرون :

جد مجموعة النقاط بالفراغ التي تحقق :

$$\|\overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}\| = \|\overline{3MA} - \overline{MB} - \overline{MC} - \overline{MD}\|$$

المسائل الرابعة والعشرون :

عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق :

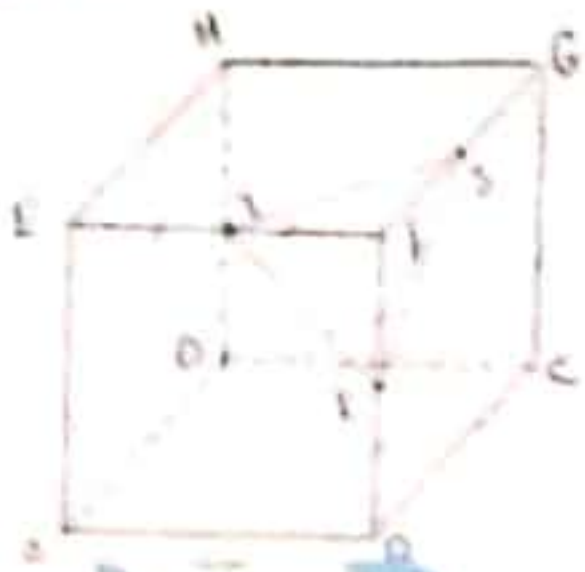
$$\|\overline{2MA} + \overline{MB} - \overline{MC}\| = \|\overline{2MA} - \overline{MB} - \overline{MC}\|$$

المسائل الخامسة والعشرون : $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 ولتكن النقاط I, J, K

منتصفات الأحرف $|FE|, |FG|, |FB|$ على الترتيب

نختار معلماً متجانساً $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ والمطلوب :

1. أوجد إحداثيات رؤوس المكعب والنقاط I, J, K
2. أوجد معادلة المستوي (IJK)
3. اكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم d المار من F عمودياً على (IJK)
4. استنتج إحداثيات N المسقط القالم ل F على المستوي (IJK)
5. احسب حجم رباعي الوجوه $(FIJK)$
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي (IJK)
7. أين تقع النقطة M التي تحقق $\overline{3CM} = \overline{BA} + \overline{DE}$



المسائل السادسة والعشرون : $ABCDEF$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A . النقطة J

منتصف $|ED|$ نتأمل المعلم المتجانس $(A, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ حيث : $\overline{AB} = 3\bar{i}$ ، $\overline{AC} = 4\bar{j}$ ، $\overline{AE} = 4\bar{k}$

1. جد إحداثيات النقاط J, E, D, C, B
2. جد معادلة المستوي (JBC)
3. اكتب تمثيل وسيطى للمستقيم (JC)
4. احسب بعد النقطة E عن المستوي (JBC)
5. عين إحداثيات النقطة K (م.ا.م) للنقاط المثقلة $(J, 2), (B, 1), (C, 2)$



المسائل السابعة والعشرون :

في معلم متجانس لدينا النقاط $A(1, 2, 4), B(1, 0, 2), C(2, 2, 5), M(2, 2, -1)$

1. جد إحداثيات النقطة I منتصف $|AB|$ والنقطة D نظيرة I بالنسبة ل C
2. عين α, β إذا علمت أن $\overline{AB} = \alpha\overline{AC} + \beta\overline{AD}$
3. تحقق أن النقاط A, B, C تعين مستويًا P أوجد معادلته
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من M ويعامد المستوي P
5. عين إحداثيات النقطة M' المسقط القالم ل M على المستوي P

في المعلم المتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ لدينا النقاط : $A(0, -1, -2), B(1, 2, -1), C(1, 1, -2)$

1. أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة
2. أثبت أن $\bar{n}(2, -1, 1)$ ناظم على المستوي (ABC) و اكتب معادلة المستوي (ABC)
3. لتكن G (م.ا.م) للنقاط $(A, 1), (B, -1), (C, 2)$ اكتب احداثيات النقطة G
4. اعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CG)
5. جد مجموعة النقاط من الفراغ M التي تحقق $\|\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = 12$

