منشورات جامعة حلب

كلية العلوم

المعادلات التكاملية وحساب التحولات

الدكتور

معروف بسوت لليش

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٢٨ هـ - ٢٠٠٧ م

منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

المعادلات التكاملية وحساب التحولات

الدكتور
معروف بسوت لليش
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٢٨هـ - ٢٠٠٧م

الفهرس

الجزء الأول

المعادلات التكاملية

الفصل الأول : معادلات فولتيرا التكاملية

الموضـــــــــــوع	رقم الصفحة

الموضـــــــــــــــــــوع	رقم الصفحة

الموضـــــــوع	رقم الصفحة

الموضـــــــــــــوع | رقم الصفحة

الجزء الثاني

حساب التحولات

الفصل الرابع : حساب التحولات

الموضـــــــــــــــوع	رقم الصفحة

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

تلعب المعادلات التكاملية دوراً هاماً في العديد من الأبحاث النظرية والتطبيقية، نظرا لإمكانية التعبير عن المعادلة التكاملية كمؤثر تكاملي مستمر أو غير مستمر وبالتالي نمذجة بعض المسائل في الأبحاث التي تقبل المؤثر التكاملي نموذجاً لها للتوصيف الرياضي للمسألة التطبيقية المعالجة، ومن هنا نرى أن المعادلات التكاملية تلعب دورا أساسيا للنمذجة الرياضية ذات المؤثرات التكاملية:

ففي ميكانيك الأوساط المستمرة نجد في مسائل المرونة، كثيراً من التطبيقات الميكانيكية وذلك من أجل الأجسام القابلة للتشوه والتي تتمتع بسلوك مرن لاخطي، كما يمكن التعبير عن سلوك الأوساط اللزجة – المرنة ذات الذاكرة الطويلة بمعادلة فولتيرا التكاملية. والأكثر من ذلك فإن التابع المجهول فيها هو تابع من النمط المنقطع والذي يمكن أن ينتمي إلى فضاءات سوبولوف بشكل عام، ونرى تطبيقات أخرى في الإنشاءات المعمارية وغيرها من الميادين التطبيقية .

كما أن هناك تطبيقات كثيرة تستخدم حساب التحولات في مجال الإلكترونيات والميكانيك التحليلي وغيرهما من مجالات الفيزياء.

يتألف الكتاب من جزئين : يعالج الجزء الأول المعادلات التكاملية بنوعيها فولتيرا وفريدهولم، ويدرس الجزء الثاني حساب التحولات.

- قُسّم الجزء الأول إلى ثلاثة فصول: خصص الفصل الأول لدراسة المعادلات التكاملية لفولتيرا بنوعيها الأول والثاني وطرائق حلها المختلفة، وتم دراسة معادلات فولتيرا اللاخطية ومجموعة المعادلات التكاملية وحلها باستخدام تحويلات لابلاس.
- كما كرس الفصل الثاني لدراسة المعادلات التكاملية لفريدهولم بنوعيها الأول والثاني وتم دراسة طرائق حلها المشابه لحل معادلات فولتيرا التكاملية كطريقة التقريب المتتالي وطريقة النواة الحالة، وتم شرح طرائق أخرى : كمحددات فريدهولم والحل باستخدام القيم الذاتية والتوابع الذاتية.
- دُرس في الفصل الثالث معادلات فريدهولم التكاملية التناظرية، تلك التي تكون فيها النواة متناظرة. وتم دراسة النظريات المتعلقة بها.
- انتقل الكتاب بعد ذلك لمعالجة الجزء الثاني وهو حساب التحولات، حيث تم شرح مفهوم معادلة أولر وكيفية تشكيلها وحساب القيم القصوى

للتابعيات وبعض التطبيقات الميكانيكية كمبدأ الفعل الأصغر ومعادلات أولر وأوسترو غرادسكي.

آمل أن أكون قد وفقت في تقديم مرجع باللغة العربية يُعالج موضوع المعادلات التكاملية وحساب التحولات، وأن يستفيد منه الطلاب والباحثين. ويكون عوناً على فهم هذا الموضوع. وآمل من زملائي الأعزاء تزويدي بآرائهم واقتراحاتهم لتطوير هذا الكتاب في الطبعات القادمة.

حلب في ٢٠٠٧/٦/١٣م

والله ولي التوفيق

المؤلف : د. معروف بسوت

الجزء الأول

العلاقات التكاملية

الفصل الأول

معادلات فولتيرا التكاملية

سنعالج في هذا الفصل معادلات فولتيرا التكاملية الخطية من النوعين الأول والثاني وطرائق حلها العامة كطريقة التقريب المتتالي وطريقة النواة الحالة. كما سندرس صنفاً منها تلك التي تكون فيها النواة تابعة للفرق بين المتحولات وسنبين كيفية إيجاد حلها باستخدام تحويلات لابلاس. كما سنعالج معادلات فولتيرا التكاملية اللاخطية. وكيفية إيجاد حلها ، كما سنسلط الضوء على كيفية إيجاد حل مجموعة من المعادلات التكاملية لفولتيرا.

١- تصنيف معادلات فولتيرا التكاملية:

I-1- معادلات فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني :

ندعو المعادلة التي لها الشكل :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{x}k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (1)$$

حيث $f(x)$ و $K(x,t)$ تابعان معلومان، $\varphi(x)$ هو التابع المجهول و λ وسيط عددي.

بمعادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني، يسمى التابع $k(x,t)$ بنواة المعادلة التكاملية (1)، ويقال أحياناً عن (1) بأنها معادلة تكاملية غير متجانسة ومن النوع الثاني، نلاحظ ورود التابع المجهول تحت رمز التكامل في المعادلة التكاملية، وهذا هو سبب تسميتها بمعادلة تكاملية.

- إذا كان $f(x)\equiv 0$ ، فإن المعادلة التكاملية (1) تأخذ الشكل:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (2)$$

تدعى المعادلة (2) بمعادلة تكاملية متجانسة من النوع الثاني.

ملاحظة : يعبر في بعض الأحيان عن المعادلة التكاملية (1) أو (2) بإدخال مفهوم المؤثر التكاملي وذلك بالشكل:

$$K\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

1-2- معادلات فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول:

لتكن المعادلة التكاملية:

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt=f(x) \qquad (3)$$

حيث $\varphi(x)$ هو التابع المجهول، إن المعادلة التكاملية (3) **تدعى بمعادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول**، سنعتبر فيما بعد الحد الأدنى للتكامل $a = 0$ ، وهذا الأمر لاينقص من عمومية المسألة.

ملاحظة : باستخدام مفهوم المؤثر التكاملي فإن (3) تكتب بالشكل:

$$K\varphi(x)=\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt=f(x)$$

1-3- تعريف حل معادلة فولتيرا التكاملية:

نقول عن التابع $\varphi(x)$ أنه حل للمعادلة التكاملية (1) أو (2) أو (3)، إذا حول تلك المعادلة إلى مطابقة عند تعويضه فيها.

مثال (1-1) : برهن أن التابع :

$$\varphi(x)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$$

هو حل لمعادلة فولتيرا التكاملية.

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\cdot\varphi(t)dt \qquad (4)$$

الحل :

بتعويض التابع المعطى في الطرف الأيمن من (4)، نجد:

$$\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}dt=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\left[-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=\varphi(x)$$

وهكذا فإن تعويض $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ في كلا الطرفين في (4) قد حول المعادلة إلى مطابقة بالنسبة لـ x .

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\equiv\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

وحسب تعريف الحل الوارد أعلاه فإن هذا يعني أن التابع:

$$\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

هو حل للمعادلة التكاملية (4).

1-3-1-تعريف التابع القابل للمكاملة تربيعياً :

نقول عن تابع φ إنه قابل للمكاملة تربيعياً (كمول تربيعياً) على [a,b] ، أو أنه من $L^2[a,b]$ فيما إذا كان :

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt < \infty$$

ونقول عن النواة $K(x,t)$ إنها قابلة للمكاملة تربيعياً على المربع $\Omega(a\le x\le b, a\le t\le b)$ أو إنها من $L^2([a,b],[a,b])$ فيما إذا كان :

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2 dx\,dt < \infty$$

$$\int_a^b |K(x,t)|^2 dt < \infty \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^b |K(x,t)|^2 dx < \infty \quad \forall t \in [a,b]$$

ويجب ملاحظة أن التوابع φ, f, K الواردة في التعاريف السابقة هي توابع حقيقية أو عقدية، إنما t , x هما متغيران حقيقيان.

ملاحظة : إن مسألة وجود الحل ووحدانيته قد تم البرهان عليها في مقرر التحليل التابعي (1)، من خلال مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ .

1-4- القيم الذاتية والتوابع الذاتية لمعادلة فولتيرا التكاملية :

نظرية (1) :

لتكن $k(x,t)$ نواة فولتيرا ذات مربع قابل للمكاملة في $[a,b] \times [a,b]$.

لايملك المؤثر المرافق K^* في $L^2[a,b]$ قيم ذاتية غير معدومة.

البرهان :

لتكن $\frac{1}{\lambda}$ قيمة ذاتية غير معدومة للمؤثر K^*. إذن يوجد تابع ذاتي $\phi \neq 0$ يحقق العلاقة:

$$\frac{1}{\lambda}\phi = K\phi$$

وبحيث إن :

$$\phi=\lambda K\phi=\lambda^2K^2\phi=...=\lambda^nK^n\phi \qquad \forall n\in N$$

بسهولة يبرهن أن :

$$\left|\lambda^nK^n\phi(x)\right|\underset{n\to\infty}{\to}0$$

وهذا تناقض.

نتيجة : بما أن معادلة فولتيرا التكاملية لاتملك قيماً ذاتية، فإن هذه المعادلات ليس لها توابع ذاتية.

2- العلاقة بين المعادلات التفاضلية الخطية ومعادلات فولتيرا التكاملية الخطية:

ستوضح في هذه الفقرة بأن حل المعادلة التفاضلية الخطية التي من الشكل:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=F(x) \tag{5}$$

حيث $a_i(x)$ $(i=1,2,...,n)$ هي توابع مستمرة، والذي يحقق الشروط الابتدائية:

$$y(o)=C_o\ ,\ y'(o)=C_1,...,y^{(n-1)}(o)=C_{n-1} \tag{6}$$

يؤول إلى حل معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني.

لنبرهن ذلك في الحالة الخاصة، حالة معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية:

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=F(x) \tag{7}$$

$$y(o)=c_o\ ,\ y'(o)=c_1 \tag{8}$$

لنضع:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x) \tag{9}$$

عندئذ، باعتبار الشروط الابتدائية (8) ، وبالمكاملة نجد :

$$\frac{dy}{dx}=\int_o^x\varphi(t)dt+c_1 \tag{10}$$

وبالمكاملة مرة ثانية نجد :

$$y = \int_{o}^{x} (x-t)\varphi(t)dt + c_1 x + c_o \tag{11}$$

حيث تم استخدام العلاقة الرياضية:

$$\underbrace{\int_{x_o}^{x} dx \int_{x_o}^{x} \dots \int_{x_o}^{x}}_{n} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_o}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)dz \tag{12}$$

من أجل $n = 2$.

وبالاعتماد على العلاقات (9) ، (10) ، (11) ، فإن المعادلة التفاضلية (7) تكتب بالشكل:

$$\varphi(x) + \int_{o}^{x} a_1(x)\varphi(t)dt + c_1 a_1(x) + \int_{o}^{x} a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt$$
$$+ c_1 x a_2(x) + c_o a_2(x) = F(x)$$

أو بالشكل:

$$\varphi(x) + \int_{o}^{x} [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\, \varphi(t)dt =$$
$$= F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_o a_2(x) \tag{13}$$

نضع الآن :

$$K(x,t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \tag{14}$$

$$f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_o a_2(x) \tag{15}$$

فإن (13) تأخذ الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{o}^{x} k(x,t)\varphi(t)dt \tag{16}$$

أي أننا حصلنا على معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني انطلاقاً من المعادلة التفاضلية الخطية (7).

إن وجود ووحدانية حل المعادلة التكاملية (16) ينتج من وجود وووحدانيـة حـل مسألة كوشي (7) و (8) من أجل المعادلة التفاضلية الخطية ذات التوابـع المستمرة في جوار النقطة $x = 0$.

وبالعكس، بحل المعادلة التكامليـة (16) حيـث f ، k معرفـة بـ(14) و (15) وبتعويض عبارة $\varphi(x)$ الناتجة في (13) في الطرف الثاني من المعادلة (11)، نحصل على حل وحيد للمعادلة (7) والذي يحقق الشروط الابتدائية (8).

مثال (2-1):

أوجد المعادلة التكاملية الموافقة للمعادلة التفاضلية :

$$y'' + xy' + y = 0 \tag{17}$$

والمحققة للشروط الابتدائية:

$$y(o) = 0 \quad , \quad y'(o) = 0 \tag{18}$$

الحل:

نضع :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x) \tag{19}$$

عندئذ، وبالأخذ بعين الاعتبار (18) نجد :

$$\frac{dy}{dx} = \int_o^x \varphi(t)dt + y'(o) = \int_o^x \varphi(t)dt \tag{20}$$

بالمكاملة مرة ثانية نحصل:

$$y = \int_o^x (x-t)\varphi(t)dt \tag{21}$$

بتعويض (19) ،(20) ،(21) في المعادلة التفاضلية (17) نجد :

$$\varphi(x) + \int_o^x x\varphi(t)dt + \int_o^x (x-t)\varphi(t)dt$$

ومنه نحصل على المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) = -\int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt$$

والتي نواتها :

$$k(x,t) = 2x - t$$
$$\lambda = -1$$

3- الطرائق العامة لإيجاد حل معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

سنعرض عدة طرائق لإيجاد حل معادلات فولتيرا والتي يمكن تلخيصها بطريقتين عامتين هما:

1- طريقة النواة الحالة The method of resolvent kernel.

2- طريقة التقريب المتتالي The method of successive approximations.

كما أنه يمكن استخدام تحويلات لابلاس لحل معادلات فولتيرا التكاملية وذلك في حالة كون النواة تابعة للفرق بين متحوليها.

1-3- طريقة النواة الحالة The method of resolvent kernel :

تعتمد هذه الطريقة على استبدال النواة K بالنواة R ، حيث يمكن (من خلال النواة R) التعبير عن حل المعادلة التكاملية.

1- لتكن المعادلة التكاملية التالية لفولتيرا:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (22)$$

حيث k(x,t) تابع مستمر عندما :

$$0 \le x \le a \qquad 0 \le t \le x$$

أو نفترض أن النواة :

$$k(x,t) \in L^2\{[o,a]\times[o,x]\}$$

كما نفرض أن التابع $f(x)$ مستمر في المجال $[o,a]$ وأن $f(x) \in L^2[o,a]$.

لنبحث الآن عن حل للمعادلة التكاملية (22) على شكل متسلسلة قوى لانهائية في λ أي من الشكل:

$$\varphi(x) = \varphi_o(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \qquad (23)$$

لنعوض المتسلسلة (23) في (22)، فنجد:

$$\begin{aligned} &\varphi_o(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots = \\ &= f(x) + \lambda\int_o^x k(x,t)\left[\varphi_o(t) + \lambda\varphi_1(t) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots\right] \end{aligned} \qquad (24)$$

وبإجراء المطابقة بين الحدود المتشابهة ومن نفس الدرجة λ، نجد:

$$\begin{aligned} &\varphi_o(x) = f(x) \\ &\varphi_1(x) = \int_o^x k(x,t)\varphi_o(t)dt = \int_o^x k(x,t)f(t)dt \\ &\varphi_2(x) = \int_o^x k(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_o^x k(x,t)\left[\int_o^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt \end{aligned} \qquad (25)$$

....

إن العلاقات (25) تعطي طريقة تتابعية لتعيين وحساب التوابع $\varphi_n(x)$. تدعى هذه الطريقة لتعيين حل المعادلة التكاملية بطريقة التقريب المتتالي.

2- في هذا السياق، يبرهن بأن المتسلسلة (23) متقاربة بانتظام بالنسبة للمتحولين x و λ وذلك من أجل أي قيمة لـ λ و $x \in [o,a]$ ، وأن مجموع هذه المتسلسلة هو الحل الوحيد للمعادلة التكاملية (22).

من العلاقة (25) نستنتج تعريفاً للتوابع $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_1(x) = \int_o^x k(x,t)f(t)dt$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x k(x,t)\left[\int_0^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt=$$

$$=\int_0^x f(t_1)dt_1\int_{t_1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt=\int_0^x k_2(x,t_1)f(t_1)dt_1$$

حيث:

$$k_2(x,t_1)=\int_{t_1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt$$

بشكل عام، فإن التابع $\varphi_n(x)$ يعرف بالعلاقة:

$$\varphi_n(x)=\int_0^x k_n(x,t)f(t)dt \qquad (n=1,2...) \tag{26}$$

تدعى التوابع $k_n(x,t)$ بالنوى المكررة.

يمكن البرهان بأن النوى المكررة تتعين بوساطة الدساتير التدريجية:

$$k_1(x,t)=k(x,t) \tag{27}$$

$$k_{n+1}(x,t)=\int_t^x k(x,u)k_n(u,t)du \qquad (n=1,2,...)$$

باستخدام العلاقتين (26) و (27)، فإن المتسلسلة (23) تكتب بالشكل:

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^x k_n(x,t)f(t)dt$$

لنعرف التابع $R(x,t,\lambda)$ بوساطة المتسلسلة:

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t) \tag{28}$$

والذي يدعى بالنواة الحالة للمعادلة التكاملية (22).

3- يبرهن بأن المتسلسلة (28) تتقارب مطلقاً وبانتظام في حال كون النواة $k(x,t)$ مستمرة، كما أن النواة الحالة $R(x,t,\lambda)$ تحقق العلاقة التابعية التالية:

$$R(x,t,\lambda)=k(x,t)+\lambda\int_t^x k(x,s)R(s,t,\lambda)ds \qquad (29)$$

وباستخدام النواة الحالة $R(x,t,\lambda)$ يمكن كتابة حل المعادلة التكاملية (22) بالشكل:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (30)$$

وهذا ما ستراه في النظرية التالية:

نظرية (2) :

إن الحل الوحيد لمعادلة فولتيرا التكاملية (22) يأخذ الشكل التالي:

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x)+\lambda kf(x)+\lambda^2k_2f(x)+\ldots+\lambda^n k_n f(x)\right] \qquad (29')$$

أو الشكل المكافئ التالي:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (30')$$

حيث :

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t)$$

هي النواة الحالة و $k_n(x,t)$ هي النواة المكررة من المرتبة n.

كما أن المتتالية ('29) متقاربة مطلقاً وبانتظام على المجال [a,b].

البرهان:

1- من أجل التبسيط سنعتبر [a,b] = [o,1] ، لنقرن بالنواة k(x,y) المؤثر k في الفضاء $L^2(o,1)$. عند ذلك فإن معادلة فولتيرا (22) تكتب بالشكل:

$(1-\lambda k)\varphi=f$ من أجل $\lambda\neq o$

إذا فرضنا $|\lambda|< \frac{1}{\|k\|}$ فيكون للمؤثر $(I-\lambda k)$ مقلوب، أي أن المؤثر $(I-\lambda k)^{-1}$ موجود ويعطى بالعلاقة:

$$(I-\lambda k)^{-1} = I+\lambda k+\lambda^2k^2+...+\lambda^n k^n+...$$

بحيث تكون العلاقة (29) محققة من أجل $|\lambda|<\frac{1}{\|k\|}$

وبشرط تقارب المتتالية السابقة في الفضاء $L^2[a,b]$ ويمكن ضمان التقارب وذلك باستخدام كون النواة $k(x,y)$ هي نواة فولتيرا وذلك ضمن تحقق الشرط $|\lambda|<\frac{1}{\|k\|}$.

لنبرهن الآن مباشرة أن المتسلسلة ('29) متقاربة في المجال [0,1]

لتكن :

$$H(x)=\int_0^x |k(x,t)|^2 dt \ , \quad G(y)=\int_y^1 |k(x,t)|^2 dt$$

وبالفرض، فإن G , H قابلان للمكاملة في المجال [0,1].

لنضع:

$$H=\int_0^1 H(x)dx \qquad , \qquad G=\int_0^1 G(t)dt$$

لنرمز بـ :

$$h(x)=\int_0^x H(u)du$$

إن $h(x)$ هو تابع متزايد ونهايته H عندما $x\to 1$

سنتحقق بأن جميع النوى k_n هي نوى فولتيرا، مما يستدعي وجود حد أعلى لـ $\|k^n\|$.

نأخذ الآن :

$$K_1(x,t)=K(x,t)$$

$$k_2(x,t)=\int_o^1 k(x,u).k(u,t)du$$

إن :

$$k(x,u).k(u,t)\neq o \quad ; \quad x\geq u\geq t$$

إذن :

$$k_2(x,t)=0 \qquad ; \quad t>x$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x k(x,u).k(u,t)du \quad ; \quad t\leq x$$

هذا يعني أن $k_2(x,t)$ هي نواة لمعادلة فولتيرا التكاملية.

والشيء نفسه بالنسبة للنوى:

$$k_3(x,t),\dots,k_n(x,t)$$

ليكن $t\leq x$ إن :

$$|k_2(x,t)|^2\leq\int_t^x|k(x,u)|^2du\int_t^x|k(u,t)|^2du\leq H(x).G(t)$$

وذلك حسب متراجحة شفارتز.

بالطريقة نفسها نكتب:

$$|k_3(x,t)|^2\leq\int_t^x|k(x,u)|^2du\int_t^x|k_2(u,t)|^2du\leq H(x).G(t)\int_t^x H(u)du$$

وهكذا فإن :

$$|k_2(x,t)|^2\leq H(x).G(t)$$

$$|k_3(x,t)|^2\leq H(x).G(t).[h(x)-h(t)]$$

وبالاستقراء نستنتج أن :

$$\left| k_n(x,t)\right|^2 \le H(x)\,.G(t)\,\frac{\left[h(x)-h(t)\right]^{n-2}}{(n-2)!}$$

وبحيث إن :

$$\left| k^n f(x)\right|^2 = \left|\int_0^x k_n(x,t).f(t)dt\right|^2$$

$$\le\left(\int_0^x H(x)G(t)\,\frac{\left[h(x)-h(t)\right]^{n-2}}{(n-2)!}\,dt\right)\|f\|_2^2$$

$$\le H(x)\,\frac{\left[h(x)\right]^{n-2}}{(n-2)!}\left(\int_0^x G(t)dt\right)\|f\|_2^2$$

$$\le\frac{M^n}{(n-2)!}\|f\|_2^2$$ (n تبعاً للدليل n للمؤثر K)

لنرمز بـ M لعدد أكبر أو يساوي G,H و h(I) وهكذا يكون لدينا:

$$\left|\lambda^n K^n f(x)\right|^2 \le \frac{\left(\lambda^2 M\right)^n}{(n-2)!}\|f\|_2^2 \quad \forall\lambda$$

والذي هو الحد العام للمتتالية ('29) المتقاربة مطلقاً وبانتظام من أجل أي قيمة لـ λ.

2- وحدانية الحل:

إن وحدانية الحل بديهية إذا تحقق الشرط $|\lambda|<\frac{1}{\|K\|}$:

ليكن R مؤثراً معرفاً في الفضاء $L^2[0,1]$ بالعلاقة:

$$R\varphi = f+\lambda\,k\varphi$$

حيث φ هو حل لمعادلة فولتيرا التكاملية (22) وذلك إذا كان :

$$\varphi=f+\lambda\,K\varphi \quad \text{أي} \quad \varphi=R\varphi$$

لذلك يكفي أن نبرهن أن للمعادلة الأخيرة حلاً وحيداً ، ومن أجل ذلك لنشير إلى وجود عدد طبيعي m وحقيقي α حيث $(0<\alpha<1)$ بحيث يكون:

$$\| R^n\varphi_1 - R^n\varphi_n \| \le \alpha \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$$

أو :

$$R^2\varphi = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 \varphi$$
$$R^3\varphi = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \lambda^3 K^3 \varphi$$
....
$$R^n\varphi = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^{n-1} K^{n-1} f + \lambda^n K^n \varphi$$

وبإدخال فكرة الحد الأعلى السابقة (مع تغير طفيف لأن R ليس مؤثراً خطياً).

$$\left\| R^n \varphi_1 - R^n \varphi_2 \right\|^2 \le \frac{(\lambda M)^n}{(n-2)!} \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2$$

وهذا هو نهاية البرهان للنظرية.

ملاحظة :

إذا أهملنا شرط انتماء الحل لفضاء هلبرت $L^2[a,b]$، فإنه لايمكن تطبيق البرهان السابق لأنه في هذه الحالة يمكن الحصول على عدة حلول، ويمكن بالحالة الخاصة وجود حل صفري إذا كان $f \equiv 0$.

فمثلاً المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = \int_0^x t^{x-1} \varphi(t)\,dt$$

تقبل الحل : $\varphi(x) = x^{x-1}$

مثال (3-1):

لتكن النواة :

$$k(x,t) = \begin{cases} e^{x-t} & ; \quad 0 \le t \le x \le 1 \\ 0 & ; \quad 0 \le x \le t \end{cases}$$

أوجد حل المعادلة التكاملية: $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{0}^{x} e^{x-t}\varphi(t)dt$

بطريقة النواة الحالة.

الحل :

إن: $$k_1(x,t)=k(x,t)=e^{x-t}$$

لنحسب النواة من المرتبة الثانية:

$$k_2(x,t)=\int\limits_{t}^{x} k(x,u)k(u,t)du$$

$$=\int\limits_{t}^{x} e^{x-u}.e^{u-t}du=(x-t)e^{x-t}$$

$$k_3(x,t)=\int\limits_{t}^{x} k(x,u)k_2(u,t)du$$

$$=\int\limits_{t}^{x} e^{x-u}.(u-t)e^{u-t}du=\frac{(x-t)^2}{2!}e^{x-t}$$

وبالاستقراء نستنتج النواة المكررة من المرتبة n: $$K_n(x,t)=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-t}$$

إذن يمكن التعبير عن حل المعادلة التكاملية باستخدام النوى المكررة k_n على النحو التالي:

$$\varphi(x)=\lim\left[f(x)+\lambda e^{x-t}f(x)+\ldots+\lambda^n\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-t}f(x)+\ldots\right]$$

إذن فالنواة الحالة:

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n e^{x-t}\frac{(x-t)^n}{n!}=e^{(x-t)(1+\lambda)}$$

إذن، فإن حل المعادلة التكاملية وحسب (30) هو :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{o}^{x} R(x,t,\lambda)f(t)dt$$

وبتعويض قيمة النواة الحالة R نحصل على الحل:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{o}^{x} e^{(x-t)(1+\lambda)}.f(t)dt$$

2-3- طريقة التقريبات المتتالية The method of successive approximations :

لتكن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني التالية:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{o}^{x} K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (31)$$

حيث f(x) تابع مستمر في المجال [o,a] ، والنواة K[x,t] تابع مستمر في المجالات:

$$o\le x\le a \quad , \quad o\le t\le x$$

لنعتبر تابع $\varphi_o(x)$ مستمراً في المجال [o,a] ، باستبدال $\varphi(x)$ بـ $\varphi_o(x)$ في الطرف الأيمن من (31) ، نحصل على التقريب من المرتبة الأولى:

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_{o}^{x} K(x,t)\varphi_o(t)dt$$

إن التابع $\varphi_1(x)$ المعرف بالعلاقة السابقة هو أيضاً تابع مستمر في نفس المجال [o,a].

بمتابعة نفس العمل نحصل على متتالية من التوابع:

$$\varphi_o(x)\ ,\ \varphi_1(x)\ ,\ \varphi_2(x),...,\varphi_n(x),... \qquad (32)$$

حيث :

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_{o}^{x} K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt$$

هو التقريب من المرتبة n.

إن المتتالية $\{\varphi_n(x)\}$ تتقارب نحو الحل $\varphi(x)$ للمعادلة التكاملية (31) وذلك عندما $n \to \infty$.

ملاحظات :

1- في الحالة الخاصة، إذا اعتبرنا : $\varphi_0(x) = f(x)$ عندئذ $\varphi_n(x)$ سيكون المجموع الجزئي للمتتالية (32) والتي تُعرّف حل المعادلة التكاملية (31) .

2- إذا تم اختيار التقريب الصفري $\varphi_0(x)$ بشكل مناسب ووحيد فإن ذلك يؤدي إلى التقارب السريع للمتتالية $\{\varphi_n(x)\}$ نحو الحل للمعادلة التكاملية (31).

مثال (4-1) : استخدام طريقة التقريبات المتتالية لحل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

واعتبر أن :

$$\varphi_0(x) \equiv 0$$

الحل:

بما أن $\varphi_0(x) \equiv 0$ فإن $\varphi_1(x) = 1$ وبالتالي:

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \varphi_1(t)\,dt = 1 + \int_0^x 1.\,dt = 1 + x$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

وبالتالي فإن التقريب من المرتبة n يكون:

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

أي أن $\varphi_n(x)$ تمثل المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

عندئذ ينتج بأن: $\varphi_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} e^x$

بسهولة يمكن التحقق بأن e^x هو حل للمعادلة التكاملية المعطاة.

نظرية (3): إن للمعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = 0$$

حلاً وحيداً هو الحل الصفري $\varphi(x) \equiv 0$، من أجل أي قيمة λ في الفضاء $L^2(o,a)$.

3-3. حل معادلات فولتيرا التكاملية ذات نوى تابعة للفرق $(x - t)$ باستخدام تحويلات لابلاس :

3-3-1- الحالة الخطية:

لإيجاد حل معادلة فولتيرا من النوع الثاني والتي نواتها تابعة للفرق $(x - t)$، يمكن استخدام النظرية التالية:

نظرية (4): لتكن معادلة فولتيرا من النوع الثاني:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt$$

والتي نواتها:

$$f(x) \in L^2(o,a) \quad , \quad k(x,t) \in L^2(o,a)$$

إن لهذه المعادلة حل وحيد يعطى بالعلاقة:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t,\lambda)f(t)dt$$

وإن النواة الحالة $R(x,t:\lambda)$ معينة بالمتسلسلة:

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,t)$$

وهي متسلسلة متقاربة مطلقاً وبانتظام.

بالواقع، إن النظرية (4) هي حالة خاصة من النظرية (2) وذلك في حالة كون النواة تابعة للفرق بين المتحولين x و t.

– حالة خاصة من أجل $\lambda = 1$

3-3-1-1- إيجاد حل المعادلة التكاملية باستخدام تحويلات لابلاس:

من أجل $\lambda = 1$ فإن معادلة فولتيرا التكاملية تأخذ الشكل:

$$\varphi(x)= f(x)+\int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt \qquad \lambda=1 \tag{33}$$

في هذه الحالة فإن النوى المكررة والنواة الحالة تكون تابعة للفرق $(x-t)$.

إن (33) من النوع الالتفافي لأنه بالإمكان كتابتها وحسب تعريف جداء اللف بين تابعين بالشكل:

$$\varphi(x)= f(x)+K(x)*\varphi(x) \tag{34}$$

بالطبع نعتبر هنا أن التوابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ و $K(x)$ أصول وتحقق المتراجحات التالية:

$$\left|f(x)\right| \le M_1 e^{s_1 x}$$
$$\left|K(x)\right| \le M_2 e^{s_2 x}$$
$$\left|\varphi(x)\right| \le M_3 e^{s_3 x}$$

وبالتالي يمكن تعريف تحويل لابلاس لهذه التوابع كما يلي:

$$F(p)=L\left[f(x)\right],\ \phi(p)=L\left[\varphi(x)\right],\ K(p)=L\left[K(x)\right]$$
$$;\ \mathrm{Re}\ p=s>\mathrm{Max}(s_1,s_2,s_3)$$

بأخذ تحويل لابلاس على طرفي (34) وتطبيق نظرية بوريل نجد:

$$\phi(p) = F(p) + K(p).\phi(p)$$

$$\phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)} \quad ; \quad (K(p) \neq 1) \tag{35}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي على طرفي المعادلة (35) نحصل على الحل $\varphi(x)$ للمعادلة التكاملية (33).

بالاعتماد على النظرية (3) فإن حل المعادلة (33) هو:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t) dt \tag{36}$$

حيث $R(x-t)$ هي النواة الحالة للمعادلة التكاملية (33) .

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (36) نجد:

$$\phi(p) = F(p) + R(p)F(p)$$

عندئذ يكون :

$$R(p) = \frac{\phi(p) - F(p)}{F(p)}$$

بالأخذ بعين الاعتبار (35) نجد:

$$R(p) = \frac{k(p)}{1 - k(p)} \tag{37}$$

إن $R(t)$ هي تابع الأصل لـ $R(p)$ وهي النواة الحالة للمعادلة التكاملية (33) .

مثال(1-5): أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t) dt \tag{38}$$

حسب تعريف جداء الطي فإن (38) تكتب:

$$\varphi(x) = \sin x + 2[\cos x * \varphi(x)] \tag{39}$$

وبتطبيق تحويل لابلاس على طرفي (39) نجد:

$$\phi(p)=\frac{1}{p^2+1}+2\frac{p}{p^2+1}.\phi(p)$$

ومنه:

$$\phi(p)\left[1-\frac{2p}{p^2+1}\right]=\frac{1}{p^2+1}$$

أو:

$$\phi(p)=\frac{1}{(p-1)^2} \tag{40}$$

وأخيراً نجد حل المعادلة التكاملية، وذلك بأخذ تحويل لابلاس العكسي لطرفي (40) فنجد:

$$\varphi(x)=L^{-1}\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right]=xe^x$$

مثال (1-6): أوجد النواة الحالة لمعادلة فولتيرا التكاملية والتي نواتها:

$$k(x,t)=\sin(x-t) \quad ; \quad \lambda=1$$

الحل:

إن صورة النواة وفق لابلاس هي:

$$k(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

وباستخدام العلاقة (37) نجد:

$$R(p)=\frac{\frac{1}{p^2+1}}{1-\frac{1}{p^2+1}}=\frac{1}{p^2}$$

وبتطبيق لابلاس العكسي نجد:

$$R(x)=L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=x$$

وبالتالي فالنواة الحالة المطلوبة هي: $R(x,t;1)=x-t$

2-3-3- الحالة اللاخطية :

يمكن استخدام نظرية الجداء لإيجاد حل لمعادلة فولتيرا اللاخطية والتي من الشكل:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)dt \qquad (41)$$

ليكن:

$$L[\varphi(x)]=\Phi(p)\ ,\ \ L[f(x)]=F(p)$$

عندئذ، وبمقتضى (41) نجد :

$$\Phi(p)=F(p)+\lambda\Phi^2(p)$$

عندئذ :

$$\Phi(p)=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda F(p)}}{2\lambda}$$

وإذا كان تابع الأصل للتابع $\phi(p)$ موجوداً فسيكون حلاً للمعادلة التكاملية (41).

مثال(1-7) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)dt=\frac{x^3}{6} \qquad (42)$$

الحل:

ليكن $L[\varphi(x)]=\phi(p)$ ، بأخذ تحويل لابلاس لطرفي (42) نجد:

$$\Phi^2(p)=\frac{1}{p^4}$$

ولذلك فإن :

$$\Phi(p)=\pm\frac{1}{p^2}$$

إن التوابع $\varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=-x$

ستكون حلول للمعادلة (42) أي أنه ليس للمعادلة (42) حل وحيد.

4- حل معادلات فولتيرا التكاملية ذات نوى على شكل كثيرات حدود .

لنفرض أن النواة $K(x,t)$ هي كثيرة حدود من الدرجة $n-1$ في t من الشكل:

$$K(x,t)=a_0(x)+a_1(x)(x-t)+\ldots+\frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \qquad (43)$$

حيث العوامل $a_k(x)$ هي توابع مستمرة في المجال $[0,a]$.

لنفرض أن التابع $g(x,t,\lambda)$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^n g}{dx^n}-\lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}+a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}(x)g\right]=0 \qquad (44)$$

ويحقق الشروط :

$$g\,|_{x=t}=\frac{dg}{dx}|_{x=t}=\ldots=\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}|_{x=t}=0\ ,\ \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}|_{x=t}=1 \qquad (45)$$

عندئذ فإن النواة الحالة $R(x,t,\lambda)$ تعرف بالعلاقة :

$$R(x,t;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\,\frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n} \qquad (46)$$

وبشكل مشابه إذا كان :

$$K(x,t)=b_0(t)+b_1(t)(t-x)+\ldots+\frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1}$$

فإن النواة الحالة ستكون :

$$R(x,t;\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\,\frac{d^n g(t,x;\lambda)}{dt^n}$$

حيث $g(t,x;\lambda)$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^n g}{dt^n}+\lambda\left[b_0(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}}+\ldots+b_{n-1}(t)g\right]=0$$

والتي تحقق الشروط (45)

مثال (1-8) :

أوجد النواة الحالة للمعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$$

الحل :

إن نواة المعادلة التكاملية هي : $K(x,t)=x-t \quad , \quad \lambda=1$

باستخدام (43) نجد : $a_1(x)=1$

وبقية التوابع $a_k(x)=0$

بالتعويض فإن المعادلة (44) تأخذ الشكل :

$$\frac{\partial^2 g(x,t,1)}{\partial x^2}-g(x,t,1)=0$$

وشروط البدء هي :

$$g|_{x=t}=0 \quad , \quad g'|_{x=t}=1$$

عندئذ :

$$g(x,t,1)=g(x,t)=c_1(t)e^x+c_2(t)e^{-x}$$

بتحقيق الشروط (45) نحصل على المعادلتين:

$$\begin{cases} c_1(t)e^t+c_2(t)e^{-t}=0 \\ c_1(t)e^t-c_2(t)e^{-t}=1 \end{cases} \qquad (47)$$

بحل (47)، نجد :

$$c_1(t)=\frac{1}{2}e^{-t} \quad , \quad c_2(t)=-\frac{1}{2}e^{t}$$

وبالنتيجة نجد :

$$g(x,t)=\frac{1}{2}\left[e^{x-t}-e^{-(x-t)}\right]=sh(x-t)$$

وحسب (46) نجد النواة الحالة :

$$R(x,t,1)=\left[sh(x-t)\right]''_x=sh(x-t)$$

5- **حل جملة معادلات فولتيرا التكاملية باستخدام تحويلات لابلاس:**

لتكن مجموعة من المعادلات التكاملية :

$$\varphi_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{S}\int_0^x K_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt \quad i=1,2,\dots,5 \qquad (48)$$

لإيجاد الحل المشترك لهذه المجموعة، يمكن استخدام تحويلات لابلاس وذلك بفرض أن التوابع $K_{ij}(x)$ ، $f_i(x)$ هي توابع معلومة ومستمرة ولها تحويل لابلاس.

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي (48) ، نحصل على مجموعة معادلات جبرية خطية بالنسبة للتوابع $\phi_j(p)$ حيث:

$$\phi_j(p)=L\left[\varphi_j(x)\right]$$

وبفرض :

$$F_i(p)=L\left[f_i(x)\right] \Rightarrow K_{ij}(p)=L\left[K_{ij}(x)\right]$$

نجد :

$$\phi_i(p)=F_i(p)+\sum_{j=1}^{S}K_{ij}(p)\cdot\phi_j(p) \qquad (49)$$

بإيجاد الحل المشترك لمجموعة المعادلات (49) وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي على الحل المشترك نحصل على حل (48).

مثال(9-1): أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية التالية لفولتيرا:

$$\begin{cases} \varphi_1(x)=1-2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt+\int\limits_0^x \varphi_2(t)dt \\ \varphi_2(x)=4x-\int\limits_0^x \varphi_1(t)dt+4\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt \end{cases} \tag{50}$$

الحل:

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي (50) نجد:

$$\begin{cases} \phi_1(p)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p-2}\phi_1(p)+\frac{1}{p}.\phi_2(p) \\ \phi_2(p)=\frac{4}{p^2}-\frac{1}{p}\phi_1(p)+\frac{4}{p^2}\phi_2(p) \end{cases} \tag{51}$$

بحل جملة المعادلات الجبرية (51) نجد:

$$\phi_1(p)=\frac{p}{(p+1)^2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}$$

$$\phi_2(p)=\frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2}=\frac{8}{9}\frac{1}{p-2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{8}{9}.\frac{1}{p+1}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي للتوابع $\phi_2(p),\phi_1(p)$، نجد الأصلين $\varphi_2(x),\varphi_1(x)$:

$$\begin{cases} \varphi_1(x)=e^{-x}-xe^{-x} \\ \varphi_2(x)=\frac{8}{9}e^{2x}+\frac{1}{3}xe^{-x}-\frac{8}{9}e^{-x} \end{cases} \tag{52}$$

تمثل (52) الحل المشترك لمجموعة المعادلات التكاملية (50).

6- معادلات فولتيرا التكاملية اللاخطية :

إن معادلات فولتيرا التكاملية اللاخطية لها الشكل:

$$y(x)=y_0+\int\limits_0^x F[t,y(t)]dt \tag{53}$$

أو بشكل أعم، فإنها تأخذ الشكل:

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{o}^{x} F\left[x,t,\varphi(t)\right]\, dt \qquad (54)$$

ولحل هذا النوع من المعادلات ، يمكن تطبيق طريقة التقريبات المتتالية:

• بالواقع إن حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y) \quad , \quad y|_{x=o}=y_o$$

يؤول إلى حل المعادلة التكاملية اللاخطية (53) ، كما هو الحال في حالة المعادلة التكاملية الخطية.

سنبني حل المعادلة (54) كنهاية للمتتالية $\{\varphi_n(x)\}$ حيث يمكن اعتبار $\varphi_o(x)=f(x)$ مثلاً ، أما بقية عناصر المتتالية $\varphi_k(x)$ فتحسب بشكل تتابعي من الصيغة :

$$\varphi_k(x)=f(x)+\int_{o}^{x} F\left[x,t,\varphi_{k-1}(t)\right]dt \quad (k=1,2,...) \qquad (55)$$

إذا كان $f(x)$ و $F(x,t,z)$ تابعين قابلين للمكاملة تربيعياً ويحققان الشروط :

$$\left| F(x,t,z_2)-F(x,t,z_1)\right| \le a(x,t)\left| z_2-z_1 \right| \qquad (56)$$

$$\left|\int_{o}^{x} F\left[x,t,f(t)\right]dt\right| \le n(x) \qquad (57)$$

حيث التابع : $a(x,t)$ يحقق المتراجحة:

$$\int_{o}^{a} dx \int_{o}^{x} a^2(x,t)dt \le A^2 \ ; \ (o\le t\le x\le a)$$

والتابع $n(x)$ يحقق المتراجحة:

$$\int_{o}^{a} n^2(x)dx \le N^2 \quad ; \quad (o\le t\le x\le a)$$

وهكذا فإن معادلة فولتيرا اللاخطية (54) تملك حلاً وحيداً $\varphi(x)\in L^2(o,a)$،
وهذا الحل يُعرَّف بالعلاقة التالية :

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$$

أي أن هذا الحل يُعرَّف كنهاية للتوابع $\{\varphi_n(x)\}$ المعرفةَ في العلاقة (55)، وبالنسبة لـ $\varphi_o(x)$ يمكن أخذه كأي تابع في $L^2(o,a)$ ، (وفي الحالة الخاصة، يمكن اعتباره تابعاً مستمراً). وبحيث إن الشرط (57) محقق. ومن المفيد الإشارة إلى أن اختيار $\varphi_o(x)=o$ يُسهل إيجاد حل المعادلة التكاملية.

مثال(10-1): باستخدام طريقة التقريبات المتتالية، أوجد حل المعادلة التكاملية اللاخطية التالية:

$$\varphi(x)=\int_o^x \frac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2}\,dt$$

باعتبار التقريبين الصفريين التاليين :

1- $\varphi_o(x)=o$

2- $\varphi_o(x)=x$

الحل

1- لنأخذ التقريب من المرتبة صفر : $\varphi_o(x)=o$ عندئذ :

$$\varphi_1(x)=\int_o^x \frac{dt}{1+t^2}=\arctan x$$

$$\varphi_2(x)=\int_o^x \frac{1+\arctan^2 t}{1+t^2}\,dt=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan^3 x$$

$$\varphi_3(x)=\int_o^x \frac{1+\left(\arctan t+\frac{1}{3}\arctan^3 t\right)^2}{1+t^2}\,dt=\arctan x+$$

$$+\frac{1}{3}\arctan^3 x+\frac{2}{3\times5}\arctan^5 x+\frac{1}{7\times9}\arctan^7 x$$

$$\varphi_4(x)=\int_0^x \frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}dt=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan^3 x+$$

$$+\frac{2}{3\times5}\arctan^5 x+\frac{17}{5\times7\times9}\arctan^7 x+\frac{38}{5\times7\times9^2}\arctan^9 x+$$

$$+\frac{134}{9\times11\times21\times25}\arctan^{11} x+\frac{4}{3\times5\times7\times9\times13}\arctan^{13} x+$$

$$+\frac{1}{7^2\times9^2\times15}\arctan^{15} x,...$$

نفرض الآن أن : $\arctan x = u$ وبمقارنتها مع الصيغ المختلفة للتوابع $\varphi_n(x)$

نجد التعميم :

$$\tan u=\sum_{v=1}^{\infty}(-1)^{v-1}\frac{2^{2v}\left(2^{2v}-1\right)}{(2v)!}B_{2v}\,u^{2v-1}\quad;\quad |u|<\frac{\pi}{2}$$

حيث B_v هي أعداد برنولي والتي تعرف كما يلي:

أ – إن أعداد برنولي ذات الدليل الفردي كلها معدومة، أي :

$$B_{2v+1}=0$$

باستثناء $B_1=-\dfrac{1}{2}$

ب – إن أعداد برنولي ذات الدليل الزوجي تُعرّف بالعلاقة التدريجية التالية :

$$B_{2v}=-\frac{1}{2v+1}+\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{2v-2}\frac{2v(2v-1)..(2v-2k+2)}{k!}B_k$$

و $B_o=1$

نلاحظ أن:

$$\varphi_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}\tan(\arctan x)=x$$

ويلاحظ أن التابع $\varphi(x)=x$ هو حل للمعادلة التكاملية المعالجة.

2- إذا اعتبرنا أن $\varphi_0(x)=x$ عندئذ :

$$\varphi_1(x)=\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt=x$$

بطريقة مشابهة نجد :

$$\varphi_n(x)=x \qquad (n=2,3,\ldots)$$

وبالتالي فمتتالية التوابع:

$$\{\varphi_n(x)\}=\{x\}$$

ونهايتها :

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=x$$

وهو حل المعادلة التكاملية المطلوب.

7- حل المعادلات التفاضلية – التكاملية باستخدام تحويلات لابلاس:

إن المعادلة التكاملية – التفاضلية هي معادلة لها الشكل:

$$\begin{aligned} & a_0(x)\varphi^{(n)}(x)+a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\varphi(x)+ \\ & +\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x,t)\varphi^{(m)}(t)\,dt=f(x) \end{aligned} \tag{58}$$

حيث $K_m(x,t)(m=o,1,\ldots,s),f(x),a_o(x),a_1(x),\ldots,a_n(x)$ هي توابع معلومة $\varphi(x)$ هو التابع المجهول.

إن وجود معادلات تفاضلية في (58) وبغية إيجاد حل خاص لهذه المعادلات فإن ذلك يتطلب تحقيق شروط ابتدائية من الشكل:

$$\varphi(o)=\varphi_o\,,\ \varphi'(o)=\varphi'_o\,,\ldots,\varphi^{(n-1)}(o)=\varphi_o^{(n-1)} \tag{59}$$

إن الشروط (59) هي شروط مفروضة على التابع المجهول $\varphi(x)$.

سنعتبر لاحقاً أن :

$$a_k(x) = \text{const} \quad (k = 1,\dots,n)\,,\ a_o(x) = 1$$
$$K_m(x,t) = K_m(x-t)\ (m = o,1,\dots,s)$$

إذن (58) تأخذ الشكل :

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n\varphi(x) + \sum_{m=o}^{s}\int_o^x K_m(x-t)\varphi^{(m)}(t)\,dt = f(x) \quad (60)$$

ولنفرض أن التوابع $\varphi(x)$ ، $f(x)$ ، $K_m(x)$ هي أصول وأن :

$$L[f(x)] = F(p)\ ,\ L[\varphi(x)] = \phi(p)\ ,\ L[K_m(x)] = K_m(p)\ \ (m = 0,1,\dots,S)$$

بأخذ تحويل لابلاس على طرفي (60) وبتطبيق خاصة اشتقاق الأصل فإن تحويل لابلاس للجزء التفاضلي سيأخذ الشكل:

$$L\left[\varphi^{(k)}(x)\right] = p^k\phi(p) - p^{k-1}\varphi_o - p^{k-2}\varphi'_o - \dots - \varphi_o^{(k-1)}$$

وباستخدام نظرية جداء الطي نجد :

$$L\left[\int_o^x K_m(x-t)\varphi_{(t)}^{(m)}(t)\right] = L\left[K_m(x)*\varphi^{(m)}(x)\right]$$
$$= K_m(p)\left[p^m\phi(p) - p^{m-1}\varphi_o - \dots - \varphi_o^{(m-1)}\right]\ ;(m = 0,1,\dots,s)$$

بإجراء الحسابات ، فإن (60) تأخذ الشكل:

$$\phi(p)\left[p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{m=o}^{S} K(p)p^m\right] = A(p) \qquad (61)$$

حيث $A(p)$ تابع معلوم.

من المعادلة (61) نوجد $\phi(p)$ ومن ثم نطبق تحويل لابلاس العكسي فنجد تابع الأصل $\varphi(x)$ والذي يمثل حلاً للمعادلة التكاملية – التفاضلية المعطاة (60) والذي يحقق الشروط الابتدائية (59).

مثال (11-I) : أوجد حل المعادلة التكاملية – التفاضلية :

$$\varphi''(x)+\int_{o}^{x} e^{2(x-t)}\varphi'(t)dt=e^{2x} \qquad (62)$$

والتحقق للشروط الابتدائية :

$$\varphi(o)=\varphi'(o)=o \qquad (63)$$

الحل:

إن (62) تكتب بالشكل:

$$\varphi''+e^{2x}*\varphi'(x)=e^{2x} \qquad (64)$$

بأخذ تحويل لابلاس على طرفي (64) نجد:

$$p^2\phi(p)-p\varphi_o(x)-\varphi'_o(x)+\frac{1}{p-2}\left[p\phi(p)-\varphi(o)\right]=\frac{1}{p-2} \qquad (65)$$

بتحقيق الشروط (63) ، فإن (65) تصبح:

$$p^2\phi(p)+\frac{p}{p-2}\phi(p)=\frac{1}{p-2}$$

ومنه:

$$\phi(p)=\frac{1}{p(p-1)^2}$$

وبالرجوع للتابع الأصلي نحصل على حل المعادلة (62) :

$$\varphi(x)=x\,e^{x}-e^{x}+1$$

8- معادلات فولتيرا التكاملية على المجال $(x,+\infty)$

سنعالج في هذه الفقرة معادلات تكاملية من الشكل:

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{x}^{\infty}K(x-t)\varphi(t)dt \qquad (66)$$

والتي تردُ في بعض المسائل الفيزيائية، وهذا النوع من المعادلات التكاملية يمكن حلها بوساطة تحويلات لابلاس باستخدام جداء الطي .

من أجل التكامل :

$$\int_{x}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt$$

من المعلوم وباستخدام تحويل فورييه:

$$F\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\Psi(t)dt\right]=\sqrt{2\pi}\,G(\lambda)\Psi(\lambda) \qquad (67)$$

حيث $G(\lambda)$، $\Psi(\lambda)$ هي تحويلات فورييه للتوابع $g(x)$ و $\Psi(x)$ على الترتيب.

لنضع :

$$g(x)=K(x)$$

أي أن:

$$g(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x>0 \\ k(x) & ; \quad x<0 \end{cases}$$

$$\Psi(x)=\varphi_{+}(x)=\begin{cases} \varphi(x) & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x<0 \end{cases}$$

وبالتالي يمكن كتابة (67) كما يلي:

$$F\left[\int_{x}^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)dt\right]=\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(\lambda)_{F}\,\tilde{\phi}_{+}(\lambda)_{F} \qquad (68)$$

F تعني تحويل فورييه و L تعني تحويل لابلاس ، ومن المعلوم أنـه للانتقـال مـن تحويل فورييه إلى تحويل لابلاس، نعتمد على العلاقة:

$$F_{L}(p)=\sqrt{2\pi}\,\left[F_{+}(ip)\right]_{F} \qquad (69)$$

إذن من (68) و (69) ، نجد :

$$L\left[\int_{x}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt\right]=\sqrt{2\pi}\left[K^{-}(ip)\right]_{F}\left[\phi_{+}(p)\right]_{L}$$

ولنعبر الآن عن $\left[\sqrt{2\pi}\,K_{-}(ip)\right]_F$ بوساطة تحويل لابلاس فنكتب :

$$\left[\sqrt{2\pi}\,K_{-}(ip)\right]_F = \int_{-\infty}^{0} K(x)e^{-px}dx = \int_{0}^{\infty} K(-x)e^{px}\,dx$$

لنضع : $K(-x)=\Re(x)$ فنجد :

$$\left[\sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}_{-}(ip)\right]_F = \widetilde{\Re}_1(-p) = \int_{0}^{\infty} K(-x)e^{px}\,dx$$

وهكذا :

$$L\left\{\int_{x}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)\,dt\right\} = \widetilde{\Re}_1(-p)\Phi_1(p)$$

نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة (66) نحصل :

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{\Re}(-p)\Phi(p)$$

وبإدخال الرمز L :

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-\widetilde{\Re}(-p)} \quad \left(\widetilde{\Re}(-p)\neq 1\right)$$

حيث :

$$\widetilde{\Re}(-p) = \int_{0}^{\infty} K(-x)e^{px}\,dx$$

إن التابع :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F(p)}{1-\widetilde{\Re}(-p)}e^{px}\,dp$$

هو حل خاص للمعادلة التكاملية (66)

مثال(12-1) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) = x + \int_{x}^{\infty} e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt \qquad (70)$$

الحل :

في هذه الحالة لدينا : $f(x)=x,\ K(x)=e^{2x}$

لذلك:

$$F(p)=\frac{1}{p^2},\quad \mathfrak{R}(-p)=\int_0^{\infty} e^{-2x}e^{px}dx=\frac{1}{2-p},\ \operatorname{Re} p<2$$

وهكذا نحصل على المعادلة:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2-p}\Phi(p)$$

أي :

$$\Phi(p)=\frac{p-2}{p^2(p-1)}$$

وبالنتيجة :

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}dp \qquad (0<\gamma<2) \qquad (71)$$

ويحسب التكامل الوارد في (71) كتكامل مركب وأن التابع المكامل له قطب من الدرجة الثانية في $p=0$ وقطب بسيط في $p=1$ وذلك من أجل $\gamma>1$. لنحل المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة (70) وهي :

$$\varphi(x)=\int_x^{\infty} e^{2(x-t)}\varphi(t)dt$$

وإن رواسب التابع المكامل في الأقطاب هي :

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right)=2x+1,\quad \operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right)=-e^x$$

وبالتالي فإن حل المعادلة التكاملية (70) هو : $\varphi(x)=2x+1+Ce^x$

حيث C ثابت اختياري .

9- تكاملات أولر – التوابع الخاصة :

1) التابع غاما The gamma function: تدعو التابع غاما أو تكامل أولر من النوع الثاني التابع $\Gamma(x)$ المعرف بالعلاقة :

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \tag{72}$$

حيث x متحول مركب وأن $\operatorname{Re} x > 0$ ، من أجل $x = 1$ نجد :

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt = 1 \tag{73}$$

وبإجراء التكامل بالتجزئة على (72) نجد :

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{74}$$

من العلاقة (74) نجد الخاصة الأساسية للتابع غاما :

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

وباستخدام (73) نجد :

$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1.\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2.\Gamma(2)=2!$$
$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3.\Gamma(3)=3!$$

وبشكل عام فإنه ومن أجل أي عدد موجب n يكون :

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

ونعلم أن :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

لنضع $x = t^{1/2}$ ، نحصل على :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{1/2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

بالأخذ بعين الاعتبار (72) ، يمكن أن نكتب :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

وباستخدام الخاصة الأساسية للتابع غاما نجد:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1\times 3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

وهكذا ، بشكل عام، فمن أجل أي عدد صحيح موجب، تتحقق العلاقة :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\times 3\times 5 \ldots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

من العلاقة (74) ، نستنتج :

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

لذلك يمكن أن نكتب :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$

وبنفس المحاكمة يمكن أن نكتب :

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

وهكذا، بسهولة يمكن التحقق من أن :

$$\Gamma(0)=\Gamma(-1)=...=\Gamma(-n)=...=\infty$$

لقد عرّفنا سابقاً $\Gamma(x)$ في نصف المستوي المركب الأيمن $\mathrm{Re}\, x > 0$ وباتباع نفس الطريقة يمكن تعميم هذا التابع في نصف المستوي المركب الأيسر، حيث التابع $\Gamma(x)$ معرفاً في كل مكان باستثناء النقاط $x=-n$ و n هو عدد صحيح أو صفر.

كما أن العلاقات التالية محققة:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{x}{\sin \pi x}$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\,\pi^{1/2}\,\Gamma(2x)$$

وبشكل عام :

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)...\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=$$

$$=(2n)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx)$$

والتي تدعى بنظرية غوص – ليجندر.

2- لقد عرف فايرشتراس Weierstrass التابع غاما بالعلاقة :

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\} \qquad (75)$$

حيث :

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{m}-\ln m\right)=0.57721...$$

هو ثابت أولر .

يلاحظ من العلاقة (75) بأن التابع $\Gamma(z)$ هو تابع تحليلي في كل مكان باستثناء النقاط :

$$z=0 \quad , \quad z=-1 \quad , \quad z=-2 \,,\ldots.$$

حيث تكون أقطاباً بسيطة.

ومن العلاقة (75) نستنتج صيغة (علاقة) أولر التالية :

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{z}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\}$$

والمحققة في كل مكان باستثناء النقاط :

$$z=0 \quad , \quad z=-1 \quad , \quad z=-2 \,,\ldots$$

3- التابع بيتا β Beta function

يُعرف التابع بيتا $\beta(p,q)$ من خلال تكامل أولر من النوع الأول :

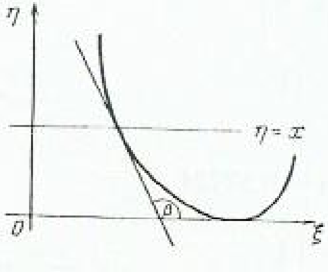
$$\beta(p,q)=\int_{0}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (\operatorname{Re} p>0,\ \operatorname{Re} q>0)$$

ويرتبط تكاملا أولر من النوع الثاني والأول بالعلاقة :

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

10- معادلات آبل التكاملية Abel's equation :

جسيم يتحرك في المستوي الشاقولي (ξ,η) تحت تأثير الجاذبية، فإذا كانت β هي زاوية ميل المماس للمسار مع المحور 0ξ كما في الشكل . إن سرعة هذا الجسيم ستكون



$$\upsilon=\sqrt{2g(x-\eta)}$$

وبالتالي :

$$\frac{d\eta}{dt}=-\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta$$

$$dt=-\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)\sin\beta}}$$

وبالمكاملة من الصفر إلى x وبوضع $\varphi(\eta)=\frac{1}{\sin\beta}$ نحصل على معادلة آبل:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)d\eta}{\sqrt{x-\eta}}=-\sqrt{2g}\,f_1(x)$$

بوضع $f(x) = -\sqrt{2g}f_1(x)$ نجد:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}d\eta=f(x)$$

حيث $\varphi(x)$ هو التابع المطلوب و $f(x)$ هو التابع المعلوم، بعد إيجاد $\varphi(\eta)$ نستطيع تشكيل معادلة المنحني:

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sin\beta}$$

عندئذ:

$$\eta=\Phi(\beta)$$

إضافة لذلك فإن:

$$d\xi=\frac{d\eta}{\tan\beta}=\frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\tan\beta}$$

وبالتالي:

$$\xi=\int\frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\tan\beta}=\Phi_1(\beta)$$

وبالنتيجة فإن المنحني المطلوب يتعين بالمعادلات الوسيطية:

$$\begin{cases}\xi=\Phi_1(\beta)\\ \eta=\Phi(\beta)\end{cases}$$

وهكذا فإن مسألة آبل تؤول إلى المعادلة التكاملية :

$$f(x)=\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

حيث $K(x,t)$ هي النواة وهي معلومة ، $f(x)$ تابع معلوم، أما $\varphi(x)$ هو التابع المجهول.

بالنظر إلى المعادلة التكاملية، نرى أن مسألة آبل تؤول إلى إيجاد حل لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول .

10-1 -معادلة آبل :

بشكل عام فإن معادلة آبل تأخذ الشكل :

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt=f(x) \qquad (76)$$

حيث α ثابت ويحقق المتراجحة $0<\alpha<1$ (ندعو المعادلة (76) بمعادلة آبل التكاملية المعممة). سنعتبر لاحقاً بأن للتابع $f(x)$ مشتقات مستمرة فوق مجال ما $[0,\alpha]$.

لاحظ أنه من أجل $\alpha \geq \frac{1}{2}$ فإن نواة المعادلة (76) غير قابلة للمكاملة تربيعياً، هذا يعني أن هذه النواة لاتنتمي إلى L^2 .

على كل حال، فإن للمعادلة (76) حلاً يتم إيجاده كما يلي:

- بفرض أن المعادلة التكاملية (76) لها حلاً، باستبدال x بـ s في المعادلة وبضرب طرفي المعادلة الناتجة بـ :

$$\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ s من 0 إلى x نجد :

$$\int_0^x \frac{dx}{(x-s)^{1-\alpha}}\int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}dt=\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds$$

وبتبديل ترتيب التكاملات في الطرف الأيسر نحصل :

$$\int_0^x \varphi(t)dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = F(x) \qquad (77)$$

حيث :

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

وبإجراء التبديل في التكامل الداخلي نجد :

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{\alpha}(1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

إذن ، من (77) نحصل :

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} F(x)$$

أو بالشكل:

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds\right)'_x \qquad (78)$$

إذن فالحل الوحيد للمعادلة (76) يعطى بالعلاقة (78)، وبوساطة التكامل بالتجزئة، فإن هذا الحل يمكن كتابته بالشكل:

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds\right] \qquad (79)$$

لهذا الحل معنى فيزيائي فقط عندما تكون قيمته المطلقة أقل من واحد .
$\left[\varphi(x) = \frac{1}{\sin\beta}\right]$.

ملاحظة: سنبرهن الآن بأنه في حالة $f(x) = c = cte$ ، فإن حل مسألة آبل هو سيكلوئيد

مثال (1-13): أوجد المنحني الذي على طوله يتحرك جسيم تحت تأثير الجاذبية بدون احتكاك ويصل الموقع الأدنى في نفس الوقت، وبدون الأخذ بعين الاعتبار الموقع الابتدائي.

في هذه الحالة $\alpha = \frac{1}{2}$ ، عندئذ بوساطة (79) نجد :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{C}{\sqrt{x}}$$

ولذلك :

$$\sin\beta = \frac{\pi\sqrt{\eta}}{C}$$

عندئذ :

$$\eta = \frac{C^2}{\pi^2}\sin^2\beta$$

والأكثر من ذلك :

$$d\xi = \frac{d\eta}{\tan\beta} = \frac{C^2}{\pi^2}\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\tan\beta}d\beta = \frac{C^2}{\pi^2}(1+\cos 2\beta)d\beta$$

$$d\xi = \frac{C^2}{\pi^2}\left(\beta + \frac{1}{2}\sin 2\beta\right) + C_1$$

وأخيراً ، نجد :

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{C^2}{\pi^2}\left(\beta + \dfrac{1}{2}\sin 2\beta\right) + C_1 \\ \eta = \dfrac{C^2}{2\pi^2}(1-\cos 2\beta) \end{cases}$$

وهي المعادلات الوسيطية لمنحني السيكلوئيد.

