التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

Some special Continuous Probability Distributions

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة يمكن عرضها كما يلي:

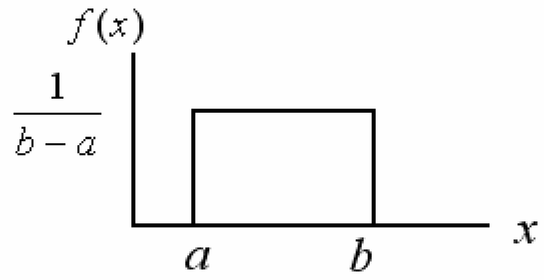
التوزيع المنتظم Uniform distribution

١ - شكل دالة كثافة الاحتمال p.d.f

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم *Uniform* ، مداه هو $a<x<b$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\ ,\ a<x<b$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



٢ - معالم هذا التوزيع

توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (b,a) ، ولذا يكتب وصف توزيع المتغير على الصورة

$$x\sim U(a,b)$$

٣ - خصائص التوزيع المستطيل

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما :

$$\mu=E(x)=\frac{a+b}{2}\ ,\ \ \sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

وعلى الطالب إثبات ذلك:

٤- دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x) = p(X \le x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx$$
$$= \frac{x-a}{b-a}$$

تطبيق:

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآتي:

- **دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.**
- **بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟**

الحـــل:

- **دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:**

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر، أي أن $0 < x < 12$ ، ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \;,\; 0 < x < 12$$

- **حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.**

بفرض أن Q هي كمية البطاطس المستوردة ، تكون الكية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$Q \times p(x > 7) = Q \times (1 - F(7)) = 1500(1 - \frac{7-0}{12-0}) = 625 \;\; Ton$$

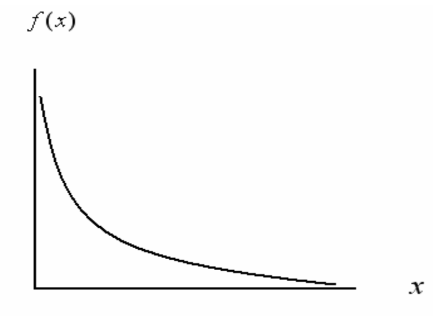
التوزيع الأسى السالب Negative Exponential distribution

١ - *شكل دالة كثافة الاحتمال p.d.f*

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع أسي سالب، مداه هو $0 < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \theta\, e^{-\theta x},\ 0 < x < \infty\ ,\ \theta \succ 0$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



٢ - *معالم هذا التوزيع*

توجد معلمة واحدة هي (θ)

٣ - *خصائص التوزيع الأسى السالب*

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما:

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\theta}\ ,\quad \sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

٤ - *دالة التوزيع التجميعي C.D.F*

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x) = p(X \le x) = \int_0^x f(x)dx = \left(1 - e^{-\theta x}\right)$$

تطبيق:

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط 2 دقيقة ، فأوجد ما يلي.

- **دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.**
- **ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.**
-

الحـــل:

- **دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:**

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0 < x < \infty$ ، فإن المعلمة $1/\theta = 2$ ، ومن ثم تصبح قيمة (θ) هي: $(\theta = 0.5)$ ، وتكتب دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x) = 0.5\ e^{-0.5\ x},\ 0 < x < \infty$$

- **حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.**

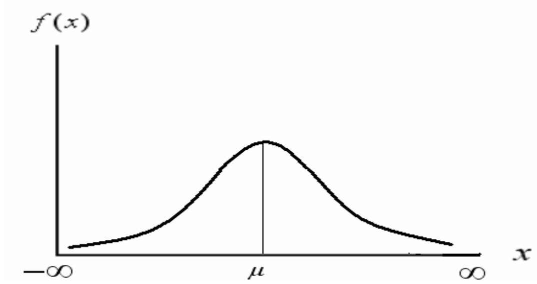
$$p(x \le 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

التوزيع الطبيعي The Normal distribution

١ - شكل دالة كثافة الاحتمال p.d.f

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع طبيعي، مداه هو $-\infty < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ ,\ -\infty<x<\infty\ ,\ \pi=22/7$$



فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ .

٢ - معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما:

الوسط الحسابي : $E(x)=\mu$ والتباين : $\text{var}(x)=\sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير x بالرموز : $x\sim N(\mu,\sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

٣ - خصائص التوزيع الطبيعي

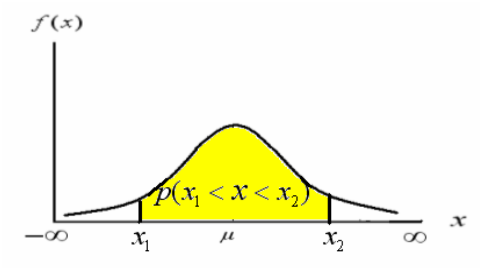
هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

١- الوسط الحسابي μ ٢- والتباين σ^2

٣- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ

٤ - كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1<X<x_2)$

بفرض أن هذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية أسفل المنحنى:



وتحسب هذه المساحة(الاحتمال) بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة Transform ، يسهل استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي Standard Normal Variabl ، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}z^2}\ ,\ -\infty < z < \infty\ ,\ \pi = 22/7$$

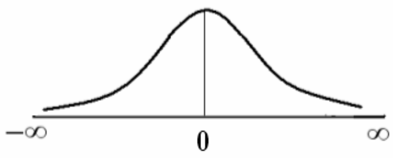
ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

١- متوسطه هو : $E(z) = 0$ **٢- تباينه هو :** $\operatorname{var}(z) = 1$

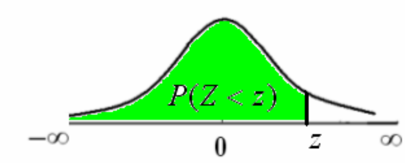
ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرموز : $z \sim N(0,1)$ **ويعني ذلك أن المتغير العشوائي** x

يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) ، وتباين (1) .

٣- يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:

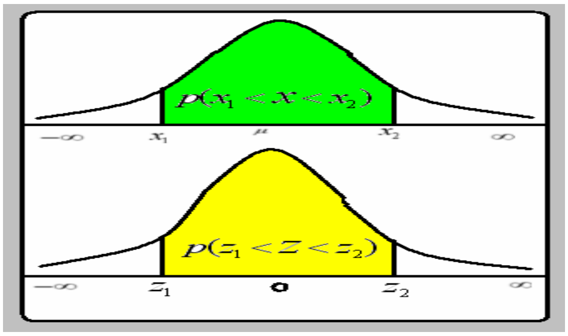


وقام الإحصائيين بتصميم جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي: $F(z) = P(Z < z)$ ، **كما هو مبين بالرسم التالي:**



ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال $p(x_1 < X < x_2)$ **باستخدام التحويلة** $z = (x - \mu)/\sigma$:

- **يتم تحويل القيم الطبيعية** (x_1, x_2) **إلى قيم طبيعية قياسية** $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma \ , \ z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$.
- **ومن ثم يكون الاحتمال :** $p(x_1 < X < x_2) = p(z_1 < Z < z_2)$:



- **تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي ، والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال**

$$F(z) = P(Z < z)$$

٥- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات

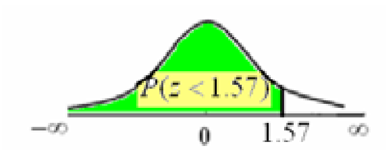
أوجد الاحتمالات التالية:

أ- $P(z < 1.57)$ **ب-** $P(z < -2.33)$ **ج-** $P(z > 1.96)$ **د-**

$P(-2.01 < z < 1.28)$

الحل

أ- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z < 1.57) = F(1.57)$ **أسفل المنحنى كما يلي**



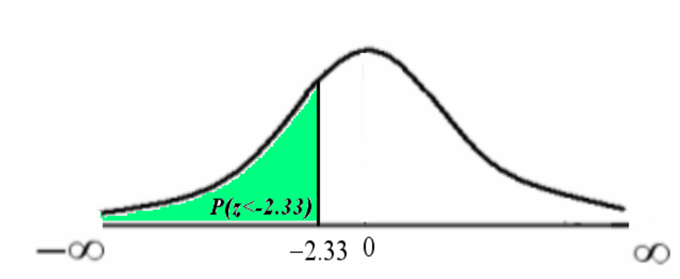
ويتم استخدام الجدول كما هو مبين :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
⋮										