المسائل التاسعة والعشرون :

في المعلم المتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ لدينا النقطة : $A(6, 1, 1)$ والمستويان : $P_1: x - 2y = 5$, $P_2: y + z = 4$

1. أثبت أن المستويين متقاطعين
2. جد تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك لهما Δ
3. اكتب معادلة المستوي Q المار من A ويعامد الفصل المشترك
4. أوجد احداثيات B نقطة تقاطع Q مع الفصل المشترك Δ
5. احسب بعد A عن الفصل المشترك Δ

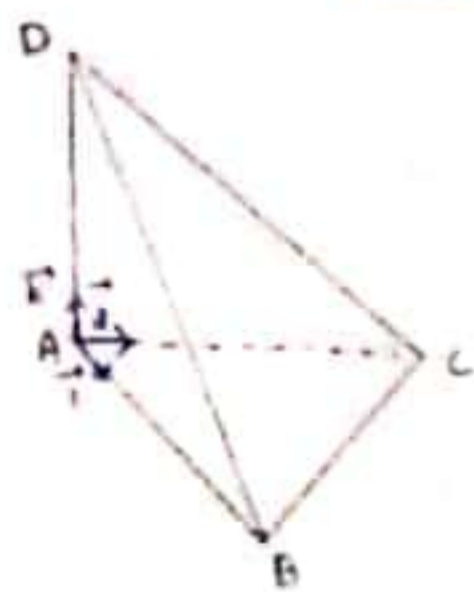
المسائل الثلاثون :

في المعلم المتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ لدينا النقاط : $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2)$

1. اكتب معادلة المستوي (ABC)
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي (ABC)
3. عين احداثيات النقطة H نقطة تقاطع Δ مع (ABC)
4. احسب الجداءات السلمية $\overline{AH} \cdot \overline{CB}$, $\overline{BH} \cdot \overline{CA}$ وماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC

المسألة الواحدة والثلاثون :

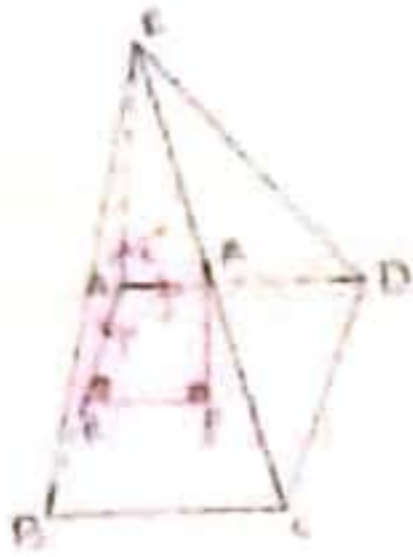
ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين و $(ABC) \perp DA$ و $\overline{AB} = 3\bar{i}$, $\overline{AC} = 3\bar{j}$, $\overline{AD} = 3\bar{k}$ بفرض لدينا معلم متجانس مبداء A



1. عين احداثيات الرؤوس $ABCD$
2. اكتب معادلة المستوي (BCD)
3. اثبت ان مسقط A على المستوي (BCD) و ليكن J هو مركز ثقل المثلث BCD
4. عين احداثيات G (م.ا.م) للنقاط $(A, 1), (B, 2), (C, 1)$
5. اوجد معادلة لكرة التي مركزها J وتمر D
6. احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$
7. استنتج مساحة المثلث BCD
8. عين احداثيات K ليكون الشكل $ABKC$ مربع

المسائل الثانية و الثلاثون :

$E - ABC$ هرم قاعدته مربع $ABCD$ فيه EA عمودي على مستو القاعدة $ABCD$ وفيه $\overline{AB} = 3\vec{i}$, $\overline{AD} = 3\vec{j}$, $\overline{AE} = 3\vec{k}$