2-10-تعميم مسألة آبل :

لنعتبر المعادلة التكاملية :

$$\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)dt = x^\lambda \tag{80}$$

حيث ($\beta > -1, \lambda \ge 0$ حقيقي) والتي هي معادلة تكاملية أكثر عمومية من معادلة آبل (76).

نضرب طرفي (80) بـ $(z-x)^{\mu}\ (\mu > -1)$.

وبالمكاملة بالنسبة لـ x من 0 إلى z :

$$\int_0^z (z-x)^{\mu}\left(\int_0^x (x-t)^{\mu}\varphi(t)\,dt\right)dx = \int_0^z x^{\lambda}(z-x)^{\mu}\,dx \qquad (81)$$

نضع $x = \rho z$ في التكامل في الطرف الأيمن، ومن (81) نجد :

$$\int_0^z x^{\lambda}(z-x)^{\mu}\,dx = z^{\lambda+\mu+1}\int_0^1 \rho^{\lambda}(1-\rho)^{\mu}\,d\rho =$$

$$= z^{\lambda+\mu+1}(\lambda+1,\mu+1) = z^{\lambda+\mu+1}\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}$$

$$(\lambda+\mu+1 > \lambda \geq 0)$$

وبتبديل ترتيب التكامل في الطرف الأيسر من (81) نحصل :

$$\int_0^z\left(\int_0^x (z-x)^{\mu}(x-t)^{\beta}\varphi(t)\,dt\right)dx =$$

$$= \int_0^z\left(\int_t^z (z-x)^{\mu}(x-t)^{\beta}\,dx\right)\varphi(t)\,dt \qquad (82)$$

نبدل في التكامل الوارد في الطرف الأيمن من (82)

$$x = t+\rho(z-t)$$

عندئذ :

$$\int_t^z (z-x)^{\mu}(x-t)^{\beta}\,dx = (z-t)^{\mu+\beta+1}\int_0^1 \rho^{\beta}(1-\rho)^{\mu}\,d\rho =$$

$$= (z-t)^{\mu+\beta+1}\,B(\beta+1,\mu+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)}(z-t)^{\mu+\beta+1}$$

نجد من (81) :

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)}\int_0^z (z-t)^{\mu+\beta+1}\varphi(t)\,dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}\,z^{\lambda+\mu+1} \qquad (83)$$

باختيار μ بحيث إن

$$\mu+\beta+1=n .$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

عندئذ من (83) نجد أن :

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)}\int_0^z (z-t)^n \varphi(t)dt=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}$$

أو بالشكل:

$$\int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!}\varphi(t)dt=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta} \qquad (84)$$

بمفاضلة طرفي العلاقة (84) n+1 مرة بالنسبة لـ z نحصل:

$$\varphi(z)=\frac{\Gamma(\lambda+1)(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)...(\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda-\beta-1}$$

أو من أجل :

$$\lambda-\beta+k\neq 0 \ (k=0,1,...,n)$$

$$\varphi(z)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)} z^{\lambda-\beta-1} \qquad (85)$$

وهو حل المعادلة التكاملية.

يلاحظ أنه إذا كانت الكمية $\lambda-\beta-1$ تمثل عدداً صحيحاً سالباً يصبح الحل $\varphi(z)=0$.

إن المعادلة (80) لاتملك حلاً في صف التوابع العادية.

مثال (14-1) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt=x^2$$

الحل :

هنا $\beta = 1 \ , \ \lambda = 2$

ولذلك فإن :

$$\lambda - \beta + k \neq 0 \left(k = 0, 1, 2, \dots, n\right)$$

وينتج من العلاقة (85) أن :

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} x^{2-1-1} = 2$$

11- معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول :

11-1- رد معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول إلى النوع الثاني:

إن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول هي من الشكل:

$$\int_{o}^{x} K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad : \quad f(o) = o \tag{86}$$

حيث $\varphi(x)$ هو التابع المجهول.

نفرض أن $f(x)$ ، $K(x,t)$ ، $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$ هي توابع مستمرة في المنطقة المحددة بالمتراجحات :

$$o \leq x \leq a \quad , \quad o \leq t \leq x$$

بمفاضلة طرفي العلاقة (86) بالنسبة لـ x نجد :

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_{o}^{x} \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt = f'(x) \tag{87}$$

إن أي حلول $\varphi(x)$ مستمرة للمعادلة (86) ومحققة للمتراجحة $o \leq x \leq a$ تحقق هذه المعادلة ، وبالعكس ، أي حل مستمر للمعادلة (87) من أجل $o \leq x \leq a$ يحقق المعادلة (86) أيضاً من (87) نجد:

$$\varphi(x)=\frac{f'(x)}{K(x,x)}-\int_{o}^{x}\frac{K'_{x}(x,t)}{K(x,x)}\varphi(t)dt \qquad (88)$$

بشرط كون $K(x,x)$ لاتنعدم في أي نقطة من المجال $[o,a]$.

من المعادلة (88) نلاحظ أن المعادلة التكاملية (86) والتي هي من النوع الأول قد آلت إلى معادلة تكاملية من النوع الثاني.

مما سبق نكون قد برهنا النظرية التالية :

نظرية (4) :

نفرض أن K , f من الصف C^1 و $K(x,x)\neq o \quad \forall x\in[a,b]$

إن معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول (1) تؤول إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

مثال (15-1) :

أوجد حل المعادلة التكاملية من النوع الأول، وذلك بردها إلى معادلة تكاملية من النوع الثاني :

$$\int_{o}^{x}\cos(x-t)\varphi(t)dt=x \qquad (89)$$

الحل:

إن التوابع : $K(x,t)=\cos(x-t) \qquad f(x)=x$

(نلاحظ $f(o)=0$)

تحقق جميع العلاقات وشروط الاستمرار والتفاضل الواردة في الفقرة السابقة.

بمفاضلة طرفي العلاقة (89) بالنسبة لـ x ، نجد :

$$\varphi(x)\cos 0-\int_{o}^{x}\sin(x-t)\varphi(t)dt=1$$

أو :

$$\varphi(x)=1+\int_{0}^{x} \sin(x-t)\varphi(t)dt \qquad (90)$$

تمثل المعادلة (90) معادلة تكاملية من النوع الثاني لفولتيرا من النموذج الالتفافي، وبالتالي باستخدام تحويلات لابلاس فإن حلها هو :

$$\phi(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2+1}\phi(p)$$

وبالتالي فإن :

$$\phi(p)=\frac{p^2+1}{p^3}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3} \qquad (91)$$

بتطبيق تحويل لابلاس المعاكس فإن: $\varphi(x)=1+\frac{x^2}{2}$

إن التابع الناتج $\varphi(x)$ هو حل للمعادلة (90) وبالتالي فهو حل للمعادلة الأساسية (89) .

ملاحظة : (معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثالث)

إذا انعدمت $K(x,x)$ في بعض نقاط المجال $[o,a]$ ، مثلاً في النقطة $x = 0$ ، عندئذ فإن المعادلة (88) تُعَرّف معادلة تكاملية من النوع الثالث ذات خصائص بيكاردية (نسبة إلى (picard). وهنا تظهر تعقيدات مماثلة لتلك التي تصادف عند انعدام عوامل المشتقات العليا في المعادلات التفاضلية الخطية.

ملاحظات :

1-كان من الممكن الحصول على الحل بتطبيق تحويل لابلاس مباشرة على طرفي المعادلة (89) وبدون إجراء العمليات الرياضية من اشتقاق جزئي وغير ذلك.

إن (89) تكتب بالشكل:

$$\cos x * \varphi(x) = x \Rightarrow L\left[\cos x * \varphi(x)\right] = L[x]$$

أي:

$$\frac{p}{p^2+1} \cdot \phi(p) = \frac{1}{p^2}$$

ومنه نجد:

$$\Phi(p) = \frac{p^2+1}{p^3}$$

وهي نفس المعادلة (91).

2- إذا كان $K(x,x) - K(o) \neq 0$ عندئذ يكون للمعادلة (86) حل.

3- كما أشرنا سابقاً، فإن الشرط الضروري لوجود حل مستمر للمعادلة التكاملية والتي من الشكل:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t) dt = f(x)$$

يتضمن امتلاك التابع $f(x)$ مشتقات من مراتب أعلى من n، أما بقية المشتقات الأولى والتي عددها $n-1$ فهي معدومة من أجل $x = o$.

مثال (16-1) : لتكن المعادلة التكاملية:

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t) dt = x \qquad (92)$$

هنا $f(x) = x$، $n = 2$ من الواضح أن جميع مشتقات التابع $f(x)$ موجودة من أجل أي مرتبة وأن المشتق الأول $f'(x) = 1 \neq 0$، أي أن الشرط الضروري غير محقق.

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي (92) نجد:

$$\frac{1}{p^2} \Phi(p) = \frac{1}{p^2}$$

عندئذ فإن : $\Phi(p) = 1$

وهذا هو تحويل لابلاس للتابع δ والذي يرمز له $\delta(x)$

ولنتذكر أن :

$$\delta(x) = 1 \Rightarrow \delta^{(m)}(x) = p^m$$

حيث m عدد صحيح أكبر أو يساوي الصفر .

وهكذا فإن حل المعادلة التكاملية (92) هو التابع δ :

$$\varphi(x) = \delta(x)$$

يمكن تعريف جداء الطي للتابع δ مع أي تابع $g(x)$ كما يلي :

$$g(x) * \delta(x) = g(x)$$

$$\delta^{(k)}(x) * g(x) = g^{(k)}(x) \qquad (k = 1,2,....)$$

وفي هذا المثال $g(x) = k(x) = x$

$$\int_0^x K(x-t)\delta(t)dt = K(x) = x$$

وهكذا فإن حل المعادلة التكاملية (92) موجود

2-11- معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول الملفوف

هي معادلات من الشكل :

$$\int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (93)$$

حيث النواة $K(x,t)$ تابعة للفرق $x - t$.

لحل هذا النوع من المعادلات، نفرض أن التوابع $K(x)$, $f(x)$ هي أصول وأن:

$$L[f(x)] = F(p) \quad , \quad L[K(x)] = K(p)$$

إن المعادلة (93) تكتب بالشكل:

$$K(x) * \varphi(x) = f(x) \qquad (94)$$

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي (94) ، نجد : $K(p) . \phi(p) = F(p)$

أي أن :

$$\phi(p)=\frac{F(p)}{K(p)} \quad ; \quad K(p)\neq 0 \tag{95}$$

وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي على طرفي (95) نحصل :

$$\varphi(x)=L^{-1}[\phi(p)]=L^{-1}\left[\frac{F(p)}{K(p)}\right]$$

مثال (17-I) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt=x \tag{96}$$

بأخذ تحويل لابلاس على طرفي (96)، نجد :

$$\frac{1}{p-1}\Phi(p)=\frac{1}{p^2}$$

$$\Phi(p)=\frac{p-1}{p^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}$$

إذن التابع $\varphi(x)=1-x$ هو حل للمعادلة (96).

3-II- معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول ذات نوى لوغاريتمية:

لتكن المعادلة التكاملية :

$$\int_0^x \varphi(t)\ln(x-t)dt=f(x), \quad f(0)=0 \tag{97}$$

بالواقع يمكن حل هذا النوع من المعادلات التكاملية بوساطة تحويلات لابلاس.

نعلم أن :

$$x^{v}=\frac{\Gamma(v+1)}{p^{v+1}} \quad (\operatorname{Re} v>-1) \tag{98}$$

بمفاضلة العلاقة (98) بالنسبة لـ v ، نحصل :

$$x^{v}\ln x=\frac{1}{p^{v+1}}\,\frac{d\Gamma(v+1)}{p^{v+1}}+\frac{1}{p^{v+1}}\ln\frac{1}{p}\Gamma(v+1)$$

$$x^{v}\ln x=\frac{d\Gamma(v+1)}{p^{v+1}}\left[\frac{\frac{d\Gamma(v+1)}{dv}}{\Gamma(v+1)}+\ln\frac{1}{p}\right] \tag{99}$$

من أجل $v=0$ ، نجد :

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=-\gamma$$

حيث γ ثابت أولر ، والصيغة (99) تأخذ الشكل:

$$\ln x=\frac{1}{p}(-\gamma-\ln p)=-\frac{\ln p+\gamma}{p} \tag{100}$$

نعتبر $\phi(p)=L[\varphi(x)]$ و $F(p)=L[f(x)]$ ، بأخذ تحويل لابلاس لطرفي (97) وباستعمال (100) ، نجد :

$$-\Phi(p)\frac{\ln p+\lambda}{p}=F(p)$$

عندئذ يكون لدينا :

$$\Phi(p)=-\frac{pF(p)}{\ln p+\gamma} \tag{101}$$

لنكتب $\phi(p)$ بالشكل:

$$\Phi(p)=-\frac{p^{2}F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)}-\frac{f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} \tag{102}$$

وبما أن $f(0)=0$ ، ينتج أن:

$$[f''(x)]=p^{2}F(p)-f'(0) \tag{103}$$

بالعودة إلى العلاقة (98) والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$L\left[\frac{x^{v}}{\Gamma(v+1)}\right]=\frac{1}{p^{v+1}} \tag{104}$$

بمكاملة طرفي (104) بالنسبة لـ v من 0 إلى ∞ لدينا :

$$L\left[\int_0^\infty \frac{x^v}{\Gamma(v+1)}dv\right]=\int_0^\infty \frac{dv}{p^{v+1}}=\frac{1}{p\ln p}$$

وبشكل مشابه يكون لدينا:

$$L\left[\int_0^\infty \frac{x^v a^{-v}}{\Gamma(v+1)}\right]=\frac{1}{p\ln(ap)}=\frac{1}{p(\ln p+\ln a)}$$

إذا وضعنا $\alpha = e^\gamma$ ، نحصل :

$$L\left[\int_0^\infty \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}\right]=\frac{1}{p(\ln p+\gamma)} \qquad (105)$$

بمقتضى العلاقة (105) ، فإن (102) تكتب بالشكل:

$$L^{-1}\left[\frac{f'(0)}{p(\ln p+\gamma)}\right]=f'(0)\int_0^\infty \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv$$

بالأخذ بعين الاعتبار (103) و (105) ، فإن الحد الأول من الطرف الأيمن لـ

(102) يمثل جداء طي ، وبتطبيق نظرية الجداء نجد الأصل.

$$\frac{p^2F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)}=\int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv\right)dt$$

لذلك فإن الحل $\varphi(x)$ للمعادلة التكاملية (97) يصبح من الشكل :

$$\varphi(x)=-\int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv\right)dt-f'(0)\int_0^\infty \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv$$

حيث γ ثابت أولر.

في الحالة الخاصة إذا كان $f(x)=x$ فإن :

$$\varphi(x)=-\int_0^\infty \frac{x^v e^{-\gamma v}}{\Gamma(v+1)}dv$$

تمارين محلولة

1- أوجد حل المعادلة التكاملية بطريقة النواة الحالة

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{0}^{x}\varphi(t)dt$$

إن النواة في هذه المعادلة التكاملية هي :

$$k_1(x,t)=k(x,t)=1$$

$$k_2(x,t)=\int_{t}^{x}1(x,y)k_1(y,t)dy=\int_{t}^{x}dy=x-t$$

$$k_3(x,t)=\int_{t}^{x}1(y-t)dy=\frac{(x-t)^2}{2!}$$

$$k_4(x,t)=\int_{t}^{x}1\frac{(y-t)^2}{2}dy=\frac{(x-t)^3}{3!}$$

....

$$k_n(x,t)=\int_{t}^{x}1k_{n-1}(y,t)dy=\int_{t}^{x}1\frac{(y-t)^{n-2}}{(n-2)!}dy=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

وهكذا فإن النواة الحالة :

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(x-t)^n}{n!}=e^{\lambda(x-t)}$$

إذن فحل المعادلة التكاملية هو :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{0}^{x}e^{\lambda(x-t)}.\,f(t)dt$$

2- أوجد حل المعادلة التفاضلية التكاملية التالية :

$$\varphi'(t)-\varphi(t)+\int_{0}^{t}\sin(t-u)\varphi(u)du=1-\sin t\ ;\ \varphi(0)=0$$

الحل:

باستخدام جداء الطي نكتب المعادلة بالشكل:

$$\varphi'(t)-\varphi(t)+[\sin t*\varphi(t)]=1-\sin t$$

بفرض أن : $L[\varphi(t)]=\phi(p)$

نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة السابقة فنجد :

$$L[\varphi'(t)]-L[\varphi(t)]+L[\sin t].L[\varphi(t)]=L[1]-L[\sin t]$$

$$p\phi(p)-\varphi(o)-\phi(p)+\frac{1}{1+p^2}.\phi(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{1+p^2}$$

$$\phi(p)\left[p-1+\frac{1}{(1+p^2)}\right]=\frac{p^2-p+1}{p(p^2+1)}$$

$$\phi(p)\left[\frac{p^3-p^2+p}{1+p^2}\right]=\frac{p^2-p+1}{p(p^2+1)}$$

$$\phi(p)=\frac{p^2-p+1}{p^2(p^2-p+1)}=\frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \phi(t)=L^{-1}[\phi(p)]=L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)=t$$

$$\Rightarrow \phi(t)=t$$

وهو حل المعادلة.

3- أوجد حل المعادلة التكاملية التفاضلية التالية :

$$\varphi''(t)+\int_o^t \sin(t-u)[\varphi''(u)+\varphi(u)]du=2\cos t\ ;\ \varphi(o)=\varphi'(o)=o$$

الحل:

باستخدام جداء الطي نكتب المعادلة بالشكل:

$$\varphi''+[\sin t*(\varphi''(t)+\varphi(t))]=2\cos t$$

بفرض أن : $L[\varphi(t)]=\phi(p)$ نطبق تحويل لابلاس على الطرفين فنجد:

$$p^2\phi(p) - p\varphi(o) - \varphi'(o) + L[\sin t].\left(p^2\phi(p) - p\varphi(o) - \varphi'(o) + \phi(p)\right)$$
$$= 2L[\cos t]$$

وبتحقيق شروط البدء نجد :

$$p^2\phi(p) + \frac{1}{1+p^2}\left(p^2\phi(p) + \phi(p)\right) = \frac{2p}{1+p^2}$$

ومنه :

$$\phi(p)\left[p^2 + 1\right] = \frac{2p}{1+p^2}$$

أي أن :

$$\phi(p) = \frac{2p}{\left(1+p^2\right)^2}$$

لكن:

$$\frac{2p}{\left(1+p^2\right)^2} = \left(\frac{-1}{1+p^2}\right)'_p = L\left[-t\sin t\right]$$

إذن :

$$\phi(p) = L\left[-t\sin t\right]$$

ومنه :

$$\varphi(t) = L^{-1}\left[\phi(p)\right] = -t\sin t$$

4- حل المعادلة التكاملية التالية :

$$\int_0^t \cos(t-u)\varphi(u)du = t + t^2$$

الحل:

واضح أن هذه المعادلة من النوع الأول $t + t^2 = \cos t * \varphi(t)$

نطبق تحويل لابلاس على الطرفين :

$$L\left[t+t^2\right]=L[\cos t].L\left[\varphi(t)\right]$$

بفرض أن $L[\varphi(t)]=\phi(p)$ فنجد :

$$L[t]+L\left[t^2\right]=L[\cos t].\phi(p)$$

لكن :

$$L[t]=\frac{1}{p^2}$$

$$L\left[t^2\right]=\frac{2}{p^3} \quad , \quad L[\cos t]=\frac{p}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}=\frac{p}{p^2+1}.\phi(p)\Rightarrow$$

$$\frac{p+2}{p^3}.\frac{p^2+1}{p}=\phi(p)$$

$$\Rightarrow \phi(p)=\frac{(p+2)(p^2+1)}{p^4}$$

$$\phi(p)=\frac{p^3+2p^2+p+2}{p^4}=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\frac{2}{p^4}$$

$$\varphi(t)=L^{-1}\phi(p)=L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)+2L^{-1}+2L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{p^3}\right)+2.L^{-1}\left(\frac{1}{p^4}\right)$$

ومنه نجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(t)=1+2t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$$

5- أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية التالية :

$$\varphi(x)=e^x+2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$$

الحل :

لدينا النواة $k(x,t)=\cos(x-t)$ تتبع للفرق $x-t$ ، وإن :

$$\lambda = 2\ ,\ f(x) = e^x$$

لنضع:

$$L[\varphi(x)] = \phi(p)$$

ولدينا:

$$k(p) = L[k(x)] = L[\cos x] = \frac{p}{p^2+1}$$

$$F(p) = L[f(x)] = L[e^x] = \frac{1}{p-1}$$

وبالتالي:

$$\phi(p) = \frac{F(p)}{1-\lambda k(p)} = \frac{\frac{1}{p-1}}{1-\frac{2p}{p^2+1}} = \frac{\frac{1}{p-1}}{\frac{p^2-2p+1}{p^2+1}}$$

$$\phi(p) = \frac{\frac{1}{p-1}}{\frac{(p-1)^2}{p^2+1}} = \frac{p^2+1}{(p-1)^3}$$

$$\phi(p) = \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)}$$

ونعلم أن:

$$L[x] = \frac{1}{p^2} \Rightarrow L[e^x x] = \left.\frac{1}{p^2}\right|_{p\to p-1} = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$L[x^2] = \frac{2!}{p^3} \Rightarrow L[e^x x^2] = \left.\frac{2!}{p^3}\right|_{p\to p-1} = \frac{2}{(p-1)^3}$$

بالاستفادة من العلاقات السابقة وبتطبيق تحويل لابلاس المعاكس نجد:

$$\varphi(x) = x^2e^x + 2xe^x + e^x$$

وبالتالي فحل معادلة فولتيرا التكاملية هو:

$$\varphi(x)=(x+1)^2 e^x$$

6- أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=\cos x+\int_0^x \varphi(t)dt$$

الحل:

لدينا :

$$\lambda=1, f(x)=\cos x$$

لنضع :

$$L[\varphi(x)]=\phi(p)$$

لدينا:

$$k(p)=L[k(x)]=L[1]=\frac{1}{p}$$

$$F(p)=L[f(x)]=L[\cos x]=\frac{p}{p^2+1}$$

وبالتالي:

$$\phi(p)=\frac{F(p)}{1-\lambda k(p)}=\frac{\frac{p}{p^2+1}}{1-\frac{1}{p}}=\frac{\frac{P}{P^2+1}}{\frac{P-1}{P}}=\frac{P^2}{(P-1)(P^2+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\frac{p+1}{p^2+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\frac{P}{p^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعاكس لطرفي العلاقة السابقة نجد حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$$

7- أوجد حل جملة المعادلات التكاملية :

$$\varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(t)dt$$

$$\varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int_0^x \varphi_3(t)dt$$

$$\varphi_3(x) = \cos x + \int_0^x \varphi_1(t)dt$$

الحل:

نفرض أن :

$$L\left[\varphi_1(x)\right] = \phi_1(p)$$
$$L\left[\varphi_2(x)\right] = \phi_2(p)$$
$$L\left[\varphi_3(x)\right] = \phi_3(p)$$

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلات التكاملية نجد:

$$\phi_1(p) = \frac{1}{p} - L\left[1 * \varphi_2(t)\right]$$

$$\phi_2(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p} + L\left[1 * \varphi_3(t)\right]$$

$$\phi_3(p) = \frac{p}{p^2+1} + L\left[1 * \varphi_1(t)\right]$$

$$\phi_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\phi_2(p) \tag{106}$$

$$\phi_2(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\phi_3(p) \tag{107}$$

$$\phi_3(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p}\phi_1(p) \tag{108}$$

لنحل جملة المعادلات الجبرية:

نعوض (106) في (108) فنجد:

$$\phi_3(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\phi_2(p)\right]$$

$$\phi_3(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\phi_2(p)$$

نعوض في (107) :

$$\phi_2(p)=\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left[\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\phi_2(p)\right]$$

$$\phi_2(p)=\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^3}\phi_2(p)$$

$$\frac{p^3+1}{p^3}\phi_2(p)=\frac{p^4-p^2\left(p^2+1\right)+p^3+p^2+1}{p^3\left(p^2+1\right)}$$

$$\frac{p^3+1}{p^3}\phi_2(p)=\frac{p^3+1}{p^3\left(p^2+1\right)}$$

ومنه نجد:

$$\phi_2(p)=\frac{1}{p^2+1}$$

وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\varphi_2(x)=\sin x$$

نبدل قيمة $\phi_2(p)$ في (106) فنجد:

$$\phi_1(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{\left(p^2+1\right)-1}{p\left(p^2+1\right)}$$

ومنه نجد:

$$\phi_1(p)=\frac{p^2}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{p}{p^2+1}$$

وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\varphi_1(x) = \cos x$$

نبدل $\phi_1(p)$ في (108) فنجد:

$$\phi_2(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p}\frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}$$

وبتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\varphi_2(x) = \cos x + \sin x$$

8- استخدم طريقة التقريبات المتتالية لحل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt \quad ; \quad \varphi_0(x) = 0$$

الحل:

إن $\varphi_0(x) = 0$ التقريب من المرتبة صفر، وبالتالي:

$$\varphi_1(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi_0(t)\,dt = x - \int_0^x 0\,dt = x$$

وهو التقريب من المرتبة الأولى.

$$\varphi_2(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt$$

$$= x - \int_0^x (x-t)t\,dt = x - \int_0^x \left(xt - t^2\right)dt = x - \left[\frac{xt^2}{2} \ \frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} = x - \frac{x^3}{3!}$$

وهو التقريب من المرتبة الثانية :

$$\varphi_3(x) = x - \int_0^x (x-t)\varphi_2(x)\,dt = x - \int_0^x (x-t)\left(t - \frac{t^3}{3!}\right)dt$$

$$= x - \int_0^x x\left(t - \frac{t^3}{3!}\right)dt + \int_0^x \left(t^2 - \frac{t^4}{3!}\right)dt$$

$$= x - x\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4!}\right]_0^x + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{(5)(3!)}\right]_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{(5)(3!)}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

وهو التقريب من المرتبة الثالثة.

وبالاستقراء نجد أن:

$$\varphi_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

يبرهن بأن المتسلسلة متقاربة، لذلك فإن:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

وبالتالي حل المعادلة هو:

$$\varphi(x) = \sin x$$

9- أوجد النواة الحالة لمعادلة فولتيرا التكاملية حيث:

$$k(x,t) = ch(x-t) \quad ; \quad \lambda = 1$$

الحل:

النواة تتبع للفرق $x-t$:

$$K(p) = L\left[K(x)\right] = L\left[ch(x)\right] = \frac{p}{p^2-1} \quad ; \quad \lambda = 1$$

ولنضع $R(P)=L\left[R(x)\right]$ وبالتالي:

$$R(p)=\frac{K(p)}{1-K(p)}=\frac{\dfrac{p}{p^2-1}}{1-\dfrac{p}{p^2-1}}=\frac{p}{p^2-p-1}$$

$$=\frac{p}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}=\frac{p-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}$$

$$=\frac{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}+\frac{\dfrac{1}{2}}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

ونعلم أن :

$$L\left[\operatorname{ch}\frac{\sqrt{5}}{2}x\right]=\frac{p}{p^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

ومنه:

$$L\left[e^{\frac{1}{2}x}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{5}}{2}x\right]=\frac{p-\dfrac{1}{2}}{\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

وكذلك لدينا :

$$L\left[sh\frac{\sqrt{5}}{2}x\right]=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{p^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

ومنه:

$$L\left[e^{\frac{1}{2}x}sh\frac{\sqrt{5}}{2}x\right]=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

وبتطبيق تحويل لابلاس المعاكس على العلاقة الأخيرة نجد:

$$R(x)=e^{\frac{1}{2}x}ch\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{5}}e^{\frac{1}{2}x}sh\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

$$R(x)=e^{\frac{1}{2}x}\left(ch\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{5}}sh\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)$$

وبالتالي النواة الحالة :

$$R(x,t,1)=e^{\frac{1}{2}(x-t)}\left[ch\frac{\sqrt{5}}{2}(x-t)+\frac{1}{\sqrt{5}}sh\frac{\sqrt{5}}{2}(x-t)\right]$$

10- أوجد النواة الحالة للنواة التالية: :

حيث:

$$k(x,t)=-2+3(x-t)\quad;\quad\lambda=1$$

والتي هي على شكل كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

الحل:

لدينا :

$$a_0(x) = -2 \quad , \quad a_1(x) = 3$$

لدينا
$$n - 1 = 1 \Rightarrow n = 2$$

بتشكيل المعادلة التفاضلية (44) وبالأخذ بعين الاعتبار المعادلة (45) نجد:

$$\frac{d^2g}{dx^2} - \left[-2\frac{dg}{dx} + 3g\right] = o$$

أو بالشكل:

$$g'' + 2g' - 3g = o$$

والتي حلها العام هو :

$$g(x,t,1) = c_1(t).e^x + c_2(t)e^{-3x}$$

وبتحقيق الشروط الابتدائية نجد:

$$g(x,t,1)\Big|_{x=t} = o \ , \ \frac{dg}{dx}\Big|_{x=t} = 1$$

حيث:

$$\frac{dg}{dx} = c_1(t).e^x - 3c_2(t)e^{-3x}$$

وبالنتيجة نحصل على المعادلتين:

$$c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-3t} = o$$
$$c_1(t)e^t - 3c_2(t)e^{-3t} = 1$$

وبحلهما نجد:

$$c_1(t) = \frac{1}{4}e^{-t} \quad , \quad c_2(t) = -\frac{1}{4}e^{3t}$$

بتعويض قيمة $c_1(t)$ و $c_2(t)$ في $g(x,t,1)$ نجد:

$$g(x,t,1) = \frac{1}{4}\left(e^{x-t} - e^{3(t-x)}\right)$$

ولدينا:

$$\frac{dg}{dx}=\frac{1}{4}\left(e^{x-1}+3e^{3(1-x)}\right)$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{d^2g}{dx^2}=\frac{1}{4}\left(e^{x-1}-9e^{3(1-x)}\right)$$

وحسب تعريف النواة الحالة في (46) نجد:

$$R(x,t,\lambda)=\frac{-1}{\lambda}\frac{d^n g(t,x,1)}{dx^n}$$

وبالتالي فإن النواة الحالة تكون:

$$R(x,t,1)=\frac{d^2g}{dx^2}=\frac{1}{4}e^{x-1}-\frac{9}{4}e^{-3(x-1)}$$

تمارين غير محلولة

I. تحقق من أن التوابع المعطاة هي حلول للمعادلات التكاملية المرافقة.

1. $\varphi(x)=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$;

$$\varphi(x)=\frac{3x+2x^3}{3\left(1+x^2\right)^2}-\int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{\left(1+x^2\right)^2}\varphi(t)dt$$

2. $\varphi(x)=e^x\left(\cos e^x-e^x\sin e^x\right)$

$$\varphi(x)=\left(1-xe^{2x}\right)\cos 1-e^{2x}\sin 1+\int_0^x\left[1-(x-t)e^{2x}\right]\varphi(t)dt$$

3. $\varphi(x)=xe^x$; $\varphi(x)=e^x\sin x+2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$

4. $\varphi(x)=x-\dfrac{x^3}{6}$; $\varphi(x)=x-\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)dt$

5. $\varphi(x)=1-x$; $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt=x$

II. أوجد المعادلات التكاملية الموافقة للمعادلات التفاضلية المعطاة مع شروطها الابتدائية:

6. $y''+y=0$; $y(o)=o$, $y'(o)=1$

7. $y'-y=0$; $y(o)\,1$

8. $y''-5y'+6y=0$; $y(o)=o$, $y'(o)=1$

9. $y''+y=\cos x$; $y(o)=o$, $y'(o)=1$

10. $y''-y'\sin x+e^x y=x$; $y(o)=1$, $y'(o)=-1$

III. أوجد النوى الحالة لمعادلات فولتيرا التكاملية ذات النوى التالية :

11. $K(x,t)=e^{x^2-t^2}$

12. $K(x,t)=\dfrac{1+x^2}{1+t^2}$

13. $K(x,t)=\dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$

14. $K(x,t)=\alpha^{x-t}\;(\alpha>0)$

15. $K(x,t)=-2+3(x-t)$

16. $K(x,t)=-\dfrac{4x-2}{2x+1}+\dfrac{8(x-t)}{2x+1}$

17. $K(x,t)=e^{-(x-t)}$

18. $K(x,t)=e^{-(x-t)}\sin(x-t)$

19. $K(x,t)=\operatorname{ch}(x-t)$

IV. أوجد باستخدام النوى الحالة، حلول المعادلات التكاملية التالية :

20. $\varphi(x)=e^{x}+\int_{0}^{x} e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt$

21. $\varphi(x)=\sin x+2\int_{0}^{x} e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt$

22. $\varphi(x)=x3^{x}-\int_{0}^{x} 3^{x-t}\,\varphi(t)\,dt$

23. $\varphi(x)=e^{x}\sin x+\int_{0}^{x} \dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}\,\varphi(t)\,dt$

V. استخدم طريقة التقريبات المتتالية لحل المعادلات التكاملية التالية :

24. $\varphi(x)=x-\int_{0}^{x}(x-t)\varphi(t)\,dt,\quad \varphi_0(x)\equiv 0$

25. $\varphi(x)=1-\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x)\equiv 0$

26. $\varphi(x)=1+\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi_0(x)=1$

27. $\varphi(x)=x+1-\int_0^x \varphi(t)dt;$

(a) $\varphi_0(x)=1$, (b) $\varphi_0(x)=x+1$

VI. أوجد حل المعادلات التكاملية اللاخطية:

28. $2\varphi(x)-\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)dt=\sin x$

29. $\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt-\frac{1}{2}\operatorname{sh} x$

VII. حل المعادلات التكاملية التالية :

30. $\varphi(x)=x-\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt$

31. $\varphi(x)=e^{2x}+\int_0^x e^{t-x}\varphi(t)dt$

32. $\varphi(x)=x-\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$

33. $\varphi(x)=\cos x-\int_0^x (x-t)\cos(x-t)\varphi(t)dt$

34. $\varphi(x)=x+\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt$

35. $\varphi(x)=\sin x+\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$

36. $\varphi(x)=x-\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)dt$

37. $\varphi(x)=1-2x-4x^2+\int_0^x \left[3-6(x-t)-4(x-t)^2\right]\varphi(t)dt$

38. $\varphi(x)=\operatorname{sh}x-\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)dt$

39. $\varphi(x)=e^x+2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$

40. $\varphi(x)=\cos x+\int_0^x \varphi(t)dt$

VIII. أوجد الحل المشترك لجملة المعادلات التكاملية التالية :

41. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=\sin x+\int_0^x \varphi_2(t)dt\\ \varphi_2(x)=1-\cos x-\int_0^x \varphi_1(t)dt\end{cases}$$

42. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=e^{2x}+\int_0^x \varphi_2(t)dt\\ \varphi_2(x)=1-\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt\end{cases}$$

43. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=e^x+\int_0^x \varphi_1(t)dt-\int_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)dt\\ \varphi_2(x)=-x-\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt+\int_0^x \varphi_2(t)dt\end{cases}$$

44. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=e^x-\int_0^x \varphi_1(t)dt+4\int_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)dt\\ \varphi_2(x)=1-\int_0^x e^{t-x}\varphi_1(t)dt+\int_0^x \varphi_2(t)dt\end{cases}$$

IX. استخدم طريقة التقريبات المتتالية لإيجاد حل المعادلات التكاملية:

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t+\varphi(t)}dt$$

X. استخدم طريقة التقريبات المتتالية لإيجاد التقريب من المرتبة الثانية $\varphi_2(x)$ لحل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=1+\int_0^x\left[\varphi^2(t)+t\varphi(t)+t^2\right]dt$$

XI. استخدم طريقة التقريبات المتتالية لإيجاد التقريب من المرتبة الثالثة $\varphi_3(x)$ لحل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=\int_0^x\left[t\varphi^2(t)-1\right]dt$$

XII. أوجد حل المعادلات التفاضلية – التكاملية التالية :

45. $\varphi'(x)-\varphi(x)+\int_0^x (x-t)\varphi'(t)dt-\int_0^x \varphi(t)dt=x;\ \ \varphi(o)=-1$

46. $\varphi''(x)-2\varphi'(x)+\varphi(x)+2\int_0^x \cos(x-t)\varphi''(t)dt+$

$+2\int_0^x \sin(x-t)\varphi'(t)dt=\cos x;\ \ \varphi(o)=\varphi'(o)=o$

47. $\varphi''(x)+2\varphi'(x)-2\int_0^x \sin(x-t)\varphi'(t)dt=\cos x;$

$\varphi(o)=\varphi'(o)=o$

XIII. أوجد حل المعادلات التكاملية التالية :

48. $\varphi(x)=e^{-x}+\int_x^\infty \varphi(t)dt$

49. $\varphi(x)=\cos x+\int_x^\infty e^{x-t}\varphi(t)dt$

50. $\varphi(x)=1+\int_x^\infty e^{\alpha(x-t)}\varphi(t)dt \qquad (\alpha>0)$

XIV. برهن أن :

51. $\Gamma'(1)=-\gamma$

52. $\Gamma(z)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx \quad ; \quad \operatorname{Re} z>0$

53. $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=2.\ln 2$

54. $\beta(p,q)=\beta(q,p)$

55. $\beta(p,q)=\beta(p+1,q)+\beta(p,q+1)$

XV. أوجد حل المعادلات التكاملية :

56. $\int_0^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}=x^n \qquad (0<\alpha<1)$

57. $\int_0^x\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}}=\sin x$

58. $\int_0^x\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}}=e^x$

59. $\int_0^x\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}}=x^{1/2}$

60. $\int_0^x (x-t)^{1/3}\varphi(t)dt=x^{4/3}-x^2$

61. $\int_0^x (x-t)^{1/2}\varphi(t)dt=\pi x$

62. $\int_0^x (x-t)^{1/4}\varphi(t)dt=x+x^2$

63. $\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt=x^3$

64. $\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$

XVI. أوجد حل معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول وذلك بتحويلها إلى معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

65. $$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=\sin x$$

66. $$\int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\,dt=x$$

67. $$\int_0^x a^{x-t}\varphi(t)\,dt=f(x),\quad f(0)=0$$

68. $$\int_0^x \left(1-x^2+t^2\right)\varphi(t)\,dt=\frac{x^2}{2}$$

XVII. أوجد حل المعادلات التكاملية :

69. $$\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt=\sin x$$

70. $$\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt=x^2+x^3$$

71. $$\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt=1-\cos x$$

XVIII. أوجد حل معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول الالتفافي :

72. $$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt=\sin x$$

73. $$\int_0^x (x-t)^{1/2}\varphi(t)\,dt=x^{5/2}$$

74. $$\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt=\sin x$$

75. $$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x^2$$

76. $$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt=x\sin x$$

الفصل الثاني

معادلات فريدهولم التكاملية

سندرس في هذا الفصل نوعاً آخر من المعادلات التكاملية وهو هام جداً في التطبيقات الفيزيائية والهندسية ألا وهو معادلات فريدهولم التكاملية.

1- معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني:

تعريف (1) : نسمي كل معادلة من الشكل:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \qquad (1)$$

بمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني، حيث $\varphi(x)$ هو التابع المجهول، $K(x,t)$ و $f(x)$ هي توابع معلومة، x ، t متحولات حقيقية تتحول في المجال (a,b) ، و λ معامل عددي.

التابع $K(x,t)$ يدعى بنواة المعادلة التكاملية (1)، مما سبق يتضح بأن النواة معرفة في الساحة:

$$\Omega\ \{\ a\le x\le b \quad , \quad a\le t\le b\ \}$$

المحتواة في المستوي (x,t) ، وأن $K(x,t)$ هي تابع مستمر في هذه الساحة، وفي حالة كون $K(x,t)$ هي تابع غير مستمر فيجب أن يكون التكامل الثنائي:

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt \qquad (2)$$

له قيمة محدودة.

تعريف (2) : إذا كان $f(x)\not\equiv 0$ ، المعادلة (1) تدعى بمعادلة تكاملية لفريدهولم غير متجانسة، أما إذا كان $f(x)\equiv 0$ فإنها تدعى بمعادلة فريدهولم المتجانسة ، وتأخذ الشكل :

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0 \qquad (3)$$

ملاحظة : يمكن لحدود التكامل في المعادلات (1) و(2) و (3) أن تكـون محـدودة أو غـير محدودة.

1-1-تعريف حل معادلة فريدهولم التكاملية :

نقول عن $\varphi(x)$ أنه حل للمعادلة التكاملية (1) أو (3) إذا حولها إلى مطابقة عند تعويضه فيها ، ومن أجل :

$$x\in(a,b)$$

مثال (1-2):

برهن أن التابع $\varphi(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ هو حل للمعادلة التكاملية لفريدهولم التالية:

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)g(t)dt=\frac{x}{2}$$

حيث النواة معرفة بالشكل:

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\le x\le t\\[2mm] \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\le x\le 1\end{cases}$$

الحل: نكتب الطرف الأيسر للمعادلة التكاملية بالشكل:

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt+\int_x^1 K(x,t)\,\varphi(t)dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\,\varphi(t)\,dt+\int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\,\varphi(t)dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{(2-x)}{2}\int_0^x t\,\varphi(t)dt+\frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)\varphi(t)dt\right\}$$

نعوض التابع $\sin\frac{\pi x}{2}$ بدلاً من $\varphi(t)$ في العلاقة السابقة نجد :

$$\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x t\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt+x\int_x^1(2-t)\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt\right\}=$$

$$=\sin\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}+\right.$$

$$\left.+x\left[-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right]_{t=x}^{t=1}\right\}=\frac{x}{2}$$

وهكذا نجد $\frac{x}{2}\equiv\frac{x}{2}$ وحسب تعريف حل معادلة تكاملية فإن $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ هو حل للمعادلة التكاملية المعطاة.

ملاحظة : لقد تم البرهان على وجود الحل ووحدانيته في مقرر التحليل التابعي (1).

2- معادلات فريدهولم التكاملية ذات النوى المتحللة (نموذج هامرشتاين) (Hammerstein)

2-1- الحالة الخطية:

ليكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني، نقول عن نواتها $K(x,t)$ بأنها متحللة إذا كانت مجموعاً لعدد منته من الجداءات لتوابع تابعة للمتحول x بتوابع تابعة للمتحول t فقط أي إذا كان لها الشكل:

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\,b_k(t) \qquad (4)$$

سنعتبر التوابع $a_k(x)$, $b_k(x)$ [$k=1,2,\ldots,n$] بأنها مستمرة في المربع الرئيسي $a\le x,t\le b$ ومستقلة خطياً.

إن المعادلة التكاملية ذات النوى المتحللة تأخذ الشكل:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(t)\right]\varphi(t)dt=f(x) \tag{5}$$

والتي يمكن حلها بالطريقة التالية :

لنكتب (5) بالشكل:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt \tag{6}$$

لندخل الرموز :

$$\int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt=C_k \quad (k=1,2,\dots,n) \tag{7}$$

عند ذلك (6) تصبح:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(x) \tag{8}$$

حيث C_k هي ثوابت غير معلومة، وبالتالي فإن التابع $\varphi(x)$ غير معلوم، وهكذا فـإن حـل المعادلـة التكامليـة ذات النـواة المتحللـة يـؤول لحـساب الثوابـت $C_k(k=1,2,\dots,n)$.

لنضع العلاقة (8) في المعادلة التكاملية (5) وبالتالي نحصل وبعدة عدة عمليات حسابية على العلاقة :

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{C_m-\int_a^b b_m(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(t)\right]dt\right\}a_m(x)=0$$

بسبب الاستقلال الخطي للتوابع $a_m(x)(m=1,2,\dots,n)$ نجد :

$$C_m-\int_a^b b_m(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(t)\right]dt=0$$

أو :

$$C_m - \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt = \int_a^b b_m(t)f(t)dt \ (m = 1,2,\dots,n)$$

بغية الاختصار لندخل الرموز :

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt, \quad f_m = \int_a^b b_m(t)f(t)dt$$

نجد أن :

$$C_m - \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{km}C_k = f_m \qquad (m = 1,2,\dots,n) \qquad (9)$$

أو بالشكل:

$$\begin{cases} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1n}C_n = f_1 \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1-\lambda a_{22})C_2 - \dots - \lambda a_{2n}C_n = f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \dots + (1-\lambda a_{nn})C_n = f_n \end{cases} \qquad (10)$$

نحصل بذلك على n معادلة جبرية خطية تمكننا من حساب المقادير المجهولة C_k، إن محدد هذه المعادلات هو :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

إذا كان $\Delta(\lambda) \neq 0$ فإن مجموعة المعادلات (9) تقبل حلاً وحيداً $C_1, C_2, \dots, C_n$ وذلك باستخدام قاعدة كرامر :

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1k-1} f_1 & -\lambda a_{1k+1} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{2k-1} f_2 & -\lambda a_{2k+1} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & \dots & -\lambda a_{nk-1} f_n & -\lambda a_{nk+1} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

$$(k = 1,2,\dots,n)$$

إذن حل المعادلة التكاملية (5) هو التابع $\varphi(x)$ المعرف بالعلاقة :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x) \tag{13}$$

حيث العوامل $C_k(k=1,2,...,n)$ محددة بالعلاقة (12) .

مما سبق، نصل إلى نظريات فريدهولم الثلاثة التالية:

نظرية فريدهولم الأولى:

إذا لم تكن λ قيمة ذاتية فإن للمعادلة (1) يوجد حل وحيد $\varphi(t)$ يتعرف بالمعادلة (13) أياً كان التابع $f(t)$.

نظرية فريدهولم الثانية :

إذا كانت λ قيمة ذاتية للنواة $K(t,s)$ فإن للمعادلة التكاملية المتجانسة :

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt$$

وللمعادلة المرافقة لها :

$$\psi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\int_a^b a_i\psi(t)dt$$

يوجد نفس العدد المنتهي من التوابع الذاتية (المستقلة خطياً).

نظرية فريدهولم الثالثة :

إن المعادلة التكاملية غير المتجانسة (1) ذات النواة المتحللة ، ومن أجل λ قيمة ذاتية تكون قابلة للحل إذا وفقط إذا كان التابع $f(t)$ معامداً لجميع حلول المعادلة المرافقة للمعادلة التكاملية المتجانسة.

ملاحظة : يمكن الحصول على مجموعة المعادلات (10) إذا ضُرب طرفا (8) وبشكل تتابعي بـ :

$$a_1(x)\,,\ a_2(x) \ldots a_n(x)$$

ثم المكاملة لكل معادلة ناتجة من a إلى b ، ثم نضع (8) في (7) من أجل $\varphi(x)$ ، ثم استبدال x بـ t .

مثال (2-2) : أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t\right) \varphi(t) dt = x$$

الحل:

نكتب المعادلة بالشكل التالي :

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t dt + \lambda \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t) dt$$

$$+ \lambda \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t\, dt + x$$

وبإدخال الرموز :

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos t dt;\ C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \varphi(t);\ C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin t dt \qquad (14)$$

حيث C_1, C_2, C_3 ثوابت مجهولة، وبالتالي فالمعادلة المدروسة تكتب:

$$\varphi(x) = C_1 \lambda x + C_2 \lambda \sin x + C_3 \lambda \cos x + x \qquad (15)$$

بتعويض (15) في (14) نجد:

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t)\ \cos t dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t)\ t^2 dt,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t)\ \sin t dt,$$

أو بالشكل:

$$C_1\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt\right)-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt-$$

$$-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt+C_2\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin t\,dt\right)-$$

$$-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt+$$

$$+C_3\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin t\,dt\right)=\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt$$

بحساب التكاملات الواردة في مجموعة المعادلات نحصل على ثلاث معادلات جبرية بالنسبة للمجاهيل C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{cases} C_1-\lambda\pi C_3=0, \\ C_2+4\lambda\pi C_3=0, \\ -2\lambda\pi C_1-\lambda\pi C_2+C_3=2\pi \end{cases} \qquad (16)$$

إن محدد هذه المجموعة :

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix}=1+2\lambda^2\pi^2\neq 0$$

إذن فالحل الوحيد للمجموعة (16) هو :

$$C_1=\frac{2\pi^2\lambda}{1+2\lambda^2\pi^2}\ ;\ C_2=-\frac{8\pi^2\lambda}{1+2\lambda^2\pi^2}\ ;\ C_3=\frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

بتعويض قيم C_1, C_2, C_3 في (15) نحصل على حل المعادلة التكاملية.

مثال (3-2) حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\left(5xt^{3}+4x^{2}t+3xt\right)\varphi(t)dt$$

الحل:

نرى في هذه المعادلة أن :

$$a_1(x)=5x \qquad a_2(x)=4x^2 \qquad a_3(x)=3x$$

$$b_1=t^3 \qquad b_2(t)=t \qquad b_3(t)=t$$

وبالتالي فإن :

$$x_{11}=\int_{-1}^{1}t^{3}(5t)dt=2\ ,\ x_{12}=\int_{-1}^{1}4t^{5}dt=0,\ \ x_{13}=\int_{-1}^{1}3t^{4}dt=\frac{6}{5}$$

$$x_{21}=x_{31}=\int_{-1}^{1}5t^{2}dt=\frac{10}{3}\ ,\ \ x_{22}=x_{32}=\int_{-1}^{1}4t^{3}dt=0\ \ ,$$

$$x_{23}=x_{33}=\int_{-1}^{1}3t^{2}dt=2$$

وإن المعادلات التي تعين c_i هي:

$$\begin{aligned}
&(1-2\lambda)c_1 && -\frac{6}{5}\lambda c_3=0\\
&-\frac{10}{3}\lambda c_1+c_2 && -2\lambda c_3=0\\
&-\frac{10}{3}\lambda c_1 && +(1-2\lambda)c_3=0
\end{aligned}$$

ومعين الأمثال لهذه المجموعة يساوي :

$$D(\lambda)=1-4\lambda$$

وعلى هذا فهناك قيمة ذاتية واحدة هي $\lambda = \frac{1}{4}$. نعوض في المجموعة الأخيرة فنجد:

$$5c_1 = 3c_2 \qquad c_2 = c_3$$

فالحل العام للمعادلة المذكورة:

$$\varphi(x) = c_1(5x) + c_2(4x^2) + c_3(3x)$$
$$\varphi(x) = 4c_2\left(x^2 + \frac{3x}{2}\right)$$

بفرض أن c_2 ثابت كيفي.

نتيجة : نستخلص مما سبق أن حل معادلة فريدهولم التكاملية ذات النواة المتحللة يتحول إلى حل مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية (9) في المجاهيل c_i. إذا كان لمعين الأمثال (11) قيمة غير مساوية للصفر فإن للمجموعة (9) حلاً وحيداً $c_1, c_2, ..., c_3$ وبالتالي يوجد للمعادلة التكاملية (1) حل وحيد. وإذا كان $f(x) = 0$ ، أي إذا كانت المعادلة التكاملية متجانسة فإن المجموعة (9) تصبح متجانسة، ويكون حلها الوحيد هو الحل $c_1 = c_2 ... = c_n = 0$ والحل الوحيد للمعادلة التكاملية هو $\varphi(s) = 0$.

أما إذا كانت قيمة المعين $\Delta(\lambda)$ مساوية للصفر فعندئذ لايكون للمجموعة (9) أي حل أو يكون لها عدد غير منته من الحلول.

2-2- الحالة اللاخطية:

يوجد كثير من المسائل الفيزيائية التي تؤول إلى معادلات تكاملية غير خطية من نموذج هامرشتاين، إن الشكل المعمم لهذا النوع من المعادلات التكاملية يعطى بالمعادلة:

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t) f(t.\varphi) dt \qquad (17)$$

حيث $K(x,t)$ و $f(t,\varphi)$ هي توابع معلومة وأن $\varphi(x)$ هو تابع غير معلوم.

إن هذا النوع من المعادلات يؤول إلى معادلات من النموذج:

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,t)f(t,\varphi)dt+\psi(x)$$

حيث $\psi(x)$ هو تابع معلوم، هنا نشير إلى أن الفرق بين المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة هام في الحالة الخطية، في حين أن هذا الفرق غير هام في الحالة اللاخطية.

لنعتبر التابع $K(x,t)$ كنواة متحللة، أي أن:

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)b_i(t) \qquad (18)$$

عند ذلك، المعادلة (17) تأخذ الشكل:

$$\varphi(x,t)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\int_a^b b_i(f)f(t,\varphi(t))dt \qquad (19)$$

لنضع :

$$C_i=\int_a^b b_i(t)f(t,\varphi(t))dt \qquad (i=1,2,\dots,m) \qquad (20)$$

حيث C_i هي ثوابت مجهولة، وبمقتضى (19) سنحصل:

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x) \qquad (21)$$

بالتعويض في (20) ، نحصل من (21) على m معادلة بـ m مجهول $C_1,C_2,\dots,C_m$:

$$C_i=\psi_i(C_1,C_2,\dots,C_m \qquad i=1,2,\dots,m) \qquad (22)$$

إذا كان $f(t,u)$ كثير حدود في u ، أي إذا كان :

$$f(t,u)=P_0(t)+P_1(t)u+\dots+P_n(t)u^n \qquad (23)$$

حيث $P_1(t),...,P_n(t)$ هي توابع مستمرة بالنسبة لـ t على المجال [a,b]، وبالتالي تتحول (22) إلى m معادلة جبرية بالنسبة للثوابت $C_1, C_2,..., C_m$، فإذا $C_1^o, C_2^o,..., C_m^o$ هي حل لهذه المعادلات فإن للمعادلة التكاملية (19) الحل:

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i^o a_i(x)$$

من الواضح بأن عدد الحلول (وهي عقدية بالحالة العامة) للمعادلة التكاملية (19) يساوي إلى عدد حلول المجموعة (22).

مثال (2-4):

أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x)=\lambda \int_0^1 xt\varphi^2(t)dt \qquad (24)$$

حيث λ وسيط.

نضع:

$$C=\int_0^1 t\varphi^2(t)dt \qquad (25)$$

ومنه:

$$\varphi(x)=C\lambda x \qquad (26)$$

بتعويض (26) في (25)، نجد:

$$C=\int_0^1 t\lambda^2C^2t^2\,dt$$

عندئذ نجد:

$$C=\frac{\lambda^2}{4}C^2 \qquad (27)$$

إذن فالمعادلة (27) لهما الحلان:

$$C_1 = 0 \ , \ C_2 = \frac{4}{\lambda^2}$$

وبالتالي، فإن المعادلة التكاملية (24) لها حلان، من أجل أي λ :

$$\varphi_1(x) \equiv 0 \ , \ \varphi_2(x) = \frac{4}{\lambda} x$$

ملاحظة : يوجد بعض المعادلات التكاملية اللاخطية التي لاتملك حلاً.

مثال (2-5): أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{\frac{x+t}{2}} \left(1 + \varphi^2(t)\right) dt \qquad (28)$$

الحل :

لنضع :

$$C = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2t} \left(1 + \varphi^2(t)\right) dt \qquad (29)$$

عندئذ :

$$\varphi(x) = C e^{\frac{x}{2}} \qquad (30)$$

ومن أجل تحديد الثابت C نجد المعادلة :

$$\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right) C^2 - 3C + 3\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 0 \qquad (31)$$

من السهل التحقق من أن المعادلة (31) ليس لها جذور حقيقية وبالتالي فليس للمعادلة التكاملية (28) حلول حقيقية.

من جهة أخرى، لنعتبر المعادلة :

$$\varphi(x) = \int_0^1 a(x) a(t) \varphi(t) \sin\left(\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right) dt \qquad (32)$$

حيث $a(t) > 0$ من أجل $t \in [0,1]$.

وبالتالي نكون قد حصلنا على المعادلة المحددة للثابت C :

$$1=\int_0^1 a^2(t)dt.\sin C \tag{33}$$

إذا كان $\int_0^1 a^2(t)dt>1$ عندئذ فإن المعادلـة (33) ، وبالتـالي المعادلـة التكامليـة الأصلية (32) تملكان عدداً غير منته من الحلول الحقيقية.

3- الطرائق العامة لحل معادلة فريدهولم التكاملية :

3-1- طريقة التقريبات المتتالية :

سنحاول في هذا البند استخدام طريقـة التقريبـات المتتاليـة الـتي تم شـرحها في الفصل الأول للوصول إلى حل لمعادلة فريدهولم لنفـرض أن كـلاً مـن التـابعين f(x) و K(x,t) قابلان للمكاملة تربيعياً :

ولنبدأ بالتقريب من المرتبة صفر :

$$\varphi_0(x)=f(x) \tag{34}$$

وبتعويض هذا التقريب في معادلة فريدهولم :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{35}$$

نجد التقريب من المرتبة الأولى :

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt \tag{36}$$

نعوض في (35) فنحصل على التقريب من المرتبة الثانية وهكـذا. إن التقريـب من المرتبة (n+1) هو:

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt \tag{37}$$

فإذا سعى $\varphi_n(x)$ بانتظام إلى نهاية معينة عندما $n \to \infty$ ، فإن هذه النهاية هي الحل المطلوب. ولدراسة هذه النهاية نجري الحسابات بالتفصيل فنجد:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt \tag{38}$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \kappa \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \tag{39}$$

$$+ \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \left[\int_a^b K(t,s) f(s) ds \right] dt$$

ويمكن تبسيط هذه الصيغة إذا وضعنا :

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s) K(s,t) ds \tag{40}$$

وبتغيير ترتيب المكاملة في (39) نجد:

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt \tag{41}$$

وبشكل مماثل نجد:

$$\varphi_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt \tag{42}$$

$$+ \lambda^3 \int_a^b K_2(x,t) f(t) dt$$

بفرض أن :

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s) K_2(s,t) ds \tag{43}$$

وبمتابعة العمل نجد:

$$K_m(x,t)=\int_a^b K(x,s)K_{m-1}(s,t)ds \qquad (44)$$

والتقريب من المرتبة (n+1) لحل المعادلة التكاملية (35) هو :

$$\varphi_n(x)=f(x)+\sum_{m=1}^{n}\lambda^m\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt \qquad (45)$$

ندعو $K_m(x,t)$ النواة المكررة للـ m ، وذلك بفرض أن $K_1(x,t)=K(x,t)$

وبالانتقال إلى النهايات عندما $n\to\infty$ نحصل على ما يسمى متسلسلة نيومان.

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt \qquad (46)$$

نرى من (44) أن :

$$\begin{aligned}K_m(x,t)&=\int_a^b K(x,s)\,K_{m-1}(s,t)ds\\&=\int_a^b K(x,s)\int_a^b K(s,\tau)K_{m-2}(\tau,t)d\tau ds\\&=\int_a^b\left[\int_a^b K(x,s)K(s,\tau)ds\right]K_{m-2}(\tau,t)d\tau\\&=\int_a^b K_2(x,\tau)K_{m-2}(\tau,t)d\tau\end{aligned}$$

وبمتابعة العمل على هذا النحو نجد:

$$K_m(x,t)=\int_a^b K_{m-1}(x,s)K(s,t)ds \qquad (47)$$

2- يبقى أن نعين الشروط التي تجعل من المتسلسلة الأخيرة متقاربة. لأجل ذلك نستخدم متراجحة شفارتز فنجد:

$$\left|\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt\right|^2\le\left(\int_a^b \le\left|K_m(x,t)\right|^2dt\right)\int_a^b\left|f(t)\right|^2dt \qquad (48)$$

وإذا فرضنا A نظيم f :

$$A^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt \tag{49}$$

وإذا رمزنا بـ C_m^2 للحد الأعلى للتكامل :

$$\int_a^b |K_m(x,t)|^2 dt$$

فإن المتباينة (48) تأخذ الشكل:

$$\left|\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt\right|^2 \le C_m^2 A^2 \tag{50}$$

نطبق الآن متباينة شفارتز على (47) فنجد:

$$|k_m(x,t)|^2 \le \int_a^b |K_{m-1}(x,s)|^2 ds \int_a^b |K(s,t)|^2 ds$$

وبمكاملة طرفي هذه المتباينة بالنسبة لـ t وبفرض أن :

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds\, dt \tag{51}$$

نحصل على :

$$\int_a^b |K_m(x,t)|^2 dt \le B^2 C_{m-1}^2 \tag{52}$$

ومن هذه المتباينة الأخيرة نجد:

$$C_m^2 \le B^{2m-2} C_1^2 \tag{53}$$

ومن (50) و (53) نجد :

$$\left|\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt\right|^2 \le C_1^2 A^2 B^{2m-2} \tag{54}$$

وعلى هذا فإن القيمة المطلقة للحد العام للمتسلسلة الواردة في (45) هو أصغر من $AC_1|\lambda|^m B^{m-1}$ وهذا يعني أن المتسلسلة في (46) متقاربة بانتظام إذا كان :

$$|\lambda| B < 1 \tag{55}$$

وهكذا نكون قد برهنا أن للمعادلة (35) حلاً معطى بالصيغة (36)، لأجل كل قيمة لـ λ تحقق الشرط (55). لنفرض الآن أن لـ (35) حلين هما : $\varphi_2(x)$ و $\varphi_2(x)$ أي:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt$$

وبالطرح وبفرض أن : $g(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ نجد :

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) g(t) dt$$

وبتطبيق متباينة شفارتز على هذه المعادلة نجد :

$$|g(x)|^2 \le |\lambda|^2 \int_a^b |K(x,t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ x نجد :

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \le |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\, dt \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

أو :

$$\left(1 - |\lambda|^2 B^2\right) \int_a^b |g(x)|^2 dx \le 0 \tag{56}$$

واستناداً إلى (55) نجد أن $g(x) = 0$ أي أن $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$، وذلك بفرض أن $\varphi_1(x)$ ، $\varphi_2(x)$ مستمران على $[a,b]$.

3- لننظر بعد ذلك في المتسلسلة :

$$K_1(x,t)+\lambda K_2(x,t)+...+\lambda^{n-1}K_n(x,t)+... \qquad (57)$$

لقد تبين لنا بتطبيق متباينة شفارتز على (44) أن :

$$|K_m(x,t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-1}(x,s)|^2 ds \int_a^b |K(s,t)|^2 ds$$

وبالاستفادة من (53) وبفرض أن الحد الأعلى للتكامل:

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 ds$$

هو C'^2 فإننا نجد :

$$|K_m(x,t)|^2 \leq B^{2m-4} C_1^2 C'^2$$

ومنه نلاحظ أن المتسلسلة (57) متقاربة إطلاقاً إذا تحقق الشرط (55).