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z < 1.57) = F(1.57) = 0.9418$

ب- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(z < -2.33) = F(-2.33)$ **موضحة كالتالي:**

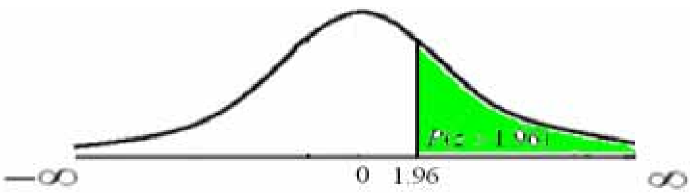
P(z<-2.33)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.										
.										
.										
.										
-2.70										
-2.60										
-2.50										
-2.40										
-2.30				0.0099						
.										
.										
.										

ومن ثم يكون : $P(z<-2.33)=0.0099$

ج- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z>1.96)$ **كالتالي:**



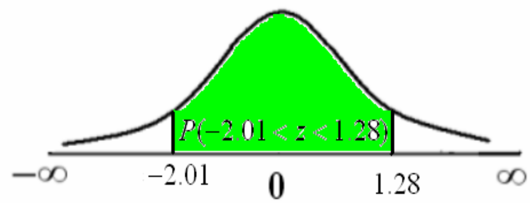
وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

$$P(z>1.96)=1-p(z<1.96)=1-F(1.96)$$

وبالكشف في الجدول بنفس الطريقة السابقة على القيمة 1.96 نجد أن : $p(z<1.96)=0.9750$ **، ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو:**

$$P(z>1.96)=1-0.9750=0.0250$$

د- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(-2.01<z<1.28)$ **هي:**



وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي يمكن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01<z<1.28)=F(1.28)-F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$$P(-2.01<z<1.28)=0.8997-0.0222=0.8775$$

تطبيق ١:

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد مناطق المملكة يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ألف ريال ، وتباينه 900 . والمطلوب:

١- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

٢- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

٣- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال ؟

٤- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

الحــل

١- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

بفرض أن x متغير عشوائي يعبر عن الدخل السنوي بالألف ريال، وهو يتبع التوزيع الطبيعي ، ومعالمه هي:

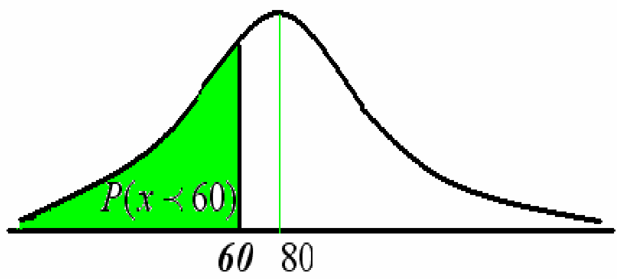
أ- المتوسط $E(x)=\mu=80$ **ب- التباين هو :** $Var(x)=\sigma^2=900$

أي أن : $x\sim N(80,900)$

٢- شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x)=\frac{1}{30\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2},\ -\infty<x<\infty\ ,\ \ \pi=22/7$$

٣- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال هي: $P(x\prec 60)$



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(x<60)=p\left(z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(z<\frac{60-80}{30}\right)=P(z<-0.67)=F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، نجد أن

$$P(x<60)=P(z<-0.67)=0.2514$$

٤- هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير (x) الذي أقل منه 0.975 ، بفرض أن هذا المتغير هو (x_1) ، فإن :

$$P(x<x_1)=p\left(z<\frac{x_1-80}{30}\right)=0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 ، والعمود .06 أي أن قيمة $z=1.96$ ، ويكون :

$$1.96=\frac{x_1-80}{30}\quad,\quad Then\quad x_1=30(1.96)+80=138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 ألف ريال في السنة.