1. اوجد إحداثيات رؤوس الهرم
2. اوجد إحداثيات مركز ثقل BDE
3. احسب \overline{AG} , \overline{BD} , \overline{ED} و ماذا تستنتج ؟
4. اوجد معادلة المستوي EBD
5. اوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم EC
6. لتكن النقطة M التي تحقق العلاقة $\overline{CM} = \frac{1}{3}\overline{CE}$ ولتكن P المسقط القالم ل M على مستوي القاعدة $ABCD$ ولتكن H المسقط القالم ل P على AB .. احسب $|MH|$

المسألة الثالثة والثلاثون :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + \frac{5}{2} = 0 \text{ والمطلوب :}$$

1. عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ من الفراغ
2. ليكن لدينا المستقيم d المار بالنقطة $A(2, 0, 1)$ والذي يقبل $\vec{u}(2, 0, -2)$ شعاع موجه له . ادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع الكرة S
3. أثبت أن المستوي $P: 3x + 2y = 7$ يقطع الكرة S وأوجد مركز الدائرة الناتجة ونصف قطرها

المسألة الرابعة و الثلاثون :

عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة $\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$

المسألة الخامسة والثلاثون :

المستقيمان d, d' معرفان وسيطيا وفق :

$$d': \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \\ z = 3s - 2 \end{cases} , s \in R \quad , \quad d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases} ; t \in R$$

1. أثبت أن d, d' متقاطعان ، ثم عين إحداثيات نقطة التقاطع
2. جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d, d'

المسألة السادسة و الثلاثون :

المستوي $P: 2x + y - 3z + 2 = 0$ والنقطة $A(1, 1, -2)$. المطلوب :

1. أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي
2. اكتب معادلة للمستوي Q المار من A و الموازي للمستوي P

ثم بعون الله ... أتمنى لكم التوفيق

... دعواتكم من سائهم بنجاح

هذه النوبة ..

جلسة امتحانية لمراجعة الهندسة

السؤال الثالث: اكتب معادلتين التوجيهية للمستقيمتين d و d' :

$$\begin{aligned} d: & \begin{cases} x = 5 \\ y = 3s - 3 \\ z = -s + 1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \\ d': & \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

وهل المستقيمتان d و d' تقعان في مستوى واحد P على إجابتك.

السؤال الرابع: تعامل في العالم المتجانس

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة $A(2, 0, 1)$ و $B(1, -2, 1)$ والمطلوب:

اكتب معادلة المستوى المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

السؤال الخامس:

$ABCD$ رباعي وجهي وهو a

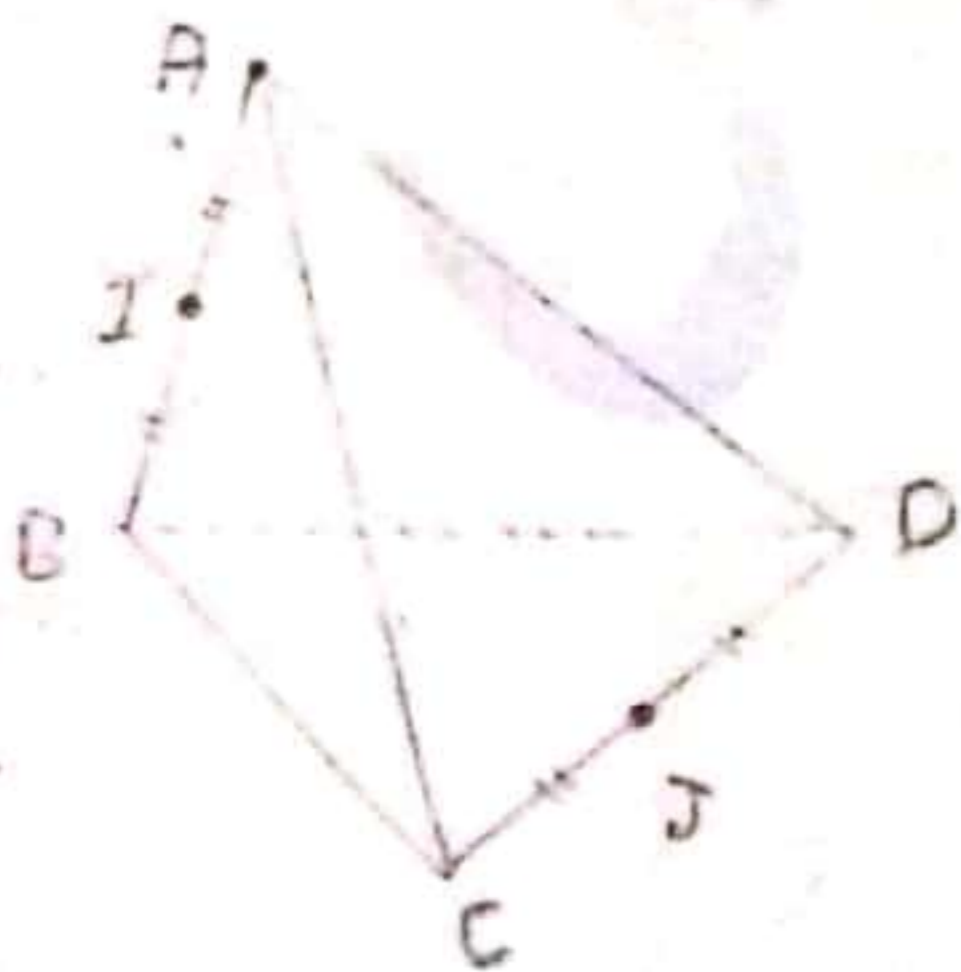
عدد حقيقيين I و J هما بالترتيب منقفا $[AB]$

و $[CD]$ و E و F نقطتان تحققان العلاقة

$$\vec{AE} = a \vec{AD}, \quad \vec{BF} = a \vec{BC}$$

وأخيراً H هي منقبة $[EF]$ أثبت أن I و

J و H تقع على استقامة واحدة



السؤال الأول:

أ) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O

بعد الإحداثيات ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$

ب) اكتب معادلتين المستويين P و Q اللذين معادلتهما:

$$P: x - y + z + 3 = 0$$

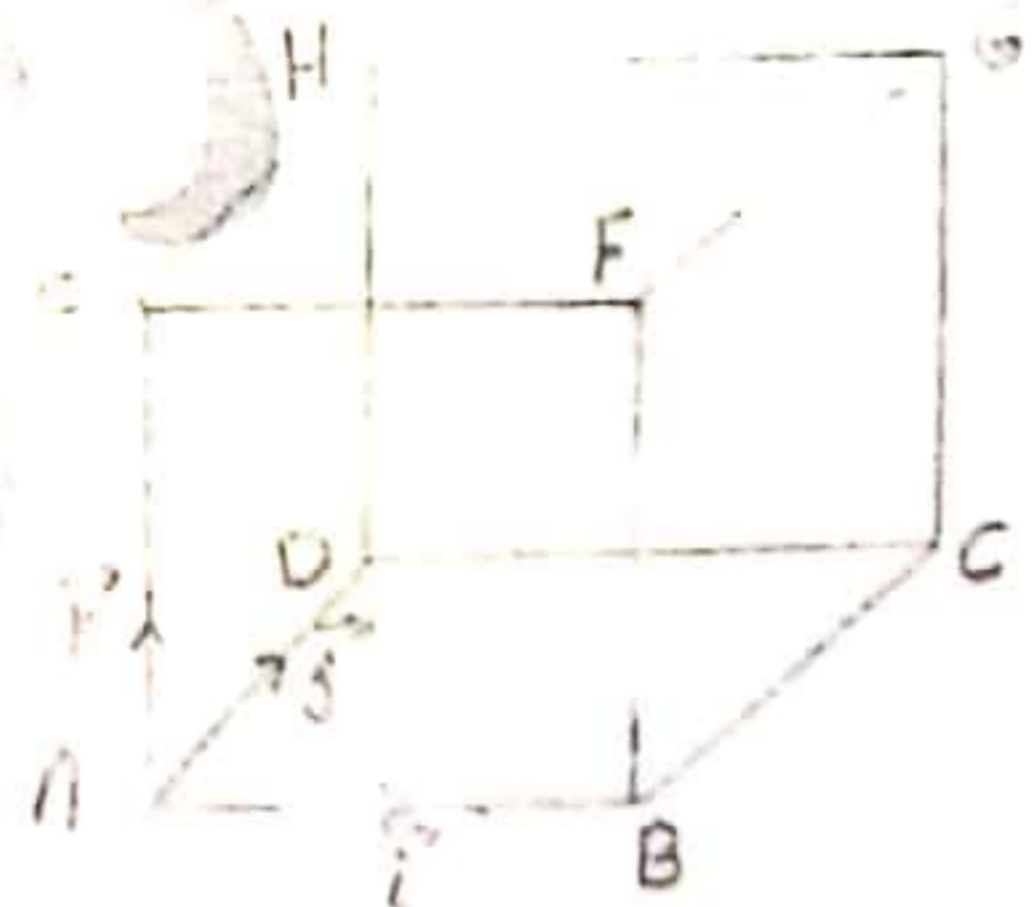
لعيبي الكرة S

السؤال الثاني: في الشكل المجاور:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حافته 2

تعال في العالم المتجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{AE} = 2\vec{k}, \quad \vec{AD} = 2\vec{j}, \quad \vec{AB} = 2\vec{i}$$



أ) اكتب معادلة المستوى (GBD) .

ب) اكتب معادلتين مستويين (EC) .

ج) اكتب إحداثيات نقطة تقاطع المستويين (EC)

مع المستوى (GBD) .

د) اكتب إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$\vec{EM} = \frac{1}{3} \vec{EC}$$

هـ) أثبت تقاطع المستويين (EC) و (HM) .

السؤال الثالث: نقاط في معام متجانس

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ التقاط الأتية:

$A(0, 2, -2), B(-1, 2, -1)$

$C(-2, 1, 1), D(0, 3, -3)$

[1] أثبت أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوى واحد.

[2] أثبت أن النقاط D, C, B تقع على استقامة واحدة.

السؤال التاسع:

عين هبيرة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0$$

السؤال العاشر: ليكن $S, ABCD$ هرم

قاعدته مربع طول ضلعه 5

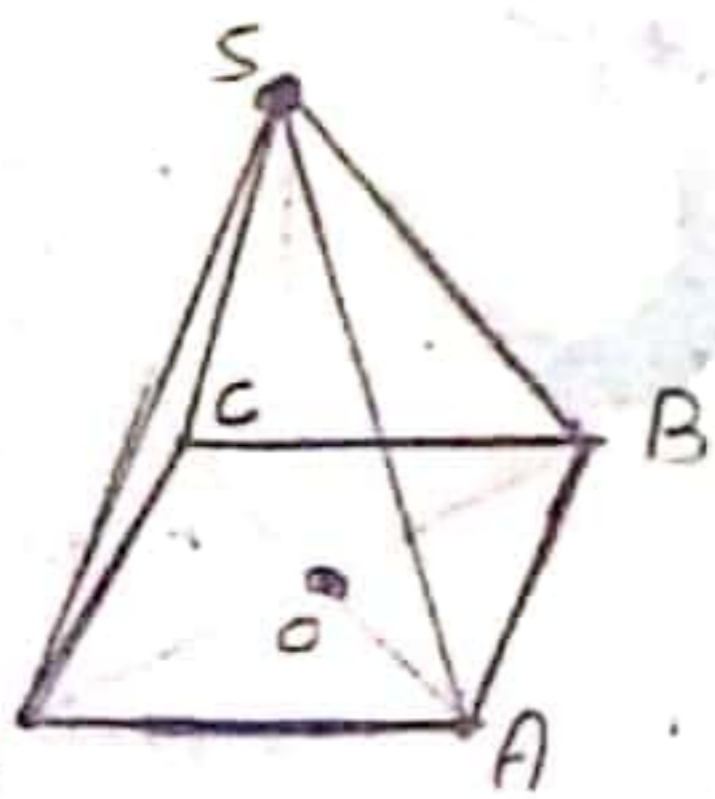
وطول كل حرف من حروفه الجانبية 5 وليكن S مركزه، لغايم على التمام والمطلوب:

[1] احسب $\vec{SD} \cdot \vec{SC}$

[2] احسب طول القطر BD ثم احسب $\vec{DB} \cdot \vec{DS}$

[3] عين G مركز الأضلاع المتناسبة للتقاط النقطة

$(D, 2), (C, 3), (S, 1)$



السؤال الحادي عشر: في معام متجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا نقطتان

$A(2, 1, -2), B(7, -2, 0)$ والشعاعان $\vec{u}(2, -1, 0), \vec{v}(3, 1, -2)$

والمطلوب: [1] أثبت أن الأشعة \vec{u}, \vec{v} ، \vec{AB} متزاوية.

[2] اكتب معادلة المستوى الذي يقبل \vec{u} و \vec{AB} شعاعين

توجيه له \vec{v} يمر من A

السؤال السادس: متوازي $ABCDEFGH$

مسطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$

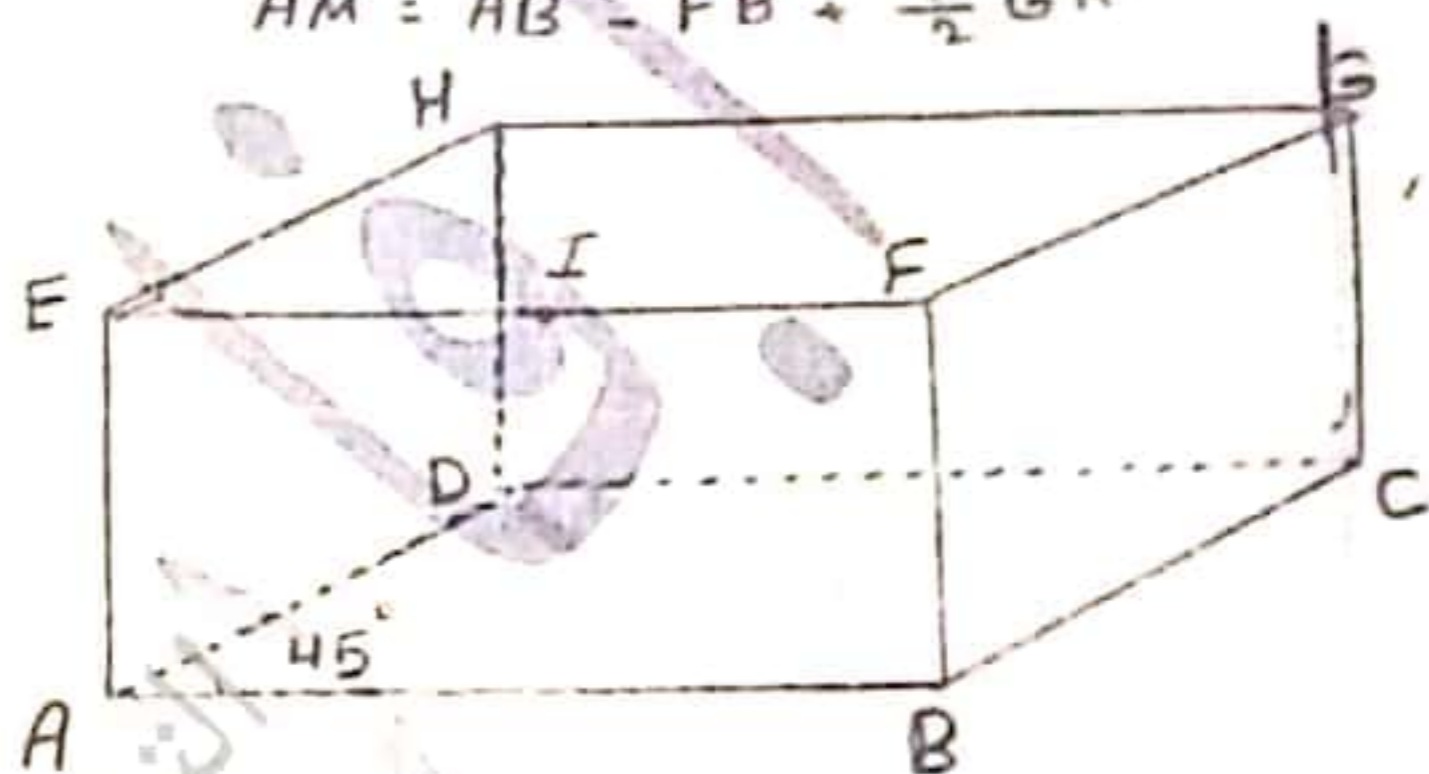