2-3-طريقة النواة الحالة :

لنرمز لمجموع المتسلسلة (57) بـ $R(x,t,\lambda)$. إن هذا التابع R تحليلي في λ يسمى النواة الحالة لـ $K(x,t)$.

$$R(x,t,\lambda)=K(x,t)+\lambda K_2(x,t)+...+\lambda^{n-1}K_n(x,t)+... \qquad (58)$$

وبضرب طرفي هذه العلاقة بـ $K(s,x)$ والمكاملة بالنسبة لـ s نجد :

$$\lambda \int_a^b K(s,x)R(x,t,\lambda)dx = \lambda K_2(s,t)+\lambda^2 K_2(s,t)+...$$

إذن :

$$R(x,t,\lambda)-K(x,t)=\lambda \int_a^b K(x,s)R(s,t,\lambda)ds \qquad (59)$$

كذلك يمكن أن نبرهن أن :

$$R(x,t,\lambda)-K(x,t)=\lambda\int_a^b K(s,t)R(x,s,\lambda)ds \qquad (60)$$

لنعد إلى المعادلة (35) ولنكتبها بالشكل:

$$\frac{\varphi(x)-f(x)}{\lambda}=\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (61)$$

وباستخدام (59) نجد:

$$\frac{\varphi(x)-f(x)}{\lambda}=\int_a^b R(x,t,\lambda)g(t)dt-\lambda\int_a^b\int_a^b R(x,s,\lambda)K(s,t)\varphi(t)ds\,dt$$

وبالاستفادة من (61) نستطيع أن نكتب:

$$\frac{\varphi(x)-f(x)}{\lambda}=\int_a^b R(x,t,\lambda)\varphi(t)dt-\int_a^b R(x,s,\lambda)[\varphi(s)-f(s)]ds$$

ومنه:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (62)$$

وهذا يعني أنه ليس لمعادلة فريدهولم المفروضة سوى الحل (62). وبالعكس إن التابع $\varphi(x)$ المعطاة بـ (62) هي حل لمعادلة فريدهولم، لأن:

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+\lambda\int_a^b\int_a^b K(x,s)R(x,t,\lambda)f(t)dsdt$$

وبالاعتماد على (59) نجد:

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt$$

ومنها نجد العلاقة: $$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+f(x)$$

وهذا ما نريد إثباته.

ومن الواضح أن الحل المعطى بـ (62) لايختلف عن الحل المعطى بمتسلسلة نيومان (46). ويمكن التحقق من ذلك مباشرة. نحسب أولاً التكامل:

$$\int_a^b R(x,t,\lambda) f(t)\,dt$$

بعد تعويض التابع الحل بالمتسلسلة المعطاة بـ (57) ، والمكاملة حداً حداً .

مثال(6-2)

حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t)\,dt$$

مستخدماً النواة الحالة :

الحل:

إن :

$$K_1(x,t) = e^{x-t}$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 e^{x-s} e^{s-t}\,ds = e^{x-t}$$

وإذا تابعنا نجد كذلك أن $K_n(x,t) = e^{x-t}$ مهما كان العدد الصحيح الموجب n

إذن:

$$R(x,t,\lambda) = K(x,t)\left(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots\right) = \frac{e^{x-t}}{1-\lambda}$$

بفرض أن $|\lambda| < 1$. فالنواة الحالة دالة تحليلية في λ. ولكن بالتمديد التحليلي نجد أن ممددها تحليلي في المستوي كله باستثناء القيمة $\lambda = 1$. والحل المطلوب هو :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \int_0^1 e^{x-t} f(t)\,dt$$

مثال(2-7):

لنأخذ المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(t)dt = 1 \qquad (63)$$

هنا $K(x,t) \equiv 1$ ، وعندئذ فإن :

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt = \int_0^1\int_0^1 dxdt = 1$$

إذن الشرط (55) يفيد بأن المتسلسلة (45) تتقارب من أجل $|\lambda| < 1$.

وبحل المعادلة (63) كمعادلة بنواة متحللة، نحصل :

$$(1-\lambda)C = 1 \quad ; \quad C = \int_0^1 \varphi(t)dt$$

من أجل $\lambda = 1$ ، إن هذه المعادلة غير قابلة للحل، وعندئذ من أجل $\lambda = 1$ فإن المعادلة التكاملية (63) لاتملك أي حل، وينتج من ذلك أن التقريبات المتتالية لاتستطيع التقارب من (63) وذلك في دائرة نصف قطرها أكبر من الواحد، أي أن (63) قابلة للحل بشرط $|\lambda| < 1$.

في الواقع، إذا كان $\lambda \neq 1$، عندئذ التابع $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda}$ هو حل للمعادلة التكاملية المعطاة.

4- حل معادلات فريدهولم التكاملية المتجانسة:

وجدنا في الفقرة السابقة أن حل المعادلة المتجانسة :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (64)$$

يؤول إلى حل المجموعة المتجانسة من المعادلات الجبرية :

$$\sum_{ij}^{n} \left(\delta_{ij} - \lambda x_{ij}\right) c_j = 0 \quad i = 1,2,\dots,n \tag{65}$$

1- إذا لم تكن λ حلاً للمعادلة :

$$\det\left(\delta_{ij} - \lambda x_{ij}\right) = 0 \tag{66}$$

فإنه ليس للمعادلة (64) سوى الحل الصفري $\varphi(x) = 0$.

نسمي كل قيمة لـ λ تحقق (66) قيمة ذاتية للنواة $K(x,t)$.

2- إذا كانت λ قيمة ذاتية فإن للمعادلة (65) حلولاً مختلفة عن الحل الصفري $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$، وإذا نظرنا إلى كل حل $c_1, c_2, \dots, c_n$ على أنه متجه $\vec{c}$ مركباته هي $\left(c_1, c_2, \dots, c_n\right)$ فإن هذه الحلول تشكل فضاء متجهياً منتهي البعد $E_{(\lambda)}$. وإذا كان p عدد أبعاد هذا الفضاء فإن هناك p حلاً مستقلاً خطياً (65).

$$c^{(j)} = \left(c_1^j, c_2^j, \dots, c_n^j\right) \qquad j = 1,2,\dots,p \tag{67}$$

ويكون كل حل لـ (65) هو تركيب خطي من هذه الحلول.

إن كل حل من الحلول (67) يعطينا بتعويضه في :

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x) \tag{18}$$

حلاً لـ (64) :

بذلك نحصل على p حلاً لـ (64) لأجل القيمة الذاتية المفروضة. لتكن هذه الحلول هي : $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(p)}$.

وبسبب خطية المعادلة (64) في الدالة المجهولة φ فإن أي تركيب خطي من هذه الحلول هو حل لـ (64).

ومن الواضح أنه إذا كان p حلاً $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(p)}$ لـ (64) مرتبطة بعلاقة خطية.

$$\mu_1 \varphi^{(1)} + \mu_2 \varphi^{(2)} + \dots + \mu_p \varphi^{(p)} = 0$$

فإن المتجهات $c^{(1)},c^{(2)},...,c^{(p)}$ المقابلة تكون مرتبطة بالعلاقة :

$$\mu_1 c^{(1)} + \mu_2 c^{(2)} + ... + \mu_p c^{(p)} = 0$$

وبالعكس، وعلى هذا فإن لفضاء حلول المعادلة المتجانسة (64) البعد نفسه كما لفضاء حلول المجموعة (65).

5- **القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لمعادلات فريدهولم المتجانسة :**

لتكن معادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة ومن النوع الثاني :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad (69)$$

إن هذه المعادلة تقبل الحل الصفري $\varphi(x)=0$ دوماً.

القيم الذاتية :

تدعى قيم الوسيط λ والذي لأجله تقبل المعادلة (69) حلاً غير صفري بالقيم الذاتية لهذه المعادلة أو للنواة $K(x,t)$.

المتجهات الذاتية:

يدعى كل حل غير صفري للمعادلة (69) والموافق للقيمة الذاتية λ بالمتجه الذاتي.

ملاحظات:

1- إن العدد $\lambda = 0$ ليس قيمة ذاتية، لذلك فمن أجل $\lambda = 0$ ينتج أن $\varphi(x) \equiv 0$

2- إذا كانت النواة $K(x,t)$ مستمرة في الساحة:

$$\Omega\{a \le x \ , \quad t \le b\}$$

أو قابلة للمكاملة تربيعياً في Ω [أو $K(x,t) \in L^2(\Omega)$].

وإذا كانت الأعداد a و b محدودة ، عند ذلك فمن أجل كل قيمة ذاتية λ يوجد عدد منته من التوابع الذاتية المستقلة خطياً يدعى هذا العدد بالدليل، ومن أجل قيم ذاتية مختلفة يوجد أدلة مختلفة.

3- لتكن معادلة فريدهولم التكاملية ذات النواة المتحللة :

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t)\right]\varphi(t)\,dt=0 \qquad (70)$$

إن القيم الذاتية لهذه المعادلة هي جذور المعادلة الجبرية:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}=0 \qquad (71)$$

والتي درجتها $p \leq n$ ، نلاحظ أن $\Delta(\lambda)$ هو محدد مجموعة المعادلات المتجانسة والخطية:

$$\left.\begin{array}{l} (1-\lambda a_{11})C_1-\lambda a_{12}C_2-\dots-\lambda a_{1n}C_n=0 \\ -\lambda a_{21}C_1+(1-\lambda a_{22})C_2-\dots-\lambda a_{2n}C_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda a_{n1}C_1-\lambda a_{n2}C_2-\dots+(1-\lambda a_{nn})C_n=0 \end{array}\right\} \qquad (72)$$

حيث الكميات a_{mk} و C_m $(k,m=1,2,\dots,n)$ لها نفس مفاهيم الفقرة السابقة.

إذا كان للمعادلة (71) p جذراً $1\leq p\leq n$، عند ذلك يكون للمعادلة التكاملية (70) p قيمة ذاتية، ومن أجل كل قيمة ذاتية λ_m $(m=1,2,\dots,p)$ يوجد حلول غير صفرية.

$$C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ldots, C_n^{(1)} \to \lambda_1,$$
$$C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \ldots, C_n^{(2)} \to \lambda_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1^{(p)}, C_2^{(p)}, \ldots, C_n^{(p)} \to \lambda_p$$

لمجموعة المعادلات (72).

إن الحلول غير الصفرية للمعادلة التكاملية (70) توافق هذه الحلول، هذا يعني، بأن التوابع الذاتية ستكون من الشكل:

$$\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(1)} a_k(x), \qquad \varphi_2(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(2)} a_k(x), \ldots$$
$$\varphi_p(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(p)} a_k(x)$$

4- من المفيد الإشارة إلى أنه من أجل معادلة تكاملية ذات نواة متحللة فإن عدد القيم الذاتية لايتجاوز n ويوافقها توابع ذاتية.

5- في حالة نواة عشوائية غير متحللة، فإن القيم الذاتية تكون معدومة لمحدد فريدهولم $\Delta(\lambda)$ ، هذا يعني أن هذه القيم ستكون أقطاب للنواة الحالة $R(x,t;\lambda)$ ، وينتج عن ذلك، في الحالة الخاصة، أنه من أجل معادلة فولتيرا التكاملية :

$$\varphi(x)=\lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

حيث $K(x,t)\in L^2(\Omega)$

5-1- حالة النوى المتحللة:

لتكن المعادلة التكاملية المتجانسة ذات النواة المتحللة :

$$\varphi(x)-\lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)\right]\varphi(t)dt=0 \qquad (73)$$

حيث الوسيط λ ليس قيمة ذاتية (هذا يعني $\Delta(\lambda)\neq 0$)، في هذه الحالة للمعادلة (73) الحل الوحيد الصفري $\varphi(x)\equiv 0$. (وذلك حسب مبرهنة فريدهولم) لكن إذا كان λ قيمة ذاتية ($\Delta(\lambda)\equiv 0$)، عندئذ، وبالإضافة للحل الصفري، فالمعادلة (73) لها حلول غير صفرية، هذه الحلول هي التوابع الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية المعتبرة، وذلك حسب مبرهنة فريدهولم أيضاً.

في هذه الحالة، إن الحل العام للمعادلة التكاملية (73) المتجانسة هو تركيب خطي لهذه التوابع الذاتية.

مثال (8-2) :

أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية لمعادلة فريدهولم التكاملية :

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\left(\cos^2 x\cos 2t+\cos 3x\cos^3 t\right)\varphi(t)\,dt=0$$

لدينا :

$$\varphi(x)=\lambda\cos^2 x\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos 2t\,dt+\lambda\cos 3x\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos^3 t\,dt$$

بإدخال:

$$C_1=\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos 2t\,dt,\quad C_2=\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos^3 t\,dt \tag{74}$$

نحصل :

$$\varphi(x)=C_1\lambda\cos^2 x+C_2\lambda\cos 3x \tag{75}$$

باستبدال (75) في (74) نحصل على معادلات خطية متجانسة:

$$
(76)\quad \begin{cases} C_1\left(1-\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos^2 t\cos 2t\,dt\right)-C_2\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos 3t\cos 2t\,dt=0 \\ -C_1\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos^5 t\,dt+C_2\left(1-\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos^3 t\cos 3t\,dt\right)=0 \end{cases}
$$

ونظراً لأن :

$$
\int\limits_0^{\pi}\cos^2 t\cos 2t\,dt=\frac{\pi}{4},\quad \int\limits_0^{\pi}\cos 3t\cos 2t\,dt=0
$$

$$
\int\limits_0^{\pi}\cos^5 t\,dt=0 \qquad , \quad \int\limits_0^{\pi}\cos^3 t\cos 3t\,dt=\frac{\pi}{8}
$$

فالمجموعة (76) تأخذ الشكل:

$$
(77)\quad \begin{cases} \left(1-\frac{\lambda\pi}{4}\right)C_1=0 \\ \left(1-\frac{\lambda\pi}{8}\right)C_2=0 \end{cases}
$$

إذن فالقيم الذاتية تتعين من المحدد :

$$
\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix}=0
$$

والتي هي :

$$
\lambda_1=\frac{4}{\pi}\ ,\ \ \lambda_2=\frac{8}{\pi}
$$

- من أجل $\lambda=\frac{4}{\pi}$ فإن المجموعة (77) تصبح :

$$
\begin{cases} 0\,.\,C_1=0 \\ \frac{1}{2}\,.\,C_2=0 \end{cases}
$$

عندما $C_2=0$ و C_1 اختياري والتابع الذاتي سيكون :

$$\varphi_1(x)=C_1\lambda\cos^2 x$$

بوضع $C_1\lambda=1$ نحصل على :

$$\varphi_1(x)=\cos^2 x$$

ومن أجل : $\lambda_2=\dfrac{8}{\pi}$

فإن (77) تكون من الشكل :

$$\begin{cases}(-1).C_1=0\\ \;\;0\;.\;C_2=0\end{cases}$$

عندما $C_1=0$ و C_2 اختياري ، عندئذ التابع الذاتي سيكون $\varphi_2(x)=C_2\lambda\cos 3x$ ، وبفرض $C_2\lambda=1$ نحصل على $\varphi_2(x)=\cos 3x$.

وهكذا، فإنه من أجل القيم الذاتية

$$\lambda_1=\frac{4}{\pi}\;,\;\;\lambda_2=\frac{8}{\pi}$$

فإن التوابع المميزة الموافقة هي :

$$\varphi_1(x)=\cos^2 x\quad,\quad\varphi_2(x)=\cos 3x$$

ملاحظة : قد يصدف أن بعض معادلات فريدهولم التكاملية المتجانسة لاتملك قيم ذاتية ولاتوابع ذاتية .

مثال (9-2) : لتكن المعادلة التكاملية المتجانسة :

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(3x-2)t\,\varphi(t)dt=0$$

برهن أنه ليس لهذه المعادلة أي قيم ذاتية ولاتوابع ذاتية .

الحل : بالحقيقة لدينا :

$$\varphi(x)=\lambda(3x-2)\int_0^1 t\,\varphi(t)dt$$

إذا وضعنا :

$$C=\int_{0}^{1} t\varphi(t)dt \tag{78}$$

نحصل :

$$\varphi(x)=C\lambda(3x-2) \tag{79}$$

باستبدال (79) في (78) نجد أن :

$$\left[1-\lambda\int_{0}^{1}\left(3t^{2}-2t\right)dt\right].C=0 \tag{80}$$

لكن بما أن

$$.\int_{0}^{1}\left(3t^{2}-2t\right)dt=0$$

إذن المعادلة (80) محققة ومنه :

$C=0$ وعندئذ $\varphi(x)\equiv 0$

وهكذا من أجل أية قيمة لـ λ ، فإن المعادلة المتجانسة لها حل وحيد هو الحل الصفري $\varphi(x)\equiv 0$، وبالتالي فليس لها أية قيمة ذاتية أو تابع ذاتي.

ملاحظة:

إن النواة الحالة لنواة متناظرة هي تابع تحليلي في λ ، تكون فيه القيم الذاتية للمعادلة التكاملية أقطاب بسيطة λ_i ورواسبها هي التوابع الذاتية.

2-5- حالة النوى التابعة للفرق بين المتحولات:

لتكن المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)dt \tag{81}$$

حيث النواة $K(x)(-\pi \le x \le \pi)$ هي تابع زوجي، وممدد دورياً على المحور x أي :

$$K(x-t)=K(t-x) \tag{82}$$

يمكن البرهان أن القيم الذاتية لهذه المعادلة هي:

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n} (n=1,2,...) \tag{83}$$

كما يمكن البرهان على أن التوابع الذاتية الموافقة هي :

$$\begin{cases} \varphi_n^{(1)}(x)=\cos nx \quad ; \quad (n=1,2,...) \\ \varphi_n^{(2)}(x)=\sin nx \quad ; \quad (n=1,2,...) \end{cases} \tag{84}$$

حيث a_n هي معاملات (عوامل) فورييه للتابع $K(x)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx \, dx \quad (n=1,2,...) \tag{85}$$

وهكذا من أجل كل قيمة λ_n يوجد تابعان ذاتيان مستقلان هما : sinnx,cosnx، وهكذا فإن كل قيمة λ_n هي قيمة خاصة مضاعفة .

إن التابع $\varphi_0(x) \equiv 1$ هو أيضاً تابع ذاتي للمعادلة (81) موافق للقيمة الذاتية:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi a_0} \; ; \; a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) dx$$

سنبرهن الآن، وعلى سبيل المثال، أن cosnx هو تابع ذاتي للمعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = \frac{\pi^{-1}}{a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \varphi(t) dt \tag{86}$$

حيث :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx \, dx$$

بإجراء التبديل $x - t = z$ نجد :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\cos nt dt = -\int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z)\cos n(x-z)dz =$$

$$= \cos nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z)\cos nz dz + \sin nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z)\sin nz dz = \pi a_n \cos nx$$

إن التكامل الثاني معدوم بسبب زوجية التابع ، أما التكامل الأول فهو πa_n حيث a_n هو عامل فورييه للتابع الزوجي $K(x)$ الموسع:

$$\cos nx = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\cos nt\, dt$$

وهذا يعني بأن $\cos nx$ هو تابع ذاتي للمعادلة (86).

وبشكل مشابه يمكن البرهان على أن $\sin\ nx$ هو تابع ذاتي للمعادلة التكاملية (86) موافق لنفس القيمة الذاتية $\frac{1}{\pi a_n}$.

3-5- حالة النوى المتناظرة :

لنعتبر الآن معادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{87}$$

إن المبرهنات التالية صحيحة من أجل المعادلة (87) ذات النواة المتناظرة. وسنبرهن بعضاً منها في الفصل الثالث.

⊞ **مبرهنة (1)** : إذا كانت النواة متناظرة في المعادلة (87) فإنها تملك قيمة ذاتية واحدة على الأقل.

⊞ **مبرهنة (2)** : يوافق كل قيمة ذاتية λ عدد محدود (منته) q من التوابع الذاتية المستقلة خطياً للمعادلة (87) ، علاوة على ذلك فإن:

$$\sup q \le \lambda^2 B^2$$

حيث :

$$B^2 = \int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dx\, dt$$

يدعى العدد q بالدليل أو رتبة التضاعف للقيمة الذاتية.

⊞ **مبرهنة (3) :** كل زوج من التوابع الذاتية $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ والموافقة لقيمتين ذاتيتين $\lambda_1 \neq \lambda_2$ يكون متعامداً، أي أن :

$$\int_a^b \varphi_1(x).\varphi_2(x)dx = 0$$

⊞ **مبرهنة (4) :**

1- يوجد عدد منته من القيم الذاتية في كل مجال محدود من المحور λ ، إن الحد الأعلى لـ m قيمة ذاتية يعرف بالمتراجحة :

$$m \leq \ell^2 B^2$$

حيث $-\ell < \lambda < \ell$

2- إذا كانت النواة $K(x,t)$ للمعادلة التكاملية (87) هي تابع غرين من أجل مسألة ما لشتورم ليوفيل ، فإن مسألة إيجاد القيم الذاتية والتوابع الذاتية يؤول إلى الحل لمسألة شتورم ليوفيل المشار إليها.

ملاحظة :

إذا كانت النواة المكررة $K_n(x,t)$ للنواة $K(x,t)$ متناظرة، فيمكن التأكيد أن النواة $K(x,t)$ لها على الأقل قيمة ذاتية (حقيقية أو مركبة)، عندئذ فإن القيم الذاتية من الدرجة n ستكون أعداداً حقيقية، في الحالة الخاصة، إذا كان $K(x,t) = -K(t,x)$ (تدعى النوى في هذه الحالة مائلة للتناظر) فإن جميع القيم الذاتية ستكون تخيلية $\lambda = \beta i$ ، حيث β عدد حقيقي.

مثال (2-10) :

أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلة التكاملية المتجانسة :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi K(x,t)\varphi(t)dt = 0$$

حيث النواة :

$$K(x,t)=\begin{cases}\cos x\sin t, & 0\le x\le t,\\ \cos t\sin x, & t\le x\le \pi\end{cases}$$

الحل :

لنكتب المعادلة بالشكل :

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt+\lambda\int_x^\pi K(x,t)\varphi(t)dt$$

أو :

$$\varphi(x)=\lambda\sin x\int_0^x \varphi(t)\cos t\,dt+\lambda\cos x\int_x^\pi \varphi(t)\sin t\,dt \qquad (88)$$

بمفاضلة طرفي (88) ، نجد :

$$\varphi'(x)=\lambda\cos x\int_0^x \varphi(t)\cos tdt+\lambda\sin x\cos x\varphi(x)-$$

$$-\lambda\sin x\int_x^\pi \varphi(t)\sin tdt-\lambda\sin x\cos x\varphi(x)$$

أو :

$$\varphi'(x)=\lambda\cos x\int_0^x \varphi(t)\cos t\,dt-\lambda\sin x\int_x^\pi \varphi(t)\sin t\,dt \qquad (89)$$

وبالمفاضلة مرة أخرى، نجد:

$$\varphi''(x)=-\lambda\sin x\int_0^x \varphi(t)\cos t\,dt+\lambda\cos^2 x\varphi(x)-$$

$$-\lambda\cos x\int_x^\pi \varphi(t)\sin tdt+\lambda\sin^2 x\varphi(x)=$$

$$=\lambda\varphi(x)-\left[\lambda\sin x\int_0^x \varphi(t)\cos t\,dt+\lambda\cos x\int_x^\pi \varphi(t)\sin t\,dt\right]$$

وحسب (88) فإن المقدار الموجود بين القوسين المتوسطين يساوي $\varphi(x)$، لـذلك تكتب العلاقة السابقة بالشكل:

$$\varphi''(x)=\lambda\,\varphi(x)-\varphi(x)$$

من (88) و (89) نجد أن:

$$\varphi(\pi)=0 \quad , \quad \varphi'(0)=0$$

وهكذا فإن المعادلة التكاملية المعطاة تؤول إلى المسألة ذات القيم الحدية التالية:

$$\begin{cases} \varphi''(x)-(\lambda-1)\varphi(x)=0 & (90) \\ \varphi(\pi)=0 \ , \ \varphi'(0)=0 & (91) \end{cases}$$

وهناك ثلاث حالات :

1- $\lambda-1=0$ أو $\lambda=1$

في هذه الحالة المعادلة (90) تأخذ الشكل :

$$\varphi''(x)=0$$

والتي حلها العام :

$$\varphi(x)=C_1x+C_2$$

باستعمال الشروط الحدية (91) ، نحصل على مجموعة المعادلات :

$$C_1\pi+C_2=0$$
$$C_1=0$$

والتي لها الحل الوحيد $C_1=0$, $C_2=0$، وبالتالي فـإن المعادلـة التكامليـة لها الحل البديهي الصفري $\varphi(x)\equiv 0$.

2- $\lambda-1>0$ أو $\lambda>1$

إذن فالحل العام للمعادلة (90) من الشكل :

$$\varphi(x)=C_1\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda-1}\right)x+C_2\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda-1}\right)x$$

عندئذ :

$$\varphi'(x)=\sqrt{\lambda-1}\left(C_1\text{sh}\sqrt{\lambda-1}\,x+C_2\text{ch}\sqrt{\lambda-1}\,x\right)$$

من أجل إيجاد قيم الثوابت فإن الشروط الحدية تحقق المعادلات:

$$\begin{cases} C_1\text{ch}\,\pi\sqrt{\lambda-1}+C_2\text{sh}\,\pi\sqrt{\lambda-1}=0 \\ C_2=0 \end{cases}$$

والتي حلها الوحيد $C_1=0\,,\,C_2=0$.

إن للمعادلة التكاملية الحل البديهي $\varphi(x)\equiv 0$ ، وهكذا فليس للمعادلة التكاملية أية قيمة ذاتية وبالتالي ليس لها أي تابع ذاتي وذلك من أجل $\lambda\geq 1$.

3- $\lambda-1<0$ أو $\lambda<1$

الحل العام للمعادلة التفاضلية (90) :

$$\varphi(x)=C_1\cos\sqrt{1-\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{1-\lambda}\,x$$

عندئذ نجد :

$$\varphi'(x)=\sqrt{1-\lambda}\left(-C_1\sin\sqrt{1-\lambda}\,x+C_2\cos\sqrt{1-\lambda}\,x\right)$$

في هذه الحالة ، إن الثابتين C_1, C_2 يحققان :

$$\begin{cases} C_1\cos\pi\sqrt{1-\lambda}+C_2\sin\pi\sqrt{1-\lambda}=0, \\ \sqrt{1-\lambda}\,C_2=0 \end{cases} \tag{92}$$

إن محدد مجموعة المعادلات (92) هو :

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \sin\pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}$$

من أجل إيجاد القيم الذاتية نضع $\Delta(\lambda)=0$ ، أي :

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \sin\pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}=0 \tag{93}$$

أو :

$$\sqrt{1-\lambda}\cos\pi\sqrt{1-\lambda}=0$$

بفرض :

$$\sqrt{1-\lambda}\neq 0$$

إذن :

$$\cos\pi\sqrt{1-\lambda}=0$$

أي أن :

$$\pi\sqrt{1-\lambda}=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

حيث n عدد صحيح ، إن جميع جذور المعادلة (93) تعطى بالمعادلة :

$$\lambda_n=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$$

من أجل القيم $\lambda=\lambda_n$ فإن (92) تأخذ الشكل :

$$\begin{cases} C_1 .0=0 \\ C_2 \quad =0 \end{cases}$$

والتي لها عدد غير منته من الحلول غير الصفرية :

$$\begin{cases} C_1=C \\ C_2=0 \end{cases}$$

حيث C ثابت اختياري، عندئذ فإن المعادلة التكاملية الأصلية لها عدد لانهائي من الحلول ومن الشكل :

$$\varphi(x)=C\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

والتي هي التوابع الذاتية لهذه المعادلة .

إذن ، القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلة التكاملية ستكون :

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \ , \ \varphi_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$$

حيث n عدد صحيح ما.

5-4- حالة النوى اللاخطية :

لتكن المعادلة التكاملية اللاخطية:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))dt \qquad (94)$$

إن $\varphi(x) \equiv 0$ هو حل لهذه المعادلة، وإن :

$$K(x, t, 0) \equiv 0$$

بشكل مشابه لحالة المعادلة التكاملية الخطية، فإن الحل غير الصفري $\varphi(x) \not\equiv 0$ للمعادلة (94) يدعى بتابع ذاتي، كما أن قيمة الوسيط λ الموافقة تدعى بالقيمة الذاتية للمعادلة، وبالتالي فلايوجد للمعادلة التكاملية (94) حلول غير صفرية صغيرة.

ومن أجل $|\lambda|$ صغيرة، هذا يعني، أنه ليس للمعادلة (94) توابع ذاتية من أجل نظيم صغير. إن مسألة التوابع الذاتية الصغيرة يمكن أن تظهر في حالة تناقص $|\lambda|$، من أجل ذلك لنتدخل المفهوم التالي:

5-4-1-نقطة التفرع للمعادلة اللاخطية :

يدعى العدد λ_0 بنقطة تفرع للمعادلة اللاخطية (94) إذا كان من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد قيمة ذاتية λ للمعادلة (94) بحيث إن :

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

بالإضافة إلى ذلك، يوافق القيمة الذاتية λ تابع ذاتي واحد على الأقل $\varphi(x)$ غير معدوم وبحيث يكون :

$$\|\varphi\| < \varepsilon$$

بشكل آخر، يمكن اعتبار نقطة التفرع هي تلك القيمة للوسيط λ، والتي بجوارها يتفرع الحل الصفري للمعادلة (94)، أي يظهر حلول غير صفرية صغيرة (بالنظيم) لهذه المعادلة.

أما في المسائل الخطية فإن قيم التفرع تتطابق مع القيم الذاتية.

⊙ تطبيق:

في مقاومة المواد إن مفهوم نقاط التفرع تظهر عند دراسة مسألة شروط الاستقرار، والتي تؤدي لتحديد القوى الحرجة.

إن مسألة انعطاف قضيب معدني أحادي البعد عامل صلابته $\rho(x)$ تحت تأثير قوة $\bar{P}$ تقود إلى حل معادلة تكاملية لاخطية:

$$\varphi(x)=P_{\rho(x)}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\sqrt{\left[1-\int_0^1 K'_x(x,t)\varphi(t)dt\right]^2}\,dt \qquad (95)$$

حيث $\varphi(x)$ هو التابع المجهول ويمثل الانحناء أو الإزاحة الصغيرة حول موضع التوازن.

من أجل $\bar{P}$ صغيرة، المعادلة (95) تقبل حلاً وحيداً غير صفري في الفضاء $C[0,1]$ هذا يعني أنه من أجل $\bar{P}$ صغيرة فإن القضيب لاينعطف (لايتحنب).

تؤكد مقاومة المواد بأن الانعطاف (التحنيب) لايحدث إلاّ إذا بلغت القوة المؤثرة حداً أكبر من قيمة القوة الحرجة لأولر، هنا نعتبر القوة الحرجة لأولر قيمة تفرع.

مثال (11-2):

أوجد نقاط التفرع للمعادلة التكاملية اللاخطية:

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1\left[\varphi(t)+\varphi^3(t)\right]dt \qquad (96)$$

نضع :

$$C=\int_0^1\left[\varphi(t)+\varphi^3(t)\right]dt$$

إذن :

$$\varphi(x)=C\lambda \qquad (97)$$

وبذلك تؤول المعادلة (95) إلى المعادلة الجبرية :

$$C=\lambda C+\lambda^3C^3 \qquad (98)$$

من (98) ، نحصل على الثوابت :

$$C_1=0\ ,\quad C_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda^3}}$$

عندئذ ومن (97) نجد :

$$\varphi_1=0 \quad , \quad \varphi_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

وهكذا فمن أجل أي $0<\lambda<1$ ، فإن المعادلة (96) تقبل حلولاً حقيقية غير صفرية. من أجل $\lambda=1$ ، المعادلة (96) تقبل فقط الحل الصفري $\varphi\equiv 0$.

ومن أجل أي $0<\varepsilon<1$ ، العدد $\lambda=1-\varepsilon$ هو قيمة ذاتية للمعادلة (96) والتي يوافقها تابعان ذاتيان:

$$\varphi_1=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\ ;\quad \varphi_2=-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}}\quad ;\quad \varepsilon=1-\lambda$$

إذن ، النقطة $\lambda_0=1$ هي نقطة تفرع للمعادلة (96).

ملاحظة : يمكن أيضاً تعريف نقاط تفرع لحلول غير صفرية للمعادلات التكاملية اللاخطية.

6- معادلات فريدهولم التكاملية المنقولة :

نسمي المعادلة :

$$h(x)=\ell(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(t,x)h(t)dt \qquad (99)$$

منقول المعادلة التكاملية (1) . إن النواة في (99) لاتختلف عن النواة في (1) سوى أن x و t تبادلات موضعيهما . فمثلاً المعادلة التكاملية :

$$h(x)=x^{2}+\lambda\int_{0}^{1}\left(x^{2}-t^{2}\right)h(t)dt$$

هي منقول المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=3x+\lambda\int_{0}^{1}\left(t^{2}-x^{2}\right)\varphi(t)dt$$

إن حل المعادلة (99)، عندما تكون النواة متحللة، مكافئ لحل مجموعة المعادلات:

$$C_{i}-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_{ki}C_{k}=\ell_{i} \qquad (100)$$

وذلك بفرض أن :

$$C_{i}=\int_{a}^{b}a_{i}(x)h(x)dx \qquad \ell_{i}=\int_{a}^{b}a_{i}(x)\ell(x)dx$$

وبما أن معين الأمثال للمجموعة (100) لايختلف عن معين الأمثال لـ (65) ، فإن القيم الذاتية للنواة K(x,t) لاتختلف عن القيم الذاتية للنواة K(t,x) . ينتج عن هذا أنه إذا كان للمعادلة (1) حل وحيد فإن للمعادلة (99) كذلك حلاً وحيداً.

7- حل معادلات فريدهولم غير المتجانسة :

سيتم فهم طريقة بناء حل أو حلول معادلات فريدهولم غير المتجانسة، وذلك بالاعتماد على المبرهنة التالية:

1-7- مبرهنة فريدهولم (5):

لنفرض الآن أن λ قيمة ذاتية للنواة $K(x,t)$، عندئذ يكون لمجموعة المعادلات (65) حل غير الحل الصفري، وتشكل مجموعة الحل فضاء متجهياً $E_{(\lambda)}$، كما أنه يكون لمجموعة المعادلات (100) حل غير الحل الصفري، وتشكل مجموعة الحل فضاء متجهياً $E'_{(\lambda)}$. ويكون عدد أبعاد $E_{(\lambda)}$ مساوياً لعدد أبعاد $E'_{(\lambda)}$.

لتكن :

$$C^{(j)}=\left(C_1^{(j)},C_2^{(j)},\dots,C_n^{(j)}\right)\quad (j=1,2,\dots,p) \tag{101}$$

قاعدة لـ $E'_{(\lambda)}$. عندئذ يعطينا كل حل من هذه الحلول بتعويضه في :

$$h(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}C_i b_i(x)$$

حلاً $h^{(i)}$ للمعادلة المتجانسة الموافقة لـ (99). إن الحلول $h^{(1)},h^{(2)},\dots,h^{(p)}$ مستقلة خطياً وتشكل قاعدة لفضاء حلول هذه المعادلة.

نعلم من أبحاث الجبر الخطي أنه يلزم ويكفي كي يكون للمعادلة (9) حل، عندما يكون معين الأمثال معدوماً، هو أن يتعامد المتجه $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ مع جميع المتجهات $C^{(j)}$، أي أن يتحقق الشرط :

$$\sum_{i=1}^{n}f_i C_i^{(j)}=0\qquad (j=1,2,\dots,p)$$

وبما أن :

$$f_i=\int_a^b b_i(t)f(t)dt$$

فإننا نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}C^{(j)}\int_a^b b_i(t)f(t)dt=\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{n}C_i^{(j)}b_i(t)\right]f(t)dt=0$$

إذن :

$$\int_a^b h^{(j)}(t)f(t)dt=0 \qquad (j=1,2,\dots,p)$$

وإذا ما تحققت هذه الشروط فعندئذ يكون للمعادلة (1) حل. لنفرض أن φ_0 حل خاص لهذه المعادلة، وإننا أجرينا التحويل :

$$\varphi=\varphi_0+\phi$$

نعوض في (1) فنجد :

$$\phi=\lambda\int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

والحل العام للأخيرة هو تركيب خطي من الحلول المستقلة خطياً $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\dots,\varphi^{(p)}$ ، أي :

$$\phi=\mu_1\varphi^{(1)}+\mu_2\varphi^{(2)}+\dots+\mu_p\varphi^{(p)}$$

فالحل العام لـ (1) هو :

$$\varphi=\varphi_0+\mu_1\varphi^{(1)}+\mu_2\varphi^{(2)}+\dots+\mu_p\varphi^{(p)}$$

نستخلص من كل ما سبق:

مبرهنة فريدهولم:

إذا كان لدينا المعادلة التكاملية لفريدهولم:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (102)$$

فإننا نميز بين حالتين:

(i) λ ليست قيمة ذاتية للنواة K . عندئذ يكون للمعادلة التكاملية المتجانسة ولمنقولها الحل الصفري فقط، ويكون للمعادلة (102) ولمنقولها حل وحيد .

(ب) λ قيمة ذاتية لـ K عندئذ يكون للمعادلة المتجانسة الموافقة لـ (102) حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء ذات بعد منته كما يكون لمنقول هذه المعادلة المتجانسة كذلك حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء، له البعد نفسه. وإذا كانت $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\ldots,\varphi^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الأولى و $h^{(1)},h^{(2)},\ldots,h^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الثانية، فعندئذ يلزم ويكفي كي يكون لـ (102) حل هو أن تتحقق الشروط :

$$\int_a^b h^{(j)}(t)f(t)dt=0 \qquad (j=1,2,\ldots,p)$$

ويكون الحل العام عندئذ هو حاصل جمع حل خاص إلى تركيب خطي من التوابع $\varphi^{(j)}$.

مثال (2-12) بين أنه ليس للمعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+t)\varphi(t)dt$$

أي حل عندما $f(x)=x$ ، ولكن لها عدداً غير منته من الحلول عندما $f(x)=1$.

الحل :

إن :

$$a_1(x)=\sin x\ ,\quad a_2(x)=\cos x\ ,\ b_1(t)=\cos t\ \ ,\ b_2(t)=\sin t$$

وبالتالي فإن :

$$x_{11}=x_{22}=0 \qquad x_{12}=x_{21}=\pi$$

والمعادلات التي تعين c_i هي:

$$\begin{aligned} c_1-\lambda\pi c_2&=f_1 \\ -\lambda\pi c_1+c_2&=f_2 \end{aligned} \qquad (102')$$

بفرض أن :

$$f_1 = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt \qquad f_2 = \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt$$

وعلى هذا فإن :

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda x_{11} & -\lambda x_{12} \\ -\lambda x_{21} & 1-\lambda x_{22} \end{vmatrix}=1-\lambda^2\pi^2$$

وهناك قيمتان مميزتان $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ ، $\lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$. وعلى هذا فإن للمعادلة المفروضة عدداً غير منته من الحلول أو ليس لها أي حل حسبما تكون الشروط :

$$\int_0^{2\pi} f(t)h^{(j)}(t)dt = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,p)$$

محققة أو غير محققة، وذلك بفرض أن $h^{(j)}(x)$ تشكل قاعدة لفضاء الحلول للمعادلة المتجانسة الموافقة لمنقول المعادلة التكاملية المفروضة.

ولكن بما أن النواة متناظرة فإن المعادلات الجبرية للمعادلة التكاملية المتجانسة هي:

$$\begin{cases} c_1 - \lambda\pi c_2 = 0 \\ -\lambda\pi c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

لأجل $\lambda = \frac{1}{\pi}$. أي أن $c_1 = c_2$، فعدد أبعاد فضاء الحلول لهذه المجموعة يساوي الواحد وكذلك عدد أبعاد فضاء الحلول للمعادلة المتجانسة المنقولة يساوي الواحد.

$$h^{(1)}(x)=\varphi^{(1)}(x) = c_1'(\cos x + \sin x)$$

وشرط وجود الحل للمعادلة التكاملية هو :

$$\int_0^{2\pi} (\cos x + \sin x)f(x)dx = 0$$

فإذا كان $f(x) = x$ فإن :

$$\int_0^{2\pi} (\cos x + \sin x)x\, dx = -2\pi \neq 0$$

وليس للمعادلة التكاملية أي حل. أما إذا كان $f(x) = 1$ فإن :

$$\int_0^{2\pi} (\cos x + \sin x)dx = 0$$

فللمعادلة عدد غير منته من الحلول.

وإذا أردنا الوصول إلى هذه الحلول، نلاحظ في هذه الحالة أن :

$$f_1 = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0 \quad , \quad f_2 = \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$$

ويكون حل المجموعة (102') عندئذ هو $c_1 = c_2$ إذن الحل العام هو :

$$\varphi(x) = f(x) + c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x)$$
$$\varphi(x) = 1 + c_1(\cos x + \sin x)$$

بفرض أن c_1 ثابت كيفي.

8- طريقة محددات فريدهولم :

إن حل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (103)$$

يعطى بالصيغة :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt \qquad (104)$$

حيث التابع $R(x,t;\lambda)$ يدعى النواة الحالة (لفريدهولم) للمعادلة (103) .

ويعرف بالعلاقة :

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \quad , \quad D(\lambda) \neq 0 \qquad (105)$$

إن $D(\lambda)$ و $D(x,t;\lambda)$ هي متسلسلات قوى في λ وتعرفان بالعلاقات :

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,t)\lambda^n \tag{106}$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n \tag{107}$$

حيث العوامل تعطى بالصيغ :

$$B_n(x,t)=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \dots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t) & K(t_2,t_1) & \dots & K(t_2,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1\dots dt_n \tag{108}$$

وأن :

$$B_0(x,t)=K(x,t)$$

$$C_n=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \dots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \dots & K(t_2,t_n) \\ K(t_3,t_1) & K(t_3,t_2) & \dots & K(t_3,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1\dots dt_n \tag{109}$$

يدعى التابع $D(x,t;\lambda)$ بصغير فريدهولم. و $D(\lambda)$ محدد فريدهولم، وعندما تكون النواة $K(x,t)$ محدودة، أو عندما يكون التكامل :

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt$$

محدوداً فإن المتسلسلتين (106) و (107) تتقاربان من أجل جميع قيم λ ، وبالتالي ستكونان تابعين تحليليين في λ ، وبالتالي فإن النواة الحالة :

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

هي تابع تحليلي في λ باستثناء تلك القيم التي تعدم $D(\lambda)$ والتي هي أقطاب النواة الحالة $R(x,t;\lambda)$.

مثال (13-2) :

باستخدام محددات فريدهولم أوجد النواة الحالة للنواة :

$$K(x,t)=xe^t \quad ; \quad a=0, \; b=1$$

الحل :

لدينا :

$$B_0(x,t)=K(x,t)\equiv xe^t$$

$$B_1(x,t)=\int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1=0,$$

$$B_2(x,t)=\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2=0$$

عندئذ فإن المحددات تحت رمز التكامل تكون معدومة، وبسهولة نجد أن $B_n(x,t)=0$ ، لنوجد العوامل C_n :

$$C_1=\int_0^1 K(t_1,t_1)dt_1=\int_0^1 t_1e^{t_1}dt_1=1$$

$$C_2=\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2=0$$

وبسهولة نجد أن $C_n=0$ وفي مثالنا وباستخدام (106) و (107) نجد :

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)=xe^t; \quad D(\lambda)=1-\lambda$$

وهكذا فإن :

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}=\frac{xe^{t}}{1-\lambda}$$

لنستخدم النتائج التي توصلنا إليها لحل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)-\lambda\int_{0}^{1} xe^{t}\varphi(t)dt=f(x)\quad(\lambda\neq1)$$

باستخدام (104) نجد:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{0}^{1}\frac{xe^{t}}{1-\lambda}f(t)dt$$

وبشكل خاص عندما $f(x)=e^{-x}$ فإن :

$$\varphi(x)=e^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}x$$

ملاحظة: في بعض الحالات الخاصة والنادرة، فإنه من الممكن حساب العوامل $C_n, B_n(x,t)$ من المتسلسلتين (106) و (107) باستخدام (108) و (109) وباستخدام هذه العلاقات، يمكن أن نتوصل إلى العلاقات التدريجية التالية :

$$B_n(x,t)=C_nK(x,t)-n\int_{a}^{b}K(x,s)B_{n-1}(s,t)ds \tag{110}$$

$$C_n=\int_{a}^{b}B_{n-1}(s,s)ds \tag{111}$$

وبمعرفة العوامل $B_0(x,t)=K(x,t)$ و $C_0=1$ يمكن استخدام (110) و (111) لحساب $C_1,\ B_1(x,t),\ C_2,\ B_2(x,t),\ C_3....$.

مثال (2-14) :

باستخدام العلاقات (110) و (111) ، أوجد النواة الحالة للنواة :

$$K(x,t)=x-2t\ ;\ \ 0\le x\le1\quad 0\le t\le1$$

الحل:

لدينا :

$$C_0=1,\ B_0(x,t)=x-2t$$

باستخدام (111)، نجد :

$$C_1=\int_0^1(-s)ds=-\frac{1}{2}$$

وباستخدام (110)، نحصل :

$$B_1(x,t)=-\frac{x-2t}{2}-\int_0^1(x-2s)(s-2t)ds=-x-t+2xt+\frac{2}{3}$$

كما نجد :

$$C_2=\int_0^1\left(-2s+2s^2+\frac{2}{3}\right)ds=\frac{1}{3}$$

$$B_2(x,t)=\frac{x-2t}{3}-2\int_0^1(x-2s)\left(-s-t+2st+\frac{2}{3}\right)ds=0$$

$$C_3=C_4=\ldots=0,\ B_3(x,t)=B_4(x,t)=\ldots=0$$

إذن :

$$D(\lambda)=1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6};\ D(x,t;\lambda)=x-2t+\left(x+t-2xt-\frac{2}{3}\right)\lambda$$

وبالتالي فإن النواة الحالة للنواة المعطية هي :

$$R(x,t;\lambda)=\frac{x-2t+\left(x+t-2xt-\frac{2}{3}\right)\lambda}{1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}$$

9- حساب النوى و خواصها:

9-1- النوى المتعامدة:

1- يوجد بعض معادلات تكاملية لفريدهولم تتقارب من أجلها متسلسلة نيومان من أجل النواة الحالة ومن أجل أي قيمة λ :

بالحقيقة، لنفرض أن لدينا نواتين $K(x,t)$ و $L(x,t)$ ، سنقول بأن النوى متعامدة إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\int_a^b K(x,z)L(z,t)dz=0$$

$$\int_a^b L(x,z)K(z,t)dz=0$$

وذلك من أجل أي قيم مقبولة لـ x و t .

مثال (2-15) :

إن النواتين :

$$K(x,t)=xt \qquad , \qquad L(x,t)=x^2t^2$$

متعامدتان على المجال [1+ , 1-] لأنه في الحقيقة :

$$\int_{-1}^{1}(xz)(z^2t^2)dz=xt^2\int_{-1}^{1}z^3dz=0$$

$$\int_{-1}^{1}(x^2z^2)(zt)dz=x^2t\int_{-1}^{1}z^3dz=0$$

2- يوجد بعض النوى التي تكون متعامدة مع نفسها في مثل هذه الحالات يكون :

$$K_2(x,t)\equiv 0$$

وبالتالي فجميع النوى اللاحقة لـ K_2 تكون معدومة وتكون النواة الحالة متطابقة مع $K(x,t)$ أي :

$$R(x,t;\lambda) \equiv K(x,t)$$

مثال (2-16) :

لتكن النواة :

$$K(x,t) = \sin(x-2t) \quad ; \quad 0 \le x \le 2\pi \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

إن هذه النواة متعامدة مع نفسها لأن :

$$\int_0^{2\pi} K(x-z)K(z-t)tz =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x-2z)\sin(z-2t)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(x+2t-3z) - \cos(x-2t-z)]dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\sin(x+2t-3z) + \sin(x-2t-z)\right]_{z=0}^{z=2\pi} = 0$$

إذن، في هذه الحالة، يكون :

$$R(x,t;\lambda) \equiv \sin(x-2t)$$

وهكذا فإن متسلسلة نيومان تتضمن حداً واحداً، ومن الواضح فإن هذه المتسلسلة تتقارب من أجل أي قيمة لـ λ.

ملاحظة :

إذا كانت $M(x,t)$ نواة و $R_1(x,t;\lambda)$ نواتها الحالة و $N(x,t)$ نواة و $R_2(x,t;\lambda)$ نواتها الحالة، وإذا كانت النواتان N,M متعامدتين وكان:

$$K(x,t) = M(x,t) + N(x,t)$$

فإن النواة الحالة $R(x,t;\lambda)$ للنواة $K(x,t)$ تعطى بالعلاقة :

$$R(x,t;\lambda)=R_1(x,t;\lambda)+R_2(x,t;\lambda)$$

مثال (2-17) :

أوجد النواة الحالة للنواة :

$$K(x,t)=xt+x^2t^2$$

من أجل :

$$a=-1\ ,\ \ b=1$$

الحل :

لدينا :

$$M(x,t)=xt \quad , \quad N(x,t)=x^2t^2$$

حسب الملاحظة السابقة فإن النواة الحالة R_K للنواة K هي :

$$R_K(x,t;\lambda)=R_M(x,t;\lambda)+R_N(x,t;\lambda)$$

$$=\frac{3xt}{3-2\lambda}+\frac{5x^2t^2}{5-2\lambda} \quad ; \quad |\lambda|<\frac{3}{2}$$

ملاحظة (1) : يمكن تعميم الخاصة السابقة على أي عدد منته من النوى :

إذا كانت :

$$M^{(1)}(x,t),\ M^{(2)}(x,t),\dots,M^{(n)}(x,t)$$

نوى متعامدة مثنى مثنى، عندئذٍ فإن النواة الحالة الموافقة لمجموع هذه النوى هو:

$$K(x,t)=\sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(x,t)$$

والتي هي مجموع النوى الحالة الموافقة لكل حد.

ملاحظة (2): سنسمي الأثر من المرتبة n للنواة $K(x,t)$ والمعرف بالعلاقة :

$$A_n = \int_a^b K_n(x,x)dx, \ (n = 1,2,...)$$

حيث $K_n(x,t)$ هي النواة المكررة من المرتبة n. للنواة $K(x,t)$ في هذه الحالة فإن الصيغة التالية صحيحة من أجل محدد فريدهولم $D(\lambda)$:

$$\frac{D'\lambda}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1}$$

10- متناوبة فريدهولم :

نورد فيما يلي ثلاث نظريات تسلط الضوء على فكرة متناوبة فريدهولم والتي نقبلها بدون برهان[6]:

نظرية (4) : (متناوبة فريدهولم)

يتحقق أحد الاحتمالين:

1-إما أن يكون للمعادلة التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (112)$$

حل وحيد من أجل أي تابع $f(x)$.

2-أو يكون للمعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad (113)$$

على الأقل حل واحد غير الحل الصفري.

نظرية (5) :

إذا كانت المتناوبة الأولى للمعادلة (112) محققة، فإنها تكون محققة من أجل المعادلة التكاملية المنقولة الموافقة لـ (112) أي أن:

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(t,x)\psi(t)dt=g(x) \tag{114}$$

وبالمثل، المعادلة التكاملية المتجانسة (113) والمعادلة المنقولة الموافقة لها :

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(t,x)\psi(t)dt=0 \tag{115}$$

لهما نفس العدد المنتهي (المحدود) من الحلول المستقلة خطياً.

ملاحظة : إذا كانت التوابع $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ هي حلول للمعادلة المتجانسة (113) ، عندئذ فإن التركيب الخطي:

$$\varphi(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\dots+C_n\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x)$$

حيث [$C_k(k=1,2,\dots,n)$ هي ثوابت كيفية]. هو حل للمعادلة.

ملاحظات هامة: بالجمع بين متناوبة فريدهولم التكاملية ومبرهنة فريدهولم (5) نلاحظ ما يلي:

1- إذا كانت المتناوبة متحققة في (112) أي لها حل وحيد، فإن المعادلة المتجانسة الموافقة لها الحل الصفري.

2- إذا تحققت المتناوبة في (113) أي للمعادلة (113) على الأقل حل واحد غير الحل الصفري، فإن للمعادلة غير المتجانسة (112) حلولاً إذا تحقق شرط التعامد، وإذا لم يتحقق فليس لها أي حل.

نظرية (6) :

الشرط اللازم والكافي لوجود حل $\varphi(x)$ للمعادلة (112) غير المتجانسة في الحالة الأخيرة من متناوبة فريدهولم هو شرط التعامد للطرف الأيمن لهذه المعادلة، أي، للتابع $f(x)$ مع أي حل $\psi(x)$ للمعادلة المتجانسة (115) المرافقة للمعادلة (113) :

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = 0 \qquad (116)$$

ملاحظة : عندما يتحقق الشرط (116) ، فإن المعادلة (112) سيكون لها عدد لانهائي من الحلول. حيث إن هذه المساواة سوف تتحقق من أجل أي تابع من الصيغة $\varphi(x)+\overline{\varphi}(x)$، عندما $\varphi(x)$ هو حل ما للمعادلة (112) و $\overline{\varphi}(x)$ هو أي حل للمعادلة المتجانسة الموافقة (113).

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت المساواة (112) محققة بوساطة التابعين $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$، ثم بمقتضى خطية المساواة فإن فرقهما : $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ هو حل للمعادلة المتجانسة الموافقة (113).

ملاحظة هامة : إن متناوبة فريدهولم هامة بشكل خاص في الحالات العملية عوضاً عن برهان أن المعادلة التكاملية المعطاة (112) تملك حلاً فإنه غالباً ما يكون من الأسهل أن نبرهن أن المعادلة المتجانسة (113) أو مرافقتها (115) تملك فقط حلول صفرية.

لذلك بمقتضى المتناوبة فإن المعادلة (112) فعلاً لها حل.

ملاحظة :

1- إذا كانت النواة $K(x,t)$ للمعادلة التكاملية (112) متناظرة، عندئذ المعادلة المرافقة المتجانسة للمعادلة (115) تتطابق مع المعادلة المتجانسة (113) والتي تتطابق مع المعادلة (112).

2- في حالة المعادلة التكاملية غير المتجانسة ذات النواة المتحللة :

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t)\right]\varphi(t)dt = f(x)$$

إن شرط التعامد (116) للطرف الأيمن لهذه المعادلة يحقق الـ n مساواة التالية :

$$\int_a^b f(t)b_k(t)dt = 0 \quad (k=1,2,\dots,n)$$

مثال (2-18) :

أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \left(5x^2-3\right)t^2\varphi(t)\,dt=e^x$$

الحل :

لدينا

$$\varphi(x)=C\lambda\left(5x^2-3\right)+e^x \tag{117}$$

حيث :

$$C=\int_0^1 t^2\varphi(t)\,dt \tag{118}$$

بتعويض (117) في (118)، نحصل على :

$$C=C\lambda\int_0^1 \left(5t^4-3t^2\right)dt+\int_0^1 t^2e^t\,dt$$

عندئذ فإن قيمة الثابت:

$$C=e-2$$

وذلك من أجل أي قيمة لـ λ، وبالتالي للمعادلة المعطاة حل وحيد:

$$\varphi(x)=\lambda\,(e-2)\left(5x^2-3\right)+e^x$$

وللمعادلة المتجانسة الموافقة :

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \left(5x^2-3\right)t^2\varphi(t)\,dt=0 \tag{119}$$

حل وحيد صفري $\varphi(x)\equiv 0$، لأنه باتباع طريقة مشابهة نجد أن (119) تكتب بالشكل:

$$\varphi(x)=\lambda\left(5x^2-3\right)C \tag{120}$$

حيث :

$$C=\int_0^1 t^2\varphi(t)dt \qquad (121)$$

بتعويض (120) في (121) وإجراء التكامل نجد $C=0$ ومنه :

$$\varphi(x)\equiv 0$$

11- تشكيل تابع غرين واستخدامه في حل المعادلات التكاملية:

ليكن لدينا معادلة تفاضلية من المرتبة n :

$$L[y]\equiv p_0(x)y^n+p_1(x)y^{n-1}+...+p_n(x)y=0 \qquad (122)$$

حيث $p_0(x),p_1(x),...,p_n(x)$ هي توابع مستمرة على المجال $[a,b]$ و $p_0(x)\neq 0$ على المجال $[a,b]$ ، ولتكن الشروط الحدية:

$$\begin{aligned}V_k(y)=&\alpha_k y(a)+\alpha_k^1 y'(a)+...+\alpha_k^{n-1}y^{n-1}(a)+\\&+\beta_k y(b)+\beta_k^1 y'(b)+...+\beta_k^{n-1}y^{n-1}(b)\\&(k=1,2,...,n)\end{aligned} \qquad (123)$$

حيث التوابع الخطية $V_1,...,V_n$ لها القيم :

$$y(a),y'(a),...,y^{(n-1)}(a),y(b),...,y^{(n-1)}(b)$$

إن هذه التوابع مستقلة خطياً.

نفرض أن مسألة الشروط الحدية [(123) − (122)] لها فقط الحل البديهي $y(x)\equiv 0$.

تعريف غرين:

إن تابع غرين لمسألة الشروط الحدية [(123) − (122)] هو التابع $G(x,\xi)$ المشكل من أجل أي نقطة ξ، $a<\xi<b$ ، وله الصفات الأربع التالية :

1- التابع $G(x,\xi)$ مستمر وله مشتقات مستمرة (بالنسبة لـ x) من مرتبة أكبر من (n-2) ضمن المجال $a \le x \le b$.

2- المشتقات حتى المرتبة (n-1) (بالنسبة لـ x) منقطعة في النقطة $x=\xi$ وإذا كانت القفزة هي $\frac{1}{p_0(x)}$ ، هذا يعني ، أن :

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)} \qquad (124)$$

3- في كلا المجالين $[\xi,b)$ و $(a,\xi]$، التابع $G(x,\xi)$ يعتبر كتابع في x ، يكون حلاً للمعادلة (122) ، أي :

$$L[G]=0 \qquad (125)$$

4- $G(x,\xi)$ يحقق الشروط الحدية (123)

$$V_k(G)=0 \quad (k=1,2,\dots,n) \qquad (126)$$

نظرية (7) :

إذا كانت مسألة الشروط الحدية [(123) – (122)] لها فقط الحل الصفري $y(x)\equiv0$ ، عندئذ فللمؤثر L تابع غرين واحد وواحد فقط $G(x,\xi)$.

البرهان:

ليكن $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ حلول مستقلة خطياً للمعادلة $L[y]=0$ ، بتحقيق الخاصة (3) ، فإن التابع المجهول $G(x,\xi)$ يجب أن يمثل (يُكتب) في المجالين : $[\xi,b)$ و $(a,\xi]$.

$$G(x,\xi)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)+\dots+a_ny_n(x) \quad ; \quad a \le x < \xi$$
$$G(x,\xi)=b_1y_1(x)+b_2y_2(x)+\dots+b_ny_n(x) \quad ; \quad \xi \le x < b$$

حيث $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n$ هي توابع ما في ξ.

إن استمرارية التابع $G(x,\xi)$ ومشتقاته الأولى حتى المرتبة (n-2) (بالنسبة لـ x)

في النقطة $x = \xi$ تحقق العلاقات:

$$\left[b_1 y_1(\xi)+\ldots+b_n y_n(\xi)\right]-\left[a_1 y_1(\xi)+\ldots+a_n y_n(\xi)\right]=0$$
$$\left[b_1 y_1'(\xi)+\ldots+b_n y_n'(\xi)\right]-\left[a_1 y_1'(\xi)+\ldots+a_n y_n'(\xi)\right]=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[b_1 y_1^{(n-2)}(\xi)+\ldots+b_n y_n^{(n-2)}(\xi)\right]-\left[a_1 y_1^{(n-2)}(\xi)+\ldots+a_n y_n^{(n-2)}(\xi)\right]=0$$

والشرط (124) يأخذ الشكل:

$$\left[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+b_n y_n^{(n-1)}(\xi)\right]-\left[a_1 y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+a_n y_n^{(n-1)}(\xi)\right]=\frac{1}{p_0(\xi)}$$

لنضع :

$$c_k(\xi)=b_k(\xi)-a_k(\xi) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

عندئذ نحصل على مجموعة المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} c_1 y_1(\xi)+c_2 y_2(\xi)+\ldots+c_n y_n(\xi)=0 \\ c_1 y_1'(\xi)+c_2 y_2'(\xi)+\ldots+c_n y_n'(\xi)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(\xi)+c_2 y_2^{(n-2)}(\xi)+\ldots+c_n y_n^{(n-2)}(\xi)=0 \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi)+c_2 y_2^{(n-1)}(\xi)+\ldots+c_n y_n^{(n-1)}(\xi)=\dfrac{1}{P_0(\xi)} \end{cases} \qquad (127)$$

المحدد (127) يساوي إلى قيمة الرونسكيان (Wronskian) غير المعدوم في النقطة $x=\xi$ ، ولهذا السبب فإن المجموعة (127) تحدد التوابع $c_k(\xi)(k=1,2,\ldots,n)$ بشكل وحيد.

من أجل تحديد التوابع $a_k(\xi)$ ، $b_k(\xi)$، لنأخذ الشروط الحدية (123) ، ولنكتب $V_k(y)$ بالشكل:

$$V_k(y)=A_k(y)+B_k(y) \qquad (128)$$

حيث:

$$A_k(y)=\alpha_k y(a)+\alpha_k^{(1)}y'(a)+\ldots+\alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)$$
$$B_k(y)=\beta_k y(b)+\beta_k^{(1)}y'(b)+\ldots+\beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b)$$

بالأخذ بعين الاعتبار (126) ، نحصل :

$$\begin{aligned}V_k(G)&=a_1A_k(y_1)+a_2A_k(y_2)+\ldots+a_nA_k(y_n)+\\&+b_1B_k(y_1)+b_2B_k(y_2)+\ldots+b_nB_k(y_n)=0\ (k=1,2,\ldots,n)\end{aligned}$$

وبالأخذ بعين الاعتبار $a_k=b_k-c_k$ نجد أن :

$$\begin{aligned}&(b_1-c_1)A_k(y_1)+(b_2-c_2)A_k(y_2)+\ldots+(b_n-c_n)A_k(y_n)+\\&\quad+b_1B_k(y_1)+b_2B_k(y_2)+\ldots+b_nB_k(y_n)=0\\&\quad(k=1,2,\ldots,n)\end{aligned}$$

عندئذ ، وبمقتضى (128) :

$$\begin{aligned}&b_1V_k(y_1)+b_2V_k(y_2)+\ldots+b_nV_k(y_n)=\\&=c_1A_k(y_1)+c_2A_k(y_2)+\ldots+c_nA_k(y_n)\ (k=1,2,\ldots,n)\end{aligned}\tag{129}$$

نلاحظ أن المجموعة (129) خطية بالنسبة للكميات $b_1,\ldots,b_n$ ، إن محدد هذه المجموعة يختلف عن الصفر .

$$\begin{vmatrix}V_1(y_1)&V_1(y_2)&\ldots&V_1(y_n)\\V_2(y_1)&V_2(y_2)&\ldots&V_2(y_n)\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\V_n(y_1)&V_n(y_2)&\ldots&V_n(y_n)\end{vmatrix}\neq 0\tag{130}$$

وبمقتضى فرضيتنا المتعلقة بخطية الأشكال $V_1,V_2,\ldots,V_n$.

فبالنتيجة، فإن مجموعة المعادلات (129) لها حل وحيد في $b_1(\xi),b_2(\xi),\ldots,b_n(\xi)$ ، ولذلك فإن:

$$a_k(\xi)=b_k(\xi)-c_k(\xi)$$

وبالتالي فإن الكميات $a_k(\xi)(k = 1,2,\dots,n)$ معرفة بشكل وحيد وبذلك فإن مسألة الوجود والوحدانية لتابع غرين $G(x,\xi)$ قد بُرهنت ، كما تم إنشاء طريقة من أجل تشكيل هذا التابع .

ملاحظة:

إذا كانت مسألة الشروط الحدية [(123) − (122)] مترافقة ذاتياً عندئذ يكون تابع غرين متناظراً، أي أن:

$$G(x,\xi) = G(\xi,x)$$

كما أن المسألة العكسية صحيحة.