توزيع مربع كاي Chi-Square distribution

١ - شكل دالة كثافة الاحتمال p.d.f

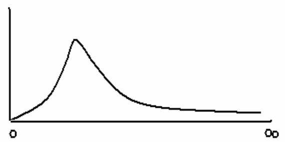
إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع مربع كاي Chi-Square (χ^2) ، مداه هو $0<x<\infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x)=\frac{1}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}e^{-\left(\frac{x}{2}\right)},\ 0<x<\infty$$

ويقال أن المتغير x يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية n ، وفي هذه الحالة يعبر عنه بالرمز :

$$x\sim\chi^2_{(n)}$$

وتمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



٢ - معالم هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة لهذا التوزيع هي درجات الحرية (n)

٣ - خصائص توزيع مربع كاي:

هذا التوزيع موجب الالتواء ، والوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا التوزيع هما :

$$\mu=E(x)=n\ ,\quad \sigma^2=2n$$

٤ - دالة التوزيع التجميعي C.D.F

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي : $F(x)=p(X\le x)$

وقد قام الإحصائيين بعمل جداول إحصائية لحساب الاحتمالات التجميعية، وفيما يلي بيان كيفية استخدام هذه الجداول.

تطبيق

إذا كانت المتغير x له توزيع مربع كاي بدرجات حرية 10، والمطلوب:

- **كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير.**
- **أوجد احتمال: $F(3.94)=p(X\le 3.94)$**

- **أوجد قيمة** $\chi^2_{(0.99,10)}$

الحــل

- **كتابة شكل دالـة كثافة الاحتمـال لهذا المتغير .** $x \sim \chi^2_{(10)}$ **، إذا دالـة كثافة احتمالـه p.d.f هي:**

$$f(x) = \frac{1}{2^{\left(\frac{10}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{10}{2}\right)} x^{\left(\frac{10}{2}-1\right)} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)}, \; 0 < x < \infty$$

- **حساب احتمال :** $F(3.94) = p(X \le 3.94)$

$$P(x < 3.94) = \int_0^{3.94} f(x)\; dx = \int_0^{3.94} \frac{1}{2^{\left(\frac{10}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{10}{2}\right)} x^{\left(\frac{10}{2}-1\right)} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)}\; dx$$

ويمكن استخدام جداول مربع كاي كما هو مبين بالشكل التالي:

v	.005	.010	.025	.05	.100	....	.....	....
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	....	.....	....
11								

قيمة هذا الاحتمال يساوي 0.05

- **قيمة** $\chi^2_{(0.99,10)}$ **تعني قيمة المتغير** X **الذي أقل منه 0.99 من القيم ، أي هي القيمة التي تقق الاحتمال:**

$$F(X) = p(X \le X) = 0.99$$

وهذه القيمة نحصل ليها بالكشف عنها بطريقة عكسية:

ν				0.99				
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10	2.16	2.56	3.25	23.21	4.87	....	.....	....
11								

أي أن القيمة هي: $X = 23.21$:

توزيع ت t- distribution

١- شكل دالة كثافة الاحتمال p.d.f

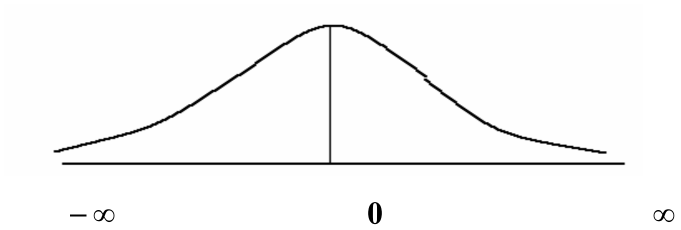
إذا كان المتغير X **متغير عشوائي له توزيع ت (t) ، مداه هو** $-\infty < X < \infty$ **فإن دالة كثافة احتماله**

هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}\beta(\frac{1}{2},\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

ويقال أن المتغير x يتبع توزيع ت بدرجات حرية n ، وفي هذه الحالة يعبر عنه بالرمز : $x \sim t_{(n)}$

وتمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



وهو توزيع متماثل علي جانبي المتوسط (0)

٢ - معالم هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة لهذا التوزيع هي درجات الحرية (n)

٣ - خصائص توزيع ت t