و قياس الزاوية \hat{DAB} يساوي 45°

والنقطة I منتصف $[EF]$ المطلوب:

[1] احسب $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

[2] عين موضع النقطة M التي تحقق لعلامة:

$$\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2} \vec{GH}$$



السؤال السابع: في معام متجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لدينا النقاط: $A(2, 1, 3), B(1, 0, -1)$

$C(4, 0, 0), D(0, 4, 0), E(1, -1, 1)$

[1] احسب $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{CE}$

[2] أثبت أن النقاط E, D, C ليست دامة على استقامة واحدة.

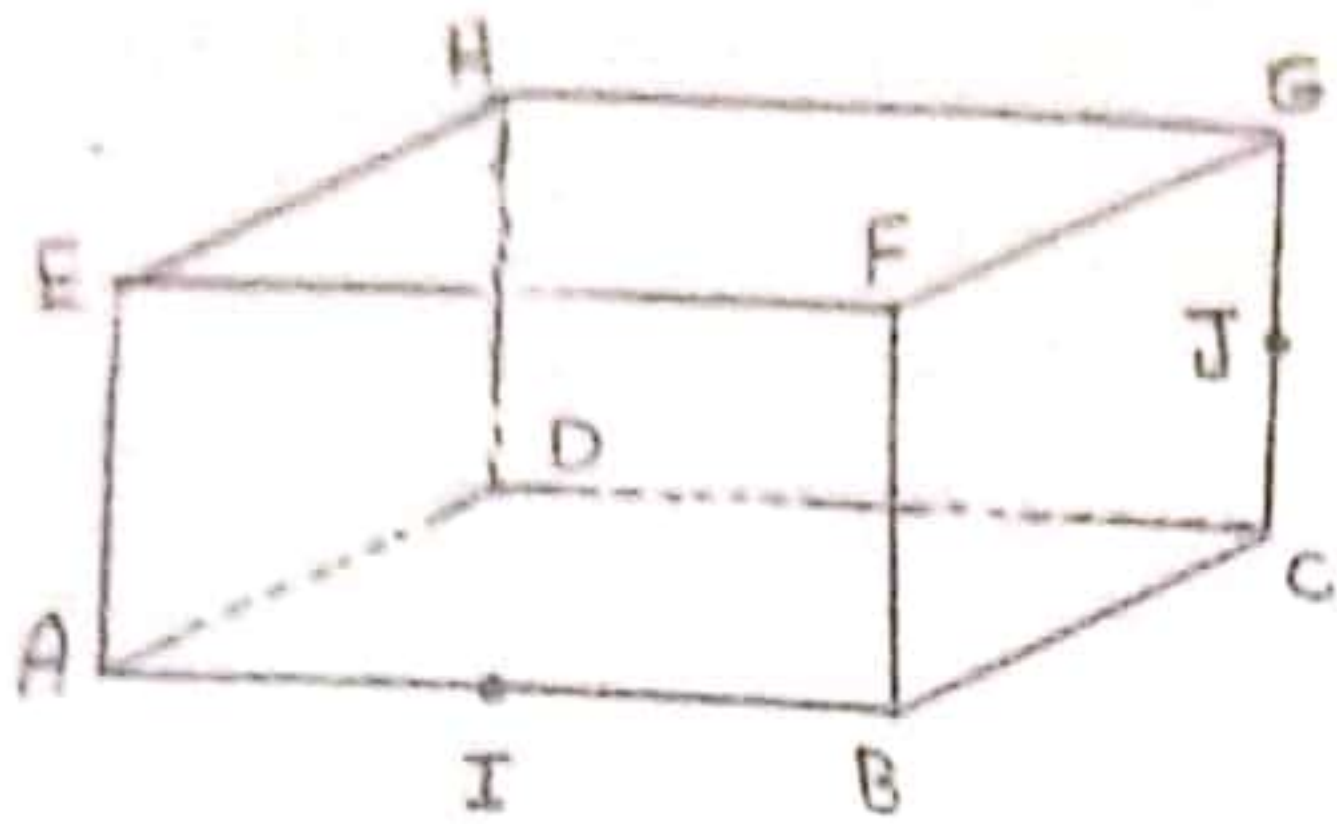
[3] أثبت أن (AB) يامد المستوى (CDE)