حالة خاصة هامة:

نعتبر حالة إنشاء تابع غرين من أجل معادلة تفاضلية من الشكل :

$$(p(x)\,y')' + q(x)y = 0$$

$$p(x) \neq 0 \quad \text{on} \quad [a,b],\ p(x) \in C^{(1)}[a,b] \tag{131}$$

مع الشروط الحدية:

$$y(a) = y(b) = 0 \tag{132}$$

نفرض أن $y_1(x)$ هو حل للمعادلة (131) والمعرف بالشروط الابتدائية :

$$y_1(a) = 0 \quad , \quad y_1'(a) = a \neq 0 \tag{133}$$

بشكل عام، إن هذا الحل لايحقق بالضرورة الشرط الحدي الثاني، ولذلك سنفرض أن :

$$y_1(b) \neq 0$$

لكن التوابع التي من الشكل : $c_1 y_1(x)$ حيث c_1 أي ثابت كيفي، هي حلول للمعادلة (131) وتحقق الشرط الحدي $y(a) = 0$.

بشكل مشابه، نجد الحل غير الصفري $y_2(x)$ للمعادلة (131)، بحيث يحقق هذا الحل الشرط الحدي الثاني، أي أن:

$$y_2(b)=0 \tag{134}$$

كما أن جميع التوابع $C_2y_2(x)$ حيث C_2 ثابت كيفي يحقق الشرط نفسه.

لنشكل الآن تابع غرين للمسألة [(132) – (131)] بحيث يكون من الشكل:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} C_1y_1(x) & ; \quad a\le x\le \xi \\ C_2y_2(x) & ; \quad \xi\le x\le b \end{cases} \tag{135}$$

سيتم اختيار الثوابت C_1, C_2 بحيث تتحقق الخواص (1) و (2).

هذا يعني أن التابع $G(x,\xi)$ مستمر في x من أجل ξ مثبتة، وبشكل خاص، يكون مستمراً في النقطة $x=\xi$.

$$C_1y_1(\xi)=C_2y_2(\xi)$$

وهكذا فإن للتابع $G'_x(x,\xi)$ قفزة في النقطة $x=\xi$، هذه القفزة تساوي $\dfrac{1}{p(\xi)}$:

$$C_2y'_2(\xi)-C_1y'_1(\xi)=\frac{1}{p(\xi)}$$

لنُعِد كتابة المعادلتين الأخيرتين كما يلي:

$$\begin{cases} -C_1y_1(\xi)+C_2y_2(\xi)=0, \\ -C_1y'_1(\xi)+C_2y'_2(\xi)=\dfrac{1}{p(\xi)} \end{cases} \tag{136}$$

إن محدد المجموعة (136) هو الرونسكيان:

$$W[y_1(x),y_2(x)]=W(x)$$

المحسوب في النقطة $x=\xi$ من أجل الحلول المستقلة خطياً $y_1(x)$ و $y_2(x)$ للمعادلة (131)، وبالتالي فإن:

$$W(\xi)\neq 0$$

إذن فالكميات C_1 و C_2 للمجموعة (136) تتحدد بأن واحد :

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}\ ,\ \ C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} \tag{137}$$

باستبدال قيمتي C_1, C_2 في (135)، نحصل على تابع غرين:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{y_1(x)\ y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} & ,\ a \le x \le \xi \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(\xi)} & ,\ \xi \le x \le b \end{cases} \tag{138}$$

ملاحظات:

1- إن الحلول $y_2(x), y_1(x)$ للمعادلة (131) والتي تم اختيارها تكون مستقلة خطياً بمقتضى الفرض:

$$y_1(b) \ne 0$$

بالواقع، إن كل الحلول (والتي هي مرتبطة خطياً مع $y_1(x)$) لها الشكل $C_1y_1(x)$، وبالنتيجة، من أجل $C_1 \ne 0$ فإن الحلول لاتنعدم في النقطة $x = b$ وذلك وفقاً لاختيارنا. كما أن الحل $y_2(x)$ ينعدم .

2- إن مسألة الشروط الحدية من أجل المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية :

$$y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_2(x)y(x)=0 \tag{139}$$

والشروط الحدية:

$$y(a)=A\quad ,\quad y(b)=B \tag{140}$$

تؤول إلى المسألة [(132)-(131)] المعتبرة أعلاه وذلك كما يلي:

1- المعادلة الخطية (139) تؤول إلى (131) بضربها بالتابع :

$$p(x)=e^{\int p_1(x)dx}$$

2- الشروط الحدية (140) تؤول للشروط الصفرية (132) بوساطة التغيير في المتحول الخطي:

$$z(x)=y(x)-\frac{B-A}{b-a}(x-a)-A$$

لقد حافظنا على الخطية في (139)، ولم نحافظ على ذلك في (131)، وبذلك نكون قد حصلنا على المعادلة غير المتجانسة $L[z]=f(x)$ حيث :

$$f(x)=-\left[A+\frac{B-A}{b-a}(x-a)\right]q(x)-\frac{B-A}{b-a}p(x)$$

وبهذا نكون قد أنشأنا تابع غرين من أجل مسألة الشروط الحدية المتجانسة $L[z]=0$ حيث $z(a)=z(b)=0$ والتي تتطابق تماماً مع المسألة [(132)-(131)].

مثال (2-19) : أوجد تابع غرين لمسألة الشروط الحدية:

$$y''(x)+k^2y=0$$
$$y(0)=y(1)=0$$

الحل:

بسهولة يمكن التحقق من أن $y_1=\sin kx$ يحقق الشرط الحدي $y_1(0)=0$، والحل $y_2(x)=\sin k(x-1)$ يحقق الشرط $y_2(1)=0$، إن هذين الحلين مستقلان خطياً. لنوجد قيمة الرونسكيان للتوابع sinkx ؛ sink(x-1) في النقطة $x=\xi$ فنجد:

$$W(\xi)=\begin{vmatrix}\sin k\xi & \sin k(\xi-1)\\ k\cos k\xi & k\cos k(\xi-1)\end{vmatrix}=$$
$$=k[\sin k\xi\cos k(\xi-1)-\sin k(\xi-1)\cos k\xi]=k\sin k$$

بالإضافة إلى ذلك نجد في مثالنا $P(x)=1$

وبالتالي نحصل باستخدام (17) على :

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin k(\xi-1)\sin kx}{k\sin k}, & 0\le x\le \xi\\ \dfrac{\sin k\xi\sin k(x-1)}{k\sin k}, & \xi\le x\le 1\end{cases}$$

11-1- استخدام تابع غرين لحل مسائل ذات شروط حدية وذلك بتحويلها إلى معادلات تكاملية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية غير المتجانسة:

$$L[y]=P_0(x)y^{(n)}(x)+P_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+P_n(x)y(x)=f(x) \quad (141)$$

والشروط الحدية:

$$V_1(y)=0\ ,\ V_2(y)=0\ ,\ \ldots\ ,\ V_n(y)=0 \quad (142)$$

سنعتبر أن الأشكال الخطية $V_1,V_2,\ldots,V_n$ في:

$$y(a),y'(a),\ldots,y^{(n-1)}(a),y(b),y'(b),\ldots,y^{(n-1)}(b)$$

مستقلة خطياً.

نظرية(8):

إذا كان $G(x,\xi)$ تابع غرين لمسألة الشروط الحدية المتجانسة:

$$L[y]=0,$$
$$V_k(y)=0\ ,\quad (k=1,2,\ldots,n)$$

عندئذ فإن حل المسألة [(142)-(141)] يُعطى بالعلاقة :

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

مثال (2-20):

أوجد تابع غرين، وأوجد حل مسألة الشروط الحدية :

$$y''(x)-y(x)=x. \quad (143)$$
$$y(0)=y(1)=0 \quad (144)$$

1- لنرى أولاً فيما إذا كان تابع غرين موجود من أجل مسألة الشروط الحدية المتجانسة الموافقة:

$$y''(x) - y(x) = 0 \qquad (145)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \qquad (146)$$

من الواضح أن $y_1(x) = e^x$ ، $y_2(x) = e^{-x}$ هي المجموعة الأساسية لحلول المعادلة (145) ، عندئذ فإن الحل العام لهذه المعادلة هو :

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

إن الشروط الحدية (144) محققة إذا وفقط إذا كان $A = B = 0$ أي $y(x) \equiv 0$ وهكذا فإن تابع غرين موجود .

2- يمكن التحقق بسهولة أن :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\text{sh}x\,\text{sh}(\xi - 1)}{\text{sh}1}, & 0 \le x \le \xi \\ \dfrac{\text{sh}\xi(x-1)}{\text{sh}1}, & \xi \le x \le 1 \end{cases} \qquad (147)$$

هو تابع غرين لمسألة الشروط الحدية [(145-146)].

3- نكتب حل مسألة الشروط الحدية [(143-144)] بالشكل :

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\xi\, d\xi \qquad (148)$$

حيث $G(x,\xi)$ يكون معرفاً بالعلاقة (147).

نجزئ مجال التكامل إلى مجالين وباستبدال (147) في (148) نجد:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \frac{\xi \text{sh}\,\xi \text{sh}(x-1)}{\text{sh}\,1} d\xi + \int_x^1 \frac{\xi \text{sh}\,x\,\text{sh}\,(\xi - 1)}{\text{sh}\,1} d\xi = \\ &= \frac{\text{sh}(x-1)}{\text{sh}\,1} \int_0^x \xi \text{sh}\,\xi\, d\xi + \frac{\text{sh}x}{\text{sh}\,1} \int_x^1 \xi \text{sh}(\xi - 1) d\xi \end{aligned} \qquad (149)$$

لكن :

$$\int_0^x \xi \operatorname{sh} \xi \, d\xi = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

$$\int_x^1 \xi \operatorname{sh}(\xi - 1) d\xi = 1 - x \operatorname{ch}(x-1) + \operatorname{sh}(x-1)$$

ولذلك فإن :

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}\{\operatorname{sh}(x-1)[x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x] +$$

$$+ \operatorname{sh} x [1 - x \operatorname{ch}(x-1) + \operatorname{sh}(x-1)]\} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - x$$

ونعلم أن :

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh}\alpha . \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta$$

يمكن التحقق بسهولة من أن التابع

$$y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} - x$$

يحقق المعادلة (143) والشروط الحدية (144) .

مثال (2-21):

أوجد المعادلة التكاملية لمسألة القيم الحدية والموافقة لمعادلة تفاضلية لاخطية:

$$y'' = f(x, y(x)), \tag{150}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{151}$$

لننشئ تابع غرين للمسألة :

$$y'' = 0 \tag{152}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{153}$$

فنجد:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-1)x\ ,\ 0\le x\le\xi,\\(x-1)\xi\ ,\ \xi\le x\le 1\end{cases}$$

وبالنظر للطرف الأيمن من (150) على أنه تابع معلوم نجد:

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi,y(\xi))d\xi \qquad (154)$$

وهكذا فإن الحل لمسألة القيم الحدية [(150-151)] يؤول إلى حل معادلة تكاملية لاخطية من نموذج هامرشتاين، حيث نواتها هي تابع غرين للمسألة [(152-153)] . إن تفسير نموذج هامرشتاين يعني الربط وبشكل دقيق بين حل العديد من مسائل الشروط الحدية لمعادلة تفاضلية لاخطية، والذي يؤول إلى حل معادلات تكاملية لاخطية.

11-2- رد مسائل ذات قيم حدية تحوي وسيطاً إلى معادلات تكاملية:

هناك العديد من الحالات والتي تؤدي نمذجتها إلى إدخال مسألة ذات قيم حدية من النمط :

$$L[y]=\lambda y+h(x) \qquad (155)$$

$$V_k(y)=0 \qquad (k=1,2,...,n) \qquad (156)$$

حيث:

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+...+p_n(x)y(x)$$

$$V_k(y)\equiv\alpha_k y(a)+\alpha_k^{(1)}y'(a)+...+\alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)+$$

$$+\beta_k y(b)+\beta_k^{(1)}y'(b)+...+\beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b)\ (k=1,2,...,n)$$

إن الأشكال الخطية $V_1,V_2,...,V_n$ مستقلة خطياً، $h(x)$ تابع مستمر معلوم في x و λ وسيط عددي ما.

من أجل $h(x)\equiv 0$ ، لدينا مسألة القيم الحدية المتجانسة:

$$\begin{cases}L[y]=\lambda y\\V_k(y)=0 \quad (k=1,2,...,n)\end{cases} \qquad (157)$$

تدعى قيم λ والتي من أجلها تقبل مسألة القيم الحدية (157) حلاً غير صفري بالقيم الذاتية لمسألة الشروط الحدية (157) ، وتدعى الحلول غير الصفرية الموافقة بالتوابع الذاتية.

نظرية (9) :

إذا كان $G(x,\xi)$ تابع غرين لمسألة القيم الحدية:

$$\begin{cases} L[y]=0, \\ V_k(y)=0 \quad (k=1,2,...,n) \end{cases} \tag{158}$$

عندئذ فإن مسألة القيم الحدية [(156)-(155)] تكافئ معادلة فريدهولم التكاملية:

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi+f(x) \tag{159}$$

$$f(x)=\int_a^b G(x,\xi)h(\xi)d\xi \tag{160}$$

بشكل خاص، إن مسألة القيم الحدية (157) تكافئ المعادلة التكاملية المتجانسة:

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi \tag{161}$$

ملاحظة:

إذا كان تابع غرين $G(x,\xi)$ يمثل نواة مستمرة، فيمكن عندئذ تطبيق نظرية فريدهولم للمعادلة التكاملية ذات النواة $G(x,\xi)$.

لذلك فإن المعادلة التكاملية المتجانسة (161) لها غالباً عدد منتهٍ من القيم الذاتية $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ والتي ليس لها نهاية محددة.

من أجل جميع القيم λ المختلفة عن القيم الذاتية، فإن المعادلة (159) غير المتجانسة لها حل من أجل أي طرف أيمن مستمر $f(x)$. هذا الحل يعطى بالصيغة :

$$y(x)=\lambda\int_a^b R(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi+f(x) \qquad (162)$$

حيث $R(x,\xi;\lambda)$ هي النواة الحالة للنواة $G(x,\xi)$ من أجل أية قيمة لـ x و ξ في $[a,b]$، فإن $R(x,\xi;\lambda)$ هي تابع تحليلي في λ ، هذا يعني، أن القيم الذاتية فقط للمعادلة التكاملية المتجانسة (161) يمكن أن تكون أقطاب لهذا التابع.

مثال (2-22) :

حول مسألة القيم الحدية التالية :

$$y''+\lambda y=x \qquad (163)$$

$$y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad (164)$$

إلى معادلة تكاملية.

الحل:

نوجد أولاً تابع غرين $G(x,\xi)$ للمعادلة التفاضلية المتجانسة:

$$\begin{cases} y''(x)=0 \\ y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \qquad (165)$$

إن الحلول $y_1(x)=x$ و $y_2(x)=x-\frac{\pi}{2}$ هي حلول مستقلة خطياً للمعادلة التفاضلية :

$$y''(x)=0$$

والتي تحقق الشروط :

$$y(0)=0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

سنبحث عن تابع غرين من الشكل:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0\le x\le\xi,\\[2mm] \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{W(\xi)}, & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

حيث:

$$W(\xi)=\begin{vmatrix}\xi & \xi-\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}$$

وهكذا :

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\pi}\xi-1\right)x, & 0\le x\le\xi\\[2mm] \left(\dfrac{2}{\pi}x-1\right)\xi, & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\qquad(166)$$

بالنظر إلى تابع غرين (166) على أنه نواة لمعادلة تكاملية، نحصل على المعادلة التكاملية $y(x)$:

$$y(x)=f(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

حيث:

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)\xi\,d\xi=$$

$$=\int_0^{x}\left(\frac{2x}{\pi}-1\right)\xi^2d\xi+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\xi}{\pi}-1\right)x\xi\,d\xi=\frac{1}{6}x^3-\frac{\pi^2}{24}x$$

أخيراً، نجد أن مسألة القيم الحدية [(164)-(163)] تؤول للمعادلة التكاملية:

$$y(x)+\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)y(\xi)d\xi=\frac{1}{6}x^3-\frac{\pi^2}{24}x$$

تمارين محلولة

1- حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)\varphi(t)dt$$

مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية، واعتبر أن $\varphi_0(x) = 1$ ثم أوجد النواة الحالة.

الحل:

1- طريقة التقريبات المتتالية:

ننطلق من التقريب ذي المرتبة صفر $\varphi_0(x) = 1$ فنجد:

$$\varphi_1(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)dt = 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right)$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)(1 + \lambda)\left(1 - \frac{3}{2}t\right)dt = 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{1}{4}\lambda^2$$

$$\varphi(x) = 1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^3\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{1}{16}\lambda^4 + \frac{1}{16}\lambda^5\left(1 - \frac{3}{2}x\right) + ..$$

أو :

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 + ...\right)\left(1 + \lambda\left(1 - \frac{3}{2}x\right)\right)$$

ولكن المتسلسلة الهندسية متقاربة عندما $|\lambda| < 2$ ، فإذا استبدلنا بهذه المتسلسلة مجموعها نجد :

$$\varphi(x) = \frac{4 + 2\lambda(2 - 3x)}{4 - \lambda^2}$$

وبالتمديد التحليلي نجد أن هذا الحل يصلح مهما كانت λ باستثناء $\lambda = \pm 2$.

2- طريقة النواة الحالة:

للحصول على النواة الحالة نبدأ بحساب النوى المتكررة.

$$K_1(x,t)=1-3xt$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 (1-3xu)(1-3ut)du=1-\frac{3}{2}(x+t)+3xt$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 (1-3xu)\left[1-\frac{3}{2}(u+t)-3ut\right]du$$

$$=\frac{1}{4}(1-3xt)=\frac{1}{4}K_1(x,t)$$

وبشكل مماثل نجد:

$$K_4(x,t)=\frac{1}{4}K_2(x,t)$$

$$K_n(x,t)=\frac{1}{4}K_{n-2}(x,t)$$

وبالتالي فإن النواة الحالة:

$$R(x,t,\lambda)=K_1+\lambda K_2+\lambda^2K_3+\ldots$$

$$=\left(1+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{16}\lambda^4+\ldots\right)K_1+\lambda\left(1+\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{16}\lambda^4+\ldots\right)K_2$$

$$=\left[(1+\lambda)-\frac{3}{2}(x+t)-3(1-\lambda)xt\right]/\left(1-\frac{1}{4}\lambda^2\right)\ ;\ |\lambda|<2$$

2- لتكن المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \left(\sqrt{x}\,t-\sqrt{t}\,x\right)\varphi(t)dt=0$$

هذه المعادلة ليس لها قيمة ذاتية حقيقية ولاتابع ذاتي.

لدينا:

$$\varphi(x)=C_1\lambda\sqrt{x}-C_2\lambda x \qquad (167)$$

حيث :

$$C_1 = \int_0^1 t\varphi(t)dt \ , \ C_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\,\varphi(t)dt \qquad (168)$$

بتبديل (167) في (168) وبعد عدة إجراءات حسابية نجد مجموعة من المعادلات الجبرية:

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{2\lambda}{5}\right)C_1 + \dfrac{\lambda}{3}C_2 = 0 \\ -\dfrac{\lambda}{2}C_1 + \left(1+\dfrac{2\lambda}{5}\right)C_2 = 0 \end{cases} \qquad (169)$$

ومحدد هذه المجموعة هو :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{2}{5}\lambda & \dfrac{\lambda}{3} \\ -\dfrac{\lambda}{2} & 1+\dfrac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}$$

إن $D(\lambda)$ لاينعدم من أجل قيمة حقيقية لـ λ ، في حين ومن (169) نجد أنه من أجل $C_1 = 0$ و $C_2 = 0$ عند ذلك ومن أجل أي عدد حقيقي λ فليس للمعادلة (167) سوى الحل الصفري $\varphi(x)=0$، وبالتالي لايكون للمعادلة التكاملية (167) أية قيمة ذاتية أو تابع ذاتي.

3- أوجد النوى المكررة للنواة :

$$K(x,t) = x - t \ ; \ a = 0 \ , \ b = 1$$

الحل:

$$K_1(x,t)=x-t$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 (x-s)(s-t)ds=\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)ds=-\frac{x-t}{12}$$

$$K_4(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)(s-t)ds=$$

$$=-\frac{1}{12}K_2(x,t)=-\frac{1}{12}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right)$$

$$K_5(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)ds=$$

$$=\frac{1}{12}K_3(x,t)=\frac{x-t}{12^2}$$

$$K_6(x,t)=\frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-s)(s-t)ds=\frac{K_2(x,t)}{12^2}=$$

$$=\frac{1}{12^2}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right)$$

وبالتالي فإن النوى المكررة لها الشكل :

$$K_{2k-1}(x,t)=\frac{(-1)^k}{12^{k-1}}(x-t)\ ;\quad n=2k-1$$

$$K_{2k}(x,t)=\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right);\ n=2k$$

حيث $k=1,2,3,\ldots$

4- أوجد النوى المكررة $K_1(x,t)$ و $K_2(x,t)$ إذا علمت أن :

$$K(x,t)=e^{\min(x,t)},\ a=0\ ,\ b=1$$

الحل :

لدينا بالتعريف :

$$\min(x,t)=\begin{cases} x, & \text{if} \quad 0 \le x \le t, \\ t, & \text{if} \quad t \le x \le 1 \end{cases}$$

ولهذا السبب، فإن النواة المعطاة تكتب بالشكل:

$$K(x,t)=\begin{cases} e^{x}, & \text{if} \quad 0 \le x \le t \\ e^{t}, & \text{if} \quad t \le x \le 1 \end{cases}$$

يمكن التحقق من أن هذه النواة متناظرة، أي :

$$K(x,t) = K(t,x)$$

وبالتالي فإن :

$$K_1(x,t) = K(x,t) \ .$$

ومنه نجد النواة المكررة الثانية :

$$K_2(x,t)=\int_0^1 K(x,s)K_1(s,t)ds = \int_0^1 K(x,s)K(s,t)ds$$

حيث :

$$K(x,s)=\begin{cases} e^{x}, & \text{if} \quad 0 \le x \le s, \\ e^{s}, & \text{if} \quad s \le x \le 1, \end{cases}$$

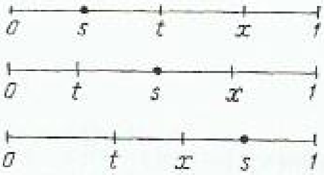
$$K(s,t)=\begin{cases} e^{s}, & \text{if} \quad 0 \le s \le t \\ e^{t}, & \text{if} \quad t \le s \le 1 \end{cases}$$

وهكذا فإن النواة المعطية $K(x,t)$ متناظرة ويكفي إيجاد $K_2(x,t)$ من أجل $x > t$

فنجد :

$$K_2(x,t)=\int_0^t K(x,s)K(s,t)ds + \int_t^x K(x,s)K(s,t)ds +$$

$$+\int_x^1 K(x,s)K(s,t)ds$$



شكل (١)

في المجال (o,t) لدينا $s < t < x$ ولذلك فإن :

$$\int_0^t K(x,s)K(s,t)ds = \int_0^t e^s e^s ds = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{e^{2t}-1}{2}$$

في المجال (t,x) لدينا : $t < s < x$ ولذلك :

$$\int_t^x K(x,s)K(s,t)ds = \int_t^x e^s e^t ds = e^{x+t} - e^{2t}$$

في المجال $(x,1)$ لدينا $s > x > t$ ولذلك :

$$\int_x^1 K(x,s)K(s,t)ds = \int_x^1 e^x e^t ds = (1-x)e^{x+t}$$

بإضافة التكاملات المحسوبة إلى بعضها بعضاً، نحصل على :

$$K_2(x,t) = (2-x)e^{x+t} - \frac{1+e^{2t}}{2} \quad (x > t)$$

وبالتالي نجد صيغة $K_2(x,t)$ من أجل $x < t$.

إذا بادلنا بين x , t في عبارة $K_2(x,t)$ ومن أجل $x > t$ نجد :

$$K_2(x,t) = (2-t)e^{x+t} - \frac{1+e^{2x}}{2} \quad (x < t)$$

وبالتالي فإن النواة من المرتبة الثانية هي من الشكل :

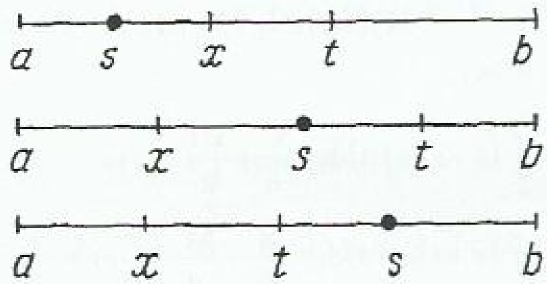
$$K_2(x,t) = \begin{cases} (2-t)e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2x}}{2}, & \text{if } 0 \le x \le t, \\ (2-x)e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2t}}{2}, & \text{if } t \le x \le 1 \end{cases}$$

ملاحظة : إذا كانت النواة $K(x,t)$ المعينة في المربع :

$$a \le x \le b \quad , \quad a \le t \le b$$

معرفة بعدة عبارات تحليلية، ولم تكن متناظرة، عندئذ يجب دراسة الحالة $x < t$ بشكل منفصل، حيث يكون لدينا :

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s)K(s,t)ds = \int_a^x + \int_x^t + \int_t^b$$



شكل (2)

5- أوجد النوى المكررة $K_1(x,t), K_2(x,t)$ إذا كان $a = 0$ ، $b = 1$ وكانت النواة $k(x,t)$ معرفة :

$$K(x,t) = \begin{cases} x+t\,; & 0 \le x \le t, \\ x-t\,; & t < x \le 1 \end{cases}$$

الحل :

لدينا

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K(s,t)ds$$

حيث :

$$K(x,s) = \begin{cases} x+s, & 0 \le x \le s, \\ x-s, & s < x \le 1 \end{cases} \qquad K(s,t) = \begin{cases} s+t, & 0 \le s \le t \\ s-t, & t < s \le 1 \end{cases}$$

إذاً النواة $K(x,t)$ غير متناظرة وبالتالي تدرس وبشكل منفصل الحالتين:

1- عندما $x < t$

2- عندما $x > t$

وذلك عند إيجاد النواة $K_2(x,t)$

فنجد :

1- إذا كان $x < t$ ، إذن :

$$K_2(x,t) = I_1 + I_2 + I_3$$

حيث :

$$I_1 = \int_0^x (x-s)(s+t)ds = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 t}{2}$$

$$I_2 = \int_x^t (x+s)(s+t)ds = \frac{5t^3}{6} - \frac{5x^3}{6} + \frac{3}{2}xt^2 - \frac{3}{2}x^2 t,$$

$$I_3 = \int_t^1 (x+s)(s-t)ds = \frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2} - xt + \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}$$

بإضافة هذه التكاملات نحصل :

$$K_2(x,t) = t^3 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3} (x < t)$$

2- ليكن $x > t$ ، عندئذ نجد :

$$K_2(x,t) = I_1 + I_2 + I_3$$

حيث :

$$I_1 = \int_0^t (x-s)(s+t)ds = \frac{3}{2}xt^2 - \frac{5t^3}{6}$$

$$I_2 = \int_t^x (x-s)(s-t)ds = \frac{x^3}{6} - \frac{t^3}{6} - \frac{x^2 t}{2} + \frac{xt^2}{2},$$

$$I_3 = \int_x^1 (x+s)(s-t)ds = -\frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 t + \frac{x-t}{2} - xt + \frac{1}{3}$$

بإضافة هذه التكاملات نجد :

$$K_2(x,t) = -\frac{2}{3}x^3 - t^3 + x^2 t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3} \quad (x > t)$$

إذن النواة من المرتبة الثانية لها الشكل :

$$= \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + t^3 - x^2 t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & 0 \le x < t \\ -\frac{2}{3}x^3 - t^3 + x^2 t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}, & t < x \le 1 \end{cases}$$

أما بقية النوى المكررة $K_n(x,t); (n = 3,4,...)$ فيمكن إيجادها بطريقة مشابهة.

6- لتكن المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xt\, \varphi(t)\, dt = f(x) \qquad (170)$$

واضح أن النواة متناظرة أي أن لدينا : $K(x,t) = K(t,x) = xt \quad ; \quad a = 0 \;,\; b = 1$

باتباع طريقة تتابعية نجد :

$$K_1(x,t) = xt,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 (xz)(zt)\, dz = \frac{xt}{3}$$

$$K_3(x,t) = \frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)\, dz = \frac{xt}{3^2},$$

....

$$K_n(x,t) = \frac{xt}{3^{n-1}}$$

نلاحظ أن جميع النوى المكررة متناظرة.

وحسب تعريف النواة الحالة، يكون لدينا :

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1} = xt \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda}$$

حيث : $|\lambda| < 3$

وبالتالي فإن حل المعادلة التكاملية (170) سيكتب بالشكل:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda}f(t)dt$$

وبشكل خاص ومن أجل $f(x)=x$ لدينا:

$$\varphi(x)=\frac{3x}{3-\lambda}\quad ;\quad \lambda\neq 3$$

7- أوجد حلول المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ln x\varphi(t)dt=2x$$

الحل:

لدينا:

$$\varphi(x)=C\lambda\sin\ln x+2x$$

حيث:

$$C=\int_0^1 \varphi(t)dt$$

بتعويض $\varphi(t)$ في التكامل، نجد أن:

$$C=C\lambda\int_0^1 \sin\ln t\,dt+1$$

عندئذ:

$$C\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=1$$

ومنه:

$$C=\frac{2}{2+\lambda}$$

إذا كان $\lambda \neq -2$، عندئذ يكون للمعادلة المعطاة حل وحيد :

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda}{2+\lambda}\sin\ln x+2x$$

إن المعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة هي :

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ln x\varphi(t)dt=0$$

والتي لها الحل الوحيد الصفري $\varphi(x)\equiv 0$ فقط.

لكن إذا كان $\lambda = -2$، فلا يكون للمعادلة المعطاة أي حل لأنه يكون $OC=1$، عندئذ الطرف الأيمن $f(x)=2x$ ليس متعامداً مع التابع $\sin\ln x$ لأن:

$$\int_0^1 2x\sin\ln x\,dx=\frac{4}{5}x^2\sin\ln x\neq 0$$

هذا يعني أن المعادلة التكاملية المتجانسة لها عدد لانهائي من الحلول،

وبطريقة مشابهة، نجد أن جميع هذه الحلول ستكون:

$$\varphi(x)=\tilde{C}\sin\ln x \quad ; \quad \left(\tilde{C}=-2C\right)$$

حيث C ثابت كيفي.

8 - أوجد حلول المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)dt=\cos 3x \tag{171}$$

الحل:

بإعادة كتابة المعادلة (171) على الشكل :

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi (\cos x\cos t-\sin x\sin t)\varphi(t)dt=\cos 3x$$

عندئذٍ ، يكون لدينا :

$$\varphi(x)=C_1\lambda\cos x - C_2\lambda\sin x + \cos 3x \tag{172}$$

حيث:

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^{\pi} \varphi(t)\cos t\, dt, \\ C_2 = \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin t\, dt \end{cases} \tag{173}$$

بتعويض (172) في (173)، نحصل على:

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^{\pi} (C_1\lambda\cos t - C_2\lambda\sin t + \cos 3t)\cos t dt, \\ C_2 = \int_0^{\pi} (C_1\lambda\cos t - C_2\lambda\sin t + \cos 3t)\sin t dt, \end{cases}$$

عندئذٍ:

$$\begin{cases} C_1\left(1-\lambda\int_0^{\pi} \cos^2 t dt\right) + C_2\lambda\int_0^{\pi} \sin t\cos t dt = \\ \qquad = \int_0^{\pi} \cos 3t\cos t dt, \\ -C_1\lambda\int_0^{\pi} \cos t\sin t dt + C_2\left(1+\lambda\int_0^{\pi} \sin^2 t dt\right) = \\ \qquad = \int_0^{\pi} \cos 3t\sin t dt \end{cases}$$

أو بالشكل:

$$\begin{cases} C_1\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ C_2\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \tag{174}$$

ويكون محدد المعادلات (174) :

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}=1-\frac{\pi^2}{4}\lambda^2$$

لنناقش الحالات:

1- إذا كان : $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}\,(\Delta(\lambda)\neq 0)$ ، عندئذ فإن المجموعة (174) لها حلاً وحيداً $C_1 = 0\ ,\ C_2 = 0$ وبالتالي فإن للمعادلة المعطاة حلاً وحيداً $\varphi(x)=\cos 3x$

وتكون المعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة :

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt=0 \qquad (175)$$

إن (175) لها الحل الوحيد الصفري $\varphi(x)\equiv 0$ فقط، وذلك حسب مبرهنة فريدهولم، الحالة (أ)، كما أن لمنقولها :

$$\psi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(t+x)\psi(t)\,dt=0$$

الحل الصفري فقط.

2- إذا كان $\lambda=\frac{2}{\pi}$، عندئذ المجموعة (174) تأخذ الشكل:

$$\begin{cases} C_1.0=0 \\ 2C_2=0 \end{cases}$$

عندئذ ينتج أن $C_1 = C\ ,\ C_2 = 0$ حيث C ثابت كيفي، إن المعادلة المعطاة لها عدد لانهائي من الحلول المعطاة بالعلاقة :

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}C\ .\ \cos x+\cos 3x$$

أو بالشكل:

$$\varphi(x)=\tilde{C}.\cos x+\cos 3x\left(\tilde{C}=\frac{2C}{\pi}\right)$$

وبالتالي فإن للمعادلة المتجانسة الموافقة (175) عدداً لانهائياً من الحلول.

$$\varphi(x)=\tilde{C}.\cos x$$

وذلك حسب مبرهنة فريدهولم الحالة (ب).

3- إذا كان $\lambda=-\frac{2}{\pi}$، عندئذ فالمجموعة (174) تأخذ الشكل:

$$\begin{cases} 2.C_1=0, \\ 0.C_2=0 \end{cases}$$

عندئذ $C_2=C$ ، $C_1=0$ حيث C ثابت كيفي، ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة :

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}C.\sin x+\cos 3x$$

أي أن للمعادلة المعطاة عدداً لانهائياً من الحلول المعطاة في عبارة الحل العام:

$$\varphi(x)=\tilde{C}.\sin x+\cos 3x \quad ; \quad \left(\tilde{C}=\frac{2C}{\pi}\right)$$

ويكون للمعادلة المتجانسة (175) عدد لانهائي من الحلول أيضاً هي :

$$\varphi(x)=\tilde{C}\sin x$$

في هذا المثال النواة $K(x,t)=\cos(x+t)$ للمعادلة المعطاة متناظرة أي:

$$K(x,t)=K(t,x)$$

إن الطرف الأيمن للمعادلة [أي $f(x)=\cos 3x$] يكون متعامداً مع التوابع $\cos x$ ، $\sin x$ على المجال $[0,\pi]$.

9 - أنشئ تابع غرين لمسألة الشروط الحدية المتجانسة:

$$y^{IV}(x)=0 \qquad (176)$$

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=0, \\ y(1)=y'(1)=0 \end{cases} \tag{177}$$

الحل:

نبرهن أولاً بأن مسألة الشروط الحدية [(177)-(176)] لها الحل الصفري.

في الواقع، إن المجموعة الأساسية لحلول المعادلة (176) تكون :

$$y_1(x)=1\ ,\ y_2(x)=x\ ,\ y_3(x)=x^2\ ,\ y_4(x)=x^3 \tag{178}$$

وبالتالي فحلها العام يكون من الشكل:

$$y(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3$$

حيث A,B,C,D هي ثوابت كيفية.

إن الشروط الحدية (177) تعطينا أربع علاقات لتحديد الثوابت A,B,C,D:

$$\begin{aligned} &y(0)=A=0, \\ &y'(0)=B=0, \\ &y(1)=A+B+C+D=0 \\ &y'(1)=B+2C+3D=0 \end{aligned}$$

عندئذ ، نجد :

$$A=B=C=D=0$$

إذن ، المسألة [(177)-(176)] لها فقط الحل الصفري $y(x)=0$ ، وبالتالي ومن أجل هذا الحل نستطيع تكوين تابع غرين وحيد $G(x,\xi)$.

2- ننشئ الآن تابع غرين وذلك باستعمال مجموعة الحلول الأساسية (178) ، نمثل تابع غرين $G(x,\xi)$ المجهول بالشكل:

$$G(x,\xi)=a_1.1+a_2.x+a_3.x^2+a_4.x^3\ ;\ 0\le x\le\xi \tag{179}$$

$$G(x,\xi)=b_1.1+b_2.x+b_3.x^2+b_4.x^3\ ;\ \xi\le x\le 1 \tag{180}$$

حيث $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4$ هي توابع مجهولة في ξ.

لنضع : $c_k(\xi)=b_k(\xi)-a_k(\xi) \quad (k=1,2,3,4)$

ونكتب خارج مجموعة المعادلات الخطية لإيجاد التوابع $c_k(\xi)$.

$$\begin{cases} c_1+c_2\xi+c_3\xi^2+c_4\xi^3=0, \\ c_2+c_3.2\xi+c_4.3\xi^2=0, \\ c_3.2+c_4.6\xi=0 \\ c_4.6=1 \end{cases} \tag{181}$$

بحل المجموعة، نجد:

$$\begin{cases} c_1(\xi)=-\frac{1}{6}\xi^3 \quad , \quad c_2(\xi)=\frac{1}{2}\xi^2 \\ c_3(\xi)=-\frac{1}{2}\xi \quad , \quad c_4(\xi)=\frac{1}{6} \end{cases} \tag{182}$$

لاحقاً، سنأخذ الخاصة (4) لتوابع غرين، والتي تتضمن تحقيقها للشروط الحدية (177) ، أي أن :

$$\begin{cases} G(0,\xi)=0 \quad , \quad G'_x(0,\xi)=0 \\ G(1,\xi)=0 \quad , \quad G'_x(1,\xi)=0 \end{cases}$$

وفي حالتنا ، فهذه العلاقات تأخذ الشكل:

$$\begin{cases} a_1=0, \\ a_2=0, \\ b_1+b_2+b_3+b_4=0 \\ b_2+2b_3+3b_4=0 \end{cases} \tag{183}$$

وبما أن $c_k=b_k-a_k(k=1,2,3,4)$ فنجد من (182) و (183) أن :

$$\begin{cases} a_1=0\,;\, b_1=-\frac{1}{6}\xi^3\,;\, a_2=0\,;\, b_2=\frac{1}{2}\xi^2 \\ b_3=\frac{1}{2}\xi^3-\xi^2\,;\, b_4=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3 \\ a_3=\frac{1}{2}\xi-\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3;\, a_4=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3 \end{cases} \tag{184}$$

بوضع قيم العوامل $a_1, a_2, ..., b_4$ من (184) في (179) و (180) ، نحصل على تابع غرين المطلوب:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\xi-\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3\right)x^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{3}\xi^3\right)x^3 \;;\; 0\le x\le \xi \\ -\frac{1}{6}\xi^3+\frac{1}{2}\xi^2 x+\left(\frac{1}{2}\xi^3-\xi^2\right)x^2+\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3\right)x^3 \\ ;\xi\le x\le 1\end{cases}$$

والذي يمكن كتابته بالشكل:

$$G(x,\xi)=\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\xi^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\xi^3 \;;\; \xi\le x\le 1$$

إذن، $G(x,\xi)=G(\xi,x)$ أي أن تابع غرين تناظري، إن هذا بديهي لو لاحظنا أن مسألة الشروط الحدية [(176)-(177)] مترافقة ذاتياً، يمكن بسهولة التحقق من صحة خواص تابع غرين الأربعة.

10- أوجد تابع غرين للمعادلة التفاضلية:

$$xy''+y'=0 \qquad (185)$$

من أجل الشروط التالية :

$$\begin{cases} y(x) \text{ محدود كلما } x\to 0 \\ y(1)=\alpha y'(1) \;;\; \alpha\neq 0 \end{cases} \qquad (186)$$

الحل:

نوجد أولاً الحل العام للمعادلة (185) ، ثم نتحقق ، بأن الشروط (186) تكون محققة تماماً عندما : $y(x)\equiv 0$

في الواقع، لنكتب:

$$y'(x)=z(x)$$

فنجد :

$$xz' + z = 0$$

ومنه :

$$z = \frac{C_1}{x} \quad , \quad \ln z = \ln C_1 - \ln x$$

ولذلك فإن:

$$y(x) = C_1 \ln x + C_2 \qquad (187)$$

من الواضح بأن التابع $y(x)$ المعرف بالعلاقة (187) يحقق الشروط (186) فقط من أجل $C_1 = C_2 = 0$، ولذلك، فمن الممكن بناء تابع غرين للمسألة [(186)-(185)].

لنكتب تابع غرين $G(x,\xi)$ كما يلي:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 + a_2 \ln x \;\; ; & 0 < x \le \xi \\ b_1 + b_2 \ln x \;\; ; & \xi \le x \le 1 \end{cases} \qquad (188)$$

ومن كون $G(x,\xi)$ تابعاً مستمراً في النقطة $x = \xi$، فنكتب:

$$b_1 + b_2 \ln \xi - a_1 - a_2 \ln \xi = 0$$

إن القفزة $G'(x,\xi)$ في النقطة $x = \xi$ تساوي $\frac{1}{\xi}$، لذلك نضع :

$$b_2 . \frac{1}{\xi} - a_2 . \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}$$

$$c_1 = b_1 - a_1 \quad , \quad c_2 = b_2 - a_2 \qquad (189)$$

وبالتالي سيكون لدينا :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \ln \xi = 0, \\ c_2 = 1 \end{cases} \qquad (190)$$

$$c_1 = -\ln \xi \; , \; c_2 = 1$$

باستعمال الشروط (186)، ومن محدودية التابع $G(x,\xi)$ مع كون $x \to 0$ نحصل على أن $a_2 = 0$، ومن الشرط :

$$G(x,\xi)=\alpha G'_x(x,\xi)$$

نحصل على أن : $b_1 = \alpha b_2$، وبالأخذ بعين الاعتبار (189) و (190) ، نحصل على جميع العوامل (188):

$$a_1 = \alpha + \ln\xi,\ \ a_2 = 0\ \ ,\ \ b_1 = \alpha\ ,\ b_2 = 1$$

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\alpha + \ln\xi\ ,\ \ 0 < x \le \xi\\ \alpha + \ln x,\ \ \xi \le x \le 1\end{cases}$$

تمارين غير محلولة

I. برهن أن التابع المعطى بجانب كل معادلة تكاملية هو حل لها:

1. $\varphi(x)=1\,,\ \varphi(x)+\int_0^1 x\left(e^{xt}-1\right)\varphi(t)\,dt=e^x-x$

2. $\varphi(x)=e^x\left(2x-\frac{2}{3}\right),\ \varphi(x)+2\int_0^1 e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt=2xe^x$

3. $\varphi(x)=1-\dfrac{2\sin x}{1-\frac{\pi}{2}}\,,\ \varphi(x)-\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\,dt=1$

4. $\varphi(x)=\sqrt{x}\,,\ \varphi(x)-\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt=$

$$=\sqrt{x}+\frac{x}{15}\left(4x^{3/2}-7\right)$$

حيث النواة $K(x,t)$ هي :

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}\,, & 0\le x\le t,\\[2mm] \dfrac{t(2-x)}{2}\,, & t\le x\le 1\end{cases}$$

5. $\varphi(x)=e^x,\ \ \varphi(x)+\lambda\int_0^1 \sin xt\,\varphi(t)\,dt=1$

6. $\varphi(x)=\cos x,\ \ \varphi(x)-\int_0^{\pi}\left(x^2+t\right)\cos t\varphi(t)\,dt=\sin x$

II. أوجد حل المعادلات التكاملية، ذات النوى المتحللة:

7 – $\varphi(x)-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\varphi(t)\,dt=2x-\pi$

8 – $\varphi(x)-\int_{-1}^{1}e^{\arcsin x}\,\varphi(t)\,dt=\tan x$

9- $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \cos(q\ln t)\varphi(t)dt=1$

10- $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \arccos t\,\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11- $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^p \varphi(t)dt=1 \qquad (p>-1)$

12- $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (x\ln t-t\ln x)\varphi(t)dt=\frac{6}{5}(1-4x)$

13- $\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi \sin(x-t)\varphi(t)\,dt=\cos x$

14- $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi} (\sin x\cos t-\sin 2x\cos 2t+\sin 3x\cos 3t)\varphi(t)dt=\cos x$

III. أوجد حل المعادلات التكاملية التالية:

15- $\varphi(x)=2\int_0^1 xt\varphi^3(t)dt$

16- $\varphi(x)=\int_{-1}^1 (xt+x^2t^2)\varphi^2(t)dt$

17- $\varphi(x)=\int_0^1 x^2t^2\varphi^3(t)dt$

18- $\varphi(x)=\int_{-1}^1 \frac{xt}{1+\varphi^2(t)}dt$

19- $\varphi(x)=\int_0^1 \left(1+\varphi^2(t)\right)dt$

IV. أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلات التكاملية المتجانسة التالية :

20- $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\varphi(t)dt=0$

21- $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi} \sin x\cos t\varphi(t)dt=0$

$$22- \quad \varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin x\sin t\varphi(t)dt=0$$

$$23- \quad \varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt=0$$

$$24- \quad \varphi(x)-\lambda\int_0^{1}\left(45x^2\ln t-9t^2\ln x\right)\varphi(t)dt=0$$

$$25- \quad \varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(5xt^3+4x^2t\right)\varphi(t)dt=0$$

V. أوجد التوابع الذاتية للمعادلات التكاملية والتي نواها الحالة معرفة بالعلاقات :

$$26- \quad R(x,t;\lambda)=\frac{3-\lambda+3(1-\lambda)(2x-1)(2t-1)}{\lambda^2-4\lambda+3}$$

$$27- \quad R(x,t;\lambda)=\frac{(15-6\lambda)xt+(15-10\lambda)x^2t^2}{4\lambda^2-16\lambda+15}$$

VI. برهن أن النواة المتناظرة :

$$28- \quad K(x,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-h^2}{1-2h\cos(x-t)+h^2} \quad ; \ (-\pi\le x,\ t\le\pi)$$

لها التوابع الذاتية $1,\ \sin nx\ ,\ \cos nx$ من أجل $|h|<1$ وقيمها الذاتية $1, 1/h^n, 1/h^n$.

VII. أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلة التكاملية:

$$29- \quad \varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}K(x-t)\varphi(t)dt$$

حيث النواة هي $K(x)=x^2(-\pi\le x\le\pi)$ تابع دوري ودوره 2π.

VIII. أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلات التكاملية المتجانسة، والتي نواها من الشكل:

30 – $$K(x,t)=\begin{cases}(x+1)(t-2), & 0\le x\le t\\ (t+1)(x-2), & t\le x\le 1\end{cases}$$

31 – $$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\le x\le t\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

32 – $$K(x,t)=e^{-|x-t|},\quad 0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1$$

33 – $$K(x,t)=\begin{cases}-e^{-t}\operatorname{sh}x, & 0\le x\le t\\ -e^{-x}\operatorname{sh}t, & t\le x\le 1\end{cases}$$

IX. برهن أنه إذا كان λ_1, λ_2 بحيث $\lambda_1 \neq \lambda_2$ القيم الذاتية للنواة $K(x,t)$، عندئذ فإن التوابع الذاتية للمعادلات التكاملية :

34 – $$\varphi(x)-\lambda_1\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0$$

35 – $$\psi(x)-\lambda_2\int_a^b K(t,x)\psi(t)dt=0$$

تكون متعامدة أي :

36 – $$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0$$

X. برهن أنه إذا كانت النواة $K(x,t)$ متناظرة، فإن النواة المكررة $K_2(x,t)$ لها قيم ذاتية موجبة فقط.

XI. برهن أنه إذا كان :

37 – $$K(x,t)=-K(t,x)$$

عندئذ فإن القيم الذاتية تكون تخيلية بحتة.

XII. إذا كانت النواة $K(x,t)$ متناظرة، فإن :

38 – $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^m}=A_m \qquad (m=2,3,\ldots)$$

حيث λ_n هي القيم الذاتية و A_m هي الأثر من المرتبة m للنواة $K(x,t)$.

XIII. أوجد نقاط التفرع للحلول الصفرية للمعادلات التكاملية :

39 – $$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 xt\left(\varphi(t)+\varphi^3(t)\right)dt$$

40 – $$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 (3x-2)t\left(\varphi(t)+\varphi^3(t)\right)dt$$

XIV. باستخدام محددات فريدهولم، أوجد النوى الحالة للنوى التالية :

41 – $K(x,t)=2x-t;\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le 1$

42 – $K(x,t)=x^2t-xt^2;\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le 1$

43 – $K(x,t)=\sin x\cos t;\quad 0\le x\le 2\pi,\quad 0\le t\le 2\pi$

44 – $K(x,t)=\sin x-\sin t;\quad 0\le x\le 2\pi,\quad 0\le t\le 2\pi$

XV. أ – باستخدام العلاقات التدريجية (110) و (111)، أوجد النوى الحالة للنوى التالية :

45 – $K(x,t)=x+t+1;\quad -1\le x\le 1,\quad -1\le t\le 1.$

46 – $K(x,t)=1+3xt;\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le 1.$

47 – $K(x,t)=e^{x-t};\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le 1.$

XVI. ب – باستخدام النواة الحالة، أوجد حل المعادلات التكاملية :

48 – $$\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin(x+t)\varphi(t)dt=1$$

49 – $$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (2x-t)\varphi(t)dt=\frac{x}{6}$$

50 – $$\varphi(x)-\int_0^{2\pi}\sin x\cos t\,\varphi(t)dt=\cos 2x$$

51 – $$\varphi(x)+\int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt=e^x$$

52 – $$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\left(4xt-x^2\right)\varphi(t)\,dt=x$$

XVII. أوجد النوى المكررة للنوى المحددة من أجل قيم معينة لـ a و b :

53 – $K(x,t)=x-t;\qquad a=-1,\ b=1$

54 – $K(x,t)=\sin(x-t);\quad a=0,\ b=\dfrac{\pi}{2}(n=2,3)$

55 – $K(x,t)=(x-t)^2;\quad a=-1,\ b=1(n=2,3)$

56 – $K(x,t)=x+\sin t;\quad a=-\pi,\ b=\pi$

XVIII. في المسائل التالية أوجد $K_2(x,t)$:

57 – $K(x,t)=e^{|x-t|};\ a=0\ ,\ b=1$

58 – $K(x,t)=e^{|x|+t};\ a=-1,\ b=1$

XIX. أنشئ النوى الحالة من أجل النوى الموافقة :

59 – $K(x,t)=e^{x+t};\qquad a=0,\ b=1$

60 – $K(x,t)=xe^{t};\qquad a=-1,\ b=1$

61 – $K(x,t)=(1+x)(1-t);\ a=-1,\ b=0$

XX. أوجد النوى الحالة للنوى :

62 – $K(x,t)=\sin x\cos t+\cos 2x\sin 2t;\ a=0,\ b=2\pi$

63 – $K(x,t)=1+(2x-1)(2t-1);\qquad a=0,\ b=1$

XXI. برهن أنه من أجل معادلة فولتيرا التكاملية :

64 – $$\varphi(x)-\lambda\int_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x)$$

فإن محدد فريدهولم هو $D(\lambda)=e^{-A_1\lambda}$ وبالتالي فإن النواة الحالة لهذه المعادلة هي تابع صحيح لـ λ وتحليلي.

XXII. لتكن $R(x,t;\lambda)$ النواة الحالة لنواة ما $K(x,t)$ ، برهن أن النواة الحالة للمعادلة :

$$65- \qquad \varphi(x)-\mu\int_a^b R(x,t;\lambda)\,\varphi(t)dt=f(x)$$

هي :

$$R(x,t;\ \lambda+\mu)$$

XXIII. ليكن :

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dx\,dt=B^2$$

$$\int_a^b\int_a^b K_n^2(x,t)dx\,dt=B_n^2$$

حيث $K_n(x,t)$ هي النواة المكررة من المرتبة n للنواة $K(x,t)$.

برهن أنه إذا كان $B_2=B^2$ ، فإنه من أجل أي قيمة n يكون $B_n=B^n$.

XXIV. ادرس إمكانية الحلول للمعادلات التكاملية من أجل قيم مختلفة للوسيط λ :

$$66- \qquad \varphi(x)-\lambda\int_0^\pi \cos^2 x\varphi(t)dt=1$$

$$67- \qquad \varphi(x)-\lambda\int_{-1}^1 xe^t\varphi(t)dt=x$$

$$68- \qquad \varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi} |x-\pi|\varphi(t)dt=x$$

$$69- \qquad \varphi(x)-\lambda\int_{-1}^1 \left(x^2-2xt\right)\varphi(t)dt=x^3-x$$

$$70- \qquad \varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi}\cos x\cos t+\frac{1}{\pi}\sin 2x\sin 2t\right)\varphi(t)dt=\sin x$$

XXV. ادرس فيما إذا كان تابع غرين موجود من أجل المسألة ذات الشروط الحدية المرافقة، ثم أنشئ هذه التوابع:

71- $y'' = 0\ ;\ y(0) = y'(1)\ ,\ y'(0) = y(1)$

72- $y'' = 0\ ;\ y(0) = y(1)\ ,\ y'(0) = y'(1)$

73- $y'' + y = 0;\ \ y(0) = y(\pi) = 0$

74- $y''' = 0\ ;\ y(0) = y'(1) = 0;\ y'(0) = y(1)$

XXVI. حول إلى معادلة تكاملية مسألة الشروط الحدية باستخدام تابع غرين:

75- $y'' + y = x\ ;\ y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

76- $y^{IV} = 1\ ;\ y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$

77- $xy'' + y' = x\ ;\ y(1) - y(e) = 0$

78- $y'' + \pi^2 y = \cos \pi x\ ;\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)$

79- $y'' - y = -2e^x\ ;\ y(0) = y'(0),\ y(\ell) + y'(\ell) = 0$

XXVII. حوّل المسائل ذات القيم الحدية لمعادلات تكاملية :

80- $y'' = \lambda y + x^2\ \ ;\ y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

81- $y'' = \lambda y + e^x\ \ ;\ y(0) = y(1) = 0$

82- $y'' + \dfrac{\pi^2}{4} y = \lambda y + \cos \dfrac{\pi x}{2}\ ;\ \ y(-1) = y(1),\ y'(-1) = y'(1)$

83- $y'' + \lambda y = 2x + 1\ ;\ \ y(0) = y'(1),\ y'(0) = y(1)$

84- $y''' + \lambda y = 2x\ ;\ y(0) = y(1) = 0\ ,\ y'(0) = y'(1)$

85- $y'' + \lambda y = e^x\ ;\ y(0) = y'(0),\ y(1) = y'(1)$

الفصل الثالث

معادلات فريدهولم التكاملية ذات النوى المتناظرة

نكرس هذا الفصل لمعادلات فريدهولم التكاملية ذات النوى المتناظرة نظراً لأهمية الدور الذي تلعبه في العلوم التطبيقية.

نذكر بأن النواة المتناظرة هي نواة حقيقية لاتتأثر إذا بادلنا موضعي متحوليها.

ففي حالة البعد الواحد تكون النواة المتناظرة نواة حقيقية محققة للشرط :

$$K(t,s)=K(s,t) \tag{1}$$

وسندرس نظرية المعادلات التكاملية ذات النوى المتناظرة وسنكتفي بالبراهين على بعض النظريات في حالة البعد الواحد علماً بأنه يمكن تعميمها إلى حالة الأبعاد المتعددة. وسنفرض مبدئياً أن النواة مستمرة.

لقد رأينا فيما سبق، ، أن هناك بعض النوى التي ليس لها قيم ذاتية مطلقاً. إن هذا الأمر غير ممكن في حالة النوى المتناظرة حيث تصح النظرية التالية:

نظرية (1) : لكل نواة متناظرة ومستمرة وغير مطابقة للصفر قيمة ذاتية واحدة على الأقل.

1- الخواص البسيطة للمعادلات التكاملية بنوى متناظرة.

1-1-: إن التكامل لجداء تابعين ذاتيين موافقين لقيمتين ذاتيتين مختلفتين، الممتد على المجال الأساسي $[a,b]$ يساوي الصفر.

البرهان:

لتكن λ_2, λ_1 قيمتين ذاتيتين وليكن $\varphi_2(x), \varphi_1(x)$ التابعين الذاتيين الموافقين لهما على الترتيب، أي :

$$\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)=\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt;\quad \frac{1}{\lambda_2}\varphi_2(x)=\int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt$$

لنضرب المعادلة التكاملية الأولى بـ $\varphi_2(x)$ والثانية بـ $\varphi_1(x)$ ثم لنكامل بالنسبة لـ x ونطرح بعد ذلك إحدى المعادلتين من الثانية فنجد:

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=\int_a^b\left[\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt\right]\varphi_2(x)dx-\\-\int_a^b\left[\int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt\right]\varphi_1(x)dx \qquad (2)$$

ولو غيرنا ترتيب المكاملة في أحد التكاملين في الطرف الأيمن واستفدنا من (1) لحصلنا على صفر في الطرف الأيمن ولكان:

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=0$$

وبما أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ نجد:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=0 \qquad (3)$$

ملاحظة: إن برهان الخاصة (1-1) يمثل برهان للمبرهنة (3) الواردة في الفصل الثاني.

1-2- بما أننا قد برهنا أن جميع القيم الذاتية حقيقية فيمكننا أن نفرض أن جميع التوابع الذاتية حقيقية عندئذ نرى من المعادلة (3) إن أي تابعين ذاتيين موافقين لقيمتين ذاتيتين مختلفتين متعامدان.

1-3- لكل قيمة ذاتية λ عدد منته من التوابع الذاتية المستقلة خطياً. وبما أنه من الممكن تطبيق طريقة المعامدة على هذه التوابع، فإنه يحق لنا أن نفرضها متعامدة مثنى مثنى ومنظمة. وحيث إن أي تابعين ذاتيين موافقين لقيمتين ذاتيتين مختلفتين متعامدان كما رأينا، فإنه يمكننا أن نفرض أن جميع التوابع الذاتية متعامدة مثنى مثنى ومنظمة.

1-4- وقد رأينا كذلك أن عدد القيم الذاتية في أي مجال محدود لـ λ منته، ولذلك فإنه من الممكن ترتيب جميع القيم الذاتية وفق القيم المطلقة غير المتناقصة.

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq >>> \tag{4}$$

حيث $|\lambda_n| \to +\infty$ عندما $n \to \infty$ إذا وجد عدد غير منته من القيم الذاتية. وتتكرر كل قيمة ذاتية في المتوالية (4) بقدر رتبة تكرارها (عدد التوابع الذاتية المستقلة خطياً الموافق للقيمة الذاتية). وعلى هذا نستطيع أن نرتب التوابع الذاتية في متوالية:

$$\varphi_1(x)\ ,\ \varphi_2(x), \varphi_3(x) \tag{5}$$

حيث يمكننا أن نفرض أن هذه التوابع تشكل، كما أشرنا قبل قليل، جملة متعامدة ومنظمة من التوابع الذاتية.

تسمى الجملة (5) جملة التوابع الذاتية للنواة $K(x,t)$ أو للمعادلة التكاملية الموافقة.

مبرهنة (1) :

إذا كانت النواة متناظرة فإن جميع القيم الذاتية حقيقية .

البرهان:

سنبرهن فيما يلي أن جميع القيم الذاتية حقيقية. وسيكون ذلك بطريق غير مباشر فنفرض جدلاً أن λ_0 هي قيمة ذاتية مركبة ذات جزء تخيلي غير معدوم وأن $\varphi_0(S)$ التابع الذاتي الموافق لها، والذي لايمكن له أن يكون معدوماً استناداً إلى التعريف. إذن:

$$\varphi_0(x)=\lambda_0 \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)dt$$

ولو انتقلنا إلى الكميات المرافقة في هذه المعادلة التكاملية لحصلنا:

$$\overline{\varphi_0(x)}=\overline{\lambda_0} \int_a^b K(x,t)\overline{\varphi_0(t)}dt$$

ومنه نجد أن $\overline{\lambda_0}$ هي قيمة ذاتية وأن $\overline{\varphi_0(x)}$ التابع الخاص الموافق لها.

وبما أن λ_0 ليس حقيقياً فإن $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$ وعلى التابعين $\varphi_0(x)$ و $\overline{\varphi_0}(x)$ أن يحققا الشرط (3) لأنهما يوافقان قيمتين ذاتيتين مختلفتين، فنحصل:

$$\int_a^b |\varphi_0(x)|^2 \, dx = 0$$

واستناداً إلى (3) يكون $\varphi_0(x)$ مطابقاً للصفر وهذا ما يناقض تعريف $\varphi_0(x)$ باعتباره تابعاً ذاتياً.

ملاحظة :

من المعلوم أن كل تركيب خطي (بأمثال ثابتة) من توابع ذاتية موافقة لقيمة ذاتية واحدة هو أيضاً تابع ذاتي موافق للقيمة الذاتية ذاتها. أو بعبارة أخرى :

إن التوابع الذاتية الموافقة لقيمة ذاتية تشكل متنوعة خطية.

وتحقق التوابع الذاتية العلاقة:

$$\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} = \int_a^b K(x,t)\varphi_k(t)dt \tag{6}$$

التي يفهم منها إمكان اعتبار الطرف الأيسر لها، أمثال فورييه للنواة $K(x,t)$ بالنسبة للجملة المتعامدة المنظمة (5) وتعطينا متراجحة بسل عندئذ :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right]^2 \leq \int_a^b [K(x,t)]^2 \, dt \tag{7}$$

وإذا كاملنا بالنسبة لـ x نجد :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2} \leq \int_a^b \int_a^b [K(x,t)]^2 \, dt \, dx \tag{8}$$

وبالانتقال إلى النهايات $n \to \infty$، في حالة عدد غير منته من القيم الذاتية، نجد:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2} \leq \int_a^b\int_a^b [K(x,t)]^2 \, dt\, dx \tag{9}$$

إن جميع هذه النتائج التي ذكرناها تصح كذلك عندما تكون النوى غير محدودة، باستثناء تلك النتيجة تشير إلى أنه لايوجد في أي مجال محدود غير عدد منته من القيم الذاتية. وسبب ذلك هو أن الأمر الرئيسي الذي اعتمدنا عليه في استخلاص هذه النتائج هو تغيير ترتيب المكاملة في إحدى تكاملي الطرف الأيمن من (2)، ويبرهن أن هذا التغيير ممكن في حالة النوى غير المحدودة.

تعريف النواة القطبية : هي كل نواة تكتب بالشكل :

$$K(x,t) = \frac{L(x,t)}{(x-t)^{\alpha}} \qquad 0<\alpha<2$$

تعريف النواة ضعيفة القطبية : إذا كان $0<\alpha<\frac{1}{2}$ في النواة السابقة فإنها تسمى بنواة ضعيفة القطبية.

1-5- خاصة أساسية :

تصح من أجل النوى ضعيفة القطبية، المتراجحة :

$$[K(x,t)]^2 \leq \frac{C^2}{|x-t|^{2\alpha}} \qquad (2\alpha<1)$$

يمكن بسهولة فهم كون التكامل :

$$\int_a^b [K(x,t)]^2 \, dt$$

ذا معنى وأنه لايتجاوز عدداً موجباً M :

$$\int_a^b [K(x,t)]^2 \, dt < M \tag{10}$$

ويبرهن أن هذا التكامل مستمر باعتباره تابعاً لـ (x). وينتج من المتراجحة (10) مباشرة أن عدد القيم الذاتية في أي مجال محدود [-z,z] منته.

$$\frac{n}{z^2} \leq \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)^2 dt\right] dx$$

وينتج هذا من برهان النظرية I كذلك.

وعلى ذلك فإنه من الممكن أن نضع للنوى ضعيفة القطبية متواليتين من الشكل (4) و (5). وسوف نأتي، بدءاً من الآن، بالبراهين في حالة النوى المستمرة ثم نلحقها بالبراهين في حالة النوى ضعيفة القطبية.

2- النشر في متسلسلة حسب التوابع الذاتية :

ليس من الضروري أن تشكل مجموعة التوابع الذاتية (5) جملة تامة، فجملة التوابع الذاتية للنواة المتناظرة المتحللة، التي لايكون لها سوى عدد منته من القيم الذاتية، ليست، على سبيل المثال، جملة تامة. وإذا كان F(x) تابعاً مستمراً أو تابعاً منقطعاً فيمكننا أن نشكل متسلسلة فورييه لهذا التابع حسب التوابع (5)، ولكن ليس من الضروري أن تكون هذه المتسلسلة متقاربة. بانتظام في المجال [a,b] ، فإنه لايمكننا القول، دونما قيد، أن مجموع هذه المتسلسلة يساوي F(x)، لأنه ليس من الضروري أن تشكل التوابع (5) جملة تامة. لنبدأ أولاً بتشكيل متسلسلة فورييه للنواة K(x,t) التي نعتبرها تابعاً لـ t.

لقد سبق أن رأينا أن أمثال فورييه للنواة تساوي النسب $\varphi_k(x)/\lambda_k$، ولذلك فإن متسلسلة فورييه للنواة هي من الشكل :

$$\sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \qquad (11)$$

على أن يمتد المجموع بالنسبة لـ k إلى $+\infty$ عندما يكون عدد التوابع الذاتية غير منته، أو أن يمتد في الحالة الأخرى إلى عدد محدود يساوي عدد التوابع الذاتية (5).

ملاحظة : يمكن اعتبار المتسلسلة (11) متسلسلة فورييه للتابع K(x,t) المعرف في المربع k_o حسب التوابع $\varphi_k(x)\psi_j(t) \quad (k, j = 1,2,3,...)$، التي تشكل في المربع k_o جملة متعامدة منظمة كما يمكن لنا أن نتحقق من ذلك بسهولة :

$$\iint_{k_0} K(x,t)\varphi_k(x)\varphi_j(t)dxdt = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0 & k \neq 1 \ \text{عندما} \\ \dfrac{1}{\lambda_k} & k = 1 \ \text{عندما} \end{cases}$$

إن المتسلسلة (11) تتمتع بذاتية ملفتة للنظر وهي أن مجموعها، إذا كانت متقاربة بانتظام في k_0 يساوي النواة، سواء كانت الجملة تامة أو لم تكن كذلك. ولبرهان هذه الخاصة نلاحظ أن مجموع المتسلسلة (11) ، بسبب تقاربها المنتظم، هو تابع مستمر في k_0 ولذلك يكون من الطبيعي أن نفرض أن النواة مستمرة.

نظرية (2) :

إذا كانت النواة مستمرة، والمتسلسلة (11) متقاربة بانتظام في k_0، فعندئذ يكون مجموعها مساوياً النواة أي :

$$K(x,t)=\sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \qquad (11')$$

البرهان :

نفرض أولاً أنه يوجد عدد غير منته من القيم الذاتية ولنشكل الفرق التالي:

$$\omega(x,t)=K(x,t)-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$$

الذي يمثل تابعاً متناظراً مستمراً في k_0. لننظر إلى التابع $\omega(x,t)$ على أنه تابع لـ t في المجال $[a,b]$ حيث x ثابتة. فعندئذ تكون أمثال فورييه لهذا التابع $\varphi_k(t)$ مساوية للصفر:

$$\int_a^b \omega(x,t)\varphi_k(t)dt=0 \qquad (k=1,2,\ldots) \qquad (12)$$

علينا أن نبرهن أن $\omega(x,t)$ يطابق الصفر في k_0. سنقوم بهذا البرهان بشكل غير مباشر فنفرض جدلاً أن التابع $\omega(x,t)$ لايطابق الصفر في k_0. يمكن عندئذ اعتباره نواة لمعادلة تكاملية :

$$\psi(x)=\lambda \int_a^b \omega(x,t)\psi(t)dt$$

ويكون لهذه المعادلة التكاملية، استناداً إلى النظرية (1)، قيمة ذاتية واحدة على الأقل λ_o؛ ويوافق هذه القيمة الذاتية تابع خاص غير مطابق للصفر:

$$\psi_o(x)=\lambda_o \int_a^b \omega(x,t)\psi_o(t)dt \tag{13}$$

سنبرهن أن هذا التابع $\psi_o(x)$ متعامد مع جميع التوابع الذاتية $\varphi_k(x)$ للنواة $K(x,t)$. لنضرب ، من أجل ذلك، طرفي (12) بـ $\lambda_o\psi_o$ ثم لنكامل بالنسبة لـ x فنجد:

$$\lambda_o \int_a^b\int_a^b \omega(x,t)\psi_o(x)\varphi_k(t)dxdt = 0$$

وبما أن $\omega(x,t)$ متناظراً واستناداً إلى (13) ينتج :

$$\int_a^b \psi_o(t)\varphi_k(t)dt = 0 \qquad (k=1,2,...) \tag{14}$$

ويمكن، من جهة أخرى، كتابة المعادلة التكاملية (13) بالشكل:

$$\psi_o(x)=\lambda_o \int_a^b \left[K(x,t)-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]\psi_o(t)dt$$

وإذا لاحظنا التقارب المنتظم للمتسلسلة (11) والعلاقة (14) نحصل :

$$\psi_o(x)=\lambda_o \int_a^b K(x,t)\psi_o(t)dt$$

وهذا يعني أن التابع $\psi_o(x)$ هو تابع خاص للنواة الأصلية $K(x,t)$؛ فيمكن كتابته، إذن ، على شكل تركيب خطي من التوابع الذاتية $\varphi_k(x)$ الموافقة للقيمة الذاتية λ_o. ولكن هذا غير ممكن لأن التابع $\psi_o(x)$ والتوابع $\varphi_k(x)$ تشكل معاً جملة معامدة،

ولايمكن للتوابع المتعامدة أن تكون مرتبطة خطياً. ومن هذا التناقض نرى أن افتراضنا أن التابع $\omega(x,t)$ لايطابق الصفر، غير صحيح : ومنه نجد : $\omega(x,t)\equiv 0$ في k_0 وتكون بالتالي العلاقة (11) صحيحة.

أما إذا لم يكن للنواة غير عدد منته من القيم الذاتية فعندئذ تتكون المتسلسلة (11) من عدد منته من الحدود ويمكن نقل البرهان السابق إلى هذه الحالة كلمة، كلمة ويكون :

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \tag{15}$$

حيث m عدد القيم الذاتية في المتوالية (4).

نتيجة :

نرى من العلاقة (15) أن $K(x,t)$ هي نواة متحللة. وهكذا يكون، من جهة، لكل نواة متحللة (متناظرة في حالتنا) عدد منته من القيم الذاتية فقط كما سبق أن رأينا فيما مضى، وتكون النواة المتناظرة، من جهة أخرى، متحللة إذا لم يكن لها غير عدد منته من القيم الذاتية كما رأينا قبل قليل. ومنه نستنتج :

نظرية (3) :

تكون النواة المتناظرة المستمرة متحللة إذا وفقط إذا لم يكن لها غير عدة منته من القيم الذاتية [6].

لننتقل بعد ذلك إلى نشر تابع $F(x)$ في متسلسلة فورييه حسب التوابع الذاتية (5) ؛ ولنبدأ أولاً بالتعرف على مفهوم جديد:

نقول عن المتسلسلة :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{16}$$

إنها متقاربة في ساحة تحول x تحليلياً إذا كانت المتسلسلة :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

متقاربة بانتظام في هذه الساحة. وينتج من التقارب التحليلي، كما هو واضح، التقارب المطلق للمتسلسلة. ويكون كذلك:

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |f_k(x)|$$

وبإمكاننا أن نجد من أجل كل عدد موجب مفروض كيفي ε ، بسبب التقارب التحليلي، عدداً N على شكل يكون فيه الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة أصغر من ε مهما كانت n و p على أن يكون $n > N$ و $p > 0$ ، ومهما كانت n في ساحة تحول x. ويكون عندئذ الطرف الأيسر من المتراجحة أصغر من ε كذلك، وهذا يعني أنه إلى جانب التقارب المطلق نجد التقارب المنتظم ينتج من التقارب التحليلي.

عندما لاتتجاوز القيم المطلقة لحدود المتسلسلة (16) أعداداً موجبة معينة، $|f_k(x)| \leq a_k$ ، وإذا كانت متسلسلة الأعداد هذه متقاربة فعندئذ يكون من الواضح أن المتسلسلة (16) متقاربة تحليلياً. ولكن العكس ليس صحيحاً دوماً فلا يلزم عن التقارب التحليلي وجود هذه الأعداد a_k. فإذا وجدت هذه الأعداد قلنا (أحياناً) إن المتسلسلة (16) ذات تقارب نظامي. فمن التقارب النظامي ينتج التقارب التحليلي ومن التقارب التحليلي ينتج التقارب المنتظم والمطلق.

توجد فئة من التوابع المستمرة تتقارب سلاسل فورييه (حسب التوابع (5)) الموافقة لها تحليلياً في المجال [a,b] . هذه التوابع هي التي يمكن أن يعبر عنها بدلالة النواة.

تعريف : نقول عن تابع حقيقي مستمر F(x) إنه قابل أن يعبر عنه بدلالة النواة إذا استطعنا أن نجد تابعاً مستمراً في المجال [a,b] (أو أنه يعاني انقطاعاً في عدد منته من المواضع على أن يبقى محدوداً) وحقيقياً h(t) بحيث يمكن تمثيل F(x) بالاستعانة بالنواة K(x,t) بالشكل :

$$F(x)=\int_a^b K(x,t)h(t)\,dt \qquad (17)$$

يمكن للنواة $K(x,t)$ هنا أن تكون مستمرة أو ضعيفة القطبية.

نظرية (4) : إن نشر فورييه لكل تابع قابل لأن يعبر عنه بدلالة النواة حسب التوابع الذاتية $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$ يتقارب تحليلياً في المجال $[a,b]$.

البرهان :

لنرمز بـ h_k لأمثال فورييه للتابع :

$$h_k=\int_a^b h(t)\varphi_k(t)\,dt$$

إن أمثال فورييه F_k للتابع (17) هي :

$$F_k=\int_a^b F(x)\varphi_k(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_a^b K(x),h(t)\,dt\right]\varphi_k(x)\,dx$$

أو إذا غيرنا ترتيب المكاملة واستفدنا من تناظر النواة :

$$F_k=\int_a^b\left[\int_a^b K(t,x)\varphi_k(x)\,dx\right]h(t)\,dt$$

وبالاستناد إلى (6) يكون :

$$F_k=\frac{h_k}{\lambda_k} \qquad (18)$$

وتأخذ بالتالي متسلسلة فورييه للتابع (17) الشكل :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(x) \qquad (19)$$

حيث فرضنا وجود عدد غير منته من القيم الذاتية. واستناداً إلى متراجحة كوشي نجد :

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \right| \leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} h_k^2} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} \left[\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right]^2} \qquad (20)$$

وبالاعتماد على المتراجحة :

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left[\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right]^2 \leq \int_a^b |K(x,t)|^2 dt$$

مهما كان العددان الطبيعيان n و p . وبما أن تكامل الطرف الأيمن لايتجاوز عدداً موجباً M سواء كانت النواة مستمرة أو ضعيفة القطبية، فإن :

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left[\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right]^2 \leq M$$

بالتعويض في (20) ينتج :

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \right| \leq \sqrt{M} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} h_k^2}$$

وبما أن المربعات h_k^2 لأمثال فورييه تشكل متسلسلة متقاربة فإن المجموع في الطرف الأيمن يسعى إلى الصفر، مهما كانت $p > 0$ ، عندما $h \to \infty$. ولو لاحظنا أيضاً أن الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة مستقل عن x لاستطعنا أن نستنتج أن المتسلسلة:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \right| \qquad (21)$$

متقاربة بانتظام في [a,b] وهو المطلوب.

ملاحظة : بما أنه ليس من الضروري أن تكون جملة التوابع (5) تامة فإننا لانستطيع أن نقول ، دونما قيد ، إن مجموع المتسلسلة (19) يساوي F(x). ولكننا، مع هذا، سنبرهن أن هذا الأمر صحيح فعلاً كما تدل النظرية الأساسية التالية :

نظرية (5) : هلبرت – شميث :

إن مجموع متسلسلة فورييه لتابع $F(x)$ قابل لأن يعبر عنه بدلالة النواة حسب التوابع (5) يساوي $F(x)$. بعبارة أخرى: إن كل تابع قابل لأن يعبر عنه بدلالة النواة يمكن أن ينشر في متسلسلة لفورييه، حسب التوابع (5)، متقاربة تحليلياً في المجال $[a,b]$.

إن هذه النظرية تصح سواء كانت النواة مستمرة أو ضعيفة قطبياً[6].

ملاحظة : إذا ما تقاربت متسلسلة فورييه (11) بانتظام في k_0 وكانت النواة مستمرة فعندئذ يكون برهان النظرية (4) سهل جداً. فيكفي أن نضرب طرفي ('11) بـ $h(t)$ ثم نكامل بالنسبة لـ t فنجد :

$$F(x)=\int_a^b K(x,t)h(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\int_a^b \varphi_k(t)h(t)dt$$

أو :

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}h_k$$

وهو المطلوب.

ملاحظة : لقد كان لنا عند اختيار الجملة المتعامدة المنظمة من التوابع الحقيقية (5) بعض الحرية فإذا كانت جميع القيم الذاتية بسيطة، أي أن رتبة تكرار كل قيمة ذاتية تساوي الواحد، فإن هذه الحرية تنحصر في إمكان تغيير إشارة كل تابع خاص $\varphi_k(x)$. أما إذا كانت إحدى القيم الذاتية مضاعفة، ولنفرض مثلاً أن القيمة الذاتية λ_1 مضاعفة ثلاث مرات أي $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ فعندئذ نستطيع أن نبدل بالتوابع $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ ثلاثة توابع أخرى تنشأ عن الأولى بأي تحويل خطي متعامد.

فإذا كانت c_1,c_2,c_3 أمثال فورييه لتابع $F(x)$ بالنسبة لـ $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ فعندئذ يمكننا أن نبرهن بسهولة أن المجموع :

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x)$$

مستقل عن اختيار التوابع $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$

ومن الطبيعي أن تكون النظريات التي سبقت صحيحة مهما كان اختيار الجملة (5).

نظرية ديني Dini (6):

إذا كانت حدود المتسلسلة :

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

مستمرة وغير سالبة في مجال [a,b] وإذا كانت المتسلسلة متقاربة في كل نقطة، وكان مجموعها تابعاً مستمراً فعندئذ تتقارب المتسلسلة (21) بانتظام في [a,b].

3- نشر النوى المكررة وخواصها :

سنفرض في البنود الأربعة القادمة أن النواة تابع مستمر، الأمر الذي ينتج عنه أن جميع النوى المكررة توابع مستمرة، ينتج من الدستور :

$$K_2(x,t)=\int_a^b K(x,t)K(t_1,t)dt_1 \qquad (22)$$

أن النواة $K_2(x,t)$ ، كتابع في x ، قابلة لأن يعبر عنها بدلالة النواة على أن يقوم التابع $K(t_1,t)=K(t,t_1)$ بدور $h(t_1)$ حيث t وسيط. ثم إن أمثال فورييه للتابع $K(t,t_1)$ بالنسبة لجملة التوابع (5) هي، كما سبق لنا أن رأينا، $\varphi_k(t)/\lambda_k$ وبذلك ينتج من النظرية (4) أن :

$$K_2(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k^2} \qquad (23)$$

ويمكن برهان هذه العلاقة (استناداً إلى النظرية 4) مهما كانت x من [a,b] ومهما كانت t من المجال نفسه، أي أن النشر (23) صحيح في المربع k_0 كله.

وإذا عدنا إلى الدستور:

$$K_n(x,t)=\int_a^b K(x,t_1)K_{n-1}(t_1,t)dt_1 \qquad (24)$$

فعندئذ نستنتج من (18) أن أمثال فورييه للنواة $K_n(x,t)$، كتابع لـ x، مساوية لأمثال فورييه للنواة $K_{n-1}(t_1,t)$، كتابع لـ t_1، مقسومة على λ_k. أي أن أمثال فورييه لـ K(x,t) هي $\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}$ و لـ $K_2(x,t)$ $\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^2}$ ولـ $K_n(x,t)$، بوجه عام، هي $\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^n}$، وبذلك ينتج من النظرية (4).

$$K_n(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k^n}(n=2,3,...) \qquad (25)$$

وجميع هذه المتسلسلات (25) متقاربة في k_0 شأنها في ذلك شأن (23). لنبحث عن نوع هذا التقارب.

برهان التقارب بانتظام:

إن هذه المتسلسلات، حسب النظرية (5)، متقاربة تحليلياً بالنسبة للمتحول x في المجال [a,b] وذلك مهما كانت القيمة الثابتة t في المجال نفسه كذلك تكون هذه المتسلسلات بسبب التناظر، متقاربة تحليلياً بالنسبة للمتحول t باعتبار x ثابتة سنبرهن أن هذه المتسلسلات متقاربة تحليلياً بالنسبة لكل المتحولين في المربع k_0 يكفي أن نقوم بالبرهان في حالة المتسلسلات (23). وأما بالنسبة للمتسلسلات الأخرى (n>2) فإن البرهان يحتفظ بقوته لأن $|\lambda_k| \to +\infty$. وإذا استفدنا من المتراجحة الواضحة:

$$\left|\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k^2}\right| \le \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}+\frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k^2}\right]$$

فإننا نرى أنه يكفي أن نبرهن التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^2(x)|\lambda_k^2$ في المجال $[a,b]$. وبما أن هذه المتسلسلة الأخيرة تنتج من المتسلسلة (23) إذا جعلنا $t = x$ فإن مجموعها هو :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} = K_2(x,x)$$

إن حدود هذه المتسلسلة توابع مستمرة وغير سالبة كما أن مجموعها تابع مستمر في $[a,b]$ ، ولذلك فهي متقاربة بانتظام حسب نظرية ديني.

1-3-أثر نواة مكررة:

I- نضع أولاً $t = x$ في (25) ثم لنكامل بالنسبة لـ x ، فعندئذ نحصل، إذا أخذنا بعين الاعتبار كون التوابع $\varphi_k(x)$ منظمة، على عبارة تعطي ما يسمى أثر نواة مكررة بدلالة القيم الذاتية للنواة الأصلية :

$$\int_a^b K_n(x,x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^k} \tag{26}$$

وإذا رجعنا إلى (22) نحصل على العلاقة :

$$\int_a^b K_2(x,x)dx = \int_a^b\int_a^b [K(x,t)]^2 dxdt$$

وهذه، بالإضافة إلى (26) من أجل $n = 2$ ، تقودنا إلى المعادلة :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_a^b\int_a^b [K(x,x)]^2 dxdt \tag{27}$$

يمكن البرهان على أن العلاقة (25) غير صحيحة عندما $n = 1$ ، غير أنه يمكننا فيما يلي أن نبرهن صحة العلاقة :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[K(x,t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]^2 dt = 0 \tag{28}$$

من أجل كل x ثابتة من المجال [a,b]، حيث التقارب نحو الصفر هو تقارب منتظم بالنسبة لـ x . وتدل العبارة (28) أن مربع الخطأ الوسطي الذي نرتكبه عندما نعوض $K(x,t)$ بقطعة من متسلسلة فورييه لها يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$.

2- لننتقل إلى برهان دعوانا فننظر إلى النواة $K(x,t)$ على أنها تابع لـ t . فعندئذ تكون أمثال فورييه لهذا التابع هي $\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$ وتعطينا :

$$\int_a^b \left[K(x,t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]^2 dt = \int_a^b [K(x,t)]^2 dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}$$

غير أنه سبق لنا أن رأينا :

$$\int_a^b [K(x,t)]^2 dt = K_2(x,x)$$

كذلك يكون استناداً إلى (23):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \to K_2(x,x)$$

حيث التقارب منتظم بالنسبة لـ x ، كما رأينا قبل قليل. ينتج من هذا أن العبارة (28) تسعى إلى الصفر بانتظام بالنسبة لـ x. إذن بالأحرى أن يكون :

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(x,t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]^2 dxdt \to 0$$

لنفرض أن المتسلسلة (11) متقاربة بانتظام بالنسبة لـ t في [a,b] من أجل كل x ثابتة، ولنرمز بـ $K^*(x,t)$ لمجموع هذه المتسلسلة. وبالانتقال تحت رمز التكامل في العلاقة (28) إلى النهاية نحصل :

$$\int_a^b \left[K(x,t)-K^*(x,t)\right]^2 dt = 0$$

ومنه ينتج مباشرة أن $K^*(x,t) = K(x,t)$ ، أي أنه ليس من الضروري لبرهان (12) ، أن نفرض التقارب المنتظم للمتسلسلة بالنسبة لكلا المتحولين في المربع K_0، بل يكفي أن نفرض أن المتسلسلة متقاربة بانتظام بالنسبة لأحد المتحولين على أن يبقى المتحول الآخر ثابتاً كيفياً.

3- لنجعل الفضل :

$$\omega_n(x,t) = K(x,t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \tag{29}$$

نواة للمعادلة التكاملية.

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \omega_n(x,t)\varphi(t)dt \tag{30}$$

ولنبرهن أن الأعداد ....,$\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}$ تمثل جميع القيم الذاتية للمعادلة التكاملية (30) ، وأن التوابع ..$\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x)$ تمثل التوابع الذاتية الموافقة. لنضرب طرفي (29) بـ $\lambda_m \varphi_m(t)$، حيث $m > n$ ، ثم لنكامل بالنسبة لـ t. فبما أن التوابع $\varphi_p(t)$ متعامدة نحصل :

$$\lambda_m \int_a^b \omega_n(x,t)\varphi_m(t)dt = \lambda_m \int_a^b K(x,t)\varphi_m(t)dt$$

أو ، إذا لاحظنا أن $\varphi_m(t)$ هو التابع الخاص للنواة $K(x,t)$ الموافق للقيمة الذاتية λ_m :

$$\lambda_m \int_a^b \omega_m(x,t)\varphi_m(t)dt = \varphi_m(x)$$

وهذا يدلنا أن للمعادلة (30) القيم الذاتية λ_m ذاتها التي للمعادلة الأصلية عندما $m > n$ ، كما أن التوابع الذاتية الموافقة هي نفسها للمعادلتين. يبقى أن نبرهن أن مجموعة القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلة (30) تامة:

لنضرب طرفي (29) بـ $\varphi_m(x)$ ، حيث $m \le n$ فنحصل، إذا أخذنا بعين الاعتبار أن التوابع $\varphi_p(x)$ منظمة ومتعامدة، أن :

$$\int_a^b \omega_n(x,t)\varphi_m(x)dt = \int_a^b K(x,t)\varphi_m(x)dx - \frac{\varphi_m(t)}{\lambda_m}$$

إن الفضل في الطرف الأيمن معدوم لأن $\varphi_m(t)$ تابع خواص للنواة $K(x,t)$ موافق للقيمة الذاتية λ_m، أي :

$$\int_a^b \omega_n(x,t)\varphi_m(x)dx = 0 \qquad : \qquad m \le n \tag{31}$$

لتكن λ قيمة ذاتية للمعادلة (30) و $\varphi(x)$ التابع الخاص الموافق.

بضرب طرفي (30) بـ $\varphi_m(x)$ وملاحظة (31) نحصل :

$$\int_a^b \varphi(x)\varphi_m(x) = 0 \qquad : \qquad (m \le n) \tag{32}$$

لنستبدل بـ $\omega_n(x,t)$ في (30) عبارة الطرف الأيمن من (29) ولنلاحظ (32) فنستطيع أن نكتب (30) بالشكل:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

وهذا يعني $\varphi(x)$ تابع خاص للنواة الأصلية، الذي هو بالإضافة، استناداً إلى (32)، متعامد مع جميع $\varphi_m(x)(m \le n)$. ولكن ينتج من هذا أن القيمة الذاتية الموافقة λ مطابقة لإحدى القيم الذاتية λ_k، حيث $k > n$ ، وأن $\varphi(x)$ أحد التوابع الذاتية $\varphi_k(x)$ حيث $k > n$، أو يكون تركيباً خطياً من هذه التوابع عندما تكون القيمة الذاتية مضاعفة. وبهذا نكون قد برهنا دعوانا بخصوص التوابع الذاتية للنواة $\omega_n(x,t)$.

نتيجة :

ينتج من (25) أن النوى $k_n(x,t)$ متناظرة. وتنتج هذه الذاتية مباشرة من تعريف هذه النوى.

لتشكل المعادلة التكاملية المتجانسة :

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K_n(x,t)\varphi(t)dt \qquad (33)$$

يمكننا أن نتحقق بسهولة، إذا استفدنا من التقارب المنتظم للمتسلسلة (25) أن λ_k^n هي القيم الذاتية للمعادلة التكاملية (33) وأن $\varphi_k(x)$ هي التوابع الذاتية الموافقة. ولنبرهن أنه لاتوجد أية قيمة ذاتية أخرى أو أي تابع خاص آخر. إذا وجدت قيمة ذاتية مختلفة عن جميع القيم λ_k^n فعندئذ يلزم أن يعامد التابع الخاص الموافق جميع التوابع $\varphi_k(x)$:

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi(t)dt=0 \qquad (k=1,2,...)$$

وينعدم بالتالي، حسب (25)، الطرف الأيمن من (33) مهما كانت x، أي أن $\varphi(x)$ يطابق الصفر، وهذا مناقض للفرض. لنفرض الآن أن λ منطبقة على واحدة أو عدة من القيم الذاتية λ_k^n ولنبرهن أن $\varphi(x)$ هو تركيب خطي من التوابع الذاتية الموافقة $\varphi_k(x)$. لنفرض جدلاً أن $\varphi(x)$ ليس تركيباً خطياً من التوابع الذاتية الموافقة $\varphi_k(x)$، فعندئذ يكون مستقلاً خطياً عن هذه التوابع ويمكن، بالتالي، بطريقة المعامدة إنشاء تابع $\varphi(x)$ غير مطابق للصفر ومتعامد مع جميع $\varphi_k(x)$ هذه. ثم إن $\varphi(x)$ متعامد مع البقية من $\varphi_k(x)$ لأن الأخيرة توافق قيماً ذاتية أخرى.

فالتابع $\varphi(x)$ متعامد مع جميع $\varphi_k(x)$، ويمكننا أن نبرهن، كما فعلنا قبل قليل، أن $\varphi(x)$ مطابق للصفر وهذا مناقض للفرض.

وهكذا نكون قد رأينا أن λ_k^n و $\varphi_k(x)$، حيث $(k=1,2,...)$ هي مجموعة تامة من القيم الذاتية والتوابع الذاتية للنواة.

ملاحظة : إذا قسمنا طرفي المعادلة التكاملية الأساسية :

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

التي تعين القيم الذاتية والتوابع الذاتية الموافقة، على λ ثم جعلنا λ تسعى إلى اللانهاية فعندئذ نحصل على المعادلة التكاملية :

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad (\text{نقطة ما من } [a,b] \quad (x)) \tag{34}$$

وهذا يعني من الناحية الشكلية، أن هذه المعادلة التكاملية تعرّف التوابع الذاتية (إن وجدت) الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda = \infty$.

تعريف : نقول عن تابع مستمر $\varphi(t)$ إنه متعامد مع النواة : إذا تحققت العلاقة (34) مهما كانت x من $[a,b]$.

لنبرهن النظرية التالية :

نظرية (7) : الشرط اللازم والكافي لكي يكون تابع $\varphi(x)$ متعامداً مع النواة هو أن يكون متعامداً مع جميع التوابع الذاتية لهذه النواة.

البرهان :

علينا أن نبرهن أن (34) مكافئة للعلاقات :

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi(t)dt = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots) \tag{35}$$

لنبرهن أولاً أن (35) تنتج من (34). نضرب طرفي (34) بـ $\varphi_k(x)$ ثم نكامل بالنسبة لـ x. فإن غيرنا ترتيب المكاملة واستفدنا من تناظر النواة نحصل:

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(t,x)\varphi_k(x)dx\right]\varphi(t)dt = 0$$

أو :

$$\lambda_k \int_a^b \varphi_k(t)\varphi(t)dt = 0$$

ومنه تنتج (35).

لنبرهن بعد ذلك أن (34) تنتج من (35) استناداً إلى (23) وإلى أن المتسلسلة متقاربة بانتظام تحصل:

$$\int_a^b K_2(t,x)\varphi(x)dx = 0$$

لنضرب الطرفين بـ $\varphi(t)$ ولنكامل بالنسبة لـ t فينتج:

$$\int_a^b\int_a^b K_2(t,x)\varphi(x)\varphi(t)dx\,dt = 0$$

حيث ترتيب المكاملة هنا سواء.

وإذا استفدنا من (25) فإننا نستطيع أن نكتب العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\int_a^b\int_a^b\int_a^b K(t,t_1)K(t_1,x)\varphi(x)\varphi(t)dt\,dt_1 = 0 \qquad (36)$$

أو بسبب تناظر النواة، بالشكل:

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(t_1,t)\varphi(t)dt\right]\left[\int_a^b K(t_1,x)\varphi(x)dx\right]dt_1 = 0$$

وبما أن التكاملين بين الأقواس الكبيرة متساويان نجد:

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(t_1,x)\varphi(x)dx\right]^2 dt_1 = 0$$

ومنه ينتج :

$$\int_a^b K(t_1,x)\varphi(x)dx = 0 \qquad (\text{نقطة ما من } [a,b] \text{ } t_1)$$

وهذه هي العلاقة (34).

4- تصنيف النوى المتناظرة :

ليكن $q(x), p(x)$ تابعين مستمرين في المجال $[a,b]$. لنشكل التكامل الثنائي:

$$\int_a^b\int_a^b K(x,t)p(x)q(t)dx\,dt$$

المشابه للشكل ثنائي الخطية:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k \;(a_{ik}=a_{ki} \text{ و حقيقة } \quad a_{ik})$$

بتطبيق النظرية (5) نحصل على العلاقة:

$$\int_a^b K(x,t)q(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_k}{\lambda_k}p_k(x)$$

حيث q_k هي أمثال فورييه للتابع $q(t)$ وحيث تكون المتسلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بانتظام. لنضرب الطرفين بـ $p(x)$، ثم لنكامل بالنسبة لـ x ولنرمز بـ p_k لأمثال فورييه للتابع $p(x)$ فنحصل على المعادلة التكاملية :

$$\int_a^b\int_a^b K(x,t)p(x)q(t)dx\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k q_k}{\lambda_k} \qquad (37)$$

حيث تتقارب المتسلسلة في الطرف الأيمن تقارباً مطلقاً. وإذا وضعنا $q(x) \equiv p(x)$

فعندئذ نحصل على المشابه للشكل التربيعي:

$$J\equiv\int_a^b\int_a^b K(x,t)p(x)p(t)dx\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^2}{\lambda_k} \qquad (38)$$

على هذه العلاقة يستند تصنيف النوى المتناظرة إلى نوى موجبة ونوى سالبة.

4-1-تعريف النواة الموجبة :

نقول عن النواة أنها موجبة إذا كان التكامل:

$$\int_a^b\int_a^b K(x,t)p(x)p(t)dxdt > 0 \qquad (39)$$

مهما كان التابع المستمر $\varphi(x)$. فإذا كانت جميع القيم الذاتية λ_k موجبة فعندئذ تنتج من (38) مباشرة أن النواة موجبة.

مبرهنة (2) : إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون النواة موجبة هو أن تكون جميع القيم الذاتية موجبة.

البرهان : لنفرض أن إحدى القيم الذاتية سالبة ولنبرهن أنه لايمكن عندئذ أن تكون النواة موجبة. ليكن، على سبيل المثال، $\lambda_1 < 0$ ولنستبدل $\varphi_1(x)$ بـ $p(x)$ في (38). فإذا لاحظنا التوابع $\varphi_k(x)$ متعامدة ينتج أن $p_1 = 1$ وأن ما تبقى من p_k تكون جميعها معدومة، وبذلك يكون الطرف الأيمن من (38) مساوياً $\frac{1}{\lambda_1}$ أي أنه سالب.

ملاحظة : نقول، بشكل مماثل، عن النواة $K(x,t)$ إنها سالبة إذا كان $J \leq 0$ مهما كان التابع المستمر $p(x)$. ويمكن أن نبرهن، تماماً كما في الحالة الأولى، أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون النواة سالبة هو أن تكون جميع القيم الذاتية سالبة.

4-2-تعريف النواة التامة :

نقول عن النواة $K(x,t)$ إنها تامة (أو مغلقة) في صف التوابع المستمرة أو، اختصاراً، تامة إذا لم يوجد أي تابع مستمر، غير مطابق للصفر، متعامد مع جميع التوابع الذاتية. وهذا يعني استناداً إلى النظرية 3 أن النواة تكون تامة عندما لايوجد أي تابع مستمر غير مطابق للصفر متعامد مع النواة نفسها. ونقول بعبارة أخرى أن النواة تامة إذا لم يكن للمعادلة التكاملية (34) أي حل مستمر غير مطابق للصفر.

5- الخواص القصوى للتوابع الذاتية :

للتوابع الذاتية وللقيم الذاتية للنواة المتناظرة خواص قصوى مشابهة للخواص القصوى للقيم الذاتية للشكل التربيعي في الجبر الخطي، حيث يقوم التكامل (39) هنا مقام الشكل التربيعي هناك.

لنفرض أولاً، بغية السهولة، أن النواة موجبة، أي أن جميع القيم الذاتية λ_k لهذه النواة موجبة، ولنبحث عن تابع $p(x)$ من صنف التوابع المستمرة والمنظمة:

$$\int_a^b p^2(x)dx = 1 \qquad (40)$$

بحيث تكون قيمة التكامل (39) عظمى. لنفرض أن القيمة الذاتية مرتبة تصاعدياً:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \qquad (41)$$

وحسب متراجحة بسل يكون:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \le 1 \qquad (41)$$

واستناداً إلى (41) ينتج :

$$\int_a^b \int_a^b K(x,t)p(x)p(t)dx\,dt \le \frac{1}{\lambda_1}\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2$$

وبذلك ينتج، ضمن الشرط (40) ، التقدير التالي للتكامل (39):

$$J \le \frac{1}{\lambda_1}$$

ونحصل على إشارة المساواة عندما نضع $p(x) = \varphi_1(x)$ لأنه يكون في هذه الحالة $p_1 = 1$ و $p_k = 0$ عندما $k > 1$ ومنه إذا كانت النواة موجبة فإن القيمة العظمى للتكامل (39) ضمن الشرط (40) ، تساوي $\frac{1}{\lambda_1}$، ويبلغ التكامل هذه القيمة العظمى عندما يكون $p(x) = \varphi_1(x)$.

شروط القيمة العظمى :

لنطرح الآن المسألة الحدية التالية: لنبحث عن القيمة العظمى للتكامل (39) شريطة أن يكون التكامل التابع $p(x)$ منظماً ومتعامداً مع التابع الخاص $\varphi_1(x)$:

$$\int_a^b p^2(x)dx = 1 \quad ; \quad \int_a^b p(x)\varphi_1(x)dx = 0 \qquad (42)$$

في هذه الحالة يجب استناداً إلى الشرط الثاني أن نضع $p_1 = 0$ في (38). وإذا أعدنا نفس المحاكمة كما في الحالة السابقة فإنه يمكننا أن نرى أنه إذا كانت النواة موجبة فإن القيمة العظمى للتكامل (39) ضمن الشرط (42) يساوي $\frac{1}{\lambda_2}$، ويبلغ التكامل هذه القيمة العظمى عندما يكون $p(x) = \varphi_2(x)$. يمكننا، بطريقة مماثلة، أن نبرهن أنه إذا كانت النواة موجبة فإن القيمة العظمى للتكامل (39) ضمن الشروط:

$$\int_a^b p^2(x)dx = 1, \ldots$$

$$\int_a^b p(x)\varphi_1(x)dx = \int_a^b p(x)\varphi_2(x)dx = \ldots = \int_a^b p(x)\varphi_{n-1}(x)dx = 0 \qquad (43)$$

تساوي $\frac{1}{\lambda_n}$، ويبلغ التكامل هذه القيمة العظمى عندما يكون $p(x) = \varphi_n(x)$

وبهذا نرى أن مقلوب القيم الذاتية لنواة موجبة تمتاز بأنها القيم العظمى المتتالية للتكامل (39) شريطة أن يحقق التابع $p(x)$ الشروط الإضافية المذكورة، وتتعين التوابع الذاتية، بالوقت نفسه، بكونها تلك التوابع التي تجعل التكامل (39) يبلغ قيمه العظمى ضمن الشروط المذكورة.

ملاحظة:

لتكن القيمة المطلقة للتكامل الثنائي (تكامل هلبرت):

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \int_a^b \int_a^b K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)dx\,dt \right|$$

حيث النواة متناظرة أي $K(x,t) = K(t,x)$ فوق مجموعة التوابع $\varphi(x)$ المنظّمة والمحققة للعلاقة:

$$(\varphi,\varphi)=\int_a^b \varphi^2(x)dx=1$$

والتي لها حد أعظمي يعطى بالعلاقة :

$$\max|(K\varphi,\varphi)|=\frac{1}{|\lambda_1|}$$

حيث λ_1 هي القيمة الذاتية الصغرى للنواة $K(x,t)$.

يتم الوصول إلى الحد الأعظمي من أجل $\varphi(x)=\varphi_1(x)$ حيث $\varphi_1(x)$ هو التابع الذاتي الموافق للقيمة الذاتية λ_1.

مثال (3-1):

أوجد الحد الأعظمي :

$$|(K\varphi,\varphi)|=\left|\int_0^\pi\int_0^\pi K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)dx\,dt\right|$$

وذلك بالاعتماد على كون :

$$\|\varphi\|^2=(\varphi,\varphi)=\int_0^\pi \varphi^2(x)dx=1$$

مع العلم أن النواة هي :

$$K(x,t)=(\cos x\cos 2t+\cos t\cos 2x+1)\varphi(t)dt$$

الحل :

لنوجد حل المعادلة التكاملية المتجانسة:

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi(\cos x\cos 2t+\cos t\cos 2xt+1)\varphi(t)dt$$

كمعادلة تكاملية بنواة متحللة، إن القيم الذاتية هي :

$$\lambda_1=\frac{1}{\pi}\ ,\ \lambda_2=\frac{2}{\pi}\ ,\ \lambda_3=-\frac{2}{\pi}$$

والتوابع الذاتية الموافقة لها هي :

$$\varphi_1(x)=C_1\ ,\ \varphi_2(x)=C_2(\cos x+\cos 2x)$$

$$\varphi_3(x)=C_3\,(\cos x-\cos 2x)$$

حيث C_3, C_2, C_1 ثوابت اختيارية.

إن أصغر قيمة ذاتية (بالقيمة المطلقة) هي $\lambda_1=\dfrac{1}{\pi}$، ويوافقها التابع الذاتي $\varphi_1(x)=C_1$، ومن شرط التنظيم $(\varphi,\varphi)=1$ نجد أن :

$$C_1=\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

عندئذ :

$$\max\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(\cos x\cos 2t+\cos t\cos 2x+1)\varphi(t)dt\right|=\pi$$

يتم بلوغ الحد الأعظمي من أجل التابع :

$$\varphi_1(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

نظرية ميرسير (8):

إذا كانت $K(x,t)$ نواة مستمرة، موجبة أو سالبة، فعندئذ يصح النشر (11') وتتقارب المتسلسلة تحليلياً في k_0. سنكتفي بذكر البرهان في حالة النوى الموجبة.

البرهان:

سنبرهن أولاً أن $K(x,x)\geq 0$ من أجل أي نواة موجبة. لنفرض جدلاً أنه يوجد على القطر $x=t$ للمربع k_0 نقطة $x=t=c$ يكون من أجلها $K\,(c,c)<0$ فعندئذ يوجد، حتماً، جوار لهذه النقطة $\{|x-c|<\varepsilon, |t-c|<\varepsilon\}$ على شكل يكون فيه

$K(x,t)<0$ من أجل أي موضع من هذا المجال. عندئذ يوجد تابع مستمر $p(x)$ موجب في المجال $c-\varepsilon < x < c+\varepsilon$ ويساوي الصفر خارجه، يكون من أجله:

$$J = \int_a^b\int_a^b K(x,t)p(x)p(t)dx\,dt = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} K(x,t)p(x)p(t)dx\,dt < 0$$

وهذا مستحيل لأن النواة موجبة. لنشكل الآن النواة:

$$K(x,t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \tag{44}$$

التي قيمها الذاتية $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$ موجبة كذلك. لنطبق على هذه النواة ما برهنه أخيراً فنجد:

$$K(x,x)-\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \geq 0 \quad \text{أو} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \leq K(x,x)$$

ومنه ينتج مباشرة أن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}$ ذات الحدود الموجبة تتقارب مهما كانت x وأن مجموعاتها الجزئية تبقى، من أجل أية قيمة لـ x من المجال $[a,b]$، أصغر من عدد موجب M. وبالاستفادة من متراجحة كوشي يمكننا أن نكتب:

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left|\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right| = \sum_{k=n}^{n+p} \left|\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \cdot \left|\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}}\ \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k}}$$

أو :

$$\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}}\ \sqrt{M}$$

ومنه ينتج مباشرة، إذا أخذنا بعين الاعتبار تقارب $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}$، أن المتسلسلة (11) متقاربة بانتظام بالنسبة لـ t في $[a,b]$ من أجل x ثابتة. ومنه تنتج العلاقة ('11) .

وأما التقارب المطلق والمنتظم للمتسلسلة المفروضة في K_0 فيمكن أن يبرهن بالإفادة من نظرية ديني.

ملاحظة :

لم يكن مهماً عند برهان النظرية سوى أن تكون القيم الذاتية λ_k (بدءاً من دليل معين) موجبة، وهذا هو الذي جعلنا نرى أن النواة (44) موجبة. ومنه ينتج أن النظرية تحافظ على صحتها عندما يكون للنواة $K(x,t)$ عدد منته من القيم السالبة. وبوجه عام تبقى نظرية ميرسير صحيحة عندما لايكون للنواة $K(x,t)$ عدد منته من القيم السالبة. ومما يجدر الانتباه إليه أن نظرية ميرسير لاتصح إلاّ من أجل النوى المستمرة.

6- النوى ضعيفة القطبية وخواصها:

لندرس حالة النواة ضعيفة القطبية ووحيلة البعد:

$$K(x,t)=\frac{L(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$$

لنصطنع النواة المستمرة :

$$K_{\gamma}(x,t)=\begin{cases} K(x,t) & |x-t|\geq\gamma \quad \text{عندما} \\ \dfrac{L(x,t)}{\gamma^{\alpha}} & |x-t|\leq\gamma \quad \text{عندما} \end{cases}$$

التي تحقق المتراجحة التالية :

$$|K_{\gamma}(x,t)|<|K(x,t)|\leq\frac{C}{|x-t|^{\alpha}} \qquad (*)$$

لنشكل النواة المكررة الثانية (مرة واحدة).

$$K_2(x,t)=\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)dt_1$$

ويكون للتكامل الأخير معنى مهما كانت t,x من $[a,b]$ ، لأن التابع المكامل يحقق المتراجحة التالية عندما يكون $x = t$:

$$|K(x,t_1)\,K(t_1,x)| \le \frac{C^2}{|x-t_1|^{2\alpha}}$$

1- لنبرهن أن $K_2(x,t)$ تابع مستمر في المربع k_0:

لننشئ من أجل ذلك التابع :

$$K_2^{(\gamma)}(x,t) = \int_a^b K_\gamma(x,t_1)K_\gamma(t_1,t)dt_1 \qquad (44')$$

المستمر في k_0. يكفي أن نبرهن أن $K_2^{(\gamma)}(x,t) \to K_2(x,t)$ بانتظام في k_0 عندما $\gamma \to 0$. لدينا:

$$K_2(x,t) - K_2^{(\gamma)}(x,t) = \int_a^b \left[K(x,t_1)K(t_1,t) - K_\gamma(x,t_1)K_\gamma(t_1,t)\right]dt_1$$

لنلاحظ أن التابع المكامل في الطرف الأيمن ينعدم عندما $|x - t_1| \ge \gamma$ و $|t - t_1| \ge \gamma$ ، وأنه اعتماداً على التقدير (*) يكون:

$$\left|K_2(x,t) - K_2^{(\gamma)}\right| \le 2C^2\left[\int_{x-\gamma}^{x+\gamma} \frac{dt_1}{|t_1-x|^\alpha\,|t_1-t|^\alpha} + \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} \frac{dt_1}{|t_1-x|^\alpha\,|t_1-t|^\alpha}\right] \qquad (45)$$

فإذا كان $|x - t_1| \ge 2\gamma$ فعندئذ لا تتداخل المجالات $[x-\gamma, x+\gamma]$ و $(t-\gamma, t+\gamma)$ وينتج :

$$\int_{x-\gamma}^{x+\gamma} \frac{dt_1}{|t_1-x|^\alpha\,|t_1-t|^\alpha} \le \int_{x-\gamma}^{x+\gamma} \frac{dt_1}{|t_1-x|^\alpha\;\gamma^\alpha} \le$$

$$\le \frac{1}{\gamma^\alpha}\left[\int_x^{x+\gamma} \frac{dt_1}{(t_1-x)^\alpha} + \int_{x-\gamma}^{x} \frac{dt_1}{(x-t_1)^\alpha}\right]$$

أو :

$$\int_{x-\gamma}^{x+\gamma} \frac{dt_1}{|t_1-x|^\alpha\,|t_1-t|^\alpha} \le \frac{2\gamma^{1-2\alpha}}{1-\alpha}$$

وبالتالي :

$$|K_2(x,t)-K_2^{(\gamma)}(x,t)|\le\frac{8C^2\gamma^{1-2\alpha}}{1-\alpha}(|x-t|\ge2\gamma) \qquad (46)$$

لنفرض الآن أن $|x-t|<2\gamma$ عندئذ يتداخل المجالان $[x-\gamma, x+\gamma]$ و $[t-\gamma, t+\gamma]$ ولكنهما يكونان محتويين في مجال طوله 6γ ومركزه في x أو t.

وبالاستفادة من المتراجحة $\left(ab\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right)$ نحصل:

$$\frac{1}{|t_1-x|^{\alpha}|t_1-t|^{\alpha}}\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{|t_1-x|^{2\alpha}}+\frac{1}{|t_1-t|^{2\alpha}}\right].$$

وبالتالي :

$$\int_{x-\gamma}^{x+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-x|^{\alpha}|t_1-t|^{\alpha}}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_{x+3\gamma}^{x+3\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-x|^{2\alpha}}+\frac{1}{2}\int_{t-3\gamma}^{t+3\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-t|^{2\alpha}}\le\frac{1}{1-2\alpha}(3\gamma)^{1-2\alpha}$$

وبشكل مماثل يكون:

$$\int_{t-\gamma}^{t+\gamma}\frac{dt_1}{|t_1-x|^{\alpha}.|t_1-t|^{\alpha}}\le\frac{2}{1-2\alpha}(3\gamma)^{1-2\alpha}$$

ومنه ينتج، بالاعتماد على (45)، أن :

$$|K_2(x,t)-K_2^{(\gamma)}(x,t)|\le\frac{4C^2}{1-2\alpha}(3\gamma)^{1-2\alpha}\ (|x-t|<2\gamma) \qquad (47)$$

نستنتج من المتراجحتين (46) و (47) أن $K_2^{(\gamma)}(x,t)$ يسعى بانتظام إلى $K_2(x,t)$، ويكون $K_2(x,t)$، تابعاً مستمراً في K_0.

يمكن، بسهولة أكثر، برهان استمرار $K_3(x,t)$ والنوى المكررة الأخرى المعرفة بـ (24).

2- كذلك يمكننا أن نبرهن بسهولة إمكان تغيير ترتيب المكاملة:

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(t_1,t)u(t)dt\right] K(x,t_1)dt_1 = \tag{48}$$
$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)dt_1\right] u(t)dt$$

حيث $u(t)$ تابع مستمر. وللبرهان نستعمل الدستور المماثل في حالة النوى المستمرة:

$$\int_a^b \left[\int_a^b K_{\gamma_1}(t_1,t)u(t)dt\right] K_{\gamma_2}(x,t_1)dt_1 = \tag{49}$$
$$= \int_a^b \left[\int_a^b K_{\gamma_2}(x,t)K_{\gamma_1}(t_1,t)\, dt_1\right] u(t)dt$$

حيث γ_1 و γ_2 موجبان، ثم نجعل $\gamma_1 \to 0$ فيتقارب التكامل الداخلي في الطرف الأيسر بالنسبة لـ t_1 بانتظام إلى التكامل :

$$\int_a^b K(t_1,t)u(t)dt$$

ويتقارب التكامل الداخلي في الطرف الأيمن إلى التكامل :

$$\int_a^b K_{\gamma_2}(x,t_1)K(t_1,t)dt_1$$

فإذا جعلنا $\gamma_1 \to 0$ في (49) نحصل :

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(t_1,t)u(t)dt\right] K_{\gamma_2}(x,t_1)dt_1 = \tag{50}$$
$$= \int_a^b \left[\int_a^b K_{\gamma_2}(x,t_1)K(t_1,t)\, dt_1\right] u(t)dt$$

وإذا جعلنا بعد ذلك $\gamma_2 \to 0$ فعندئذ يتقارب التكامل المكرر في الطرف الأيسر إلى التكامل في الطرف الأيسر من (48) وفق ما رأينا في المناقشة الأخيرة، ويتقارب التكامل الداخلي في الطرف الأيمن من (50) بالنسبة لـ t بانتظام إلى التكامل الداخلي في الطرف الأيمن من (48) حيث يمكن للمرء أن يتأكد من ذلك كما في التكامل ('44) وبالانتقال إلى النهايات في (50) نحصل على (48).

ملاحظة :

نلاحظ أن التابع ضعيف القطبية $\left(\alpha < \frac{1}{2}\right)$ $K(t_1, t)$ من أجل $t = t_1$ ، يلعب في (22) دور $h(t)$. ويتعلق هذا التابع بالوسيط t. وبما أن النواة ضعيفة القطبية فإن مجموع مربعات h_k^2 تشكل متسلسلة متقاربة، وهذه الذاتية الوحيدة التي اعتمدنا عليها في برهان النظرية وبذلك يتضح أن المتسلسلة (23) متقاربة بالنسبة لـ x بانتظام مهما كانت t من المجال [a,b] . ويكون بشكل خاص:

$$\sum_k \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = K_2(x,x) \qquad (a \le x \le b)$$

حيث يمثل الطرف الأيمن، كما رأينا، تابعاً مستمراً. واستناداً إلى نظرية ديني تتقارب المتسلسلة الأخيرة بانتظام، وينتج من المتراجحة:

$$|\varphi(x)\varphi(t)| \le \frac{1}{2}\left\{[\varphi(x)]^2 + [\varphi(t)]^2\right\}$$

أن المتسلسلة (23) متقاربة تحليلياً عندما تقع النقطة (x,t) في المربع k_0.

كذلك تبرهن النظريتين I و II ، كما أشرنا من قبل، من أجل حالة النوى ضعيفة القطبية.

ويلعب التابع المستمر $(n \ge 3)K_{n-1}(t_1, t)$ في (24) دور $h(t_1)$ ولذلك فإن العلاقة (25) هي والتقارب التحليلي للسلاسل الموافقة، صحيحة من أجل النوى ضعيفة القطبية.

ويمكن التحقق ، تماماً كما رأينا قبل قليل، من إمكان تغيير ترتيب المكاملة في التكامل المكرر (36)؛ لذلك فإن جميع نتائج الفقرات السابقة تبقى صحيحة من أجل النوى ضعيفة القطبية.

هذا ويمكن تعميم جميع النتائج على حالة الفراغ متعدد الأبعاد مباشرة.

7- المعادلات التكاملية غير المتجانسة ذات النوى المستمرة أو ضعيفة القطبية:

لتكن لدينا المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (51)$$

بنواة مستمرة أو ضعيفة القطبية؛ ولنفرض أن λ ليست قيمة ذاتية أي أنها مختلفة عن جميع λ_k. عندئذ يكون لهذه المعادلة حل وحيد. ونرغب فيما يلي في كتابة هذا الحل بدلالة التوابع الذاتية $\varphi_k(x)$. لنكتب:

$$\varphi(x)=f(x)+g(x) \qquad (52)$$

حيث :

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (53)$$

ويمكن نشر التابع $g(x)$ ، حسب النظرية (5)، في متسلسلة، متقاربة، إطلاقاً وبانتظام، من التوابع الذاتية للنواة:

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\varphi_k(x)$$

لنبحث عن أمثال هذا النشر. إنه لايمكن الحصول على هذه الأمثال مباشرة من (53) لأنه يوجد تحت رمز التكامل التابع المجهول $\varphi(t)$. فإذا استبدلنا $f(t)+g(t)$ بـ $f(t)$ وفق (52) ، فنجد:

$$g(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\left[f(t)+g(t)\right]dt \tag{54}$$

وإذا رمزنا بـ f_k لأمثال فورييه للتابع المفروض $f(x)$ فعندئذ تكون أمثال فورييه للمجهول $f(t)+g(t)$ هي f_k+g_k ، ويكون للتكامل في الطرف الأيمن من (54)، حيث هو تابع يمكن أن يمثل بدلالة النواة، أمثال فورييه $\lambda_k/(f_k+g_k)$ وبالتالي يكون اعتماداً على (54):

$$g_k=\frac{\lambda\left(f_k+g_k\right)}{\lambda_k} \tag{55}$$

ومنه نحصل على الأمثال g_k :

$$g_k=\frac{\lambda f_k}{\lambda_k-\lambda} \tag{56}$$

ويكون حل المعادلة التكاملية (51) ، استناداً إلى (52) ، من الشكل:

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{k=1}^{r}\frac{f_k\varphi_k(x)}{\lambda-\lambda_k} \tag{57}$$

لنفرض الآن أن λ قيمة ذاتية ولتكن، للإيضاح، مضاعفة ثلاث مرات: $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ بما أن النواة متناظرة فإن المعادلة التكاملية المنقولة متطابقة مع (51)، والشرط اللازم والكافي لقابلية الحل هو أن يكون $f(x)$ متعامداً مع كل من $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ و $\varphi_3(x)$ أي $f_1=f_2=f_3=0$. لنفرض الآن أن هذين الشرطين محققان فعندئذ تصبح هذه المسألة كالسابقة، وتمكننا (55) من الحصول على جميع g_k بدءاً من g_4 وفق الدستور (56).

وتكون (55) متطابقة عندما $K=1,2,3$ لأنه يكون عندئذ $\lambda=\lambda_k$ و $f_k=0$. وهذا على وفاق مع كوننا نستطيع أن نضيف لحل المعادلة التكاملية (51) أي تركيب خطي من التوابع الذاتية $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$.

فالحل العام للمعادلة التكاملية (51) ، في الحالة التي نحن بصددها، هو :

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{k=4}\frac{f_k\varphi_k(x)}{\lambda-\lambda_k}+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x) \qquad (58)$$

حيث c_3, c_2, c_1 ثوابت كيفية.

8- دساتير فريدهولم في حالة النوى المتناظرة:

لنطبق فيما يلي دساتير فريدهولم على النوى المتناظرة المستمرة.

يكون في هذه الحالة معين فريدهولم والتابع الحالّ، توابع متناظرة أيضاً. لنعوض نشور النوى المكررة.

مبرهنة (3): إذا كانت النواة متناظرة فإن كل قيمة ذاتية هي قطب بسيط للتابع الحال.

البرهان :

نفرض أن λ محققة للشرط $|\lambda|<|\lambda_1|$ ، عندئذ :

$$R(x,t;\lambda)=K(x,t)+\lambda\sum_{n=1}^{'}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n^2}+\lambda^2\sum_{n=1}^{'}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n^3}+\ldots \qquad (59)$$

وإذا عوضنا في هذه المتسلسلة جميع الكميات بقيمها المطلقة فعندئذ نحصل على متسلسلة مضاعفة متقاربة بحدود موجبة لأنه إذا ضممنا الحدود التي تحوي $|\varphi_n(x)||\varphi_n(t)|$ في زمرة واحدة فإننا نحصل على المتسلسلة :

$$|K(x,t)|+|\varphi_1(x)||\varphi_1(t)|\sum_{k=1}^{'}\frac{|\lambda|^k}{|\lambda_1|^{k+1}}+|\varphi_2(x)||\varphi_2(t)|\sum_{k=1}^{'}\frac{|\lambda|^k}{|\lambda_2|^{k+1}}+$$

$$+\ldots=|K(x,t)|+\sum_{n=1}^{'}|\varphi_n(x)||\varphi_n(t)|\frac{|\lambda|}{|\lambda_n|(|\lambda_n|-|\lambda|)}$$

وبمقارنة هذه المتسلسلة مع المتسلسلة المتقاربة بانتظام :

$$\sum_{n=1}^{'}\frac{|\varphi_n(x)||\varphi_n(t)|}{|\lambda_n|^2} \qquad (60)$$

نجد أن النسبة بين حديهما العامين $\frac{|\lambda||\varphi_n|^2}{|\lambda_n|(|\lambda_n|-|\lambda|)}$ مستقلة عن t,x وتسعى إلى $|\lambda|$ عندما $n\to\infty$، وهذا ما يؤكد التقارب المطلق للمتسلسلة المضاعفة (59) .

وبالتالي فإن عملية ضم المتسلسلة التي تحوي $\varphi_n(x)\varphi_n(t)$ ممكنة.

ونحصل بهذا على النشر التالي للتابع الحالّ وفق التوابع الذاتية:

$$R(x,t,\lambda)=K(x,t)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)} \qquad (61)$$

لو عوضنا في (61) جميع الحدود بقيمها المطلقة ثم قارنا، كما سبق، المتسلسلة الناتجة بالمتسلسلة (60) ، لتأكدنا أن المتسلسلة (61) متقاربة بانتظام بالنسبة لكل من t,x، مهما كانت λ شرط أن تكون مختلفة عن λ_n . وتكون هذه المتسلسلة، فوق ذلك، متقاربة بانتظام بالنسبة لـ λ في كل ساحة محدودة من المستوي λ على أن نحذف منها تلك الحدود التي يكون لها أقطاب في هذه الساحة. وعلى ذلك فإن الطرف الأيمن من (61) يمثل الكسور الجزئية الناتجة عن تفريق تابع ميرومورفي إلى كسور فهو يعتبر لذلك، تمديداً تحليلياً للتابع الحال $R(x,t,\lambda)$ على المستوي كله.

ملاحظة : لنضع الآن $t = x$ في (61) ثم لنتكامل بالنسبة لـ x ينتج :

$$\int_a^b R(x,x;\lambda)dx=\int_a^b K(x,x)dx+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}$$

وبالعودة إلى محددات فريدهولم، نجد أن:

$$\int_a^b R(x,x,\lambda)dx=-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$$

وبالتالي فإنه يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_a^b K(x,x)dx+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\lambda-\lambda_n)}$$

فإذا كان λ_0 موضعاً صفرياً لـ $D(\lambda)$ مضاعفاً r مرة، فعندئذ يجب أن تكون القيمة $\lambda=\lambda_0$ قطباً بسيطاً للعبارة في الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة براسب يساوي r، وأما على الطرف الأيمن من هذه العلاقة فإن بعض الأعداد λ_n، تتطابق مع λ_0، وكل كسر مقابل يمكن كتابته بالشكل:

$$\frac{\lambda}{\lambda_n(\lambda-\lambda_n)}=\frac{1}{\lambda-\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n}$$

أي أن كلاً من هذه الكسور يعطي راسباً يساوي الواحد في القطب $\lambda=\lambda_0$.

نظرية (9):

إذا كان λ_0، في حالة النواة المتناظرة، موضعاً صفرياً لـ $D(\lambda)$ مضاعفاً r مرة فعندئذ يقابل هذه القيمة الذاتية r تابعاً خاصاً مستقلاً خطياً لا أكثر ولا أقل، أي أنه عندما تكون النواة متناظرة فإن رتبة تضاعف أي موضع صفري لـ $D(\lambda)$ يساوي رتبة تضاعف التابع الخاص الموافق.

ولقد سبق أن رأينا أن المتسلسلة (11) تمثل نشر النواة $K(x,t)$ في متسلسلة حسب جملة التوابع الذاتية $\varphi_n(t)$ ، فإذا استبدلنا هذه المتسلسلة بـ $K(x,t)$ في الطرف الأيمن من (61) فإننا نحصل على المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\prime}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n-\lambda} \tag{62}$$

التي تمثل نشر فورييه للتابع الحالّ. وبما أن متسلسلة الطرف الأيمن من (61) متقاربة بانتظام فإن المتسلسلتين (62) و (11) إما أن تكونا متقاربتين بانتظام معاً أو أن لاتكونا كذلك معاً، وإذا كانت (11) متقاربة بانتظام فإننا نحصل، إلى جانب ('11) ، على النشر :

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\prime}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n-\lambda} \tag{63}$$

ويمكن الحصول مباشرة على أمثال فورييه للتابع $R(x,t;\lambda)$ وبسهولة. يكفي أن نضرب طرفي (61) بـ $\varphi_n(t)$ ثم نكامل بالنسبة لـ t ؛ فإذا لاحظنا أن $\varphi_n(t)$ تابع خاص للنواة $K(x,t)$ وأن جميع التوابع $\varphi_n(t)$ متعامدة ومنظمة فإننا نحصل على العبارات التالية لأمثال فورييه للمتسلسلة (62) :

$$\int_a^b R(x,t,\lambda)\varphi_n(t)dt = \frac{1}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x)$$

وتشير هذه العلاقة إلى أن التوابع $\varphi_n(x)$ هي التوابع الذاتية للنواة $R(x,t,\lambda)$ الموافقة للقيم الذاتية $\lambda_n - \lambda$ عندما تثبت القيمة الحقيقية λ بشكل كيفي. ومن السهل أن نرى أن التوابع $\varphi_n(x)$ تمثل جميع التوابع الذاتية للنواة الحقيقية المتناظرة $R(x,t;\lambda)$. فإذا فرضنا جدلاً وجود تابع خاص آخر فعندئذ إما أن يوافق هذا التابع قيمة ذاتية مختلفة عن جميع القيم الذاتية $\lambda_n - \lambda$، وعندها يجب أن يكون متعامداً مع جميع التوابع $\varphi_k(x)$، أو أن يوافق إحدى القيم الذاتية $\lambda_0 - \lambda$ وعندها يكون، باعتباره تابعاً خاصاً جديداً، مستقلاً خطياً عن التوابع $\varphi_k(x)$ التي تقابل القيمة الذاتية نفسها. لنضف إلى $\varphi_0(x)$ تركيباً خطياً من التوابع $\varphi_k(x)$ التي توافق القيمة الذاتية، ولنختر أمثال هذا التركيب الخطي على شكل يكون فيه التابع الخاص الناتج عمودياً على هذه التوابع $\varphi_k(x)$. وعندئذ يكون هذا التابع الخاص الناتج، كما برهنا عمودياً على جميع التوابع $\varphi_k(x)$. الموافقة للقيم الذاتية الأخرى. ينتج من هذا أنه يمكن اعتبار التابع $\varphi_0(x)$ عمودياً على جميع التوابع $\varphi_k(x)$؛ فهو إذن عمودي على النواة. لنضرب بعد ذلك طرفي (61) بـ $\varphi_0(t)$ ولنكامل بالنسبة لـ t فنحصل :

$$\int_a^b R(x,t;\lambda)\varphi_0(t)dt = 0$$

وهذا يعني أنه لايمكن لـ $\varphi_0(t)$ أن تكون تابعاً خاصاً للنواة $R(x,t;\lambda)$ ففرضنا أن التوابع الذاتية $\varphi_k(x)$ لاتشمل جميع التوابع الذاتية $R(x+;\lambda)$ ليس صحيحاً.

وهكذا نستطيع أن نجزم أن التابع $R(x,t;\lambda)$، عندما نعتبره نواة جديدة، التوابع الذاتية $\varphi_n(x)$ نفسها التي للنواة الأصلية. وأما القيم الذاتية الموافقة فهي $\lambda_k - \lambda$. ولو طبقنا العلاقة (61) $R(x,t;\lambda)$ ورمزنا بـ μ للوسيط الذي يظهر في التابع الحال لحصلنا على التابع الحال التالي لهذه النواة :

$$R(x,t,\lambda;\mu)=R(x,t;\lambda)+\mu\sum_{n=1}^{'}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{(\lambda_k-\lambda)(\lambda_k-\lambda-\mu)}$$

ولو استبدلنا بـ $R(x,t;\lambda)$ في هذه العبارة ما يساويه من (61)، لحصلنا بعد حسابات بسيطة على العلاقة :

$$\tilde{R}(x,t,\lambda;\mu)=K(x,t)+(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{'}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{\lambda_n[\lambda_n-(\lambda+\mu)]}=R(x,t;\lambda+\mu)$$

أي أنه إذا اعتبرنا التابع $R(x,t;\lambda)$ نواة جديدة فعندئذ يكون التابع الحل هو $R(x,t;\lambda+\mu)$.

ملاحظة : بما أننا حصلنا على نشر النوى المكررة في حالة النوى المتناظرة ضعيفة القطبية كذلك، كما برهنا التقارب المنتظم للمتسلسلات من أجل هذه النوى، فإن النشر (61) صحيح في هذه الحالة.

9- النوى الهرميتية :

لقد عرفنا النواة المتناظرة بأنها تلك النواة التي لاتتأثر إذا بادلنا بين موضعي متحوليها. وهذا النوع من النوى يقابل المصفوفات المتناظرة في الجبر الخطي. وهذه المصفوفات المتناظرة حالة ذاتية من المصفوفات الهرميتية التي تحقق عناصرها الشرط $a_{ki}=\bar{a}_{ik}$ ويمكن بشكل مماثل تماماً اعتبار النوى المتناظرة حالة ذاتية من النوى الهرميتية التي تنتقل إلى القيمة المرافقة عندما نبادل بين متحوليها. ففي حالة البعد الواحد يكون:

$$K(t,x)=\overline{K(x,t)} \qquad (64)$$

ويصح جميع ما ذكرناه إلى الآن في نظرية المعادلات التكاملية على هذه النوى عندما تكون مستمرة أو ضعيفة القطبية. كذلك تصح النظرية (1) في حالة النوى الهرميتية، فجميع القيم الذاتية حقيقية ولكن التوابع الذاتية يمكن أن تكون مركبة : وتكون الجملة (5) متعامدة منظمة من التوابع العقدية إذا حققت الشروط :

$$\int_a^b \varphi_p(x)\overline{\varphi_q(x)}dx=\begin{cases}0 & p\neq q \text{ عندما} \\ 0 & P=q \text{ عندما}\end{cases}$$

ويكون للمتسلسلة (11) الشكل:

$$\sum_{k} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \qquad (65)$$

وليست هذه المتسلسلة إلاّ متسلسلة فوريه للنواة $K(x,t)$ (المعتبرة تابعاً في x) وفق التوابع $\varphi_k(x)$. كما أنه يمكن اعتبارها متسلسلة فوريه للتابع $K(x,t)$ المعرف في k_0 وفق التوابع $\varphi_k(x)\overline{\varphi_\ell(t)}(k,\ell=1,2,...)$ التي تشكل جملة متعاملة منظمة في k_0.

وإذا كانت المتسلسلة متقاربة بانتظام في k_0 فعندئذ يكون:

$$K(x,t)=\sum_{k} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \qquad (66)$$

وتحافظ النظرية في العلاقة (18) على صحتها هنا، كذلك الأمر بالنسبة للنظرية (5) . ونحصل للنوى المكررة على النشور :

$$K_n(x,t)=\sum_{k} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^n} \; (n=2,3,...) \qquad (67)$$

المتقاربة بانتظام في k_0. وعوضاً عن (29) يكون لدينا الآن:

$$\sum_{k} \frac{1}{\lambda_k^2}=\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2 dx\, dt \qquad (68)$$

وعوضاً عن (28) :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left| K(x,t)-\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\right| dt=0 \qquad (69)$$

وتحافظ النظرية (4) على صحتها إذا أبقينا تعريف المعاملة مع النواة (34) دون تغيير . وأما العلاقة (52) فيستعاض عنها بالعلاقة :

$$\int_a^b\int_a^b K(x,t)\overline{p(x)}p(t)dx\, dt=\sum_{k} \frac{|p_k|^2}{\lambda_k} \qquad (70)$$

وأما ما تبقى من المحاكمات المستقلة بتصنيف النوى وبخواص القيم الذاتية القصوى وبالدساتير فإنها تحتفظ بصحتها على أن نبدل بالتوابع الذاتية في المواضع المرافقة لها. هذا ويمكن تعميم جميع ما قيل في نظرية المعادلات التكاملية على النوى الهرميتية ضعيفة القطبية.

تعريف النواة مائلة التناظر :

نقول عن نواة إنها مائلة التناظر إذا حققت الشرط:

$$K(t,x)=-K(x,t)$$

إن المعادلات التكاملية ذات النوى الهرميتية ذات صلة وثيقة بالمعادلات التكاملية ذات النوى مائلة التناظر

ومن الواضح أنه إذا كانت النواة $K(x,t)$ مائلة للتناظر فإنه $iK(x,t)$ نواة هرميتية. فإذا بدلنا لذلك في المعادلة التكاملية ذات النواة مائلة التناظر:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

λ_i بـ λ ، فعندئذ نحصل على معادلة تكاملية ذات نواة هرميتية:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b iK(x,t)\varphi(t)dt$$

ينتج من هذا أن للمعادلة التكاملية ذات النواة مائلة التناظر قيمة ذاتية واحدة على الأقل وأن جميع قيمها الذاتية تخيلية صرفة.

10- المعادلات التكاملية التي تُرد إلى معادلات تكاملية متناظرة:

سندرس فيما يلي صنفاً من المعادلات التكاملية، كثيراً ما نصادفه في التطبيقات.

وتتميز المعادلات التكاملية لهذا الصنف بأنها تردّ بتحويلات بسيطة إلى معادلات تكاملية ذات نوى متناظرة. إن هذه المعادلات من الشكل:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)p(t)\varphi(t)dt \qquad (71)$$

حيث $K(x,t)$ نواة حقيقية متناظرة وحيث يكون $p(t) > 0$ هو الثقل في المجال $[a,b]$.

لنضرب طرفي المعادلة بـ $\sqrt{p(x)}$ ولنعوض $\varphi(x)$ بتابع مجهول جديد $\psi(x)=\sqrt{p(x)}\,\varphi(x)$ فنتج المعادلة التكاملية :

$$\psi(x)=f(x)\sqrt{p(x)}+\lambda\int_a^b L(x,t)\psi(t)dt$$

ذات النواة المتناظرة :

$$L(x,t)=K(x,t)\sqrt{p(x)\,p(t)}$$

لتكن λ_k القيم الذاتية للمعادلة التكاملية المتجانسة، ولتكن $\psi_k(x)$ التوابع الذاتية الموافقة. يمكننا أن نفرض أن التوابع $\psi_k(x)$، كالمعتاد، منظمة ومتعامدة:

$$\int_a^b \psi_p(x)\psi_q(x)dx=\begin{cases} 0 & p\neq q \text{ عندما} \\ 1 & p=q \text{ عندما} \end{cases}$$

ومن :

$$\psi_k(x)=\varphi_k(x)\sqrt{p(x)}$$

ينتج أن التوابع الذاتية للمعادلة المتجانسة:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)p(t)\varphi(t)\,dt$$

متعامدة ومنظمة بالنسبة للثقل $p(x)$:

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_p(x)\,\varphi_q(x)\,dx=\begin{cases} 0 & p\neq q \text{ عندما} \\ 1 & p=q \text{ عندما} \end{cases}$$

ويكون للنواة المكررة :

$$\int_a^b L_2(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)p(t_1)\sqrt{p(x)\,p(t)}\,dt_1$$

النشر :

$$L_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(x)\psi_k(t)}{\lambda_k^2}$$

وبالتقسيم على المضروب $\sqrt{p(x)\,p(t)}$ نحصل للتابع:

$$H_2(x,t) = \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)p(t_1)dt_1$$

على النشر :

$$H_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k^2}$$

وبطريقة مماثلة، إذا طبقنا طريقة الاستقراء التام، نجد للتابع:

$$H_p(x,t) = \int_a^b H_{p-1}(x,t_1)K(t_1,t)P(t_1)dt$$

النشر :

$$H_p(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k^2}$$

ويكون بالإضافة لذلك:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$$

إذا كانت المتسلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بانتظام بالنسبة لأحد المتحولين على أن يأخذ المتحول الآخر قيمة ثابتة كيفية.

لنفرض الآن أنه يمكن أن يعبر عن التابع f(x) بدلالة النواة L(x,t)

$$f(x)=\int_a^b L(x,t)h(t)dt \tag{72}$$

وعندئذ يكون:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,\psi_k(x) \tag{73}$$

حيث:

$$f_k=\int_a^b f(x)\psi_k(x)dx=\int_a^b f(x)\sqrt{p(x)}\,\psi_k(x)dx$$

لنقسم طرفي (72) وطرفي (73) على $\sqrt{p(x)}$ فنحصل للتابع:

$$F(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{p(x)}}=\int_a^b K(x,t)\sqrt{p(t)}\,h(t)dx$$

على النشر المتقارب مطلقاً وبانتظام:

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty} F_k\,\varphi_k(x) \tag{74}$$

حيث تتشكل الأمثال في هذا النشر وفقاً لقاعدة فوريه المعتادة على أن نلاحظ الثقل $p(x)$:

$$F_k=\int_a^b p(x)F(x)\varphi_k(x)dx$$

يمكن رد المعادلة (71) مباشرة إلى معادلة ذات نواة متناظرة وذلك إذا استبدلنا بـ x و t متحولين جديدين x و y وفق العلاقتين:

$$y=\int_a^x p(u)\,du; \qquad z=\int_a^t p(u)\,du$$

وحيث إن $p(u)>0$ فإن المتحولين الجديدين تابعان طرديان للقديمين. بتعويض المتحولات ينتج $\omega(y)=\varphi(x), f_1(y)=f(x)$ وتصبح النواة الجديدة $K_1(y,z)=K(x,t)$ وتأخذ المعادلة التكاملية (71) الشكل:

$$\omega(y)=f_1(y)+\lambda\int_0^{\ell} K_1(y,z)\omega(z)dz \qquad \left(\ell=\int_a^b p(u)du\right)$$

مثال (2-3):

لنبدأ بدراسة النواة :

$$K(x,t)=\begin{cases} x(1-t) & x\le t \text{ عندما} \\ t(1-x) & x\ge t \text{ عندما} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le x\le 1 \\ 0\le t\le 1 \end{pmatrix} \tag{75}$$

يمكن في هذا المثال كتابة جميع القيم الذاتية وجميع التوابع الذاتية بشكل ظاهري. لنلاحظ أنه علينا في المعادلة التكاملية المتجانسة:

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt \tag{76}$$

أن نستعمل العبارة الثانية من (75) عندما نكامل من $t=0$ إلى $t=x$ (أي من أجل $t\le x$) ، وأن نستعمل العبارة الأولى من (75) عندما نكامل من $t=x$ إلى $t=1$ ، وبالتالي تكتب المعادلة بالشكل:

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x t(1-x)\varphi(t)dt+\lambda\int_x^1 x(1-t)\varphi(t)dt$$

لنشتق الطرفين بالنسبة لـ x فنجد :

$$\varphi'(x)=-\lambda\int_0^x t\varphi(t)dt+\lambda x(1-x)\varphi(x)+\lambda\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt-\lambda x(1-x)\varphi(x)$$

وهنا نلاحظ أن الحدود التي لاتحوي تكاملات تختصر؛ وإذا اشتققنا ثانية بالنسبة لـ x نجد :

$$\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0 \tag{77}$$

ومن الواضح أن النواة (75) تحقق الشرط $K(0,t)=K(1,t)=0$ وأن الدستور (76) يعطينا $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ ، لذلك نكتفي بحلول (77) التي تحقق الشروط الحدية $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. وحلول المعادلة (77) هي توابع شهيرة، كما أنه لايكون لمسألة القيم

الحدية التي بين أيدينا حلول غير الحل الصفري ما لم يكن $\lambda_n = n^2\pi^2$. وتكـون هـذه الحلول هي $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$.

وبالتعويض في المعادلة التكاملية (76) نستطيع أن نتأكد بسهولة من أن الأعداد المذكورة والتوابع هي، فعلاً، قيم ذاتية وتوابع ذاتية لـ (76).

كذلك يمكن التحقق من ذلك إذا لاحظنا أن الشروط الحدية خلصتنا مـن تلـك الحلول للمعادلة التفاضلية (77) التي دخلت نتيجة الحصول على المعادلة التفاضلية مـن اشتقاق المعادلة التكاملية (76) مرتين. إن القيم الذاتيـة الـتي حـصلنا عليهـا والتوابـع الذاتية هي نفسها التي نصادفها عند دراسة مسألة الوتر المهتز المثبـت مـن طرفيـه. وأن هذه الحقيقة ذات صلة وثيقة في كون النواة (75) ، كما هـو معلـوم في مـسائل الفيزيـاء الرياضية تمثل الانحراف التوازني للوتر بتأثير قـوة وحيـدة. إن المتسلـسلة (11) الموافقـة للمثال المطروح متقاربة بانتظام ويكون:

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x \sin k\pi t}{k^2} = \begin{cases} x(1-t); & x \le t \\ t(1-x); & x \ge t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{pmatrix} \qquad (78)$$

لنفرض الآن أن للتابع $f(x)$ مشتقات مستمرة حتى المرتبـة الثانيـة وأنـه يحقـق الشروط الحدية $f(0) = f(1) = 0$ عندئذ يمكن التعبير عن هذا التابع بدلالة النواة وفـق العلاقة :

$$f(x) = -\int_0^1 K(x,t)f''(t)dt = -\int_0^x t(1-x)f''(t)dt - \int_x^1 x(1-t)f''(t)dt;$$

التي يمكن التحقق من صحتها بسهولة بالمكاملة بالتجزئة، كما أنها تنتهج أيضاً مما قيل حول تعيين الانحراف من أجل حمولة موزعة باستمرار، يجب أن تؤخذ الآن مساوية $f''(t)$. عندئذ ترينا النظرية (4) أن كل تابع مستمر محقق للشروط المذكورة أعلاه يمكـن نشره في المجال [1 , 0]، في متسلسلة فورييه حسب التوابع $\sqrt{2}\sin k\pi x$ ، وتكون هـذه المتسلسلة متقاربة مطلقاً وبانتظام. وسنرى فيما بعد إمكان تبسيط الـشروط المفروضـة

على $f(x)$ جوهرياً. ولنلاحظ أن المتسلسلة (78) تمثل نشر التابع في طرفها الأيمن في متسلسلة فورييه.

يمكن اعتبار هذه المتسلسلة إما متسلسلة فورييه لتابع الطرف الأيمن حسب التوابع $\sqrt{2}\sin k\pi x(k=1,2,...)$ حيث ينظر إلى x كمتحول و t كوسيط ، أو متسلسلة فورييه لتابع الطرف الأيمن حسب التوابع $2\sin k\pi x \sin \ell\pi t\,(k,\ell=1,2,3,...)$ التي تشكل في المربع $(0\le x\le 1.0\le t\le 1)$ جملة متعامدة منظمة. يمكن بطريقة مماثلة دراسة نواة من الشكل:

$$K(x,t)=\begin{cases} axt+bx+ct+d & \text{عندما } x\le t \\ axt+bt+cx+d & \text{عندما } x\ge t \end{cases}$$

11- النوى التابعة لوسيط :

لم يبرز الوسيط λ عند دراستنا للنظرية العامة في المعادلات التكاملية إلا على شكل مضروب قبل النواة. ومن الممكن معالجة معادلة تكاملية ذات نواة $R(s,t;\lambda)$ على شكل تابع تحليلي (ميرومورفي) في الوسيط λ.

يمكن بالمقابل أن تبرز عند دراسة المعادلات التكاملية التي نواها توابع تحليلية في الوسيط، اختلافات جوهرية عما توصلنا إليه من قواعد في النظرية العامة للمعادلات التكاملية. ولنعالج، كمثال بسيط، صنفاً من المعادلات التكاملية تكون فيه النواة تابعاً من الدرجة الأولى في λ :

$$\varphi(s)=\int_a^b \left[K_0(s,t)+K_1(s,t)\lambda\right]\varphi(t)dt$$

حيث:

$$K_0(s,t)=\rho(s)\rho(t)\quad ; \qquad K_1(s,t)=\sigma(s)\rho(t)$$

$$\int_a^b [\rho(s)]^2 ds=1 \quad ; \qquad \int_a^b \rho(s)\sigma(s)ds=0$$

ومن السهل أن نتحقق من أن للمعادلة التكاملية المذكورة الحل:

$$\varphi(s)=\rho(s)+\sigma(s)\lambda$$

مهما كانت λ.

لننظر الآن في الحالة العامة حيث تحقق النواة الشرطين التاليين:

1- الشرط الأول : $K(s,t;\lambda)$ تابع مستمر في λ , t , s حيث تنتمي (s,t) إلى المربع k_0 وحيث تقع λ داخل ساحة B من المستوي العقدي.

2-الشرط الثاني : التابع $K(s,t,\lambda)$ تحليلي في λ داخل الساحة B وذلك مهما كانت (s,t) من المربع k_0 .

لنضع في المعادلة التكاملية قبل رمز التكامل وسيطاً مساعداً λ .

$$\varphi(s)=f(s)+\mu\int_a^b K(s,t,\lambda)\varphi(t)dt$$

يمكن هنا إعادة جميع المحاكمات التي مرت معنا عند دراسة نظرية المعادلات التكاملية على أن نستبدل بالوسيط λ هناك الوسيط μ . فنصل بذلك إلى التابع الحال:

$$R(s,t,\mu)=\frac{D(s,t,\lambda,\mu)}{D(\lambda,\mu)}$$

حيث يكون بسط الكسر ومقامه متسلسلتي قوى في المتحول μ وتكون أمثال هاتين المتسلسلتين توابع منتظمة في λ داخل الساحة B . لأنه إذا انتمت λ إلى ساحة مغلقة كيفية B_1 تقع داخل B فعندئذ تتقارب هاتان المتسلسلتان مطلقاً وبانتظام في λ مهما كانت μ ، فهما تمثلان داخل B تابعين تحليليين في λ . لنضع $\mu = 1$ فنحصل على المعادلة التكاملية :

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t,\lambda)\varphi(t)dt \qquad (79)$$

وهنا نميز حالتين إما أن لايطابق التابع $D(\lambda, 1)$ التحليلي داخل B، الصفر أو أن يكون $D(\lambda;1)\equiv 0$.

وفي الحالة الأولى يكون للمعادلة التكاملية (79) التابع الحال:

$$R_1(s,t;\lambda)=\frac{D(s,t,\lambda;1)}{D(\lambda;1)}$$

مهما كانت قيمة λ على أن لاتكون موضعاً صفرياً من $D(\lambda;1)$ علماً بأنه لايمكن أن يوجد في أية ساحة مغلقة B_1 داخل B، غير عدد منته من أمثال هذه المواضع الصفرية. ومن الواضح أن التابع الحالّ يحقق المعادلتين التكامليتين:

$$R_1(s,t;\lambda)=K(s,t;\lambda)+\int_a^b K(s,t_1;\lambda)R_1(t_1,t;\lambda)dt_1$$

$$R_1(s,t;\lambda)=K(s,t;\lambda)+\int_a^b K(t_1,t;\lambda)R_1(s,t_1;\lambda)dt_1 \qquad (80)$$

وإذا لم تكن λ موضعاً صفرياً لـ $D(\lambda;1)$ فعندئذ يكون للمعادلة (79) حل وحيد مهما كان $f(s)$:

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b R_1(s,t;\lambda)f(t)dt$$

أما إذا كان $\lambda=\lambda_0$ موضعاً صفرياً لـ $D(\lambda;1)$ فعندئذ يكون للتابع الصحيح $D(\lambda_0;\mu)$ الموضع الصفري $\mu=1$ ويكون للمعادلة التكاملية المتجانسة من أجل $\lambda=\lambda_0$:

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s,t;\lambda)\varphi(t)dt \qquad (81)$$

حل غير الحل الصفري. ينتج من هذا أن $\lambda=\lambda_0$ قطب لـ $R_1(s,t;\lambda)$، وإلاّ لكان التابع الحال $R_1(s,t;\lambda)$ تحليلياً في النقطة $\lambda=\lambda_0$ مهما كانت s، t، ويحقق المعادلة التكاملية (80)، الأمر الذي يمكن التحقق منه بسهولة إذا جعلنا $\lambda\to\lambda_0$ عن طريق قيم λ المجاورة لـ λ_0 والتي تصح من أجلها المعادلات (80) فإذا صحت المعادلات

التكاملية (80) من أجل $\lambda = \lambda_0$ فعندئذ للمعادلة التكاملية (79) حل وحيد مهما كان التابع f(s) . وبالتالي لايمكن أن يكون للمعادلة التكاملية المتجانسة (81) غير الحل الصفري. ويتضح في الحالة الثانية $D(\lambda;1) \neq 0$ أن للمعادلة التكاملية المتجانسة (81) حلاً مختلفاً عن الحل الصفري مهما كانت λ داخل الساحة B ، وإن المعادلة التكاملية غير المتجانسة (79) لاتكون قابلة للحل مهما كان التابع المفروض f(s).

ينتج مما سبق أنه لايمكن، ضمن الشروط المذكورة المتعلقة بالنواة $K(s,t;\lambda)$ أن تتجمع القيم الذاتية داخل B في الحالة $D(\lambda;1) = 0$، أي أنه لايمكن أن يكون في أية ساحة مغلقة *B داخل B غير عدد منته من القيم الذاتية. أما إذا لم نفترض في النواة أن تكون تحليلية بل سمحنا أن يكون لها أقطاب مستقلة عن t,s فعندئذ يكون من الممكن أن يوجد عدد غير منته من القيم الذاتية في جوار صغير كيفي لأي من هذه الأقطاب. فإذا كان على سبيل المثال للمعادلة التكاملية:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

ذات النواة المتناظرة المستمرة، عدد غير منته من القيم الذاتية λ_n فعندئذ $|\lambda_n| \to \infty$ وتتقارب بالتالي القيم الذاتية λ_n^{-1} للمعادلة التكاملية :

$$\varphi(s) = f(s) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

ذات النواة $K(s,t;\lambda)$ والقطب $\lambda = 0$ إلى $\lambda = 0$ عندما $n \to \infty$

وقد يحدث أحياناً أن يكون التابع الحال لنواة ذات أقطاب، تحليلياً في كل موضع فإذا كان على سبيل المثال $K(s,t;\lambda)$ التابع الحال لمعادلة تكاملية ذات نواة متناظرة، فعندئذ يكون هذا التابع ، كما هو معلوم، ميرومورفياً في λ، وتكون أقطابه مستقلة عن t, s. لنشكل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(s) = f(s) - \lambda \int_a^b R(s,t;\lambda)\varphi(t)dt$$

التي نواتها $R(s,t;\lambda)$ ووسيطها $\mu = -\lambda$. إن التابع الحل لهذه المعادلة، سيكون:

$$R(s,t;\lambda+\mu)\big|_{\mu=-\lambda} = R(s,t;0) = K(s,t)$$

وهو مستقل عن λ .

12- خواص حلول معادلات فريدهولم التكاملية التناظرية وغير المتجانسة:

لتكن المعادلة التكاملية غير المتجانسة من النوع الثاني التالية:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (82)$$

1-إذا كان $f(x)$ تابعاً مستمراً وكان الوسيط λ لايتطابق مع القيم الذاتية $\lambda_n (n = 1,2,...)$، وإذا كانت المعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة لـ (1) هي:

انظر المثال [(3-3)] .

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad (83)$$

عندئذٍ فالمعادلة التكاملية (82) لها حل وحيد ومستمر، [انظر مبرهنة فريدهولم ، الحالة أ] يعطى بالعلاقة :

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) \qquad (84)$$

حيث $\varphi_n(x)$ هي التوابع الذاتية للمعادلة (83)، أما a_n فمعرفة بالعلاقة:

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \qquad (85)$$

إن المتسلسلات في الطرف الأيمن من (84) تتقارب إطلاقاً وبانتظام في الساحة $a \le x, t \le b$.

2- أما إذا تطابق الوسيط λ مع قيم ذاتية، مثلاً $\lambda = \lambda_k$ ومن رتبة التضاعف q ، عند ذلك ، فلن يكون للمعادلة التكاملية (82) أي حل.

3-في الحالة المعاكسة ، أي إذا كان الوسيط لايتطابق مع بقية القيم الذاتية $\lambda_k \; : \; k = q + 1, ...$ فإن الحلول تكون موجودة إذا وفقط إذا تحققت الشروط :

$$(f, \varphi_m) = 0 \quad \text{أو} \quad \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = 0 \tag{86}$$
$$(m = 1, 2, ..., q)$$

والتي عددها q شرطاً، هذا يعني إذا كان التابع f(x) يعامد التوابع الذاتية والموافقة للقيم الذاتية λ_k.

في هذه الحالة فإن العوامل $a_n = 0$ من أجل $n = 1, ..., q$ وبالتالي فالمعادلة (82) لها عدد لانهائي من الحلول والتي تتضمن q ثابت كيفي $c_1, c_2, ..., c_q$، وهذه الحلول تعطى بالصيغة التالية:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\varphi_n(x) + \tag{87}$$
$$+ C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + ... + C_q\varphi_q(x)$$

4- في حالة كون النواة متحللة أي :

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)b_k(t)$$

فإن العلاقات (84) و (87) ستنقلب إلى مجاميع منتهية بدلاً من المتسلسلات في الأطراف اليمنى.

5- عندما يكون التابع f(x) [أي الطرف الأيمن من (82)] معامداً لكل التوابع الذاتية $\varphi_n(x)$ للمعادلة (83) ، عندئذ يكون التابع f(x) نفسه هو حل للمعادلة التكاملية (82) أي أن :

$$\varphi(x) = f(x)$$

مثال (3-3) : أوجد حل المعادلة التكاملية غير المتجانسة:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=x, \qquad (88)$$

حيث النواة :

$$K(x,t)=\begin{cases} x(t-1), & \text{if } 0\le x\le t \\ t(x-1), & \text{if } t\le x\le 1 \end{cases}$$

الحل:

إن القيم الذاتية والتوابع الذاتية الموافقة هي :

$$\lambda_n=-\pi^2n^2,\ \varphi_n(x)=\sin\pi nx,\quad n=1,2,...$$

إذا كان $\lambda\neq\lambda_n$ عند ذلك نجد حسب العلاقة (84) ، أن الحل الوحيد لـ (88) هو :

$$\varphi(x)=x-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda+n^2\pi^2}\sin\pi nx \qquad (89)$$

إن عوامل فورييه a_n للطرف الأيمن للمعادلة ستكون حسب (85):

$$a_n=\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx=\int_0^1 xd\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

وبالتعويض في (89) ، نحصل على التابع $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=x-\frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda+n^2\pi^2)}\sin n\pi x$$

إذاً من أجل $\lambda=-n^2\pi^2$ فليس للمعادلة (88) حل وبالتالي :

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\neq 0$$

تطبيقات للمثال (3-3) :

1- أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)-\pi^{2}\int_{0}^{1}K(x,t)\varphi(t)dt=x$$

هنا $\lambda=+\pi^{2}$ هي قيمة ذاتية من أجل $n=1$.

إذن هذه المعادلة ليس لها حل.

2- أوجد حل المعادلة التكاملية :

$$\varphi(x)-e\int_{0}^{1}K(x,t)\varphi(t)dt=x$$

هنا $\lambda=e\neq-n^{2}\pi^{2}=\lambda_{n}$ أي أن λ ليست قيمة ذاتية، إذن للمعادلة المعطلة حل وحيد هو :

$$\varphi(x)=x-\frac{e}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(e+n^{2}\pi^{2})}\sin nx$$

تمارين محلولة

1- أوجد حل المعادلة التكاملية غير المتجانسة:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=\cos\pi x \qquad (90)$$

حيث :

$$K(x,t)=\begin{cases}(x+1)\ , & 0\le x\le t\\ (t+1)\ , & t\le x\le 1\end{cases}$$

الحل:

إن القيم الذاتية :

$$\lambda_0=1\ ,\ \lambda_n=-n^2\pi^2\ (n=1,2,...)$$

والتوابع الذاتية الموافقة:

$$\varphi_0(x)=e^x\ ,\varphi_n(x)=\sin n\pi x+n\pi\cos n\pi x\ (n=1,2,...)$$

إذا كان $\lambda\neq 1$ و $\lambda\neq -n^2\pi^2$، عندئذ فإن حل المعادلة سيكون من الشكل:

$$\varphi(x)=\cos\pi x-\lambda\left[\frac{a_0e^x}{\lambda-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda+n^2\pi^2}(\sin n\pi x+n\pi\cos n\pi x)\right]$$

وعند ذلك فإن :

$$a_0=\int_0^1 e^x\cos\pi x\,dx=-\frac{1+e}{1+\pi^2}$$

$$a_n=\int_0^1 \cos\pi x(\sin n\pi x+n\pi\cos n\pi x)dx=\begin{cases}0\ , & n\neq 1\\ \frac{\pi}{2}\ , & n=1\end{cases} \qquad (91)$$

ينتج من ذلك أن الحل الوحيد للمعادلة التكاملية(90) هو:

$$\varphi(x)=\cos\pi x+\lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\,\frac{e^x}{\lambda-1}-\frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)\right]$$

أما من أجل $\lambda = 1$ أو $(n=1)$ $\lambda=-\pi^2$ فليس للمعادلة (90) حل، والتابع $\cos\pi x$ الذي يمثل طرفها الأيمن ليس عمودياً على التوابع الذاتية الموافقة:

$$\varphi_0(x)=e^x$$
$$\varphi_1(x)=\sin\pi x+\pi\cos\pi x$$

لكن إذا كان $n = 2,3,\ldots$ ؛ $\lambda=-n^2\pi^2$ (مثلاً $\lambda=-4\pi^2$) عندئذ فيكون للمعادلة (90) عدد لانهائي من الحلول المعطية في العلاقة:

$$\varphi(x)=\cos\pi x+\lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\,\frac{e^x}{\lambda-1}-\frac{\pi}{2\,(\lambda+\pi^2)}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)\right]+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} C_n(\sin n\pi x+n\pi\cos n\pi x)$$

حيث C_n ثوابت كيفية. وفي هذه الحالة الأخيرة يجب أن يكون $f(x) = \cos\pi x$ معامداً للتوابع $n = 2,3,\ldots$ ؛ $\varphi_n(x)$ أي أن:

$$\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx=\int_0^1 \cos\pi x\,(\sin n\pi x+\pi\cos n\pi x)dx=0$$

وهذا محقق من المعادلة (91).

ملاحظة: في بعض الحالات يمكن لمعادلة فريدهولم التكاملية التناظرية واللامتجانسة أن تؤول إلى مسألة ذات شروط حدية غير متجانسة، وهذا ممكن في حالة **كون النواة $K(x,t)$** للمعادلة التكاملية هي **تابع غرين** لمؤثر تفاضلي ما والمثال القادم يوضح هذه الفكرة.

2-حل المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=e^x \qquad (92)$$

حيث:

$$K(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \le x \le t, \\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \le x \le 1 \end{cases}$$

الحل:

لنعيد كتابة المعادلة كما يلي:

$$\varphi(x)=e^x+K\frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\int_0^x \operatorname{sh} t\,\varphi(t)dt+$$

$$+\frac{\lambda \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}\int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\varphi(t)dt \qquad (93)$$

بالمفاضلة مرتين، نجد :

$$\varphi'(x)=e^x+\frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\int_0^x \operatorname{sh} t\varphi(t)dt+$$

$$+\frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh}x\varphi(x)+\lambda\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh} 1}\int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\varphi(t)dt-$$

$$-\frac{\lambda \operatorname{sh}x}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh}(x-1)\varphi(x)$$

$$\varphi''(x)=e^x+\frac{\lambda \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\int_0^x \operatorname{sh}t\varphi(t)dt+$$

$$+\frac{\lambda \operatorname{sh}x}{\operatorname{sh} 1}\int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\varphi(t)dt+\frac{\lambda \operatorname{ch}(x-1)\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}\varphi(x)-$$

$$-\frac{\lambda \operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}(x-1)\varphi(x)$$

أو :

$$\varphi''(x)=e^x+\varphi(x)+\lambda\varphi(x)$$

نضع $x=0$ و $x=1$ في (93) ، نجد أن :

$$\varphi(0)=1 \quad , \quad \varphi(1)=e$$

إن التابع المطلوب $\varphi(x)$ هو حل للمسألة ذات الشروط الحدية غير المتجانسة التالية:

$$\varphi''(x)-(\lambda+1)\varphi(x)=e^x \tag{94}$$

$$\varphi(0)=1 \ , \ \varphi(1)=e \tag{95}$$

لندرس الحالات التالية :

-1 $\lambda+1=0$ أو $\lambda=-1$ ، المعادلة (94) تصبح من الشكل :

$$\varphi''(x)=e^x$$

والتي حلها العام :

$$\varphi(x)=C_1x+C_2+e^x$$

وبالأخذ بعين الاعتبار الشروط الحدية (95) ، نحصل على المعادلتين الجبريتين:

$$\begin{cases} C_2+1=1, \\ C_1+C_2+e=e \end{cases}$$

وحلهما يُعطي قيمة الثابتين $C_1=0$, $C_2=0$

ومنه :

$$\varphi(x)=e^x$$

-2 $\lambda+1>0$ أو $\lambda>-1$ و $\lambda\neq0$ الحل العام للمعادلة التفاضلية (94) هو :

$$\varphi(x)=C_1\text{ch}\left(\sqrt{1+\lambda}\right)x+C_2\text{sh}\left(\sqrt{1+\lambda}\right)x-\frac{e^x}{\lambda}$$

وبتطبيق الشروط الحدية (95) ، نحصل على مجموعة المعادلتين الجبريتين في C_1 ، C_2:

$$
\begin{cases}
C_1 - \dfrac{1}{\lambda} = 1, \\[2ex]
C_1 \operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda} + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda} - \dfrac{e}{\lambda} = e
\end{cases}
$$

عندئذ :

$$
C_1 = 1 + \frac{1}{\lambda} \ , \ C_2 = \frac{e - \operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda}}{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)
$$

بعد إجراءات حسابية نجد التابع المجهول $\varphi(x)$:

$$
\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}\,(1-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}} - \frac{e^x}{\lambda}
$$

-3 $\lambda + 1 < 0$ أو $\lambda < -1$ ، لنرمز بـ $\lambda + 1 = -\mu^2$ ، فالحل العام للمعادلة (94):

$$
\varphi(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + \frac{e^x}{1+\mu^2}
$$

وبتحقيق الشروط الحدية (95) نحصل على المعادلتين الجبريتين:

$$
\begin{cases}
C_1 + \dfrac{1}{1+\mu^2} = 1 \\[2ex]
C_1 \cos \mu + C_2 \sin \mu = e \dfrac{\mu^x}{1+\mu^2}
\end{cases}
$$

هنا يوجد حالتين ممكنتين :

-1 μ ليس جذراً للمعادلة $\sin \mu = 0$.

إذن :

$$
C_1 = \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \ , \ C_2 = \frac{(e - \cos \mu)\mu^2}{(1+\mu^2)\sin \mu}
$$

وبالنتيجة :

$$
\varphi(x) = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}\left[\cos \mu x + \frac{e - \cos \mu}{\sin \mu} \sin \mu x\right] + \frac{e^x}{1+\mu^2}
$$

حيث $\mu=\sqrt{-\lambda-1}$

-2 μ هو جذر للمعادلة $\sin\mu=0$.

هذا يعني أن $\mu=n\pi\ (n=1,2,\ldots)$ في هذه الحالة، المعادلة (92) لايوجد لها حل.

في هذه الحالة، المعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة هي:

$$\varphi(x)+\left(1+n^2\pi^2\right)\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=0 \qquad (96)$$

لهذه المعادلة عدد لانهائي من الحلول غير الصفرية، هذا يعني أن $\lambda_n=-\left(1+n^2\pi^2\right)$ هي القيم الذاتية.

إن الحلول الموافقة $\varphi_n(x)=\sin n\pi x$ هي التوابع الذاتية للمعادلة (96).

3-لننقل إلى دراسة النواة $k(s,t)$ التي هي تابع للفصل $(x-t)$:

$$K(s,t)=\omega(s-t)$$

بفرض أن $\omega(x)$ تابع مستمر زوجي دوره πz . لنلاحظ أنه لما كان التابع $\omega(s)$ زوجياً فإن النواة متناظرة. وأمثال فورييه لـ $\omega(s)$ هي:

$$c_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(s)\cos ks\,ds \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

وحيث إن التابع $\omega(s)$ زوجي يكون:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(S)\sin k\,S\,dS=0$$

لننظر الآن في التكامل:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\omega(s-t)\cos kt\,dt$$

ولنضع فيه $s-t=x$ فنحصل إذا لاحظنا أن $\omega(s)$ زوجي على:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \omega(s-t)\cos kt\, dt = \cos ks \int_{S-\pi}^{S+\pi} \omega(x)\cos kx\, dx$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أن طول مجال المكاملة 2π فإننا نجد أخيراً :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \omega(s-t)\cos kt\, dt = \pi c_k \cos ks$$

بطريقة مماثلة نجد :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \omega(s-t)\sin kt\, dt = \pi c_k \sin ks$$

لننظر بعد ذلك في المعادلة التكاملية المتجانسة :

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \omega(x-t)\varphi(t)dt$$

فإذا كانت جميع أمثال فورييه c_k غير مساوية للصفر فعندئذ ينتج من الحسابات المتقدمة أن القيم الذاتية لهذه المعادلة التكاملية هي:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi c_k} \qquad (k = 0,1,2,...)$$

ويوافق هذه القيم الذاتية الجملة التالية من التوابع الذاتية المنظمة والمتعامدة:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2s, ...$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2s$$

علماً أنه ليس للتابع المفروض أية توابع ذاتية أخرى لأن التوابع المذكورة تشكل جملة مغلقة . لنلاحظ أن لكل قيمة ذاتية $\lambda_k (k \geq 1)$ تابعين ذاتيين. وإذا كان $c_1 = 0$، على سبيل المثال، وكانت جميع الأعداد c_k الأخرى غير مساوية للصفر فعندئذ لاتحوي جملة التوابع الذاتية التابعين الذاتيين $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s$، $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s$ ولاتكون النواة، بالتالي، تامة (مغلقة).

وسواء أكانت الأمثال c_k معدومة أو لم تكن كذلك، فإن المتسلسلة (11) تأخذ الآن الشكل:

$$\frac{1}{2}c_0+\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos ks\cos kt+\sin ks\sin kt)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k(s-t)$$

أي أنها متسلسلة فورييه للتابع $\omega(s-t)$. لايمكننا برهان تقارب هذه المتسلسلة في الحالة العامة، غير أنه إذا حققت أمثال فورييه c_k الشرط $c_k \geq 0$ فعندئذ ينتج من نظرية مرسير مباشرة أنها متقاربة مطلقاً وبانتظام أنها تمثل $\omega(s-t)$. ويصح الأمر نفسه إذا لم يكن في المتسلسلة غير عدد منته من الأمثال الموجبة c_k أو السالبة.

تمارين غير محلولة

I. أوجد الحد الأعظمي للتكامل الثنائي :

1. $$\left|\int_a^b\int_a^b K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)\,dx\,dt\right|$$

II. برهن أن : $\int_a^b \varphi^2(x)dx = 1$ وذلك إذا كان :

2. $$K(x,t)=xt, \qquad 0\le x,\ t\le 1;$$

3. $$K(x,t)=xt+x^2t^2, \quad -1\le x,t\le 1$$

4. $$K(x,t)=\begin{cases}(x+1)t, & 0\le x\le t,\\ (t+1)x, & t\le x\le 1.\end{cases}$$

أما إذا كانت النواة سالبة فعندئذ علينا أن نتحدث عن القيم الصغرى المتالية للتكامل (39) ضمن الشروط (43) بدلاً من الحديث عن القيم العظمى.

III. أوجد حل المعادلات التكاملية المتناظرة غير المتجانسة التالية :

5. $$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=\frac{x}{2}$$

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\le x\le t\\[2mm] \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\le x\le 1\end{cases}$$

6. $$\varphi(x)+\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = xe^x,$$

حيث النواة:

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh}1}, & 0\le x\le t\\ \dfrac{\operatorname{sh}t\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}, & t\le x\le 1\end{cases}$$

7. $$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=x-1$$

حيث النواة:

$$K(x,t)=\begin{cases}x-t, & 0\le x\le t\\ t-x, & t\le x\le 1\end{cases}$$

8. $$\varphi(x)-2\int_0^{\pi/2} K(x,t)\varphi(t)dt=\cos 2x,$$

حيث النواة:

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\le x\le t\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

9. $$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt=1,$$

حيث النواة:

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\le x\le t,\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \pi\end{cases}$$

الجزء الثاني

حساب التحولات

الفصل الرابع
حساب التحولات

نبذة تاريخية:

تعود بدايات حساب التحولات إلى أواخر القرن السابع عشر وبداية القرن الثامن عشر، العصر الذهبي للعلوم الرياضية، فلقد أخذ هذا العلم منحىً مستقلاً في العلوم الرياضية وذلك عندما قام أولر (1707-1717) بتنسيق مسائل القيم القصوى التي درسها لبينز. وعرض طريقة عامة لمسائل القيم القصوى وسماه حساب التغايرات (التحولات) عام 1766.

إذن، يعود للعالم أولر الفضل في تطوير وتنمية علم حساب التحولات، ومن أهم المسائل التي قدمها المسألة الايزوبريمترية ومسألة الخطوط الجيوديزية اللتان سنسلط عليهما الضوء في هذا الفصل.

ثم طوّر هذه النظرية ودققها فيما بعد لاغراغ (Lagrange) (1762) وطبّقها في الميكانيك التحليلي وفي سنة (1788) أعلن ليجندر عن معيار (مقياس) يسمح بتمييز حلول مسائل القيم القصوى، وتم إثباته على يد جاكوبي سنة (1836).

1- الأهداف الرئيسية في حساب التحولات:

سنبين في هذه الفقرة أهم المسائل والمفاهيم التي تُظهر الأهداف الرئيسية والمحاور الأساسية التي يهتم بها علم حساب التحولات.

نفرض أنه لدينا نقطة سرعتها $v(x,y,z)$ ترسم منحنياً مفروضاً L ، وكانت v تتبع الموضع ولاتتبع الجهة. لنرمز بـ $d\sigma$ للمسافة العنصرية التي تقطع في زمن قدره $\frac{d\sigma}{v}$ ، عندئذ المنحني L يرسم بزمن يعين بالتكامل التالي:

$$T(L)=T=\int_{l}\frac{d\sigma}{v(x,y,z)} \tag{1}$$

لنثبت الطرفين $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ للمنحني L ، ولنترك المنحني نفسه يتحول، عندئذ فإن المقدار T يتحول تبعاً لـ L ، ونقول عندئذ إن T تابعي المنحني L: إذا أعطينا للمنحني L قيمة ما ، فيكون للتابعي T قيمة عددية معينة.

كمثال على ذلك نطرح إحدى المسائل الهامة التي تدرس في الضوء الهندسي وهي التالية :

لنثبت طرفي المنحني $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ ، ولنعين المنحني L بحيث يكون للتابعي T قيمة صغرى.

لنعتبر x كوسيط في معادلة L ، فيكون y و z تابعين لـ x . عندئذ من التكامل (1) نجد :

$$T=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x,y,z)}dx \tag{2}$$

هذا يعني أن المسألة تؤول إلى إيجاد $y(x)$ و $z(x)$ ، بحيث يكون لـ (T) قيمة صغرى، بينما يحقق التابعان المطلوبان الشروط التالية :

$$\begin{cases} y(x_1)=y_1 & z(x_1)=z_1 \\ y(x_2)=y_2 & z(x_2)=z_2 \end{cases}$$

وفي حالة مستوٍ، فإن التابعي (2) يصبح :

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx$$

وتصبح المسألة هي إيجاد التابع $y(x)$ الذي يحقق الشرطين الحديين:

$$y(x_1) = y_1 \qquad\qquad y(x_2) = y_2$$

لندرس الآن المسألة في حالة تكامل مضاعف. ليكن L منحنياً مغلقاً في الفراغ والمطلوب بسط سطح فوق هذا المنحني، بحيث تكون مساحته أصغر ما يمكن.

لتكن ρ مسقط L على المستوي (x,y) ولتكن D المساحة المحدودة بـ ρ ، ولنكتب معادلة السطح المطلوب بالشكل : $z = f(x,y)$.

ولنرمز بـ $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ و $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ و S مساحة السطح،

عندئذ يكون :

$$S[f(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + P^2 + q^2}\, dx\, dy \qquad (3)$$

ويكون لـ S قيمة معينة عندما نختار سطحاً معيناً، وبعبارة أخرى إن S هو تابعي للسطح. فالمسألة ترجع إلى اختيار التابع $f(x,y)$ بحيث يكون لـ S قيمة صغرى. وفي هذه الحالة، تعين الشروط الحدية قيم التابع المطلوب على المنحني L.

لذا فإن هذه القيم تعين إحداثيات المنحني L ، الذي تسعى لبسط السطح عليه.

إن المسألة الأساسية في حساب التحولات هي حصراً البحث عن القيم العظمى والصغرى لتابعيات منحنية وسطوح معينة بتكاملات محدودة.

هذه المسألة تشبه، في حساب التفاضل، مسألة إيجاد القيم العظمى والصغرى لتابع ما . وترتبط المسألة الأخيرة، كما نعلم، بمسألة إيجاد القيم الصغرى لتابع ما مباشرة، وهذا يعني البحث عن قيم المتحولات المستقلة التي يأخذ من أجلها التابع أعظم أو أصغر قيمة له بالنسبة لجميع القيم المجاورة.

سنعالج المسألة – في حالة التابعيات – بطريقة مماثلة. فمثلاً، في حالة التابعي (2) سنبحث عن المنحني L بحيث تكون قيمة T بالنسبة لهذا المنحني لاتزيد عن القيم المقابلة بالنسبة لكافة المنحنيات المجاورة كفاية للمنحني L.

إذا كان للتابعي، من أجل منحن أو سطح ما، قيم لاتقل (أو لاتزيد) عن قيمة من أجل جميع المنحنيات أو السطوح المجاورة، فإننا نقول ببساطة أن للتابعي قيمة قصوى من أجل هذا المنحني أو السطح.

نقدم فيما يلي نصاً دقيقاً للمسألة وسنعرف مفهوم الجوار بالنسبة للمنحنيات والسطوح، التي تلعب دور المتحولات المستقلة في حساب التفاضل العادي. إننا نعلم أنه يتوجب حل المعادلة $g'(x) = 0$ لنحصل على المتحول x، الذي من أجله يكون للتابع $g(x)$ قيمة قصوى.

وأخيراً يُبرهن في حساب التحولات أن المنحني $y = y(x)$ أو السطح $z = f(x,y)$ الذي يعطي القيمة القصوى لتابعي ما، يجب أن يحقق معادلة تفاضلية معينة. لذا فإن مسألتنا الأولى هي الحصول على هذه المعادلة، التي يشكل تحققها الشرط اللازم من أجل الحصول على القيمة القصوى للتابعي تماماً كالمعادلة $g'(x) = 0$ التي هي الشرط اللازم ليكون لتابع معطى $g(x)$ قيمة قصوى من أجل قيمة معينة لـ x. هذا ولكي نستنتج المعادلة المطلوبة فإننا نحتاج إلى بعض المبرهنات الأساسية.

1-1-النظرية الأساسية في حساب التحولات (1):

بفرض أن $g(x)$ تابع معرف ومستمر في المجال $[x_1, x_2]$ وليكن:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad (4)$$

من أجل كل تابع $\varphi(x)$ مستمر، هو ومشتقاته الأولى، ومعدوم في الطرفين: $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$، عندئذ يكون التابع $g(x)$ مطابقاً للصفر في $[x_1, x_2]$.

البرهان:

نفرض جدلاً أن $g(x)\neq 0$ في أحد المواضع $x = c$ وحيث $x_1 \leq c \leq x_2$،

وليكن $f(c) > 0$. وبما أن $g(x)$ مستمراً فهذا يعني $g(x) > 0$ في المجال $[c_1, c_2]$ حاوٍ

للنقطة c وواقع داخل المجال $[x_2, x_2]$.

لنختر الآن التابع $\varphi(x)$ بالشكل التالي:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad x_1 \leq x \leq c_1 \\ (x-c_1)^2(x-c_2)^2 & \text{if} \quad c_1 \leq x \leq c_2 \\ 0 & \text{if} \quad c_2 \leq x \leq x_2 \end{cases} \tag{5}$$

نلاحظ أن التابع $\varphi(x)$ يحقق جميع شروط النظرية الأساسية، فمن تعريف التابع $\varphi(x)$ نجد: $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$ ، ثم إن الجداء $(x-c_1)^2(x-c_2)^2$ وجميع مشتقاته بالنسبة لـ x تنعدم عندما $x=c_1$ و $x=c_2$. كذلك يتبين لنا أن $\varphi(x)=0$ خارج المجال $[c_1, c_2]$. هذا يعني أن التابع $\varphi(x)$ ومشتقاته مستمرة في المجال $[x_1, x_2]$. وبالتالي فإن :

$$\int_{c_1}^{c_2} g(x)(x-c_1)^2(x-c_2)^2\,dx > 0$$

حيث إن التابع المكامل مستمر وقيمته موجبة داخل مجال التكامل، الأمر الذي يناقض كون التكامل معدوماً حسب الفرض المؤقت. لذا فإن هذا التناقض يبرهن على صحة النظرية الأساسية في حساب التحولات وهو المطلوب.

هذا وتوجد نظرية أساسية مشابهة عندما يكون التكامل مضاعفاً.

مبرهنة تمهيدية(1):

إذا تحقق :

$$\iint_D g(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy=0 \tag{6}$$

حيث $g(x,y)$ تابع معرف ومستمر في الساحة D و $\varphi(x,y)$ مستمر في D هو ومشتقاته الأولى، ومعدوم على المحيط C للساحة D.

فعندئذ يكون : $g(x,y)\equiv 0$.

البرهان :

ليكن $g(x,y)>0$ في نقطة ما (a,b) داخل الساحة D ، عندئذ يتوجب أن يكون موجباً في دائرة معينة، مركزها (a,b) ونصف قطرها R ، واقعة داخل الساحة D.

لنختار الآن $\varphi(x,y)$ على الشكل التالي :

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{if } (x-a)^2+(y-b)^2\geq R^2 \\ \left[(x-a)^2+(y-b)^2-R^2\right]^2 & \text{if } (x-a)^2+(y-b)^2<R^2 \end{cases}$$

حيث إن (a,b) مركز الدائرة المفروضة و R نصف قطرها.

إن التابع $\varphi(x,y)$ يحقق جميع شروط هذه التمهيدية. بينما يصبح التكامل (6) تكاملاً على دائرة لتابع مستمر وموجب وهذا يعني:

$$\iint\limits_D g(x,y)\varphi(x,y)dxdy>0$$

وهذا بدوره يناقض الفرض وهو المطلوب.

نلاحظ أنه يمكن البرهان بسهولة على هذه التمهيدية في حالة تكامل ثلاثي، وبصورة عامة في حالة أي تكامل مضاعف.

2- معادلة أولر :

لنأخذ التابعي البدائي :

$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx \qquad (7)$$

حيث F تابع معطى بالنسبة لجميع دلائله الثلاثة، ولنفترض أن هذا التابع ومشتقاته حتى المرتبة الثانية مستمرة في الساحة D من المستوي (x,y) ومن أجل أي قيمة لـ y'.

إن للتابعي I قيمة عددية محددة وذلك عندما نعين التابع $y = y(x)$ ، أي عندما يتعين المنحني $y = y(x)$ ، الذي نعتبره في الساحة D دوماً.

لنفترض أننا أُعطينا قيم التابع $y(x)$ في نهايتي مجال التكامل:

$$y(x_1) = y_1 \qquad y(x_2) = y_2 \tag{8}$$

وسنفترض أيضاً أن للتابع المطلوب مشتقاً مستمراً. نسمي صف التوابع التي لها مشتق مستمر في المجال $[x_1, x_2]$ بالصف C_1. ونرمز بالمثل إلى التوابع التي تملك n مشتقاً مستمراً بـ C_n. ويفترض في التوابع التي سترد فيما بعد أنها تنتمي إلى هذا الصف. نعرف الجوار المعين بـ ε للتابع $y = y(x)$ بأنه جميع المنحنيات الممكنة $y_2(x)$ التي تحقق المتراجحة:

$$|y_2(x) - y(x)| \le \varepsilon \qquad (\forall x \in [x_1, x_2])$$

سنضيف في بعض الأحيان متراجحة أخرى: $|y'_2(x) - y'(x)| \le \varepsilon$ ، أي نأخذ جواراً معيناً بـ ε لميل المماسات بالإضافة لجوار الترتيب. وسنتكلم من حين لحين عن الجوار المعين بـ ε من المرتبة صفر وذلك في الحالة الأولى، ومن المرتبة الأولى في الحالة الثانية وذلك عندما تتحقق كل من المتراجحتين.

تعريف (1):

يُقال عن تابعي I إنه يصل إلى قيمة قصوى نسبية من أجل المنحني $y(x)$ الواقع داخل الساحة D والذي ينتمي إلى الصف C_1 بالإضافة إلى تحقيقه للشرط (8) فيما إذا كانت قيمة التابعي من أجل $y = y(x)$ ليست اصغر من (أو أكبر من) قيمها من أجل أي منحن آخر من الصف C_1 ينتمي للجوار المعين بـ ε لـ $y(x)$ ويحقق الشرط (8).

تعريف (2):

لنفرض أن B صف من التوابع $y(x)$ التي يكون من أجلها للتكامل (7) معنى. نقول إن التابعي I يصل إلى قيمة قصوى مطلقة في الصف B من أجل المنحني $y(x)$ فيما إذا كانت قيمة التابعي من أجل $y(x)$ ليست أصغر من (أو أكبر من) قيمة من أجل جميع المنحنيات من الصف B.

ملاحظة : إن مفهوم " القيمة القصوى النسبية" هذا مماثل تماماً لمفهوم القيمة العظمى والصغرى لتابع ما. وللاختصار سنكتفي بالقول " القيم القصوى" بدلاً من القيم القصوى النسبية.

لنستنتج الشروط التي يلزم أن يحققها التابع $y(x)$ لكي يكون التابعي I قيمة قصوى.

نأخذ أي تابع $\varphi(x)$، منعدم في نهايتي مجال التكامل، وبالإضافة إلى $y(x)$ الذي يجب أن يؤدي إلى قيمة قصوى للتابعي I ، فإننا نشكل تابعاً جديداً بالشكل:

$$y(x) \approx y(x) + e\varphi(x)$$

حيث e وسيط عددي صغير. إن هذا التابع الجديد يحقق كالتابع $y(x)$ الشروط الحدية نفسها، وبتعويضه في التابعي I ، فإننا نحصل نتيجة للتكامل على تابع للوسيط e:

$$I(e)=\int_{x_1}^{x_2} F\left[x, y(x)+e\varphi(x), y'(x)+e\varphi'(x)\right]dx \qquad (9)$$

ليكن الآن $\varepsilon > 0$، عندئذ فإن التابع $y(x)+e\varphi(x)$ يقع في المجال المعين بـ ε (ومن المرتبة الأولى) للمنحني $y(x)$ من أجل جميع قيم الوسيط التي تقترب من الصفر بشكل كاف.

ولما كان $y(x)$ يعطي القيم القصوى للتابعي I ، لذا فإن للتابع (9) قيمة قصوى عندما $e = 0$ ، وبالتالي ينعدم مشتقه عندما $e = 0$ وبالاشتقاق تحت رمز التكامل نحصل على:

$$I'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\varphi(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\varphi'(x)\right]dx$$

وبالمكاملة بالتجزئة نجد أن :

$$I'(0)=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\varphi(x)\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]dx \qquad (10)$$

ليكن $\varphi(x)$ ينعدم فرضاً عند النقطتين x_1 و x_2 وهذا يعني أن الحد الأول خارج التكامل معدوم، وبالتالي فإن :

$$I'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]dx=0$$

وبالاعتماد على النظرية الأساسية في حساب التحولات، فإننا نستطيع القول إن $y(x)$ الذي يعطي قيمة قصوى للتكامل (7) ، يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية :

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad (11)$$

وبنشر المشتق الكلي بالنسبة لـ x ، فإننا نستطيع كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad (12)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وحلها العام يحوي ثابتين كيفيين، يعينان بالشروط الحدية (8) وتسمى هذه المعادلة بمعادلة أولر.

إن الجداء $eI'(0)$ ، والذي يمثل تفاضل التابع $I(e)$ عندما $e = 0$ ، يسمى عادةً التحول الأول للتابعي (7) ويكتب δI وإذا أخذنا (10) بعين الاعتبار فيمكننا أن نكتب:

$$\delta I = I'(0)e = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]dx$$

حيث : $\delta y = e\varphi(x)$.

ونلاحظ أننا استعملنا أيضاً المشتق الثاني $y''(x)$ لاستنتاج المعادلة (11)، وبالتأكيد فإننا اعتبرنا – عند إيجاد الشرط اللازم من أجل أية قيمة قصوى – أن التابع $y(x)$ ينتمي إلى الصف C_2 من التوابع التي لها مشتقات مستمرة حتى المرتبة الثانية الآن إذا كان التابع $y(x)$ من الصف C_1 يحقق الشرط :

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\varphi(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\varphi'(x)\right]dx = 0$$

وذلك من أجل أي تابع نختاره $\varphi(x)$، بشرط أن يكون له مشتق مستمر وأن ينعدم في $x = x_1$ و $x = x_2$، حيث $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y''} \neq 0$ على $y = y(x)$.

فعندئذ التابع $y(x)$ ينتمي إلى الصف C_2 وبالتالي فهو يحقق المعادلة (11) .

مثال (4-1) : حدد المنحنيات التي تُمكّن التابعي:

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 - y^2\right)dx$$

من الوصول إلى قيمة قصوى والتي تحقق الشروط :

$$y(o) = o \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

واحسب هذه القيمة.

الحل:

إن التابعي في هذه الحالة هو :

$$F(x, y, y') = y'^2 - y^2$$

أما معادلة أولر الموافقة فهي :

$$y''+y=0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وحلها العام:

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$

بتحقيق شروط البدء نجد :

$$c_1=0 \qquad c_2=1$$

إذن، فالمنحني الذي يجعل التابعي J يصل إلى قيمته القصوى هو المنحني:

$$y=\sin x$$

حساب القيمة القصوى:

$$J[\sin x]=\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx=0$$

1-2-معادلة أولر في حالة عدة توابع ذات مشتقات من مراتب أعلى:

من الممكن كتابة معادلة أولر مباشرة وذلك عندما يعتمد التابعي على عدة توابع، وهذه مثلاً هي الحالة بالنسبة للتابعي (2):

سنقتصر فيما يلي على دراسة حالة تابعين:

$$I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',z,z')dx \qquad (13)$$

لنشكل تابعين قريبين من $y(x)$ و $z(x)$ بالشكل التالي:

$$y(x)\approx y(x)+e_1\varphi_1(x)$$
$$z(x)\approx z(x)+e_2\varphi_2(x)$$

وذلك بفرض $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ تابعين كيفيين ينعدمان في نهايتي المجال. لنعوض هذين التابعين في التكامل (13) فنحصل على $I(e_1,e_2)$ لـ e_1 و e_2، وتكون الشروط اللازمة كي يعطي التابعان $y(x)$ و $z(x)$ قيمة قصوى للتابعي (13) هي انعدام المشتقات الجزئية لـ $I(e_1,e_2)$ بالنسبة لـ e_1 و e_2 عندما $e_1=e_2=0$.

وبالمثل فإننا نحصل، بالنسبة لهذه المشتقات الجزئية على العبارتين التاليتين:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I(0,0)}{\partial e_1}&=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\varphi_1(x)\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\varphi_1(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]dx\\ \frac{\partial I(0,0)}{\partial e_2}&=\left[\frac{\partial F}{\partial z'}\varphi_2(x)\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\varphi_2(x)\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\right]dx\end{aligned}\qquad(14)$$

ونظراً لانعدام الحدين الموجودين خارج التكاملين، فإننا نرى كما سبق أن الشروط اللازمة، كي يعطي التابعان $y(x)$ و $z(x)$ قيمة قصوى لـ (13) هي أن يحققا مجموعة المعادلتين من المرتبة الثانية:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial z'}=0\end{cases}\qquad(15)$$

وبالإضافة إلى هاتين المعادلتين نحصل أيضاً على الشروط الحدية:

$$\begin{aligned}y(x_1)&=y_1\quad,\quad y(x_2)=y_2\\ z(x_1)&=z_1\quad,\quad z(x_2)=z_2\end{aligned}$$

التي تحوي الطرفين الثابتين للمنحني الفراغي المطلوب.

وبالاعتماد على (14)، فإن تحول التكامل (13) يعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned}\delta I=\frac{\partial I(0,0)}{\partial e_1}e_1+\frac{\partial I(0,0)}{\partial e_2}e_2&=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z\right]_{x_1}^{x_2}+\\ &+\int_{x_1}^{x_2}dx\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y+\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta z\right]\end{aligned}\qquad(16)$$

وحيث إن : $\left(\delta y = e_1\varphi_1(x);\ \delta z = e_2\varphi_2(x)\right)$

وفي حالة تابعي لـ n تابع $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_n, y_n')dx \qquad (17)$$

فإن الشروط اللازمة من أجل قيمة قصوى، تعطى بمجموعة من n معادلة من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'} \qquad (k = 1, ..., n) \qquad (18)$$

في حين تأخذ الشروط الحدية للأطراف الثابتة الشكل التالي:

$$y_k(x_1) = y_k^{(1)}\ ,\quad y_k(x_2) = y_k^{(2)}\ ,\quad \left(k = \overline{1, n}\right)$$

كما أن التحول الأول للتابعي (17) يأخذ الشكل:

$$\delta I = \frac{\partial I(0.0...0)}{\partial e_1} e_1 \frac{\partial I(0.0...0)}{\partial e_2} e_2 .... \frac{\partial I(0.0...0)}{\partial e_n}$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial y_1'}\delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2'}\delta y_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial y_n'}\delta y_n\right]_{x_1}^{x_2} + \qquad (19)$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)\delta y_2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_n'}\right)\delta y_n\right]$$

وحيث إن :

$$\left(e_1\varphi_1(x) = \delta y_1, e_2\varphi_2(x) = \delta y_2, ..., e_n\,\varphi_n(x) = \delta y_n\right)$$

سندرس الآن الحالة التي يكون فيها التكامل حاوياً مشتقات للتابع المطلوب من مرتبة أعلى من المرتبة الأولى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)dx \qquad (20)$$

لننشئ منحنياً مجاوراً $y(x)+e\varphi(x)$ ونعوض في التكامل (20)، ثم نشتق بالنسبة لـ c وأخيراً نضع $c=0$، وهكذا نحصل على ما يلي:

$$I'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\varphi(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\varphi'(x)+\ldots+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\varphi^{(n)}(x)\right]dx \qquad (21)$$

لنحول جميع الحدود في الطرف الأيمن، ماعدا الأول منها، وذلك عن طريق التكامل بالتجزئة مطبقاً عدة مرات:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y^{(k)}}\varphi^{(k)}(x)dx=\left[F_{y^{(k)}}\varphi^{(k-1)}(x)-\frac{d}{dx}F_{y^{(k)}}\varphi^{(k-2)}(x)+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}F_{y^{(k)}}\varphi(x)\right]_{x_1}^{x_2}+(-1)^k\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^k}{dx^k}F_{y^{(k)}}\varphi(x)dx \qquad (22)$$

لنفرض أن $\varphi(x)$ ومشتقاته حتى المرتبة n-1 تنعدم في الطرفين. لذا فإن الحدود خارج إشارة التكامل تنعدم، وبكتابة $I'(0)=0$، نحصل على الشرط التالي:

$$I'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right]dx=0$$

الذي يؤدي، بدوره إلى النظرية الأساسية في حساب التحولات، إلى معادلة أولر:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0 \qquad (23)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة 2n، حلها العام يحوي 2n ثابتة كيفية، ويجب أيضاً أن يكون لدينا 2n شرطاً حدياً. وفي أبسط الحالات فإن هذه الشروط الحدية تؤول إلى تبسيط التابع ومشتقاته حتى المرتبة (n-1) في نهايتي المجال. وينتج من هذه الشروط الحدية انعدام القيم المقابلة لـ $\varphi(x)$. ونلاحظ أيضاً أن جميع التوابع الموجودة في المعادلة السابقة يفترض فيها أن تكون مستمرة، وهكذا على سبيل المثال — فإننا افترضنا انتماء

التابع المطلوب $y(x)$ إلى الصف C_{2n} من التوابع المستمرة هي ومشتقاتها حتى المرتبة $2n$.

مثال (2-4): أوجد المنحنيات القصوى للتابعي:

$$I[y(x),z(x)]=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[y'^2+z'^2+2yz\right]dx$$

المحقق للشروط :

$$y(0)=0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$z(0)=0 \quad , \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

الحل :

إن جملة المعادلتين التفاضليتين لأولر تملك الشكل:

$$y''-z=0$$
$$z''-y=0$$

وبحذف z من المعادلتين ، نحصل على :

$$y^{(IV)}-y=0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة، بالمكاملة نحصل على :

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

ومن جهة ثانية لدينا : $z=y''$

وبالتالي :

$$z=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x$$

بالاستفادة من الشروط الحدية، نجد:

$$C_1=0\ ,\ C_2=0\ ,\ C_3=0\ ,\ C_4=1$$

وبالتالي فإن :

$$y = \sin x$$
$$z = -\sin x$$

2-2- معادلة أولر – أوستروغرادسكي:

سنوجد الآن الشرط اللازم للحصول على قيمة قصوى في حالة تكامل مضاعف. ونشير هنا إلى أن أوستروغرادسكي أول من أشار إلى مثل هذه الشروط في بحثه: (المعادلات التفاضلية لمسألة التقايس).

ليكن لدينا التكامل الثنائي:

$$I = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)dx\,dy \qquad (24)$$

حيث نرمز بـ u_y, u_x إلى المشتقين الجزئيين للتابع $u(x,y)$.

لنبحث عن التابع $u(x,y)$ المستمر مع مشتقاته حتى المرتبة الثانية في الساحة D والذي يأخذ قيماً معينة على l محيط الساحة، بالإضافة إلى أنه يعطي قيمة قصوى للتابعي (24).

تشكل التوابع المجاورة : $u(x, y) \approx u(x, y) + e\varphi(x, y)$

حيث $\varphi(x, y)$ تابع كيفي ينعدم على φ. وبتعويض هذا التابع في التكامل (24) واشتقاقه بالنسبة لـ e ثم بوضع $e = 0$ ، فإننا نحصل على العبارة التالية للتحول الأول للتابعي:

$$\delta I = \frac{\partial I(0)}{\partial e}e = e\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial u}\varphi + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dxdy$$

نحول آخر حدين بالاستعانة بدستور ريمان المعروف :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy = \int_l P\,dx + Qdy$$

التي يعطينا :

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} \right) \right] dxdy -$$

$$- \iint_D \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} \right) dxdy$$

$$= \int_\Gamma \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} dy - \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} dx - \int_\Gamma \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} \right) dxdy$$

وهكذا نجد العبارة التالية للتحول الأول:

$$\delta I = \frac{\partial I(0)}{\partial e} e = \int_\Gamma \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} dy - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} dx \right) e\varphi(x, y) +$$

$$+ \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} \right) e\varphi(x, y) dxdy \qquad (25)$$

إن هذا التحول الأول يجب أن ينعدم من أجل قيمة قصوى، أو بالاعتماد على كون $\varphi(x, y)$ معدوماً على Γ، فإننا نستطيع تأكيد وجوب انعدام التكامل الثنائي في الطرف الأيمن لـ (25). وبذلك نحصل على المعادلة التالية (معادلة أوستروغرادسكي) من أجل تعيين التابع المطلوب $u(x,y)$ الذي يؤدي إلى نهاية قصوى للتابعي (24):

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} = 0 \qquad (26)$$

وهكذا حصلنا على معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية يتوجب تحققها داخل الساحة D. وكما سبق أن بيناه فإن الشرط الحدي يعود إلى تعيين u على المحيط. ونشير بأنه في حالة تكامل مضاعف تابع لعدة توابع، فإننا نحصل على جملة من هذه المعادلات.

هذا وتجدر الإشارة أيضاً إلى أن التوابع التي تحقق المعادلة (23) أو (26) أو بتحديد أكثر، الأشكال الهندسية المقابلة لها. هي ما يطلق عليها عادة اسم الأوضاع

القصوى للمسألة. وهي منحنيات أو سطوح وذلك حسبما يكون التكامل بسيطاً أو مضاعفاً ولما كانت معادلتا أولر وأوستراوغرادسكي هما مجرد شرطين لازمين كي يكون للتابعيات المقابلة قيمة قصوى، فلانستطيع تأكيد أن كل وضع من الأوضاع القصوى يقابل قيمة قصوى للتابعي وذلك بالمقارنة مع جميع المنحنيات والسطوح المجاورة كفاية.

ملاحظة: إذا ورد تحت رمز التكامل المشتقات الجزئية لـ $F = z(x,y)$ من مراتب أكبر أو تساوي n فإن معادلة أولر – استروغرادسكي تأخذ الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_{zx}\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_{zy}\}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{F_{zxx}\}$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\{F_{zxy}\}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{F_{zyy}\}$$

$$-\ldots+(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}\{F_{\underbrace{zyy\ldots y}_{n}}\}=0$$

مثال (3-4) : ليكن :

$$J(z(x,y))=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \qquad (26')$$

ولنفرض أن قيم التابع z معطاة على الحدود C لـ D :

$$Z = F(x, y)$$

برهن أن معادلة اوستراغرادسكي هي:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

أو اختصاراً: $Dz = 0$

والتي هي معادلة لابلاس.

الحل:

ينبغي علينا إيجاد حل مستمر في الساحة D لهذه المعادلة بحيث يأخذ قيماً معينة على C حدود D.

وهذه هي إحدى مسائل الفيزياء الرياضية والتي تدعى مسألة ديرخليه.

- إن معادلة اوستروغرادسكي هي :

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{zx} - \frac{\partial}{\partial y} F_{zy} = 0$$

من ('26) نجد :

$$F = z_x^2 + z_y^2$$

$$F_{zx} = 2z_x = 2\frac{\partial z}{\partial x}, \ F_{zy} = 2z_y = 2\frac{\partial z}{\partial y}, \ F_z = 0$$

ومنه:

$$0 - \frac{\partial}{\partial x}(2z_x) - \frac{\partial}{\partial y}(2z_y) = 0$$

وأخيراً نجد:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

2-3- ملاحظات حول معادلتي أولر وأوستروغرادسكي:

1-لنعتبر أولاً معادلة أولر (11) في أبسط الحالات. ولنفرض أن التابع F لايحوي y فتغدو المعادلة :

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

وبالمكاملة نجد :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const}$$

2-أما إذا كان F لايحوي x أي أن : $F = F(y, y')$

عندئذ فإن معادلة أولر تملك الشكل:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y'-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''=0$$

وفي الواقع يكون:

$$\frac{d}{dx}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''-y''\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y'^2-$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'y''=y'\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}y'-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''\right)$$

عندئذ، فإن معادلة أولر تملك الشكل التالي:

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=\text{const} \qquad (27)$$

وبما أن F لايحوي x ، فإن العامل في y' هو الطرف الأيسر في معادلة أولر، وعلى هذا استناداً إلى هذه المعادلة:

$$\frac{d}{dx}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

وهكذا نحصل على حقيقة الحل (27).

3-وإذا كان F لايحوي y' ، فتغدو معادلة أولر :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0$$

أي أننا نحصل على معادلة محدودة لكنها ليست معادلة تفاضلية، وهي تعين منحنياً أو عدة منحنيات، لكنها لاتشكل أسرة من المنحنيات تابعة لوسيطين كما هي الحالة من أجل المعادلة التفاضلية، فلانستطيع إذاً بشكل عام تحقيق الشروط الحدية.

4-لنعتبر الآن الحالات التي تصبح فيها معادلة أولر متطابقة. لنفرض أن :

$$F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y' \qquad (28)$$

والتكامل (7) يكتب بالشكل:

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\left[M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}\right]dx \tag{29}$$

وتصبح معادلة أولر بالشكل:

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{d}{dx}N(x,y)=0$$

أو :

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}y'=0$$

أو :

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0 \tag{30}$$

يبين بسهولة أن الطرف الأيسر في المعادلة (11) هو الآن مطابق للصفر، في حين أن التكامل (7) يكتب بالشكل:

$$I=\int_{x_1}^{x_2}[M\,dx+N\,dy] \tag{31}$$

وهنا نجد استناداً إلى (30) أن I لاتعتمد على الطريق المسلوك ، أي أن لها القيمة نفسها مهما كان المنحني المختار ℓ الواصل بين النقطتين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ ، وقد أرجع ذلك إلى كون معادلة أولر متطابقة. وسنرى في الحال، أننا نستطيع في هذه الحالة أن نكتب:

$$F(x,y,y')=\frac{d}{dx}G(x,y)$$

حيث G(x,y) هو تعريفاً التكامل (31) مع نهاية عليا متحولة ، إذن في مثل هـذه الحالة نقول إن مسألة التحولات بدون معنى .

5-وبالطريقة نفسها، إذا كان التابع المكامل في (20) هو المشتق الكلي بالنسبة لـ x لتابع ما لـ $\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$:

$$F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=\frac{d}{dx}G\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$$

فإن معادلة أولر (23) ترد إلى مطابقة.

لنأخذ الآن التابعي (24)، ولنفرض أن للتابع المكامل الشكل التالي:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \qquad (32)$$

حيث إن M و N تابعان لـ (x,y,u) ، ويمكن البرهان بالتعويض مباشرة على أن معادلة أوستروغرادسكي تغدو الآن متطابقة. وهذا يرجع فحواه إلى أن التكامل الثنائي (32) يساوي بالاعتماد على دستور ريمان، إلى التكامل على محيط:

$$\int_{\ell} (Mdy - Ndx)$$

فقيمة التكامل الثنائي تعين تماماً بالقيم التي يأخذها التابع u على المحيط ℓ للساحة D. وإذا ثبتنا قيمة u على المحيط ℓ ، فإن التكامل الثنائي على D يأخذ القيمة نفسها مهما كان التابع المختار u .

مثال (4-4) : لنأخذ التابعي البدائي :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

ولنضع :

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$$

عندئذ يكون لدينا :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx \qquad (33)$$

إن المسألة هي البحث عن منحن، من بين جميع المنحنيات الواصلة بين نقطتين مفروضتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$، بحيث إن نقطة مادية تسقط سقوطاً حراً ترسم المنحني في أقصر وقت.

لنوجه المحور y شاقولياً نحو الأسفل، أي باتجاه قوة الجاذبية. بما أن التابع المكامل في التابعي (33) لايحوي x. فإننا نستطيع كتابة التكامل الأول لمعادلة أولر مباشرة ووفقاً لـ (27):

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \qquad (34)$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}}$$

أو :

$$\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{C_1}$$

أي أن :

$$y\left(1+y'^2\right) = C_1 \Rightarrow y'^2 + 1 = \frac{C_1}{y}$$

أو :

$$y'^2 = \frac{C_1 - y}{y} \qquad (35)$$

لنضع :

$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos u)$$

بالاشتقاق:

$$y' = \frac{C_1}{2}\sin u . u'$$

عندئذ بالتعويض في (35) وبالإصلاح نجد :

$$\frac{C_1}{2}(1-\cos u)du = \mp dx$$

وهكذا فإن :

$$x = \mp(u - \sin u) + C_2$$
$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos u)$$

من هذا يتضح أن الأوضاع القصوى للتابعي (33) هي سيكلوئيدات.

ويعين الثابتان C_2, C_1 من نقطتي البداية والنهاية المفروضتين. فإذا كانت إحدى هاتين النقطتين هي مبدأ الإحداثيات يكون $C_2 = 0$ كما نحصل على مبدأ الإحداثيات من أجل $u = 0$.

أخيراً لنلاحظ أن للمسألة صفة خاصة حيث إن $y' = \frac{dy}{dx}$ يصبح كما هو واضح لانهائياً في $u = 0$، بينما ينعدم المقام في التابع المكامل. وتختفي النقطة الشاذة في $u = 0$ إذا عدنا للمتحول u في التكامل.

4-2- المسألة الجيوديزية:

تعريف : ليكن لدينا:

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$
$$z = z(u, v)$$

عندئذ :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2$$

$$d\sigma^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Qdv^2$$

أو :

$$d\sigma = \sqrt{E + 2Fv' + Qv'^2}\, du$$

حيث إن :

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$Q = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$v' = \frac{dv}{du} \quad ; \quad E = E(u, v)$$

نستخلص مما سبق : أن الخطوط الجيوديزية على السطح هي تلك المنحنيات المعينة بالشرط اللازم من أجل قيمة صغرى للتكامل:

$$I = \int_{u_1}^{u} \sqrt{E + 2Fv' + Qv'^2}\, du \qquad (36)$$

الذي يعطي طول المنحني ، حيث اعتبرنا v تابعاً لـ u على طول المنحني.

وتصبح معادلة أولر بالشكل:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}+2\frac{\partial F}{\partial v}v'+\frac{\partial Q}{\partial v}v'^2\right)}{\sqrt{E+2Fv'+Qv'^2}}-\frac{d}{du}\left(\frac{F+Qv'}{du\sqrt{E+2Fv'+Qv'^2}}\right)=0$$

مثال (4-5):

لنوجد الآن الخطوط الجيوديزية لكرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها واحدة الأطوال:

$$z=\cos\theta \quad , \quad y=\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad x=\sin\theta\cos\varphi$$

فيكون:

$$d\sigma^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2$$

ويصبح التكامل (36) بالشكل:

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}\,d\theta$$

حيث φ' هو مشتق φ بالنسبة لـ θ . وبما أن التابع المكامل لايحوي φ لذا نحصل على الحل التالي:

$$\frac{\sin^2\theta\varphi'^2}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}}=C$$

وبوضع $C=0$ ينتج أن $\varphi'=0$ أي $\varphi=\text{const}$. فالخطوط الجيوديزية لكرة هي خطوط الطول عليها. أي الدوائر العظمى المارة بقطبي الكرة $(\theta=\pi,\theta=0)$. ونظراً لأن اختيار القطب هو كيفي، فإن جميع الدوائر العظمى لكرة هي وضوحاً خطوط جيوديزية.

3- نظرية هاملتون – جاكوبي :

3-1-المتحولات القانونية لمعادلات أولر :

سنقوم أولاً بتغيير المتحولات في معادلة أولر، وبالتحديد سننتقل إلى ما يدعى بالمتحولات القانونية. نبدأ بحالة فراغ ذي ثلاثة أبعاد، وذلك عندما يكون التكامل الأساسي على الشكل:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', z, z')dx \qquad (37)$$

ومن أجل هذا التكامل، تمثل معادلات أولر :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0 \end{aligned} \qquad (38)$$

جملة معادلتين تفاضليتين من المرتبة الثانية.

لنأخذ بدلاً من y' و z' متحولين جديدين u و w معينين بالعلاقتين:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = u \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = w \qquad (39)$$

وبالإضافة إلى ذلك سنعتبر أن المعادلات المكتوبة قابلة للحل بالنسبة لـ y' و z' ، أي أن المعين التابعي الموافق لها يخالف الصفر :

$$\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{\partial F}{\partial z'}\right)}{D(y', z')} \neq 0$$

ولنأخذ عوضاً عن التابع F التابع الجديد H :

$$H(x, y, z, u, w) = y'u + z'w - F = y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'} - F \qquad (40)$$

وسنكتب هذا التابع الجديد بدلالة المتحولات الجديدة u و w . لنعين المشتقات الجزئية للتابع H(x,y,z,u,w) بدلالة المتحولات الأربعة الأخيرة .

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{dy'}{dy}u + \frac{dz'}{dy}w - \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dy} - \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{dz'}{dy}$$

أو، بالاستعانة بـ (39) :

$$-\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (41)$$

وعلى وجه الدقة فإنه باشتقاق بسيط نحصل على :

$$\frac{\partial H}{\partial z}=-\frac{\partial F}{\partial z} \qquad (42)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=y', \quad \frac{\partial H}{\partial w}=z'$$

وهكذا، فعوضاً عن المعادلتين من الدرجة الثانية (38)، نستطيع أن نكتب بدلالة المتحولات الجديدة، جملة من أربع معادلات من الدرجة الأولى من أجل التوابع y,z,u,w للمتحول المستقل x :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\partial H}{\partial u} \quad \frac{dz}{dx}=\frac{\partial H}{\partial w}\\ \frac{du}{dx}&=-\frac{\partial H}{\partial y} \quad \frac{dw}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial z}\end{aligned} \qquad (43)$$

إن الجملة (43) تسمى عادةً جملة قانونية. ونحصل، بشكل غير مباشر، من (40) و (43) على عبارة التابع المكامل F للتابعي (37) بدلالة التابع H :

$$F=u\frac{\partial H}{\partial u}+w\frac{\partial H}{\partial w}-H \qquad (44)$$

هذا ويحتوي الحل العام للجملة (38) أو (43) على أربعة ثوابت كيفية، وإذا افترضنا تحقق الشروط المعهودة بالنسبة لمبرهنة الوجود والوحدانية في المعادلات التفاضلية، فمن أي نقطة (x,u,z) في الفراغ يمكن رسم حزمة من الأوضاع القصوى وذلك بإعطاء المشتقين قيماً ابتدائية كيفية. وتتألف تلك الحزمة من جماعة من المنحنيات التي تعتمد على ثابتين كيفيين هما قيمتا المشتقين الابتدائيين. وبشكل عام نطلق اسم جماعة من الأوضاع القصوى على مجموعة حلول معادلات أولر التي تعتمد على ثابتين كيفيين وتملأ جزءاً معيناً من الفراغ دون أن تتقاطع فيما بينها، وهذا يعني أن واحداً

وواحداً فقط، من جماعة الأوضاع القصوى يمر بأية نقطة من هذا الجزء من الفراغ. فنحصل مع جماعة كهذه من الأوضاع القصوى، على قيمتين معينتين لـ z' و y' في كل نقطة، كما نحصل في كل نقطة من جزء الفراغ الذي تملؤه الجماعة على قيم معينة لـ u و w ، وهذا يعني أننا نستطيع افتراض u و w معرفتين كتابعين للإحداثيات (x,u,z) في كل نقطة من هذا الفراغ. ونطلق على التابعين u(x,y,z) و w(x,y,z) اسم تابعي الميل لجماعة الأوضاع القصوى.

4- مبادئ الميكانيك التحويلية:

4-1- مبدأ أوستروغرادسكي – هاملتون:

لنفترض أنه لدينا جملة من n نقطة مادية، ذات كتلة m_i وإحداثيات (x_i, y_i, z_i). ولنفترض أن حركة الجملة تخضع لمعادلات القسر :

$$\varphi_\sigma = 0 \qquad \left(\sigma = \overline{1, m}\right) \tag{45}$$

وتحدث تحت تأثير قوى كمونية أي تشتق من تابع قوى V ، أي :

$$X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}\ ,\ Y_i = \frac{\partial V}{\partial y_i}\ ,\ Z_i = \frac{\partial V}{\partial z_i} \tag{46}$$

حيث φ_σ و V تابعان مفروضان لإحداثيات النقاط المادية والزمن.

تعطى الطاقة الحركية للجملة بالمعادلة :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2\right)$$

لنفترض أن الجملة قد أزيحت من الوضع I الموافق للحظة $t = t_1$، إلى الوضع II الموافق للحظة $t = t_2$.

نختار من بين جميع الطرائق الممكنة لتحقيق هذه الإزاحة، صف الحركات المقبولة للجملة، وهذا يعني الحركات التي تنسجم مع معادلات القسر المفروضة وتزيح الجملة من الوضع I إلى الوضع II في الفترة الزمنية المفروضة $[t_1, t_2]$. إن مبدأ

أوستروغرادسكي – هاملتون ينص على أن الحركة الفعلية للجملة تتميز من جميع الحركات المقبولة في أنها تحقق الشرط اللازم $\delta I = 0$ من أجل قيمة قصوى للتكامل:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T + V)dt \tag{47}$$

ويقابل كل حركة ممكنة مجموعة من $3n$ تابع $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$، معرفة في المجال $[t_1, t_2]$، ومحققة للمعادلات (45)، ولها قيم مفروضة في طرفي هذا المجال.

فلدينا إذاً مسألة في حساب التحولات بمعادلة صلة هولونومية (45) وحدود ثابتة. ولحل هذه المسألة علينا تشكيل تابع مساعد وذلك باستعمال طريقة مضاريب لاغرانج:

$$H = T + V + \sum_{\sigma=1}^{m} \mu_\sigma(t)\varphi_\sigma$$

ونكتب عندئذ من أجل هذا التابع معادلة أولر المعروفة. لدينا هنا:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i'} = m_i x_i'$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{\sigma=1}^{m} \mu_\sigma(t)\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}$$

وهكذا من أجل الإحداثيات y_i، z_i تغدو معادلات أولر:

$$m_i x_i'' - X_i - \sum_{\sigma=1}^{m} \mu_\sigma(t)\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} = 0$$

$$m_i y_i'' - Y_i - \sum_{\sigma=1}^{m} \mu_\sigma(t)\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y_i} = 0$$

$$m_i z_i'' - Z_i - \sum_{\sigma=1}^{m} \mu_\sigma(t)\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} = 0$$

أي أنها المعادلات التفاضلية لحركة الجملة الفعلية، وهذا ما أردنا البرهان عليه.

إذا عرفنا وضع الجملة بالاستعانة بجملة من الوسطاء المعممة التالية : $q_1, q_2, ..., q_i$ حيث $i = 3n - m$ عوضاً عن الإحداثيات المستقيمة القائمة، فسيكون T و V تابعين لهذه الوسطاء :

$$T(q_1, q_1', ..., q_i, q_i', t) = T$$
$$V(q_1, q_2, ..., q_i, t) = V$$

وبذلك نكون قد تخلصنا من معادلات القسر، فتؤول حينئذ المسألة إلى إيجاد القيم للتكامل (47) بقيم حدية ثابتة لـ q_i وبدون معادلات قسر. وهكذا تغدو معادلات أولر:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j'} + \frac{\partial V}{\partial q_j'}\right) = 0$$

وبما أن V غير تابع لـ q_j' فإن تابع القوى يتبع فقط للموضع:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} = 0 \qquad \left(j = \overline{1, i}\right)$$

أو :

$$\frac{\partial (T + V)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} \qquad \left(j = \overline{1, i}\right) \tag{48}$$

وتسمى هذه المعادلات بمعادلات لاغرانج.

إن المتحولات القانونية هنا هي p_j و q_j، حيث تعطى الـ p_j، التي تعرف عادة باسم العزوم المعممة، بالمعادلات التالية :

$$p_j = \frac{\partial}{\partial q_j}(T + V) = \frac{\partial T}{\partial q_j'}$$

ويغدو التابع F بالشكل التالي :

$$F = \sum_{j=1}^{n} q'_j p_j - (T + V)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q'_j \frac{\partial T}{\partial q'_1} - T - V$$

إذا كان F كثير حدود متجانس من الدرجة الثانية في q'_j، فنحصل حسب نظرية أولر في التوابع المتجانسة :

$$F = 2T - T - V = T - V$$

أي أن F تمثل الطاقة الكلية للجملة.

2-4- مبدأ الفعل الأصغر:

لنفترض أن الكمون V والتوابع φ_σ لاتحوي t . ففي هذه الحالة، نحصل على تكامل الطاقة المعروف :

$$T - V = h \tag{49}$$

الذي يعبر عن الحقيقة بأن مجموع الطاقة الحركية T والطاقة الكامنة (V-) يبقى ثابتاً خلال الحركة. وفي الحالة المعتبرة أيضاً، فإن عبارات الإحداثيات الديكارتية بدلالة الإحداثيات الوسيطية q_σ لاتحوي t . وبالتالي ستكون الطاقة الحركية شكلاً رباعياً في المشتقات q'_j.

$$2T = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha x'^2_\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q'_i q'_j \quad ; \quad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{50}$$

حيث a_{ij} توابع لـ q_σ. وباستعمال العلاقة (49)، يمكننا كتابة التابع المكامل في (47) من جديد على الشكل التالي :

$$T + V = 2T - h$$

إذا أهملنا الثابت الإضافي، وكتبنا 2T كـ $\sqrt{2T}\,\sqrt{2v + 2h}$ ، واستبدلنا 2T في أحد هذين العاملين بعبارته في (50) ، نتوصل إلى تكامل من الشكل:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2v + 2h} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} q'_i q'_j dt} \tag{51}$$

لنبين أن معادلات أولر لهذا التكامل تؤول إلى معادلات لاغرانج (48).

في الحقيقة، إن لمعادلات أولر من أجل التكامل (51) الشكل التالي:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j}\sqrt{\frac{2T}{2V+2h}}+\frac{\partial T}{\partial q_j}\sqrt{\frac{2V+2h}{2T}}$$

$$-\frac{d}{dt}\left[\sqrt{\frac{2V+2h}{2T}}\,\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right]=0 \qquad \left(j=\overline{1,i}\right) \qquad (52)$$

فإذا لاحظنا أن التابع المكامل في (51) لايحوي المتحول المستقل وهو تابع متجانس من الدرجة الأولى في q'_i، نجد أن إحدى معادلات أولر المكتوبة هي نتيجة لباقي المعادلات. ويمكننا أن نضيف إلى معادلاتنا الأولرية معادلة أخرى تحدد اختيار (الوسيط) المتحول المستقل.

ولكي يكون الزمن هو المتحول المستقل، فإننا نرفق بالمعادلات (52) المعادلة:

$$\sqrt{\frac{2V+2h}{2T}}=1$$

التي تكافئ وضوحاً قانون حفاظ الطاقة (49). وتؤول الآن المعادلات (52) إلى معادلات لاغرانج (48). وبالتالي نحصل على معادلات الحركة الفعلية في الحالة المعتبرة من الشرط اللازم من أجل قيمة قصوى للتكامل (51) بطرفين ثابتين. إن هذا التأكيد يمثل مبدأ الفعل الأدنى في الشكل الجاكوبي.

ندخل في فراغ ذي r بعداً وإحداثيات $q_1,\dots,q_r$، عنصر مسافة معرف بالعبارة التالية من أجل التفاضل في طول القوس:

$$d\sigma^2=(2V+2h)\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}\cdot q'_i\cdot q'_j$$

فيكتب الآن التكامل (51) على الشكل:

$$\int d\sigma$$

وهكذا فإن المسألة الأساسية في ميكانيك جمل مادية مكافئة لمسألة الجيوديزيات في فراغ ذي r بعداً. ويمكن أن نبين أنه، إذا أعطينا أجزاء صغيرة كفاية من مسارات لحركة فعلية، فإن للتكامل الممثل للفعل على طول هذه الأجزاء قيمة صغرى ضعيفة، لنعتبر الحركة لنقطة مادية منفردة على سطح ما σ تحت تأثير فعل العطالة. ففي هذه الحالة يمكننا أن نأخذ $V = 0$ ، ويصبح التكامل (51) على الشكل البسيط:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{T}\, dt \tag{53}$$

أو ، إذا أدخلنا إحداثيات ديكارتية قائمة:

$$\int_{\ell} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

وبالتالي فإن مسارات الحركة ستكون جيوديزيات هذا السطح.

مثال (6-4) :

بالاعتماد على مبدأ الفعل الأصغر، أوجد مسار النقطة المادية (التي كتلتها الواحدة) والمتحركة تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

الحل:

بتوجيه المحور y نحو الأعلى، عندها سيكون تابع القوى الكامنة للجاذبية الأرضية:

$$U = -g\, y \tag{54}$$

وطبقاً لمبدأ الفعل الأدنى فإن التكامل:

$$J = \int_{\gamma} \sqrt{2(U + h)}\, dx \tag{55}$$

يجب أن يكون له قيمة صغرى على المسار المطلوب γ .

وبالتالي، المسار للنقطة سيمثل القيم القصوى للتابعي (55).

بتعويض (54) في (55) نحصل على :

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2(h-gy)}\,\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{56}$$

إن معادلة هاملتون – جاكوبي هي من الشكل:

$$\frac{\partial w}{\partial x}-\sqrt{2h-2gy-\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}=0$$

أو الشكل: $$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=2(h-gy)$$

وتكاملها هو :

$$w=Ax+\int\sqrt{2h-2gy-A^2}\,dy$$

$$=Ax-\frac{1}{3g}\left(2h-2gy-A^2\right)^{3/2}+B$$

حيث A و B ثوابت كيفية.

لنوجد القيم القصوى للتابعي (56):

$$x+\frac{A}{g}\left(2h-2gy-A^2\right)^{1/2}=C$$

أو :

$$y=\frac{h}{g}-\frac{A^2}{2g}-\frac{g}{2A^2}(x-C)^2$$

حيث A و C ثوابت.

وبشكل خاص ،إن القيم القصوى المارة من المبدأ وجدت من الشرط: $y(0)=0$

وبالنتيجة نحصل على أسرة من القطوع المكافئة بمتحول واحد:

$$y=-\frac{g}{2A^2}x^2+\frac{\sqrt{2h-A^2}}{A}x$$

5- المسائل الإيزوبريمترية :

لنطرح المسألة التالية :

من بين جميع المنحنيات $y(x)$ ، التي تجعل للتكامل :

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')dx = c \tag{57}$$

قيمة مفروضة c ، يطلب تعيين منحن يعطي القيم القصوى للتكامل:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y')dx \tag{58}$$

هذه هي ما تسميه عادة المسألة الإيزوبريمترية. ويرجع هذا الاسم لمسألة خاصة من هذا النوع حيث يطلب تعيين منحن مغلق طوله مفروض بحيث يحد أعظم مساحة (الدائرة). ولكن هذه المسألة يمكن ردها إلى مسألة عادية في حساب التحولات بالاستعانة بالنظرية التالية :

1-5- مبرهنة أولر :

إذا كان للمنحني $y(x)$ قيمة قصوى للتكامل (58)، الذي يحقق معادلة الصلة (57) وشروط حدية معينة ، وإذا لم يكن $y(x)$ من الأوضاع القصوى للتكامل (57) ، فيوجد عدد ثابت μ بحيث إن $y(x)$ هو منحن أقصى للتكامل:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \tag{59}$$

حيث إن :

$$F = H + \mu G$$

البرهان :

لندخل في مناقشتنا تابعاً قريباً من $y(x)$:

$$y(x) \approx y(x) + e_1\varphi_1(x) + e_2\varphi_2(x) \tag{60}$$

حيث e_2, e_1 وسيطان صغيران، في حين أن $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ تابعان يتمتعان بالخواص العادية وينعدمان في نهايتي مجال التكامل. لنعوض هذا التابع في التكامل (57) فنجد :

$$I_1(e_1, e_2) =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} G\left(x, y(x) + e_1\varphi_1(x) + e_2\varphi_2(x), y'(x) + e_1\varphi_1'(x) + e_2\varphi_2'(x)\right)dx$$

ويمكننا أن نكتب، كما فعلنا سابقاً:

$$\left.\frac{\partial I_1}{\partial e_i}\right|_{e_1 = e_2 = 0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\varphi_i(x)dx \quad (i = 1,2)$$

وبما أن $y(x)$ ليس بمنحن أقصى للتكامل (1)، فإن المقدار :

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'} \neq 0$$

في المجال (x_1, x_2)، ويمكن اختيار تابع $\varphi_2(x)$ بحيث:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\varphi_2(x)dx \neq 0$$

وإذا عدنا للمعادلة $I_1(e_1, e_2) = e$ ، فنلاحظ أنها محققة من أجل $e_1 = e_2 = 0$ لأن $y(x)$ هو بالفرض حل لمسألتنا، وبالنظر لاختيارنا لـ $\varphi_2(x)$، فإن المشتقات الجزئية لـ $I_1(e_1, e_2)$ بالنسبة لـ e_2 لاتنعدم من أجل $e_1 = e_2 = 0$. وعلى هذا نجد استناداً إلى نظرية التابع الضمني أن المعادلة $I_1(e_1, e_2) = e$ تعرف e_2 كتابع لـ e_1 من أجل جميع قيم e_1 القريبة كفاية من الصفر، حيث إن مشتق e_2 بالنسبة لـ e_1 في $e_1 = 0$ يعطى وضوحاً بالعلاقة :

$$\left.\frac{de_2}{de_1}\right|_{e_1 = 0} = -\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\varphi_1(x)dx \qquad (61)$$

$$: \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\varphi_2(x)dx = L \quad (L = \text{const})$$

نعوض التابع (60) في التكامل (58) ونشتق بالنسبة لـ e_1 التكامل الذي حصلنا عليه، علماً أن e_2 هو تابع لـ e_1 ، فيكون :

$$\left.\frac{dI}{de_1}\right|_{e_1=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}\right)\varphi_1(x)dx+$$

$$+L\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}\right)\varphi_2(x)dx$$

وبالاستفادة من العبارة (61) من أجل الثابت L ، يمكننا أن نكتب :

$$\left.\frac{dI}{de_1}\right|_{e_1=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}\right)\varphi_1(x)dx+$$

$$+\mu\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\varphi_1(x)dx$$

حيث :

$$\mu=-\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}\right)\varphi_2(x)dx:\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\varphi_2(x)dx$$

أو :

$$\left.\frac{dI}{de_1}\right|_{e_1=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}\right)+\mu\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]\varphi_1(x)dx$$

ولما كان $y(x)$ يعطي قيمة قصوى للتكامل (58) الخاضع لمعادلة الصلة (57)، فلدينا إذن: $\left.\frac{dI}{de_1}\right|_{e_1=0}=0$، وعلى هذا ، إذا تذكرنا أن $\varphi_1(x)$ هو تابع كيفي، واستعنا بالنظرية الأساسية في حساب التحولات ، لحصلنا على المعادلة :

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

وحيث : $F=H+\mu G$

وهي معادلة أولر من أجل التكامل (59) . والحل العام لهذه المعادلة يحوي ثلاثة ثوابت كيفية هي ثابتا التكامل والثابت μ. وتعين هذه الثوابت من الشروط الحدية والشرط (57).

ملاحظة :

إذا ضربنا التابع المكامل لـ (58) بثابت كيفي فإن الأوضاع القصوى للتكامل تظل كما كانت من قبل، لذا يمكن كتابة التابع F بالشكل المتناظر $F = \mu_1 H + \mu_2 G$، حيث μ_1، μ_2 ثابتان. ولما كان H و G يدخلان بشكل متناظر في عبارة F فإننا نحصل، لدى البحث عن القيم القصوى للتكامل (58) شريطة أن يحافظ التكامل (57) على قيمة ثابتة، على نفس الأوضاع القصوى كالتي نحصل عليها لدى البحث عن القيم القصوى للتكامل (57) شريطة أن يحافظ التكامل (59) على قيمة ثابتة. إن هذا هو أبسط أشكال ما يسمى مبدأ التبادل. لقد فرضنا أن كلاً من μ_1، μ_2 لايساوي الصفر، أي أننا استبعدنا المنحنيات التي هي أوضاع قصوى للتكامل (57) أو (58).

والسؤال الذي يطرح نفسه : كيف يمكن معالجة المسائل التي يكون فيها لمعادلات الصلة الإضافية شكل مختلف عن (57).

لنبدأ بأبسط الحالات :

إيجاد التوابع $y(x)$ و $z(x)$ التي تعطي قيمة قصوى للتكامل :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y', z, z')dx \tag{62}$$

وتحقق المعادلة :

$$G(x, y, z) = 0 \tag{63}$$

بالإضافة إلى الشروط الحدية من أجل الأطراف المثبتة :

$$y(x_1) = y_1 \quad , \quad z(x_1) = z_1$$
$$y(x_2) = y_2 \quad , \quad z(x_2) = z_2$$

ومن الواضح أن الإحداثيات (x_1, y_1, z_1)،(x_2, y_2, z_2) يجب أن تحقق المعادلة (63).

وهذا يفسر هندسياً : إيجاد منحنيات السطح (63) التي تعطي قيمة قصوى للتكامل (62) وعندما يكون بالإمكان وضع (63) كتابع لـ x و y فبتعويض هذا التابع في التكامل (62) نتوصل عندئذ إلى مسألة عادية في حساب التحولات ذات تابع مطلوب واحد y(x) وبدون معادلات صلة. لنستفد من هذه الفكرة في استنتاج المعادلة، التي يجب أن يحققها التابعان y(x) و z(x) اللذان يزودانا بحل المسألة.

سنفرض أن المشتقات الجزئية $\frac{\partial G}{\partial z}$ لاتنعدم على طول هذا الحل. عندئذ تكون المعادلة (63) قابلة للحل بالنسبة لـ z ، فنحصل إذن على : $z = f(x,y)$ ، وبعد تعويض هذه العبارة في التكامل (62) ، يصبح هذا التكامل بالشكل:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H\left(x, y, y', f, \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right) dx \qquad (64)$$

إن المنحني المستوي / مسقط المنحني الفراغي على المستوي (x,y) ، يجب أن يعطي قيمة قصوى للتكامل (64) بحدين ثابتين، وعليه فهو يحقق معادلة أولر من أجل هذا التكامل. لنجري الحسابات الأولية من أجل تشكيل هذه المعادلة.

سنرمز بـ [H] للتابع المكامل في (64) . إن [H] تابع لـ (x,y,y'). كما نرمز بـ H، بدون الأقواس المربعة ، للتابع السابق H(x,y,z,y',z') بحيث إننا نحصل على [H] من H بعويض $z = f(x,y)$ و $z' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$.

لدينا:

$$\frac{\partial [H]}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'\right)$$

$$\frac{\partial [H]}{\partial y'} = \frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial H}{\partial z'}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial [H]}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial z'} + \frac{\partial H}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\right)$$

وبالتالي فإن معادلة أولر من أجل التكامل (64):

$$\frac{\partial[H]}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial[H]}{\partial y'}=0$$

تصبح بالاستفادة من العبارات السابقة :

$$\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial H}{\partial z'}\right)-\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}=0$$

ومن ناحية أخرى، فإن اشتقاق المعادلة (64) بالنسبة لـ y يعطى :

$$\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

لنحذف $\frac{\partial f}{\partial y}$ من المعادلتين الأخيرتين فنجد :

$$\frac{\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}-\frac{\partial H}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial y}}=\frac{\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial z'}-\frac{\partial H}{\partial z}}{\frac{\partial G}{\partial z}}$$

إن كلاً من طرفي المعادلة الأخيرة يمثل، على المنحنيات القصوى، نفس التابع لـ x

الذي نرمز له بـ $\mu(x)$، فلدينا الآن:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}-\left[\frac{\partial H}{\partial y}+\mu(x)\frac{\partial G}{\partial y}\right]=0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial z'}-\left[\frac{\partial H}{\partial z}+\mu(x)\frac{\partial G}{\partial z}\right]=0$$

وهذه هي الشروط اللازمة من أجل قيمة قصوى، ونرى بسهولة أنه يمكن كتابتها

على الشكل:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{H}}{\partial y'}-\frac{\partial \overline{H}}{\partial y}=0\\&\frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{H}}{\partial z'}-\frac{\partial \overline{H}}{\partial z}=0\end{aligned}\qquad(65)$$

حيث :

$$\overline{H}=H+\mu(x)G \qquad (66)$$

أي أن المنحنيات القصوى لهذه المسألة هي بالضرورة منحنيات قصوى غير شرطية للتابعي الذي يعين تابعه المكامل $\overline{H}$ بالعلاقة (66).

وتجدر الإشارة هنا إلى أنه في الحالة التي ندرسها لدينا تابع لـ x : $\mu(x)$، عوضاً عن العامل الثابت الذي يظهر في المسألة الإيزوبريمترية. وبعد حذف التابع $\mu(x)$ وأحد التوابع المطلوبة، وليكن z مثلاً من (63) و (65) فإننا نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية في التابع $y(x)$ وحده. ويعين الثابتان، اللذان نحصل عليهما لدى حل هذه المعادلة، من الشرطين الحديين.

ومن الممكن اتباع المناقشة السابقة في مسائل أعم نمطاً مع أي عدد من التوابع المطلوبة وأي عدد من معادلات الصلة، أقل عدداً من التوابع المطلوبة في أي حالة مفروضة. إن مسألة تقصي القيم العظمى للتكامل:

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x, y_1, y'_1, \dots, y_n, y'_n)dx \tag{67}$$

خاضعاً لمعادلات الصلة:

$$G_\sigma(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \qquad \left(\sigma = \overline{1, r}\right) \tag{68}$$

وللشروط الحدية:

$$y_i(x_1) = y_i^{(1)} \quad , \quad y_i(x_2) = y_i^{(2)} \quad \left(i = \overline{1, n}\right) \tag{69}$$

تؤدي إلى المعادلات:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{H}}{\partial y'_i} - \frac{\partial \overline{H}}{\partial y_i} = 0 \quad \left(i = \overline{1, n}\right) \tag{70}$$

حيث:

$$\overline{H} = H + \sum_{\sigma=1}^{K} \mu_\sigma(x) G_\sigma \tag{71}$$

وحيث $\mu_\sigma(x)$ هي توابع لـ x.

لقد فرضنا أن واحداً على الأقل من المعينات التابعية من المرتبة r ، المشكلة من المشتقات الجزئية $\frac{\partial G_\sigma}{\partial y_i}$ ، تخالف الصفر وذلك عندما نعوض، من أجل الـ y_i التوابع التي يدرك من أجلها التكامل (67) قيمة عظمى. يطلق عادة على معادلات الصلة (68)، التي لاتحوي مشتقات للتوابع المطلوبة، اسم معادلات الصلة الهولونومية.

ملاحظة هامة: إن التأكيد الوارد أعلاه يبقى صحيحاً من أجل معادلات صلة غير هولونومية من الشكل:

$$G_\sigma(x, y_1, y'_1, ..., y_n, y'_n) = 0 \quad (\sigma = \overline{1, r}) \qquad (72)$$

أي أنه إذا أعطينا بعض الشروط الإضافية، فيجب أن تحقق التوابع y_i ، التي تؤدي إلى قيمة قصوى للتكامل (11) مع معادلة الصلة (72) ، المعادلات التالية:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{H}}{\partial y_i} - \frac{\partial \overline{H}}{\partial y_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \qquad (73)$$

حيث:

$$\overline{H} = H + \sum_{\sigma=1}^{k} \mu_\sigma(x) G_\sigma(x, y_1, y'_1, ..., y_n, y'_n) \qquad (74)$$

إن الجملة (73) تختلف في شيء أساسي واحد عن نظيرتها ذات معادلة الصلة الهولونومية.

لما كانت التوابع (72) تحوي في الحالة الحاضرة y'_i، فستحوي $\frac{\partial H}{\partial y'_i}$ التوابع $\mu_\sigma(x)$، كما ستحوي المعادلات (73) مشتقات $\mu_\sigma(x)$ بالنسبة لـ x.

ولنتذكر أخيراً أن المعادلات (71) و (73) تعطي جملة مؤلفة من $(n+r)$ معادلة تفاضلية ذات $(n+r)$ تابعاً مجهولاً y_i و $\mu_\sigma(x)$، من المرتبة الثانية في y_i ومن المرتبة الأولى في $\mu_\sigma(x)$. لندخل التوابع $z_i(x)$ المعرفة بالعلاقات:

$$z_i(x) = y'_i(x) \quad (i = \overline{1, n}) \qquad (75)$$

وبعد التعويض، تعطي المعادلات (72) r معادلة صلة هولونومية من أجل التوابع y_i و z_i ،بينما تغدو (73) و (75) جملة من $2n$ معادلة من المرتبة الأولى ذات $(2n+r)$ تابعاً y_i و z_i و $\mu_\sigma(x)$. وبعد حل (72) من أجل r من الـ y_i و الـ z_i وبتعويض هذه العبارات في (73) و (75) ، نحصل على $2n$ معادلة من المرتبة الأولى من أجل $2n$ من التوابع y_i و z_i و $\mu_\sigma(x)$. إن الحل العام لهذه الجملة سيحوي $2n$ من الثوابت الكيفية، التي يجب تعيينها من $2n$ شرطاً حدياً.

مثال (4-7) :

لنوجد الآن من بين جميع المنحنيات التي طول كل منها ℓ والواصلة بين نقطتين مفروضتين A و B ، المنحني الذي يحدد مع المستقيم AB مساحة أعظمية.

لنأخذ المستقيم AB كحامل لمحور الـ x وليكن x_1 ، x_2 فصلي النقطتين A و B. ولنفرض أن y ، من أجل المنحني المطلوب، هو تابع لـ x وحيد القيمة في المجال $[x_1, x_2]$، فترجع المسألة عندئذ إلى إيجاد القيمة الأعظمية للتكامل:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx \qquad (76)$$

على أن يحقق معادلات الصلة:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \ell \qquad (77)$$

إن التكامل الأخير يعطي طول المنحني $y(x)$ الواصل بين النقطتين $x = x_1, x = x_2$. ومنحنياته القصوى هي وضوحاً مستقيمات. ويمكن في الحال التحقق من ذلك بتشكيل معادلة أولر لهذا التكامل.

إذا كان $x_2 - x_1 > \ell$ ، عندئذ لايوجد أي منحني يحقق (77).

إذا كان $x_2 - x_1 = \ell$، عندئذ لايتحقق الشرط (77) إلاّ بالمستقيم AB . فليس للمسألة معنى في كلتا الحالتين، لذا سنفرض فيما يلي أن $x_2 - x_1 < \ell$ وبالتالي:

$$\bar{H} = y + \mu\sqrt{1+y'^2}$$

ونلاحظ أن $\bar{H}$ لاتحوي x ، لذا فإن التكامل الأول لمعادلة أولر الموافقة هو :

$$\bar{H} - y'\frac{\partial \bar{H}}{\partial y'} =$$

$$= y + \mu\sqrt{1+y'^2} - \frac{\mu y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = b$$

ومنه:

$$y' = \frac{\sqrt{\mu^2 - (y_\circ - b)^2}}{y - b}$$

أو :

$$\frac{(y-b)dy}{\sqrt{\mu^2 - (y-b)^2}} = dx$$

وبالمكاملة نحصل على :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \mu^2$$

أي أن المنحنيات القصوى هي دوائر أنصاف أقطارها $|\mu|$.

لتكن w الزاوية المركزية (للدائرة من هذه الدوائر) المقابلة لـ AB، فيكون:

$$\ell = \mu w \quad \text{و} \quad x_1 - x_2 = 2\mu \sin\frac{w}{2}$$

وبذلك تتعين w بالمعادلة:

$$\sin\frac{w}{2} : \frac{w}{2} = (x_2 - x_1) : \ell$$

التي لها دوماً حل وذلك بفرض تحقق الشرط السابق. وبالاستعانة بمبدأ التبادل، تستطيع القول إن للقوس الدائري، من بين المنحنيات التي تحدد مساحة معطاة، طولاً ذا قيمة قصوى (وهي وضوحاً قيمة عظمى).

ويُلاحظ أيضاً أن y لن يكون تابعاً لـ x وحيد القيمة عندما $\ell > \dfrac{\pi(x_2 - x_1)}{2}$.

ويمكننا أن نبين، بالاستعانة بالنتيجة التي توصلنا إليها، أنه عندما يحد منحن مغلق مفروض مساحة عظمى، يكون هذا المنحني دائرة.

6- اللاتغاير في معادلات أولر – أوستروغرادسكي:

عندما نبحث عن القيم القصوى لتابع بمتحول واحد $y = g(x)$، يمكننا تغيير المتحول المستقل من x إلى x_0، حيث $x = f(x_0)$ وبفرض أن $f(x_0)$ تابع طردي له مشتق يخالف الصفر. وقاعدة اشتقاق تابع التابع تعطي:

$$\frac{dy}{dx_0} = g'(x)f'(x_0) \tag{78}$$

إن الشرط اللازم من أجل قيمة قصوى في المتحول المستقل الجديد هو:

$$g'(x)f'(x_0) = 0$$

وبما أن $f'(x_0) \neq 0$ فالشرط الجديد يكافئ الشرط السابق $g'(x)=0$.

ويمكن الحصول على دستور مماثل لـ (78) من أجل الطرف الأيسر لمعادلة أولر في مختلف الحالات. وسنشرع باعتبار التابعي البدائي:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y')dx \tag{79}$$

وسندخل بغية الاختصار رمزاً خاصاً من أجل الطرف الأيسر من معادلة أولر:

$$[H]_y = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}$$

وبإدخال المتحول المستقل الجديد x_0، نستطيع أن نكتب ما يلي:

$$H(x, y, y') = H\left[x(x_0), y, \frac{\dfrac{dy}{dx_0}}{\dfrac{dx}{dx_0}}\right] = H_1\left(x_0, y, \frac{dy}{dx_0}\right)$$

ويغدو التكامل I في المتحول المستقل الجديد :

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y')dx = \int_{x_1}^{x_2} H_1\left(x_0, y, \frac{dy}{dx_0}\right)\frac{dx}{dx_0}dx_0$$

ولندخل التابع المجاور $y + e\varphi$ ونجري العمليات المعتادة نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial e}\int_{x_1}^{x_2} H(x, y + e\varphi, y' + e\varphi')dx\bigg|_{e=0} = \int_{x_1}^{x_2} [H]_y\, \varphi\, dx$$

ويمكن أيضاً كتابة هذه العبارة في المتحول المستقل الجديد على الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial e}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} H_1\left(x_0, y + e\varphi, \frac{dy}{dx_0} + e\frac{d\varphi}{dx_0}\right)\frac{dx}{dx_0}dx_0\bigg|_{e=0} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\left[H_1\frac{dx}{dx_0}\right]_y \varphi dx_0$$

وبإضافة النتيجتين اللتين حصلنا عليهما يمكن أن نكتب:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{[H]_y - \left[H_1\frac{dx}{dx_0}\right]_y\frac{dx_0}{dx}\right\}\varphi\, dx$$

وحيث φ كيفي، وبالتالي يكون لدينا اعتماداً على النظرية الأساسية في حساب التحولات :

$$[H]_y = \left[H_1\frac{dx}{dx_0}\right]_y\frac{dx_0}{dx} \tag{80}$$

حيث يجب نشر الرمز في الطرف الأيسر بفرض أن المتحول المستقل هو x_0 ، أي أن :

$$\left[H_1\frac{dx}{dx_0}\right]_y = \frac{dx}{dx_0}\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{d}{dx_0}\left\{H_{1\frac{dy}{dx_0}}\frac{dx}{dx_0}\right\}$$

وكما ذكرنا أعلاه فإن الدستور (80) يماثل تماماً (78) ، في حين أن معادلة أولر $[H_1 dx / dx_0]_y = 0$ تكافئ وضوحاً المعادلة الأولية $[H]_y = 0$. ويمكن تعميم كل ذلك في الحالة التي يكون فيها التابع المكامل حاوياً على عدة توابع مطلوبة.

7- **الأشكال الوسيطية :**

إن الطلب – لدى البحث عن القيم القصوى لتابعي ما – أن يكون للمنحني المطلوب معادلة ظاهرة $y = y(x)$ يحدد المسألة بشكل جوهري، إذ إنه من الممكن أن تقطع المستقيمات الموازية لمحور التراتيب هذا المنحني في أكثر من نقطة.

وفيما يلي سنعتبر الحالة العامة لتمثيل وسيطي للمنحني المطلوب.

لنفترض أن x و y هما تابعان للوسيط t . عندئذ يمكن كتابة (79) من جديد بالشكل :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} H\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) x'\,dt \tag{81}$$

حيث x' , y' هما المشتقان بالنسبة لـ t ثم إن t_1, t_2 هما قيمتا الوسيط المقابلتان لطرفي المنحني. وللتكامل I الشكل (81) من أجل أي وسيط t نختاره. كما يلاحظ أن التابع المكامل لايحوي المتحول المستقل t وهو تابع متجانس من الدرجة الأولى بالنسبة لـ x' , y' .

لنعتبر الآن بشكل عام تكاملاً :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} H(x, y, x', y')\,dt \tag{82}$$

لايحوي تابعه المكامل المستقل t وبحيث يكون هذا التابع تابعاً متجانساً من الدرجة الأولى في x' , y' ، أي أنه يحقق الشرط :

$$H(x, y, Lx', Ly') = LH(x, y, x', y') \tag{83}$$

لنبين أن التكامل (82) يحافظ الآن على الشكل نفسه مهما يكن التعويض من أجل الوسيط t. لهذا ندخل وسيطاً جديداً مثل υ بدلاً من الوسيط t وذلك بوضع $\upsilon = \upsilon(t)$ ، مع الفرض بأن $\upsilon'(t) > 0$ كي تتزايد t مع υ.

وبتحويل (82) إلى المتحول υ نحصل على :

$$I=\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} H\left(x, y, x'_{\upsilon}\,\upsilon'_t\,, y'_{\upsilon}\,\upsilon'_t\right) t'_{\upsilon}\, d\upsilon$$

وبالاستعانة بـ (83) ، يمكن كتابة :

$$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} H(x, y, x'_{\upsilon}\,, \upsilon'_t\, y'_{\upsilon}\, \upsilon'_t) t'_{\upsilon}\, d\upsilon = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} H(x, y, x'_{\upsilon}\,, y'_{\upsilon}) d\upsilon$$

أي أن التكامل (82) يحافظ على شكله الأصلي لدى تغيير الوسيط.

ونلاحظ أن υ'_t يلعب دور L في الدستور (83) ، فيكفي إذن أن نفترض صحة المتطابقة (83) من أجل $L > 0$. وسنفترض تحقق الشرط (83) من أجل التكامل (82).

1-7- الشرط اللازم من أجل قيمة قصوى :

لنفترض أن منحنياً ما ℓ يعطي قيمة قصوى . ولنختر معادلة وسيطية لهذا المنحني ولتكن $x(t)$ ، $y(t)$. ثم نأخذ منحنياً مجاوراً لـ ℓ بالشكل:

$$x(t)+e_1\varphi_1(t) \qquad y(t)+e_2\varphi_2(t)$$

بحيث تكون للنقاط المتقابلة القيمة نفسها للوسيط t . وبتعويض معادلة المنحني المجاور في التكامل (4)، وبجعل كلاً من المشتقين بالنسبة لـ e_1, e_2 مساوياً للصفر في $e_1 = e_2 = 0$، فإننا نستطيع أن نبين أن التابعين $x(t)$ ، $y(t)$ يحققان – مهما يكن اختيار الوسيط t جملة المعادلتين الأولريتين:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial x'} = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial H}{\partial y'} = 0 \end{cases} \qquad (84)$$

إن هاتين المعادلتين لاتحويان الوسيط بشكل ظاهر. وقد يلاحظ بالإضافة إلى ذلك أنه من طبيعة الأشياء كون أحد التابعين $x(t)$ ، $y(t)$ كيفياً.

إذ لو أجرينا تغييراً للوسيط $t(\upsilon)$ ، لحلنا على $x[t(\upsilon)]$ ، $y[t(\upsilon)]$ ، ولما كان اختيار $t(\upsilon)$ كيفياً فيمكننا إذن أن نفترض كون أحدهما تابعاً لـ υ. وإذا أدخلنا ذلك في اعتبارنا فيمكن أن نتوقع بحق أن المعادلتين (84) تختزلان إلى واحدة، وهذا ما سنبرهن عليه . لنشتق طرفي المقابلة:

$$H = x'\frac{\partial H}{\partial x'} + y'\frac{\partial H}{\partial y'}$$

والتي تعبر عن خاصة كون التابع H متجانساً بالنسبة لـ x ، y ، x' ، y' فنحصـــل على:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = x'\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial x'} + y'\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y'};$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = x'\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial x'} + y'\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial y'};$$

$$0 = x'\frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} + y'\frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial y'}; \quad (85)$$

$$0 = x'\frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial y'} + y'\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2};$$

ونجد من المعادلتين الأخيرتين :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 H}{\partial x'^2}}{y'^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 H}{\partial x' \partial y'}}{-x'y'} = \frac{\dfrac{\partial^2 H}{\partial y'^2}}{x'^2} = H_0(x, y, x', y') \quad (86)$$

حيث ترمز H_0 إلى القيمة المشتركة للنسب الثلاث. وبالرجوع إلى المعادلتين (84) فإنه يمكن كتابتهما بعد اشتقاقهما على الشكل:

$$\frac{\partial H}{\partial x} - x'\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial x'} - y'\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x'} - x''\frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} - y''\frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} - x'\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y'} - y'\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial y'} - x''\frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial y'} - y''\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} = 0$$

وبتعويض $\frac{\partial^2 H}{\partial x'^2}$، $\frac{\partial^2 H}{\partial x'\partial y'}$، $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}$ في هاتين المعادلتين وفقاً لـ (86)، و $\frac{\partial H}{\partial x}$ و

$\frac{\partial H}{\partial y}$ وفقاً لـ (85) ، فإنهما تتحولان إلى الشكل التالي :

$$y'T = 0;$$
$$x'T = 0$$

حيث:

$$T = H_0(x, y, x', y')(x'y''-y'x'') + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x'}$$

فإذا افترضنا أن x', y' لايتعدمان معاً، تؤول عندئذ المعادلتان إلى معادلة واحدة.

$$T = H_0(x, y, x', y')(x'y''-y'x'') + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x'} = 0 \qquad (87)$$

ويمكننا أن نضيف إلى هذه المعادلة الوحيدة بالتابعين المطلوبين، والتي تكافئ الجملة (84) ، معادلة تمثل اختيارنا الفعلي للوسيط، فمثلاً، إذا اخترنا t طول القوس σ على المنحني الأقصى ، تكون المعادلة الإضافية $x'^2 + y'^2 = 1$. وبالاستعانة بالعبارة التي تعطي نصف قطر التقوس لمنحن واقع في مستو واحد، يمكن كتابة المعادلة (87) بالشكل التالي :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x'}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}} H_0}$$

وهكذا يمكن تعميم ماجاء ذكره ليشمل تابعيات تعتمد على منحنيات في فراغ ذي n بعداً.

لنأخذ التكامل:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} H(x_1, x'_1, \ldots, x_n, x'_n)\, dt \qquad (88)$$

حيث x_i هي توابع لـ t و x'_i هي مشتقات. وكما فعلنا أعلاه، فإننا نفترض أن H هو تابع متجانس من الدرجة الأولى بالنسبة لـ x'_i.

وهذا التكامل لايتغير في هذه الحالة كيفما غيرنا الوسيط. وكما سبق، فإنه يمكن بسهولة أن نبين أن الشروط اللازمة كي يعطي منحن ما، في فراغ ذي n بعداً $(x_1,...,x_n)$، قيمة قصوى للتكامل (88) تمثل بالمعادلات الأولرية:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial x'_i} = 0 \qquad (89)$$

ونذكر أخيراً أنه يمكن تعميم الدراسة السابقة لتشمل حالة التكاملات المضاعفة.

8- الجيوديزيات في فراغ ذي n بعداً:

ليكن عنصر المسافة (المتري):

$$d\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i\, dx_j \;;\; a_{ij} = a_{ji} \qquad (90)$$

لفراغ حقيقي ذي n بعداً، حيث a_{ij} هي توابع مفروضة، والأكثر من ذلك فهي مستمرة ومشتقاتها الجزئية من المرتبة الأولى. إن طول منحن ما $x_\sigma(t)\left(\sigma=\overline{1,n}\right)$ يعطى بالتكامل:

$$I = \int d\sigma = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x'_i\, x'_j}\, dt \qquad (91)$$

بفرض أن العبارة تحت إشارة الجذر التربيعي هي موجبة من أجل جميع قيمة الـ x'_σ ، x_σ وشريطة أن لاتنعدم جميع الـ x'_σ، أي أننا نفترض أن الشكل التربيعي (90) معرف موجب. هذا ومن الواضح أنه يمكن تبرير فرضية تساوي الأمثال a_{ij}, a_{ji} للجداء نفسه $dx_i dx_j$ أي $a_{ji} = a_{ij}$. عندئذ يمكن أن نعرف الجيوديزيات بأنها المنحنيات القصوى للتكامل (91).

إن هذا المفهوم هو تعميم مباشر لمفهوم الخط الجيوديزي على سطح مفروض.

سنكتب بغية الاختصار ψ عوضاً عن المجموع تحت إشارة الجذر التربيعي:

$$\psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x'_i\, x'_j \tag{92}$$

فتأخذ المعادلات الأولرية من أجل المنحنيات القصوى الشكل التالي:

$$\frac{1}{2\sqrt{\psi}}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{\psi}}\frac{\partial \psi}{\partial x'_i}\right) = 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{93}$$

إن إحدى هذه المعادلات تنتج عن البقية، ويمكن إضافة معادلة أخرى:

$$\psi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,.\, x'_i\, x'_j = 1 \tag{94}$$

لتكن σ قيمة الوسيط t المعرف بهذه المعادلة الإضافية. فينتج مباشرة من (91) أن (94) تكافئ اختيار الوسيط t ليكون طول قوس σ من المنحني في الفراغ ذي n بعداً. وكنتيجة لـ (94)، يمكن تبسيط (93) فتصبح :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{d}{d\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial x'_i} = 0 \qquad \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{95}$$

ويبين بسهولة أن لهذه الجملة الحل:

$$\psi = \text{cons}\tan t$$

إذ إن :

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{dx_i}\, x'_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, x''_i$$

لكن ψ هو كثير حدود متجانس من الدرجة الثانية في x''_i، فلدينا إذن :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x'_i}\, x'_i = 2\psi$$

ومن ثم:

$$2\frac{d\psi}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x'_i}x''_i+\sum_{i=1}^{n}x'_i\frac{d}{d\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x'_i}$$

ونستعين بهذه المعادلة لكتابة عبارة $\frac{d\psi}{d\sigma}$ من جديد على الشكل التالي:

$$\frac{d\psi}{d\sigma}=2\frac{d\psi}{d\sigma}+\sum_{i=1}^{n}x'_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\frac{d}{d\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x'_i}\right)$$

وبالاعتماد على (95) ، نجد أن $\frac{d\psi}{d\sigma}=0$، أي أننا :

$$\psi=\text{constant}$$

ويمثل حل للجملة (95) ، وبإعطاء هذا الثابت الكيفي القيمة واحد نحصل على الشرط الإضافي (94).

9- الشروط الحدية الطبيعية :

لم تعتبر، لدى مناقشة القيم القصوى للتابعي:

$$I=\int_{x_1}^{x_2}H(x,y,y')dx \qquad (96)$$

سوى الشروط الحدية التي يفرضها تثبيت طرفي المنحني المطلوب، أي أننا عينّا كلاً من $y(x_1)$ و $y(x_2)$. والآن سنعالج نوعاً آخر من الشروط الحدية.

لنفترض أننا نبحث عن القيم القصوى للتكامل (96) وأننا ثبتنا الطرف الأيسر للمنحني المطلوب، أي أنه لدينا الشرط الحدي $y(x_1)=y_1$ من أجل الطرف الأيسر، بينما لايوجد أي شرط حدي من أجل الطرف الأيمن باستثناء الشرط البديهي وهو أن هذا الطرف يقع على المستقيم $x=x_2$ الموازي لمحور الـ y .

سنبين الآن أنه في الحقيقة يجب أن يتحقق شرط حدي من هذا الطرف الطليق، الذي نحصل عليه كنتيجة لشرط الحصول على قيمة قصوى للتكامل (96). في الحقيقة، إذا أدى منحن ما إلى قيمة قصوى للتكامل وذلك بالمقارنة مع جميع المنحنيات المجاورة ذات

الأطراف اليمنى الطليقة، فهو يعطي بالأحرى قيمة قصوى لدى تثبيت هذا الطرف. لكن المنحني يجب الآن أن يحقق معادلة أولر، كما بيّنا ذلك سابقاً، أي أنه يجب أن يكون منحنياً أقصى للتكامل (96). لنعود الآن إلى العبارة العامة من أجل التحول الأول للتابعي (96):

$$\delta I = \left[\frac{\partial H}{\partial y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}\right)\delta y\, dx$$

وحيث إن :

$$\delta y = e\varphi(x)$$

وكما جاء سابقاً، يجب أن ينعدم هذا التحول الأول. كما ينعدم الحد الحاوي على التكامل، إذ يجب في هذه الحالة أن يحقق التابع $y(x)$ معادلة أولر، وذلك كما بيّنا منذ قليل. وينعدم الحد الحاوي خارج التكامل في $x = x_1$، حيث إن هذا الطرف مثبت. وهكذا فإن انعدام التحول الأول يكافئ تحقق العلاقة : $\frac{\partial H}{\partial y'}\varphi(x) = 0$ من أجل $x = x_2$. وفي الطرف الطليق، يمكن أن يكون $\varphi(x)$ كيفياً، هكذا فإننا نحصل في النهاية على الشرط الحدي من أجل الطرف الطليق:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial y'}\right|_{x=x_2} = 0 \qquad (97)$$

وهذه المعادلة تعطي علاقة بين y', y في الطرف الطليق. ومن السهل أن نرى أنه من أجل التكامل:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)dx \qquad (98)$$

يصبح الشرط (97) بالشكل:

$$y' = 0$$

أي أنه يؤول هنا إلى الطلب بأن يكون المنحني الأقصى عمودياً على المستقيم $x = x_2$ في الطرف $x = x_1$. ويعرف الشرط الحدي (97) عادةً باسم الشرط الحدي الطبيعي.

إذا أعدنا المناقشة السابقة من أجل التكامل:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y_1, y'_1, \dots, y_n, y'_n)$$

نحصل على الـ n شرطاً حدياً في الطرف الطليق:

$$\frac{\partial H}{\partial y'_i} = 0 \qquad \left(i = \overline{1, n}\right)$$

والآن لندخل في اعتبارنا تكاملاً يحوي مشتقات من المرتبة الثانية:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y', y'')dx$$

ومن حقيقة كون $\varphi(x)$ و $\varphi'(x)$ كيفيين، نحصل على الشرطين الحديين الطبيعيين التاليين في الطرف الطليق:

$$\frac{\partial H}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y''} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial y''} = 0$$

ونشير هنا إلى أن أول هذين الشرطين يعين الصلة بين y, y', y'', y''' في الطرف الطليق.

وبالمثل فإنه في حالة التكامل الثنائي:

$$I = \iint_D H\left(x, y, u, u_x, u_y\right)dxdy$$

تأخذ الشروط الحدية على المحيط Γ الشكل التالي:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\frac{dy}{d\sigma}-\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial y}\frac{dx}{d\sigma}=0$$

وذلك بفرض أن σ هو طول قوس على المحيط ℓ. وهذا ينتج مباشرة من (25) وذلك من أجل التحول الأول للتكامل الأخير .

10- عبارة التحول الأول :

ليكن لدينا التكامل :

$$I=\int_{x_1}^{x_2} H(x,y,y')dx \tag{99}$$

ولنفترض الآن أن المنحنيات المجاورة $y(x,e)$ تحوي الوسيط e في أي شكل كان. شريطة حصولنا بوضع $e=0$ على المنحني الأساسي $y(x)=y(x,0)$ الذي نحسب من أجله تحول التكامل. ولندخل في (99) منحن متحول مجاور وذلك بفرض أن نهايتي التكامل تابعان لـ e:

$$I(e)=\int_{x_1(e)}^{x_2(e)} H\left[x,y(x,e),y_x(x,e)\right]dx \tag{100}$$

حيث نحصل بتعويض $e=0$ على التابع ونهايتي التكامل (99) :

$$y(x,0)=y(x);x_1(0)=x_1;x_2(0)=x_2$$

وحسب التعريف العام للتحول كجداء لـ e بالمشتق بالنسبة لـ e يمكننا أن نكتب:

$$\delta x_1=\left.\frac{dx_1(e)}{de}\right|_{e=0}e \quad ; \quad \delta x_2=\left.\frac{dx_2(e)}{de}\right|_{e=0}e$$

$$\delta y=\left.\frac{\partial y(x,e)}{\partial e}\right|_{e=0}e \quad ; \quad \delta y'=\frac{\partial}{\partial e}\left[\frac{\partial y(x,e)}{\partial x}\right]_{e=0}e=$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial y(x,e)}{\partial e}\right]_{e=0}e=\frac{d}{dx}\left[y'(0)e\right]=\frac{d}{dx}\delta y$$

وذلك بفرض أن لـ $y(x,e)$ مشتقات مستمرة حتى المرتبة الثانية. وباشتقاق التكامل (100) بالنسبة لـ e ثم بتعويض $e = 0$ فيه نحصل، بعد ضربه بـ e ، على العبارة التالية للتحول الأول للتكامل :

$$\delta I = \left[H(x, y, y').\delta x\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial H}{\partial y}\delta y + \frac{\partial H}{\partial y'}\delta y'\right)dx \qquad (101)$$

لنحول الحد الثاني كالمعتاد عن طريق التكامل بالتجزئة:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial H}{\partial y'}.\delta y'\right)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y dx =$$

$$= \frac{\partial H(x, y_2, y'_2)}{\partial y'}(\delta y)_2 - \frac{\partial H(x, y_1, y'_1)(\delta y)_1}{\partial y'} -$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} \delta y . \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} dx \qquad (102)$$

حيث $(\delta y)_2 , (\delta y)_1$ هما القيمتان الحديتان لتحول التابع y :

$$(\delta y)_i = \left[\frac{\partial f(x_i , e)}{\partial e}\right]_{e=0} .e \qquad (i = 1,2) \qquad (103)$$

سنجد الآن التحول الأول لترتيبي طرفي المنحني، وسنجري العمليات اللازمة فقط من أجل الترتيب y_2 للطرف الأيمن منه.

من الواضح أن :

$$y_2 = f\left[x_2(e), e\right]$$

عندما تتحول e فإن كلتا العمدتين للتابع f تتحولان معاً، وليس للثانية وحدها كما كانت الحالة عندما عينا $(\delta y)_2$، وهكذا يكون التحول الأول δy_2 للترتيب y_2:

$$\delta y_2 = \left[\frac{d}{de} f\left[x_2(e), e\right]\right]_{e=0} .e =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} . \frac{dx_2}{de}\right]_{e=0} .e + \left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{e=0} .e =$$

$$= y'_2\,\delta x_2 + (\delta y)_2 \qquad (104)$$

حيث y'_2 هو ميل المماس للمنحني في طرفه الأيمن. وبالمثل فإننا نحصل على التحول δy_1 لترتيب الطرف الأيسر:

$$\delta y_1 = y'_1\,\delta x_1 + (\delta y)_1 \qquad (105)$$

وبتعويض العبارتين (104) و (105) من أجل $(\delta y)_2$، $(\delta y)_1$ في (102) نحصل على العبارة النهائية من أجل التحول الأول للتكامل (99):

$$\begin{aligned}\delta I = &\left[H(x_2, y_2, y'_2) - y'_2\frac{\partial H}{\partial y'}(x_2, y_2, y'_2)\right]\delta x_2 + \\ &+ \frac{\partial H(x_2, y_2, y'_2)}{\partial y'}\delta y_2 - \Big[\quad H(x_1, y_1, y'_1) - \\ &- y'_1\frac{\partial H(x_1, y_1, y'_1)}{\partial y'}\Big]\delta x_1 - \frac{\partial H(x_1, y_1, y'_1)}{\partial y}\delta y_1 + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}\right)\delta y\,dx\end{aligned}$$

أو :

$$\delta I = \left[\left(H - y'\frac{\partial H}{\partial y'}\right)\delta x + \frac{\partial H}{\partial y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}\right)\delta y\,dx \qquad (106)$$

إن الطرف الأيمن لـ (106) هو تابع خطي في δx_i، δy_i ويحافظ على معناه عندما تعتمد المنحنيات المجاورة على عدة وسطاء، ويفهم التحول الأول في هذه الحالة كالتفاضل الكلي بالنسبة للوسطاء معيناً بقيمها الابتدائية، أي :

$$\delta I = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial I}{\partial e_i}\right)_{e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 0} . e_i$$

عندما نحصل على المنحني المطلوب من جماعة من المنحنيات تعتمد على n وسيط مع $e_i = 0\left(i = \overline{1, n}\right)$.

نتيجة هامة : إن الشرط اللازم كي يبلغ التابعي قيمة قصوى على منحن أو سطح مفروضتين هو أن يكون التحول الأول مساوياً الصفر.

11- القيم القصوى وحيدة الطرف :

لقد عالجنا في (2-4) المسألة التالية :

يطلب إيجاد المنحني من بين المنحنيات الواصلة بين النقطتين M_2, M_1 في المستوي xoy والذي يولد السطح الأصغر مساحة وذلك عندما يدور حول المحور ox.

إن للتابعي الموافق لهذه المسألة الشكل التالي:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

وبصورة دقيقة ، علينا أن نشترط أن المنحني $y(x)$ واقع فوق 0x ، وهذا يعني تحقق المتراجحة $y(x) \geq 0$.

نطلق في حساب التحولات اسم مسائل القيم القصوى وحيدة الطرف على المسائل التي تخضع فيها التوابع أو مشتقاتها لمتراجحات معينة.

لنأخذ المسألة الابتدائية الخاصة بإيجاد القيم القصوى للتابعي:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y')dx$$

شريطة خضوعه لشرط إضافي من الشكل:

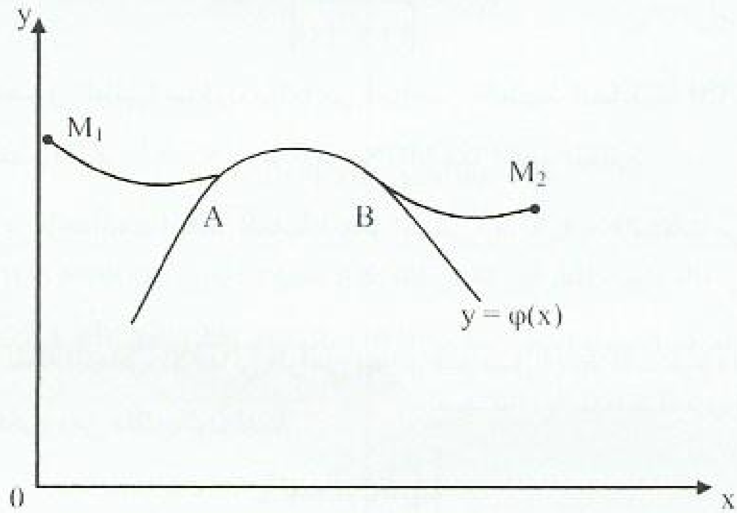
$$y - \varphi(x) \geq 0$$

حيث $\varphi(x)$ تابع مفروض له مشتق مستمر. أو بعبارة أخرى، إن المنحني $y(x)$ يجب أن يقع فوق المنحني $y = \varphi(x)$. وبالإضافة إلى ذلك فإن المنحني المطلوب يجب أن يمر من النقطتين المفروضتين $M_2(x_2, y_2), M_1(x_1, y_1)$.

وقد يتألف المنحني المطلوب من أجزاء واقعة فوق المنحني $y=\varphi(x)$ وأجزاء من هذا المنحني الأخير.

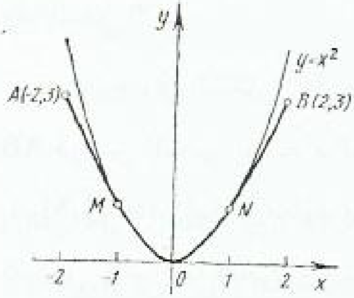
ويوجد في الشكل التالي جزءان (BM_2, M_1A) واقعان فوق المنحني، والجزء AB هو من المنحني نفسه. فالتحول ثنائي الطرف هو ممكن من أجل الجزءين BM_2, M_1A، وكما هو معلوم، فإن هذين الجزءين يجب أن يكونا منحنيين أقصيين للتكامل الأخير. أما التحول وحيد الطرف، الذي من أجله $\delta y \geq 0$، فهو ممكن على الجزء AB فقط. وبالتالي نستطيع القول إن الشرط اللازم من أجل الحصول على قيمة صغرى لهذا التكامل هو أن تتحقق على طول AB المتراجحة التالية:

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} \geq 0$$



ويوجد بالإضافة إلى ذلك، شروط معينة يتوجب تحققها في النقطتين A و B من أجل وجود قيم قصوى، وسنكتفي بالقول إن هذا الشرط يؤول في الحالة الابتدائية إلى أن للمنحنيين BM_2, M_1A مماساً مشتركاً مع المنحني AB في النقطتين A و B.

مثال (8-4):



أوجد أقصر طريق يصل النقطة $A(-2,3)$ بالنقطة $B(2,3)$ والمحدد بالمنطقة :

$$y \le x^2$$

الحل: إن المسألة تؤول لإيجاد القيم القصوى للتابعي:

$$J[y] = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$$

لدينا:

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\left[1 + y'^2(x)\right]^{3/2}} \neq 0$$

والقيم القصوى المطلوبة ستكون مؤلفة من أجزاء من الخطوط المستقيمة AM و NB المماسة للقطع المكافئ $y = x^2$ ، ومن الجزء MON لهذا القطع المكافئ.

لنرمز لإحداثيات النقاط المماسة (نقاط التماس) بـ $\bar{x}, \bar{x}$ − (استفدنا من تناظر المسألة).

في نقطة التماس، الإحداثي الرأسي يتطابق مع ميل الخط المستقيم والمماس للقطع المكافئ، ومن ذلك يكون لدينا:

$$C_1 + C_2\bar{x} = \bar{x}'^2$$
$$C_2 = 2\bar{x}$$

ومن جهة ثانية، المماس يجب أن يمر بالنقطة $B(2,3)$ ومنه $C_1 + 2C_2 = 3$.

وبحذف C_1 و C_2 من العلاقتين السابقتين نجد :

$$\bar{x}^2 - 4\bar{x} + 3 = 0$$

وبالتالي:

$\bar{x}_2 = +3$ و $\bar{x}_1 = 1$

القيمة الثانية لـ $\bar{x}$ غير مناسبة، ولذلك نجد : $\bar{x} = 1$

وبالتالي فإن:

$C_2 = 2$ و $C_1 = -1$

والقيم القصوى المطلوبة هي :

$$y = \begin{cases} -2x-1 & \text{if} \quad -2 \le x \le -1, \\ x^2 & \text{if} \quad -1 \le x \le 1 \\ 2x-1 & \text{if} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

واضح بأنها القيم الصغرى للتابعي .

12- التحول الثاني :

لنعالج التابعي البدائي :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y')dx \tag{107}$$

في حالة تثبيت الطرفين. نعتبر كالمعتاد المنحنيات المجاورة : $y(x) + e\varphi(x)$ ، عندئذ يمكن أن نعرف التحول الثاني للتابعي (107) بأنه الحد الحاوي على e^2 في منشور $I(e)$ حسب قوى e المتصاعدة، أي أننا نضع :

$$e^2 I = \frac{e^2}{c}\left[\frac{d^2 I}{de^2}\right]_{e=0}$$

وهذا يؤدي مباشرة إلى الدستور :

$$\delta^2 I = \frac{e^2}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\varphi^2 + 2\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial y'}\varphi\varphi' + \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}\varphi'^2\right)dx \tag{108}$$

وبما أن :

$$2\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial y'}\varphi\varphi' = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial y'}\frac{d(\varphi^2)}{dx}$$

فإننا نحصل بالتكامل بالتجزئة والاستعانة بحقيقة كون $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$ على :

$$\delta^2 I = \frac{e^2}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial y'}\right)\varphi^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}\varphi'^2\right]dx \qquad (109)$$

لنفترض تحقق الشرط اللازم من أجل الحصول على قيمة قصوى، أي أن $y(x)$ هو منحن أقصى. وسنتكلم، بغية التحديد، عن نهاية صغرى للتكامل (107).

ويجب أن يكون للتابع $I(e)$ قيمة صغرى في $e = 0$ ، لذا فإن الشرط اللازم من أجل قيمة صغرى هو أن يكون $\delta^2 I \geq 0$، من أجل أي اختيار لـ $\varphi(x)$.

وسنبين في الحال أنه ينتج من هذا مباشرة وجوب تحقق المتراجحة التالية:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} \geq 0$$

على طول المنحني المفروض.

وبما أن : $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}$ قد افترض مستمراً، فتتحقق المتراجحة على مجال صغير بقدر كاف $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$.

لنعرف الآن التابع $\varphi(x)$ بحيث أنه ينعدم في طرفي هذا المجال وخارجه، ويكون له جميع المشتقات اللازمة وبالإضافة إلى كونه صغيراً كفاية بالقيمة المطلقة في المجال فإنه يقوم باهتزازات سريعة إلى حد ما .

بهذا الاختيار لـ $\varphi(x)$ ، يؤول التكامل (109) إلى التكامل على المجال المغلق $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ ، الذي يكون فيه لـ $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}$ قيماً سالبة بالفرض.

إن الحد المسيطر تحت إشارة التكامل هو الحد الذي يحوي $\varphi'^2(x)$، فينتج عن ذلك كون التكامل سالباً، الأمر الذي يتناقض مع الشرط اللازم المذكور أعلاه من أجل

قيمة صغرى للتكامل (107). وهكذا فإن الشرط اللازم كي يجعل المنحني الأقصى $y(x)$ للتكامل (107) أصغرياً هو كون :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} \geq 0 \tag{110}$$

على طول هذا المنحني الأقصى، ونرى بالمثل أن الشرط اللازم كي يجعل المنحني الأقصى $y(x)$ التكامل (107) أعظمياً هو كون :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} \leq 0 \tag{111}$$

على طول هذا المنحني الأقصى.

وتعرف هذه الشروط باسم شروط لوجاندر.

الآن لنفترض تحقق شرط أقوى من الشرط (110)، وهو $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} > 0$ ، على طول المنحنيات القصوى. عندئذ نطلق على هذا الشرط اسم شرط لوجاند المقوى.

13- القيم القصوى الضعيفة والقوية:

نقول إن منحنياً أقصى $y(x)$ يؤدي إلى قيمة قصوى ضعيفة للتكامل (107) إذا أعطى التكامل قيمة قصوى بالمقارنة مع كل المنحنيات الواقعة في جوار له من المرتبة الأولى معين بـ ε ، أي أن المنحنيات هي قريبة كفاية بالنسبة للترتيب ولميل المماس. وإذا أعطى منحن أقصى التكامل قيمة قصوى بالمقارنة مع كل المنحنيات الواقعة في جوار له من المرتبة صفر معين بـ ε (قريبة فقط بالنسبة للترتيب) : فيقال إن المنحني الأقصى يعطي التكامل قيمة قصوى قوية. ومن الواضح أن كل قيمة قصوى قوية هي أيضاً قيمة قصوى ضعيفة، لكن العكس غير صحيح دائماً.

14- القيم القصوى المطلقة:

ليكن لدينا التابعي:

$$I(y)=\int_{0}^{\ell}\left[p(x)y'^2+q(x)y^2+2r(x)y\right]dx \tag{112}$$

حيث $p(x)$ ، $q(x)$ ، $r(x)$ توابع مستمرة في المجال المغلق $[0,\ell]$ ، وبفرض أن لـ $p(x)$ مشتقاً مستمراً وأن :

$$p(x)>0 \quad , \quad q(x)\geq 0 \tag{113}$$

لنبحث في الصف B للتوابع $y(x)$ ، المستمرة مع المشتق $y'(x)$ في المجال $[0,\ell]$ والتي تحقق الشرطين الحديين:

$$y(0)=C_1 \ , \ \ y(\ell)=C_2 \tag{114}$$

عن التابع الذي يجعل (112) أصغرياً.

إن لمعادلة أولر من أجل هذا التابعي الشكل:

$$\frac{d}{dx}[p(x)y']-q(x)y=r(x) \tag{115}$$

وسنبين أنه ، إذا تحقق الشرطان (113) ، فإن لهذه المعادلة حلاً يحقق الشرطين (114) في المجال $[0,\ell]$ ، وهذا الحل وحيد.

ليكن $z_1(x),z_2(x)$ حلين للمعادلة المتجانسة:

$$\frac{d}{dx}[p(x)z']-q(x)z=0 \tag{116}$$

يحققان الشروط الابتدائية :

$$z_1(0)=0 \ , \ \ z'_1(0)=1$$
$$z_2(\ell)=0 \ , \ \ z'_2(\ell)=1$$

إذا تذكرنا أن $p(x)>0$ فإن نظرية الوجود وحدانية الحل تضمن وجود مثل هذه الحلول في كل المجال $[0,\ell]$. وسنبين أيضاً أن : $z_1(c_2)\neq 0$.

وهذا يكافئ الحقيقة بأنه ليس للمعادلة المتجانسة (116) حلول، باستثناء الحل المطابق للصفر، تنعدم في $x = 0$ ، $x = \ell$. والآن، من الواضح أن $z_2(0) \neq 0$ والحلين $z_1(x), z_2(x)$ مستقلان خطياً.

إن الحل العام لـ (115) الشكل :

$$y_1(x) = A_1 z_1(x) + A_2 z_2(x) + g(x)$$

حيث A_1, A_2 ثابتان كيفيان و $g(x)$ حل خاص ما للمعادلة (115)، ويضمن وجود هذا الحل في المجال $[0, \ell]$ بالاعتماد على نظرية الوجود مع $p(x) > 0$. والشرطان الحديان (114) يؤديان إلى المعادلتين:

$$\begin{cases} A_1 z_1(\ell) + g(\ell) = C_2 \\ A_2 z_2(0) + g(0) = C_1 \end{cases}$$

اللتين تعينان A_1, A_2 بطريقة وحيدة. وبذا نحصل على حل وحيد $y(x)$ للمعادلة (115) يحقق الشرطين الحديين (114)، وذلك أن هذا الحل ومشتقاته حتى المرتبة الثانية هي مستمرة معاً في المجال $[0, \ell]$.

ويبقى علينا أن نبين أن $z_1(\ell) \neq 0$. وباستبدال z بـ $z_1(x)$ فإن المعادلة (116) تكتب من جديد على الشكل التالي :

$$\frac{d}{dx}[p(x) z'_1] = q(x) z_1 \qquad (117)$$

وبفضل الشرطين $z_1(0) = 0$ ، $z'_1(0) = 1$ فإن التابع $z_1(x)$ ومشتقاته تبقى موجبة من أجل قيم x القريبة كفاية من $x = 0$.

وبالتالي فإن كلا الطرفين غير سالب من أجل هذه القيم لـ x ، ولذا فإن $p(x) z'_1$ الموجبة من أجل $x = 0$ ، لايمكن أن تتناقص من أجل قيم x القريبة كفاية من $x = 0$ ، وحسب (117) يمكن أن تبدأ بالتناقص فقط بعد أن يصبح $z_1(x)$ سالباً.

ولكن كي يكون $z_1(x)$ سالباً، يجب أن يكون مشتقه $z'_1(x)$ سالباً، أي يجب أن يكون $p(x)z'_1$ سالباً، وبالتالي فإننا نقع في تناقض، وعليه يمكننا أن نؤكد أن $0<z_1(x)$ من أجل $0<x\leq \ell$.

إن الحل $y_1(x)$ للمعادلة (115) التي حصلنا عليه أعلاه ينتمي إلى الصف C_2. وسنبين أنه يجعل التكامل (112) أصغرياً، أو بتحديد أكثر، سنبين أن $I(y)\geq I_1(y_1)$، حيث y تابع ما من الصف B، وتتطبق المساواة في الحالة، وفقط في الحالة التي يكون فيها $y(x)$ مطابقاً لـ $y_1(x)$.

إن كل تابع $y(x)$ من الصف B يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$y(x)=y_1(x)+\varphi(x)$$

حيث $\varphi(x)$ تابع مستمر مع مشتقه في المجال $[0,\ell]$ وينعدم في طرفي المجال. ولدينا:

$$I(y)-I(y_1)=2\int_0^\ell \left[p(x)y'_1\varphi'+q(x)y_1\varphi+\right.$$

$$\left.+r(x)\varphi\right]dx+\int_0^\ell \left[p(x)\varphi'^2+q(x)\varphi^2\right]dx$$

فإذا أدخلنا في اعتبارنا خواص $\varphi(x), y_1(x)$ استطعنا المكاملة بالتجزئة في التكامل الأول:

$$I(y)-I(y_1)=2\int_0^\ell \left[-\frac{d}{dx}\left[p(x)y'_1\right]+q(x)y_1+r(x)\right]\varphi dx+$$

$$+\int_0^\ell \left[p(x)\varphi'^2+q(x)\varphi^2\right]dx+p(x)y'_1\varphi\Big|_{x=0}^{x=\ell}$$

ومن ثم نظراً لكون $y_1(x)$ حلاً للمعادلة (115) وأن $\varphi(0)=\varphi(\ell)=0$، نحصل بوساطة (113) على:

$$I(y)-I(y_1)=\int_0^\ell \left[p(x)\varphi'^2+q(x)\varphi^2\right]dx\geq 0$$

حيث تنطبق إشارة المساواة فقط في الحالة يكون فيها $\varphi(x)=0$. إذ إنه إذا كان لدينا إشارة مساواة، فيجب أن يكون $\varphi'(x)=0$، أي أن $\varphi(x)$ هو ثابت في المجال $[0,\ell]$. لكن $\varphi(0)=0$ إذاً $\varphi(0)=0$ في كل المجال. وهكذا نكون قد برهنّا على ما أكدنا عليه، أي أن التابعي (112) يجعل أصغرياً في الصف B بـ $y_1(x)$ وبه فقط. ونلاحظ أننا اشترطنا بالنسبة لتوابع الصف B فقط وجود واستمرار المشتق، بينما يجب أن يكون للتابع $y_1(x)$، الذي يجعل التابعي (112) أصغرياً، مشتقاً مستمراً من المرتبة الثانية.

مثال (4-9)- يطلب إيجاد قيمة للتابعي :

$$I=\int_{-1}^{1} x^2 y'^2\,dx \tag{118}$$

في الصف B للتوابع المستمرة $y(x)$ التي لها مشتق مستمر في المجال $[-1, 1]$ والتي تحقق الشرطين الحديين:

$$y(-1)=C_1\ ,\quad y(1)=C_2 \tag{119}$$

حيث $C_1 \neq C_2$. ونظراً للشرط الأخير، فإن الصف B لايحوي أي ثابت، وبذلك يكون $I(y)>0$ من أجل أي تابع من B، وعليه فإن مجموعة الأعداد $I(y)$ حداً أدنى هو الصفر كما سنبين في الحال.

نرى بسهولة أن التابع :

$$y=\frac{C_1+C_2}{2}+\frac{C_2-C_1}{2}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}} \tag{120}$$

ينتمي إلى الصف B من أجل أي عدد موجب ε . ولدينا :

$$y'=\frac{C_2-C_1}{2\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}}\cdot\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

لذا ، فإنه من أجل التابع (120) :

$$I(y) < \int_{-1}^{1} \left(\varepsilon^2 + x^2\right) y'^2 \, dx =$$

$$= \frac{\varepsilon^2 (C_2 - C_1)^2}{4 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon (C_2 - C_1)^2}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}$$

إن الطرف الأيمن ينتهي إلى الصفر عندما $\varepsilon \to 0$، وبالتالي فمن الواضح أن الحد الأدنى الصرف لقيم التابع (118) في الصف B هو الصفر. بما أن الصف B لايحوي أي ثابت، فإن $I(y) > 0$ من أجل أي تابع من B، حسبما أشرنا إليه أعلاه، ومن ثم فلايمكن الوصول في الصف B إلى الحد الأدنى لـ $I(y)$ ، وعليه فليس للتابعي (118) قيمة دنيا في هذا الصف.

تمارين محلولة

1- حدد المنحني الذي يمكن التابعي:

$$J[y(x)]=\int_0^1 \left(y'^2+12xy\right)dx$$

من الوصول إلى قيمة قصوى، مع العلم أنه يحقق الشروط : $y(1)=1$ $\quad$ $y(0)=0$

الحل :

إن معادلات أولر : $\quad y''-6x=0$

والتي حلها العام :

$$y=x^3+c_1x+c_2$$

وبتحقيق شروط البدء نجد :

$$c_1=0 \quad , \quad c_2=0$$

وبالتالي فالمنحني المطلوب هو :

$$y=x^3$$

والقيمة القصوى التي يبلغها التابعي هي:

$$J[y(x)]=\frac{21}{5}$$

2-أوجد معادلة أولر – اوستروغرادسكي للتابعي:

$$J[z(x,y)]=$$
$$=\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-2zf(x,y)\right]dxdy$$

الحل:

لدينا:

$$F=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-2zf(x,y)$$

و :

$$-2f(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=0$$

أو بالشكل :

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=f(x,y)$$

وتكتب العلاقة الأخيرة بالشكل المختصر :

$$\Delta\Delta z=f(x,y)$$

3- ليكن التابعي:

$$I[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

والمحقق للشروط :

$$y(x_0)=y_0 \quad , \qquad y(x_1)=y_1$$

إن :

$$F=y^2$$

إذن فمعادلة أولر هي : $F_y=2y$ ومنه $y=0$.

وحتى يمر المنحني $y=0$ من النقطتين الحديتين يجب أن نعتبر أن $y_0=0$ و $y_1=0$ وبالتالي فإن التابع $y=0$ يعطي للتابعي قيمة قصوى أصغرية.

4- ليكن:

$$I[y(x)]=\int_0^1 \left(y^2+x^2y'\right)dx\,,\; y(0)=0\,,\; y(1)=a$$

الحل:

نلاحظ أن معادلة أولر تملك الشكل التالي :

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

أو :

$$y-x=0$$

والشرط الحدي $y(0)=0$ محقق بالتأكيد، بينما نلاحظ أن الشرط الحدي الثاني محقق فقط عندما $a=1$ وفي حالة $a\neq 1$ فإن القيم القصوى غير موجودة.

5- لنعين المنحني الواصل بين النقطتين M_2, M_1 في المستوي xoy بحيث يشكل سطحاً ذا مساحة صغرى عند تدويره حول المحور 0x.

إن مساحة هذا السطح الدوراني تعطى بالشكل:

$$S=2\pi\int_{M_1}^{M_2} y\,d\sigma=$$

$$=2\pi\int_{M_1}^{M_2} y\sqrt{dx^2+dy^2}=2\pi\int_{M_1}^{M_2} y\sqrt{1+y'^2}$$

وبغض النظر عن العامل 2π ، تصبح المسألة هي إيجاد القيمة القصوى للتكامل:

$$I=\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

وبما أن التابع المكامل هنا لايحوي x فيمكننا كتابة الحل لمعادلة أولر بالشكل:

$$F-\frac{\partial F}{\partial y'}y'=C$$

أي أن :

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$$

$$y\left(1+y'^2-y'^2\right)=C_1\sqrt{1+y'^2}$$

$$y=C_1\sqrt{1+y'^2}$$

$$y^2=C_1^2+C_1^2y'^2$$

ومنه :

$$y'^2 = \frac{y^2 - C_1^2}{C_1^2}$$

وبالمكاملة نجد :

$$x = C_1 \ln\left(y + \sqrt{y^2 - C_1^2} \right) - C_1 \ln C_1 + C_2$$

أو :

$$y + \sqrt{y^2 - C_1^2} = C_1 e^{\frac{x - C_2}{C_1}}$$

وأخيراً :

$$y = \frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x-C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x-C_2}{C_1}} \right) = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$$

إذن :

$$y = \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$$

فالمنحنيات القصوى هي إذن سليسلات محاورها التناظرية موازية للمحور oy.

هذا ومن الممكن أن نبين، بالنسبة للمسألة الحالية، أنه لايوجد دوماً منحن أقصى يمر من نقطتين مفروضتين M_1 و M_2. فقد يمرر منحن أو أكثر وقد لايمر أي منحن وذلك تبعاً لأوضاع هاتين النقطتين.

6- يطلب تعيين وضع التوازن تحت تأثير الجاذبية الأرضية لوتر ثقيل متجانس طوله ℓ وطرفاه مثبتان.

لنعتبر أن الجاذبية متجهة بالاتجاه السالب لمحور التراتيب. يعين وضع التوازن من شرط كون مركز ثقل الوتر في أخفض وضع ممكن. وسنعتبر أنه من الواضح أن أي

مستقيم موازٍ لمحور التراتيب لايقطع الوتر في أكثر من نقطة واحدة. فترجع المسألة إذن إلى إيجاد القيم القصوى للتكامل:

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,d\sigma = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

على أن يخضع لمعادلات الصلة:

$$\sqrt{1+y'^2}\,dx = \ell \qquad (121)$$

وللشروط الحدية:

$$y(x_1) = y_1 \qquad y(x_2) = y_2$$

وهنا :

$$\overline{H} = y\sqrt{1+y'^2} + \mu\sqrt{1+y'^2}$$

فيغدو التكامل الأول لمعادلة أولر :

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\mu)^2 - a^2}} = \frac{dx}{a}$$

أو :

$$\frac{y+\mu}{\sqrt{1+y'^2}} = a$$

لنضع :

$$y + \mu = a\,\mathrm{ch}\,z = a\frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

فتحل المعادلة بسهولة وتعطي:

$$y + \mu = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a} + b\right) = a\frac{e^{\frac{x}{a}+b} + e^{-\frac{x}{a}-b}}{2} \qquad (a > 0)$$

أي أن الأوضاع القصوى هي سلبسلات.

هذا ويجب أن تعين الثوابت μ, b, a من الشرطين الحديين:

$$y_1 + \mu = a\,ch\left(\frac{x_1}{a} + b\right)$$

$$y_2 + \mu = a\,ch\left(\frac{x_2}{a} + b\right)$$

وكذلك الشرط (121).

بطرح أحد الشرطين الحديين من الآخر وبتحويل الفرق بين جيوب التمام الزائدية نحصل على :

$$y_2 - y_1 = 2a\,sh\,\mu_0\,sh\,\mu_1 \qquad (122)$$

حيث:

$$\mu_0 = \frac{x_2 + x_1}{2a} + b \quad , \quad \mu_1 = \frac{x_2 - x_1}{2a}$$

وبعد تعويض y ، التي حصلنا عليها في الشرط (121) فإنه يصبح:

$$a\left[sh\left(\frac{x_2}{a} + b\right) - sh\left(\frac{x_1}{a} + b\right)\right] = \ell$$

أو :

$$2a\,ch\,\mu_0\,sh\,\mu_1 = \ell \qquad (123)$$

وبالاستناد إلى (122) نحصل على :

$$th\,\mu_0 = \frac{y_2 - y_1}{\ell} \qquad (124)$$

وبما أن العدد ℓ يجب أن يحقق وضوحاً المتراجحة :

$$\ell > \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} > |y_2 - y_1|$$

فإن للمعادلة (124) جذراً وحيداً، ونحصل من (123) و (122) على أن :

$$\sqrt{\ell^2 - (y_2 - y_1)^2} = 2a\,sh\,\mu_1$$

أو :

$$\frac{\operatorname{sh}\mu_1}{\mu_1}=\frac{\sqrt{\ell^2-(y_2-y_1)^2}}{x_2-x_1} \tag{125}$$

لكن:

$$\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots$$

تابع طردي يتزايد من 1 إلى $(+\infty)$ من أجل $0\leq x<\infty$.

وبالتالي فللمعادلة (125) جذر موجب وحيد. وبعد أن أوجدنا μ_1 ، μ_0، فليس هناك أي صعوبة في الحصول على a و b و μ .

7- أوجد القيم القصوى في المسألة الايزوبريمترية للتابعي التالي:

$$J[y(x),z(x)]=\int_0^1\left(y'^2+z'^2-4xz'-4z\right)dx$$

$$y(0)=0\ ,\ z(0)=0\ ,\ y(1)=1\ ,\ z(1)=1$$

والتحقق للشرط :

$$\int_0^1\left(y'^2-xy'-z'^2\right)dx=2 \tag{126}$$

الحل: نُشكل التابعي المساعد :

$$\phi=\int_0^1\left[y'^2+z'^2-4xz'-4z+\lambda\left(y'^2-xy'-z'^2\right)\right]dx$$

ومن أجل ذلك ، نكتب المجموعة الآتية لمعادلات أولر :

$$\frac{d}{dx}(2y'+2\lambda y'-\lambda x)=0$$

$$4+\frac{d}{dx}(2z'-4x-2\lambda z')=0$$

بحل هذه المجموعة، نجد أن:

$$y(x)=\frac{\lambda x^2+2c_1x}{4(1+\lambda)}+c_2$$

$$z(x)=\frac{c_3x}{2(1-\lambda)}+c_4$$

من الشروط الحدية نجد :

$$c_1=\frac{3\lambda+4}{2}\ ,\ c_2=0\ ,\ c_3=2(1-\lambda),\ c_4=0$$

وبالتالي:

$$y(x)=\frac{\lambda x^2+(3\lambda+4)x}{4(1+\lambda)}$$

$$z(x)=x$$

ولإيجاد λ ، نستفيد من الشرط الايزوبرمتري (126) :

عندما:

$$z'(x)=1\qquad ,\qquad y'(x)=\frac{2\lambda x+3\lambda+4}{4(1+\lambda)}$$

وبالتالي نجد :

$$\int_0^1\left[\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)^2}{16(1+\lambda)^2}-\frac{(2\lambda x+3\lambda+4)}{4(1+\lambda)}-1\right]dx=2$$

ومنه، وبإجراء عدة حسابات بسيطة نحصل على معادلة لتحديد λ :

$$\frac{1}{3}\left(23\lambda^2+46\lambda+24\right)=48\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)$$

وبالتالي:

$$\lambda_2=-\frac{12}{11}\qquad ,\qquad \lambda_1=-\frac{10}{11}$$

بالتعويض في (126) ، نستنتج بأن λ_2 لاتحقق الشرط الايزوبرمتري، بينما λ_1 تحقق.

إذن، القيم القصوى المطلوبة هي :

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{7x-5x^2}{2} \\ z(x)=x \end{cases}$$

8- أوجد الحد الأدنى للتكامل :

$$J[y]=\int_0^{\pi} y'^2(x)dx$$

والحقق للشروط :

$$\int_0^{\pi} y^2(x)dx=1\ ،\ y(0)=y(\pi)=0$$

الحل:

نُشكل التابعي المساعد:

$$L[y]=\int_0^{\pi}\left(y'^2+\lambda y^2\right)dx$$

ونكتب معادلة أولر الموافقة له:

$$2\lambda y-\frac{d}{dx}(2y')=0 \quad \text{أو} \quad y''-\lambda y=0 \qquad (127)$$

المعادلة المميزة هي :

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda} \quad \text{أو} \quad r^2-\lambda=0$$

واضح بأن λ يجب أن تكون أقل من الصفر إلاّ إذا افترضنا أن $\lambda>0$، عندها الحل العام لـ (127) سيكون له الشكل:

$$y=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

والشروط الحدية : $y(0)=y(\pi)=0$ ستكون محققة فقط .

من أجل $c_1=0\ ,\ c_2=0$ وبالتالي من أجل $y(x)\equiv 0$

ولكن عندها فإن الشرط $\int_0^\pi y^2(x)dx=1$ لن يكون محققاً.

بشكل مشابه في الحالة $\lambda=0$ التابع $y(x)\equiv 0$ سيكون حلاً لمعادلة أولر (127) ويحقق الشروط الحدية المعطاة.

ولذلك نفترض بأن $\lambda<0$ وبالتالي $r_{1,2}=\pm i\sqrt{-\lambda}$.

والحل العام للمعادلة (127) يكون :

$$y=c_1\sin\sqrt{-\lambda}\,x+c_2\cos\sqrt{-\lambda}\,x$$

الشرط $y(0)=0$ يعطي $c_2=0$ والشرط $y(\pi)=0$ يعطي $-\lambda=k^2$ $(k=1,2,\ldots)$.

وبهذا $y(x)=c_1\sin kx$ حيث c_1 غير محددة بعد.

وبالاستفادة من الشرط : $\int_0^\pi y^2(x)dx=1$

نحصل :

$$\int_0^\pi c_1\sin^2 kx\,dx=1$$

والذي منه يكون : $c_1=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ، إذاً $y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$ ولكن القيم القصوى $y=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$ والتي تمر بالنقاط $(0,0)$ ، $(\pi,0)$ فقط تحقق معادلة جاكوبي.

أي :

$$y(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$$

9 – لنأخذ التابعي الموافق للمسألة الأساسية للضوء الهندسي في المستوى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

ولنضع :

$$n(x, y) = \frac{1}{y}$$

عندئذ يكون لدينا :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{y}\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

وتكون المنحنيات القصوى في نصف المستوى $y > 0$ ، أنصاف دوائر متعامدة مع ox . وإذا لم تقع النقطتان M_2, M_1 من نصف المستوى العلوي على خط مستقيم عمودي على ox ، فإن منحنياً أقصى واحداً يمر من هاتين النقطتين، ويمكن إحاطته بحقل.

ب – أما في حالة :

$$n(x, y) = \sqrt{y + h}$$

أي لنعتبر :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{y + h}\,\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

حيث h عدد ثابت موجب، أما التابع المكامل لايحوي x ، وينتج لمعادلة أولر الحل التالي :

$$\sqrt{y + h}\,\sqrt{1 + y'^2} - \frac{\sqrt{y + h}\, y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

أو :

$$\frac{\sqrt{y + h}}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

وبحل هذه المسألة من أجل y' ثم بالمكاملة، نحصل على الحل العام لمعادلة أولر:

$$y + h - C_1^2 = \left(\frac{x}{2c_1} + C_2\right)^2$$

وهو يمثل جماعة من القطوع المكافئة.

لنضع $C_1 = 0$ ، فنحصل على مستقيمات موازية لـ oy كمنحنيات قصوى.

نأخذ حزمة المنحنيات القصوى المنبعثة من المبدأ، أي لنأخذ الشرطين الابتدائيين:

$$y \Big|_{x=0} = 0\ ,\quad y' \Big|_{x=0} = \alpha$$

وبعد إيجاد C_2, C_1 من هذين الشرطين الابتدائيين، نحصل على :

$$y = \frac{(1+\alpha)^2 x^2}{4h} + \alpha x$$

وهذه المعادلة تعطي، بعد اشتقاقها بالنسبة لـ α ثم حذفها، مغلف جماعة القطوع المكافئة:

$$y = \frac{x^2}{4h} - h$$

وهذا قطع مكافئ ذروته $A(0, -h)$ ومحوره $x = 0$. وبالإضافة إلى ذلك فنلاحظ أن شرط لوجاندر المقوى هو محقق أيضاً ، لأن :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2} = \frac{\sqrt{y+h}}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}} > 0$$

أي أنه يمكن إحاطة هذا الجزء من المنحني الأقصى بحقل، كما أن هذا الجزء يعطي التابعي قيمة صغرى قوية.

نلاحظ أن الشرط $y + h \geq 0$ ينتج عن شكل التابعي، أي أننا نعالج هنا مسألة حول القيم القصوى وحيدة الطرف أما في نصف المستوى $y + h > 0$ فكل شيء هو كالمعتاد.

تمارين غير محلولة

I. أوجد المنحنيات التي تمكّن التابعي من الوصول إلى قيمة قصوى واحسبها:

1. $J[y]=\int_{-1}^{0}\left(12xy-y'^2\right)dx\ ;\ y(-1)=1\ ,\ y(0)=0$

2. $J[y]=\int_{1}^{2}\left(y'^2+2yy'+y^2\right)dx\ ;\ y(1)=1\ ,\ y(2)=0$

3. $J[y(x)]=\int_{0}^{1}\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}\,dx;\ y(0)=y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. $J[y]=\int_{0}^{1}yy'^2\,dx;y(0)=1,y(1)=\sqrt[3]{4}$

5. $J[y]=\int_{0}^{\pi}\left(4y\cos x+y'^2-y^2\right)dx;y(0)=0,y(\pi)=0$

6. $J[y]=\int_{0}^{1}\left(y'^2-y^2-y\right)e^{2x}dx\ ;y(0)=0,\ y(1)=e^{-1}$

7. $J[y]=\int_{-1}^{1}\left(y'^2-2xy\right)dx;y(-1)=-1,y(1)=1$

8. $J[y]=\int_{-1}^{0}\left(y'^2-2xy\right)dx;\ y(-1)=0\ ,y(0)=2$

II. أوجد معادلة أولر – اوستروغرادسكي للتابعي والمحقق لبعض الشروط الحدية:

9. $J\left[y(x)\right]=\int_{-1}^{0}\left(240y-y'''^2\right)dx;$

$y(-1)=1\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(-1)=-4.5,$

$y'(0)=0\ ,\ y''(-1)=16\ ,\ y''(0)=0$

III. ابحث عن المنحنيات القصوى للتكامل:

10. $I\left[y(x)\right]=\int_{A}^{B}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$

المارة بالنقطتين $A(1,2)$ و $B(2,3)$.

IV. ما هي المنحنيات القصوى التي يمكن أن يبلغها التابعي :

11. $$I\left[y(x)\right]=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[(y')^2-y^2\right]dx$$

والمحقق للشروط الحدية :

$$y(0)=0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

V. ما هي المنحنيات القصوى للتكامل :

12. $$I=\int_{0}^{1}\left(y'^2+12xy\right)dx$$

الذي يحقق الشروط الحدية:

$$y(0)=0 \quad , \quad y(1)=1$$

VI. ما هي القيم القصوى للتكامل :

13. $$I=\int_{0}^{4}\left(xy'-y'^2\right)dx$$

الذي يحقق الشروط الحدية :

$$y(0)=0 \quad , \quad y(4)=3$$

VII. استنتج القيم القصوى للتكامل :

14. $$I=\int_{0}^{1}\left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx$$

والمحقق للشروط الحدية :

$$y(0)=1 \quad , \quad y(1)=2$$

VIII. أوجد القيم القصوى للتكامل :

15. $$I=\int_{0}^{\ln 2}\left(y'^2+3y^2\right)e^{2x}\,dx$$

$$y(0)=0 \quad , \quad y(\ln 2)=\frac{15}{8}$$

IX.ابحث عن القيم القصوى للتكامل :

16. $$I\left[y(x),z(x)\right]=\int_{x_1}^{x_2}\left(2yz-2y^2+y'^2-z'^2\right)dx$$

X. ابحث في مسألة الضوء الهندسي في الفراغ :

17. $$I=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(y,z)}dx=\int_{x_1}^{x_2}n(y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

وذلك في الحالة التي تكون فيها السرعة v أو دليل الانكسار $n=\dfrac{1}{v}$ مستقلة عن x.

XI.ابحث في مسألة القصوى للتكامل :

18. $$I=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

XII. عالج مسألة القيم القصوى للتكامل:

19. $$I=\int_{x_1}^{x_2}(y+xy')dx$$

XIII.اكتب معادلة أوستروغرادسكي للتكامل المضاعف :

20. $$I=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

XIV.ما هي القيم القصوى للتكامل :

21. $$I=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1+y^2}{y'^2}dx$$

XV. أوجد القيم القصوى للتكامل :

22. $$I=\int_{x_1}^{x_2}\left[y''^2-2y'^2+y^2-2y\sin x\right]dx$$

XVI.ما هي القيم القصوى للتكامل :

23. $$I=\int_{x_1}^{x_2}\left[(y''')^2+y^2-2yx^3\right]dx$$

XVII. أوجد القيم القصوى للتابعي :

$$24. \quad I(y)=\int_0^1 \left(y'^2+y^2+2ye^x\right)dx$$

والذي يحقق الشروط الحدية:

$$y(0)=0\ ,\quad y(1)=\frac{1}{2e}$$

XVIII. أثبت أن التابعي :

$$25. \quad I(y)=\int_a^b \left[\,p(x)y'+q(x)y+r(x)\,\right]dx$$

حيث :

$$p(x)\in C_1[a,b]$$
$$r(x)\in C_0[a,b]$$

لايملك قيماً قصوى.

XIX. أوجد التوابع $y_2(x),y_1(x)$ المنتمية إلى الصف : $C_1[a,b]$ ، التي تستطيع أن تبلغ قيماً قصوى للتابعي :

$$26. \quad I(y_1,y_2)=\int_1^3 \left(xy_1'^2+y_2'^2+xy_1y_2\right)dx$$

والذي يحقق الشروط الحدية :

$$y_1(1)=1\ ,\ y_2(1)=y_2(3)=0\ ,\ y_1(3)=\ln 3+1$$

$$27. \quad J\left[y(x)\right]=\int_a^b (y+y'')dx;$$

$$y(a)=y_0\ ,\ y(b)=y_1\ ,\ y'(a)=y'_0\ ,\ y'(b)=y'_1$$

$$28. \quad J\left[y(x)\right]=\int_a^b (y'^2+yy'')dx;$$

$$y(a)=A_1\ ,\ y'(a)=A_2\ ,\ y(b)=B_1\ ,\ y'(b)=B_2$$

29. $J[y(x)]=\int_{0}^{1}\left(y'^{2}+y''^{2}\right)dx;$

$y(0)=0\ ,\ y(1)=\operatorname{sh}1\ ,\ y'(0)=1\ ,\ y'(1)=\operatorname{ch}1$

30. $J[y(x)]=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(y'')^{2}\,dx$

$y(0)=0\ ,\ y'(0)=0\ ,\ y'(1)=1$

31. $J[y(x),z(x)]=\int_{0}^{\pi/4}\left(2z-4y^{2}+y'^{2}-z'^{2}\right)dx;$

$y(0)=0\ ,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\ ,\ z(0)=0\quad z\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

32. $J[y(x),z(x)]=\int_{0}^{\pi/2}\left(y'^{2}+z'^{2}-2yz\right)dx\,;$

$y(0)=0\ ,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\ ,\ z(0)=0\ ,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

33. $J[y(x),z(x)]=\int_{0}^{1}\left(y'^{2}+z'^{2}+2y\right)dx\,;$

$y(0)=1\ ,\ y(1)=\frac{3}{2}\ ,\ z(0)=0\ ,\ z(1)=1$

XX. بوساطة مبدأ الفعل الأصغر احسب التكامل :

34. $J=\int_{x_1}^{x} y\sqrt{1+y'^{2}}\ dx \qquad (y>0)$

وأوجد مسار حركة النقطة في المستوي تحت فعل (تأثير) قوة تنافر ممثلة من المحور x، القوة ستكون متناسبة مع بعد النقطة عن هذا الخط المستقيم والموجهة بموازاة المحور y، والخاضع للشرط :

$$x^{2}-y^{2}=0$$

XXI. عالج مسألة إيجاد الخطوط الجيوديزية على سطح مفروض :

$$G(x,y,z)=0$$

بعبارة أخرى : أوجد القيم القصوى للتكامل :

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx = l$$

شريطة خضوعه لمعادلة الصلة .

XXII. من بين جميع المنحنيات الواصلة بين نقطتين مفروضتين B و A ، أوجد المنحني التي ترسمه نقطة مادية بسرعة ابتدائية مفروضة في أقصر وقت. علماً أن مقاومة الوسط تعطى بتابع مفروض R(V) للسرعة.

XXIII. ليكن لدينا التابعي :

$$35. \qquad I(y)=\int_0^l \left[\, p(x)y'^2+q(x)y^2+2r(x)y \,\right]dx$$

والمطلوب:

دراسة تقصي قيمة التابعي الصغرى في الصف B ، ضمن الشروط الحدية المتجانسة :

$$y(0)=y(l)=0$$

وذلك بفرض أن :

$$p(x)>0$$
$$q(x)\geq 0$$

المراجع العربية

1-أ.ف.ي. سميرنوف : دروس في الرياضيات العالية . ترجمة : و. قدسي، ص.أحمد ، م.دعبول، خ.أحمد، أ.كنجو. وزارة التعليم العالي سوريا، 1970.

2-إيروين كريزيك ، ترجمة الدكتور خضر حامد الأحمد : المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته، مطبعة دار الكتاب، دمشق، 1991.

3- شحادة الأسدي : أسس التحليل التابعي (1) ، منشورات جامعة حلب، 2006.

4- معروف بسوت : تاريخ الرياضيات ، منشورات جامعة حلب، 2005.

5- معروف بسوت ؛ د. محمد كردي؛ د. زيد الأمير : المعادلات التفاضلية (1) و (2) ، منشورات جامعة حلب، 1992.

6- موفق دعبول : نظرية المعادلات ، مطبعة خالد بن الوليد، دمشق، 1985.

المراجع الأجنبية

1. C.R. WYLIE, Differential equations Mc.Graw-Hill. Company,1979.
2. H.REINHARD. Equations differentielles, fondements et applications, Gauthier – villars, BORDAS, PARIS, 1982.
3. I.M. GELFAND, G.E.SHILOV. Generalized functions, theory of differential equations, academic press, 1967.
4. M.KRASNOV, A.KISELEV, G.MAKARENKO: Problems and exercises in integral equations. MIR publishers – MOSCOW, 1971.
5. M.KRASNOV, A.KISELEV, G.MAKARENKO: Problems and exercises in the calculus of variation. MIR publishers – MOSCOW, 1975.

دليل المصطلحات العلمية

عربي إنكليزي

(أ)

ارتباط خطي	Linear dependence
استقراء رياضي	Mathematical induction
استقلال خطي	Linear independence
استكمال	Interpolation
الحد الأدنى	Infimum
الحد الأعلى	Supremum
انعكاسية	Reflexivity
انغلاق	Closedness
انموذج	Model
ايزومورفيزم	Isomorphism

(ت)

تام	Complete
تجزئة	attrition
تراص	Partition
تراص تتابعي	Compactness sequential

Compactness ocal	تراص موضعي
linear combination	تركيب خطي
Bi-linear mapping	تطبيق ثنائي الخطية
Convergence	تقارب
Operator Convergence	تقارب بالنسبة للمؤثرات
Convergence weak	تقارب ضعيف
Convergence weak*	تقارب ضعيف*
Convergence strong	تقارب قوي
Convergence uniform	تقارب منتظم
Convergence pointwise	تقارب نقطي
Estimate	تقدير
Estimate proior	تقدير سابق
Estimate posterior	تقدير لاحق
Contraction	تقليص
Equivalence	تكافؤ
Unitary Equivalence	تكافؤ واحدي
Integral	تكامل
Integral Riemann – Stieltjes	تكامل ريمان – ستيلجس
Iteration	تكرير
Weak completeness	تمام ضعيف

Representation	تمثيل
Extension	تمديد (ممدد)
Lemma	تمهيدية
Symmetry	تناظر

خ

Linear	خطي
Conjugate linear	خطي مرافق
Variation	تغير

ج

Frontier (boundary)	جبهة
Product	جداء
inner product	جداء داخلي
conjugate linear Product	جداء خطي مرافق
Sesquilinear Product	جداء خطي مرة و نصف
Scalar Product	جداء سلمي
vector product	جداء سلمي متجهي
neighborhood	جوار
System	جملة

ح

Polynomials	حدوديات
commutative Polynomials	حدوديات تبديلية
Polynomials reflexivity	حدوديات الانعكاس
Polynomials antisymmetry	حدوديات التخالف
Polynomials transitivity	حدوديات التعدي

د

Function	دالة أو تابع
distance Function – (metric)	دالة مسافة (مترك)
characteristic Function	دالة مميزة
generating Function	دالة مولدة
Functional	دالي أو تابعي
Function sublinear	دالي خطي جزئياً
Function positive homogeneous	دالي متجانس إيجاباً
Formula	دستور

ش

Pseudonorm	شبه نظيم
Condition	شرط

ص

Class	صف (صنف)
Form	صيغة

ض

Multiplication	ضرب

ط

Method	طريقة
Method of simultaneous corrections	طريقة التصحيحات الآنية
regular summability Method	طريقة في الجموعية المنتظمة
Euler's Method	طريقة أولر
permanent Method	طريقة دائمة
Embedding	طمر

ع

Number	عدد
Cardinal Number	عدد أصلي (كاردينالي)
Node	عقدة
Relation	علاقة

Column	عمود
Element	عنصر
Minimal element	عنصر أصغري
Maximal element	عنصر أعظمي
Comparable elements	عنصران متقارنان

غ

Nonlinear	غير خطي

ف

Category	فئة
Space	فضاء
Euclidean space	فضاء إقليدي
Reflexive space	فضاء الدوال
Hilbert sequence space	فضاء المتتاليات لهلبرت
complete space	فضاء تام
Weakly complete space	فضاء تام بضعف
Algebraic dual space	فضاء ثنوي جبري
Inner product space	فضاء جداء داخلي
Subspace	فضاء جزئي
improper subspace	فضاء جزئي غير فعلي

Proper subspace	فضاء جزئي فعلي
Real space	فضاء حقيقي
Topological space	فضاء طبولوجي
Embeddable space	فضاء طمور
Countable space	فضاء عدود
Complex space	فضاء عقدي
Uncountable space	فضاء غير عدود
Infinite dimensional space	فضاء غير منتهي البعد
Separable space	فضاء فصول
Sequence space	فضاء متتاليات
Vector space	فضاء متجهي
Metric space	فضاء متري
Discrete space	فضاء متقطع
Abstract space	فضاء مجرد
Conjugate space	فضاء مرافق
Finite dimensional space	فضاء منتهي البعد
Normed space	فضاء منظم
Meager space	فضاء هزيل
Unitary space	فضاء وحدي (واحدي)
Hyperplane	فوق المستوي

ق

Basis	قاعدة (أساس)
Sphere	قشرة كروية
Diameter	قطر
Segment	قطعة مستقيمة
Value	قيمة
Eigenvalue	قيمة ذاتية

ك

Ball	كرة
Closed ball	كرة مغلقة
Open ball	كرة مفتوحة
Unit ball	كرة واحدية

ل

Invariance	لاتغير
Translation invariance	لاتغير الانسحاب

م

Principle	مبدأ

Theorem	مبرهنة
Finite dimension Theorem	مبرهنة البعد المنتهي
Closed graph Theorem	مبرهنة البيان المغلق
Open mapping Theorem	مبرهنة التطبيق المفتوح
Contraction Theorem	مبرهنة التقليص
Closed linear operator Theorem	مبرهنة المؤثر الخطي المغلق
Fixed point Theorem	مبرهنة النقطة الثابتة
Banach fixed point Theorem	مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ
Sequence	متتالية
Fundamental sequence	متتالية أساسية
Iterative sequence	متتالية تكريرية
Subsequence	متتالية جزئية
Monotone sequence	متتالية رتيبة
Weak Cauchy sequence	متتالية كوشي الضعيفة
Divergent sequence	متتالية متباعدة
Convergent sequence	متتالية متقاربة
Orthogonal sequence	متتالية متعامدة
Orthonormal sequence	متتالية متعامدة منظمة
Uniformly convergent sequence	متتالية متقاربة بانتظام
Weakly convergent sequence	متتالية متقاربة بضعف

Strongly convergent sequence	متتالية متقاربة بقوة
Series	متسلسلة
Infinite series	متسلسلة غير منتهية
Absolutely convergent series	متسلسلة متقاربة بالإطلاق
Neumann series	متسلسلة نويمان
Identity	متطابقة
Prerequisite	متطلب
Variable	متغير
Complement	متمم
Algebraic complement	متمم جبري
Orthogonal complement	متمم معامد
Bonded	محدود
Sum	مجموع
Partial sum	مجموع جزئي
Direct sum	مجموع مباشر
Set	مجموعة
Countable set	مجموعة عدودة
Dense set	مجموعة كثيفة
Bounded set	مجموعة محدودة
Linearly dependent set	مجموعة مرتبطة خطياً

Linearly independent set	مجموعة مستقلة خطياً
Ordered set	مجموعة مرتبة
Continuous	مستمر
Initial value problem	مسألة القيمة الابتدائية
Complex plane	مستوي عقدي (مركب)
projection	مسقط (إسقاط)
Differential	مشتق
matrix	مصفوفة
(real) symmetric matrix	مصفوفة (حقيقية) متناظرة
Skew – symmetric matrix	مصفوفة متناظرة تخالفية
Orthogonal matrix	مصفوفة متعامدة
Normal matrix	مصفوفة ناظمية
Hermitian matrix	مصفوفة هرميتية
Skew – Hermitian matrix	مصفوفة هرميتية تخالفية
Unitary matrix	مصفوفة واحدية (وحدية)
Equation	معادلة
Differential equation	معادلة تفاضلية
Partial differential equation	معادلة تفاضلية جزئية
Ordinary differential equation	معادلة تفاضلية عادية
Integral equation	معادلة تكاملية

Fredholm equation	معادلة فريدهولم
Fredholm equation of the first kind	معادلة فريدهولم من النوع الأول
Fredholm equation of the second kind	معادلة فريدهولم من النوع الثاني
Volterra equation	معادلة فولتيرا
Coefficient	معامل
Criterion	معيار
Extension	ممدد (تمديد)
Expansion	منشور
Transpose	منقول
Operator	مؤثر
Projection Operator	مؤثر الإسقاط
Integral operator	مؤثر تكاملي
Bounded linear operator	مؤثر خطي محدود
Conjugate linear operator	مؤثر خطي مرافق
Zero operator	مؤثر صفري
Inverse operator	مؤثر عكسي
Self – adjoint operator	مؤثر قرين ذاتياً (مترافق ذاتياً)
Identity operator	مؤثر مطابقة
Unitary operator	مؤثر واحدي (وحدي)

ن

Seminorm	نصف النظيم
Norms	نظائم
Equivalent norms	نظائم متكافئة
Norm	نظيم
Point	نقطة
Accumulation point	نقطة تراكم (تجمع)
Fixed point	نقطة ثابتة
Boundary point	نقطة حدية (جبهية)
Interior point	نقطة داخلية
Closure point	نقطة ملاصقة
Pointwise	نقطيا
Limit	نهاية
Kernel	نواة
Iterated kernel	نواة تكريرية
Resolvent kernel	نواة حالة

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل :

الدكتور	الدكتور	الدكتور
شحادة الأسدي	بشير نور خراط	حمدو النجار

المدقق اللغوي

الدكتور مصطفى عثمان

Aleppo University Publications
Faculty of Sciences

Integral Equations and Calculus of Variations

By

Dr. Maarouf BASSOUT – LELLICH
Associated Prof. In Dep. Of Mathematics

Academic Year
2007/2008

Aleppo University Publications

Faculty of Sciences

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

Integral Equations and Calculus of Variations

By

Dr. Maarouf BASSOUT - LELLICH

Associated Prof. Dr. Dep. Of Mathematics

Academic Year

2007/2008

سعر المبيع للطلاب ٢٥٠ ل.س