[4] اكتب معادلة المستوى (CDE)

[5] احسب B عن المستوى (CDE)

[6] اكتب معادلة الكرة التي مركزها B

وتقتطع المستوى (CDE) .



السؤال الحادي عشر:

النقاط: $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 3)$, $C(3, 1, -2)$, $D(-4, 2, 1)$
 ليكن مع التعليل صحة أو خطأ التحويلات الآتية:

[1] الترتيب ABC قائم .

[2] لنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة .

[3] المستقيم (AD) عمود على المستوى (ABC) .

السؤال الثاني عشر:

$ABCDEFGH$

متوازي مستطيلات فيه $AB = 4$ و

$BC = 2$, $CG = 2$ والنقطة I هي

منتصف AB والنقطة J منتصف CG

ولدينا العلم المتجانس:

$$\left(A \cdot \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AE} \right)$$

المطلوب:

[1] اكتب معادلة المستوى (IFH)

[2] هل المستقيمان (DJ) و (IJ) متعامدان ...

احسب $\cos \angle IJD$

[3] برهن أن الأضلاع \vec{AH} , \vec{AF} , \vec{DB} مرتبطة

خطياً .

[4] جد إحداثيات M التي تقع:

$$\vec{EM} = \frac{1}{3} \vec{EC}$$

[5] احسب بعد G عن المستوى (IFH)

ثم أوجد مسقطه القائم على المستوى (IFH)

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

[6] ماهي نقطة تقاطع المستويين P و Q و (ABC)

[7] احسب بعد A عن المستقيم d

التدريب الثالث عشر:

في العمود العمود الخ معلم متجانس

$(\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1, 0, -1) \cdot B(2, 2, 3)$$

$$C(3, 1, -2) \cdot D(-4, 2, 1)$$

[1] أثبت أن الترتيب ABC قائم وأمسح مساحته

[2] أثبت أن المقطع $(2, -3, 1)$ قائم المستوى

(ABC) واستمع معادلة المستوى (ABC) .

[3] احسب بعد النقطة D عن المستوى (ABC)

ثم احسب حجم رباعي العمود $DABC$

التدريب الرابع عشر:

في معلم متجانس $(\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1, 1, 0) \cdot B(1, 2, 1) \cdot C(4, 0, 0)$$

[1] أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

[2] أثبت أن معادلة المستوى (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

[3] ليكن المستويان P, Q معادلتها:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفضل المشترك d المعطى بالتمثيل الوسيطية التالية:

