منزل ع حديث
ع ع.

# الحركة والتحريك

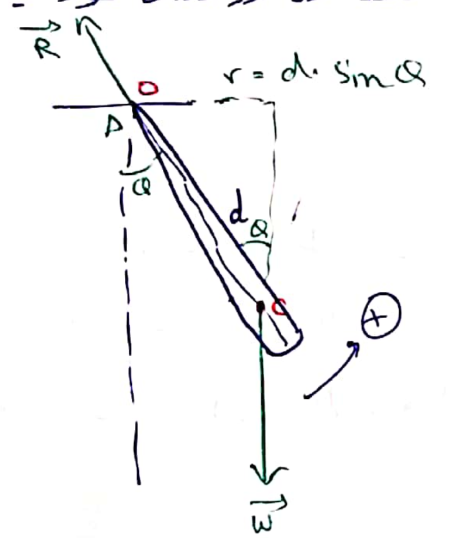
الوحدة الأولى

## الدرس الثالث : النواس الثقلي

مركب ← → بسيط

## ① النواس الثقلي المركب :

- تعريف النواس الثقلي المركب : هو كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله حول محور دوران عمودي على مستويه ولا يمر من مركز عطالته .



## الدراسة التحريكية للنواس الثقلي المركب

- ادرس تحريكياً النواس الثقلي المركب وتوصل لمعادلته التفاضلية ثم برهن أن حركته في حالة السعات الصغيرة جيبية دورانية واستنتج العلاقة العامة للدور الخاص في هذه الحالة :

- القوى المؤثرة في الجسم أثناء اهتزازه :
ثقله $\vec{W}$ ، رد فعل محور الدوران على الجسم $\vec{R}$
- لنطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني :

$$\sum \bar{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha} \quad \cdots ①$$

باختيار الجهة الموجبة للدوران (عكس عقارب الساعة) نجد أن :

$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$ (لأن حامل $\vec{R}$ يمر من محور الدوران $\Delta$)

كذلك : $\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = \underbrace{\text{القوة} \times \text{الذراع}}_{(r \times W)}$

لكن : $r =$ الوتر $\times \sin\theta$
$oc \times \sin\theta$

لأن $\bar{\Gamma}$ يدور الجسم مع عقارب الساعة ونحن اخترنا الجهة بعكس عقارب الساعة

$$\Rightarrow \bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = - oc \cdot \sin\theta \cdot W$$

$$= - oc \cdot \sin\theta \cdot m \cdot g$$

٢

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\Rightarrow \Gamma_{\vec{w}/\Delta} = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}$$

$$-oc \cdot \sin \cdot (m \cdot g) = I_\Delta \, \bar{\alpha}$$

نعلم أن $oc = d$

$$\Rightarrow -d \cdot \sin\theta \, (mg) = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}$$

حيث: $\bar{\alpha} = (\bar{\omega})'_t = (\bar{\theta})''_t$

$$\Rightarrow -d \cdot \sin\theta \, (mg) = I_\Delta \cdot (\bar{\theta})''_t$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} \cdot \sin\theta$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها ليس جيبياً لأنها تحتوي على $\sin\theta$ بدلاً من $\theta$ وبالتالي فإن حركة النواس الثقلي هي حركة اهتزازية غير توافقية (ليست جيبية)

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة $(\theta \leq 0{,}24\ rad) \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta} \cdot \bar{\theta} \quad \ldots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\boxed{\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

دليل لو اشتققنا هذه المعادلة مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$$(\bar{\theta})''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0^2 \cdot \bar{\theta} \quad \ldots (2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد أن

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن جميع المقادير موجبة ⇐ إذاً: حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية

٢

استنتاج الدور

وجدنا أن: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$$

$$\frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$$

العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة.

كيفية حساب $d$

$d = oc$

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$$

حيث (٣): بعد النقطة عن مركز العطالة وهو مقدار جبري لهذا:

موجبة: إذا كان مركز عطالة الكتلة المهتزة تحت محور الدوران

سالبة: إذا كان مركز عطالة الكتلة المهتزة فوق محور الدوران

دور النواس الثقلي المركب / البسيط في حالة السعات الكبيرة

$$T'_0 = T_0 \left[1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right]$$

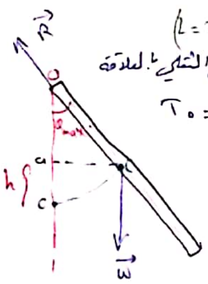
حيث $T_0$: دور النواس في حالة السعات الصغيرة.

٢

($T'_0$) دور النواس في حالة السعة الزاوية الكبيرة ($\theta_{max}$)

تطبيق: نواس ثقلي مؤلف من ساق متجانسة طولها ($L = 375 \times 10^{-3}\ m$) يعطى دور النواس الثقلي بالعلاقة

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$




حساب ($I_\Delta$): حسب هايغنز

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + m d'^2$$

حيث $d' = \frac{L}{2}$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2$$

حساب ($d$)

$$d = oc = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} ML^2}{Mg \frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 375 \times 10^{-3}}{3 \cdot 10}} = 2\pi \sqrt{250 \cdot 10^{-4}}$$

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{250 \times 10^{-3}}{10}} = 2\sqrt{0{,}25} = 1\ (sec)$$

الطلب الإضافي: نفرض أن ($\theta_{max} = 60°$) استنتج بالدور العلاقة المحددة للحركة الزاوية للساعة كعلاقة الدور ... ثم احسب قيمته

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

واحسب السرعة الخطية لمركز عطالة الجملة عندئذٍ

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين :

الوضع الأول : تصنع الساق مع الشاقول زاوية $\theta_{max}$

الوضع الثاني : عند مرور الساق بالشاقول

$$\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1} = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to2)}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 - 0 = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

$\overline{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل .

$$\overline{W}_{\vec{w}} = Mgh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = Mgh$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mgh}{I_\Delta}}$$

واضح من الشكل أن :

$$h = ac = oc - oa$$

$$= oc - oc\cos\theta_{max}$$

$$= oc(1 - \cos\theta_{max})$$

$$= d(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2Mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2\cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}(1-\cos\theta_{max})}{\frac{1}{3}\cancel{M}L^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta_{max})}{L}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3\times10(1-\frac{1}{2})}{375\times10^{-3}}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ rad.s^{-1}$$

$$v = \omega . r$$

حيث : ($r$) هي نصف قطر الدائرة التي ترسمها النقطة المراد حساب سرعتها الخطية

$$v_c = \omega . \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow v_c = 2\sqrt{10} \times \frac{375\times10^{-3}}{2} = 375\times10^{-3}\sqrt{10}\ m.s^{-1}$$

## ② النواس الثقلي البسيط

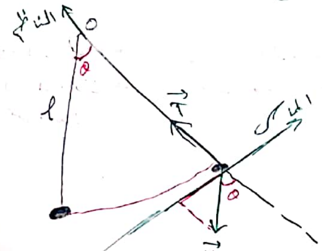
تعريفه :

نظرياً : نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بُعد ثابت ($l$) من محور دوران أفقي ثابت .

عملياً : كرة صغيرة لكنها (لكتلتها) كثافتها (كتلتها) النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله ($l$) كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة .

### أ الدراسة التحريكية للنواس الثقلي البسيط

ادرس النواس الثقلي البسيط تحريكياً و برهن أن حركته جيبية دورانية في حالة السعات الزاوية الصغيرة ثم استنتج دستور دوره الخاص في هذه الحالة .




القوى الخارجية المؤثرة في الكرة :

$\vec{w}$ ثقل الكرة .

$\vec{T}$ توتر الخيط .



نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على المماس الموجه بجهة الزاوية الكرة بعيداً (زاوية $\theta$)

$$-w.\sin\theta + 0 = m.\vec{a}_t$$

$$\Rightarrow -m.g.\sin\theta = m.\vec{a}_t$$

حيث : $a_t = (\theta)''_t = \alpha . r$ تسارع مماسي

حيث $\boxed{r = L}$

$$\Rightarrow a_t = \alpha . L \Rightarrow (\bar\theta)''_t . L$$

$$\Rightarrow -\cancel{m}.g.\sin\theta = \cancel{m}.L(\bar\theta)''_t$$

$$(\theta)''_t = -\frac{g}{L}.\sin\theta$$

و في حالة السعات الزاوية الصغيرة فإن $\theta$ بالراديان $\sin\theta$

$$\Rightarrow \boxed{(\bar\theta)''_t = -\frac{g}{L}.\bar\theta} \quad ...(1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل : $\boxed{\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar\varphi)}$

بدليل لو اشتققنا هذه المعادلة مرتين نجد :

$$\boxed{(\bar\theta)''_t = -\omega_0^2 . \bar\theta} \quad ...(2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} > 0$$

وهذا محقق لأن $g$ و $L$ مقداران موجبان

إذاً : حركة النواس الثقلي البسيط حركة جيبية دورانية من أجل السعات الصغيرة .

استنتاج الدور

وجدنا أن

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \frac{T_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط من أجل السعات الصغيرة .

مسألة الهام

انطلاقاً من العلاقة العامة للدور الخاص للنواس الثقلي المركب لحالة السعات الزاوية الصغيرة ، استنتج العلاقة المحددة للدور الخاص للنواس البسيط .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حيث : $d = l$ ، $I_\Delta = ml^2$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}{\cancel{m}g\cancel{l}}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

نستنتج : ① لا يتعلق دور النواس الثقلي البسيط بكتلته ولا بنوع مادة كرته .

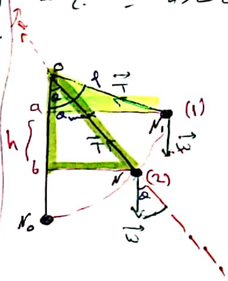
② النواسات صغيرة السعة متواقتة (لها الدور نفسه)

③ يتناسب دور النواس البسيط طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط ($l$)

ويتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية ($g$)

## سرعة كرة النواس البسيط

استنتج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس البسيط في نقطة من مسارها وكيف تصبح عند المرور بالشاقول؟




القوى الخارجية المؤثرة:

ثقل الكرة $\vec{w}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$ .

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: يصنع الخيط مع الشاقول زاوية $\theta_{max}$

الثاني: 〃 〃 〃 〃 〃 $\theta$

$$\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1} = \sum \bar{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \bar{W}_{\vec{w}} + \bar{W}_{\vec{T}}$$

حيث: $\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال العنصري في كل لحظة.

و $E_{K_1} = 0$ لأنه ترك دون سرعة ابتدائية:

$$\Rightarrow E_{K_2} = \bar{W}_{\vec{w}} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gh$$

واضح من الشكل:

$$h = ab = \underset{\theta \text{ مجاور}}{ob} - \underset{\theta_{max} \text{ مجاور}}{oa}$$

$$h = \ell.\cos\theta - \ell\cos(\theta_{max})$$

$$h = \ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

عند المرور بالشاقول $\theta = 0 \Leftarrow \cos\theta \Leftarrow$ $v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_{max})}$

## علاقة قوة توتر الخيط في النواس البسيط

استنتج العلاقة المحددة لقوة توتر خيط النواس البسيط في نقطة من مساره، وكيف تصبح عند المرور بالشاقول.

القوى الخارجية المؤثرة: ثقل الكرة $\vec{w}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك

$$\sum\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{w} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته (المحور الناظم $(\vec{N n})$) نجد أن:

$$-w\cos\theta + T = m.a_c$$

$$\Rightarrow T = w\cos\theta + m\frac{v^2}{r}$$

حيث $r = \ell$

$$\Rightarrow T = w.\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$

نعوض $v$ بقيمتها:

$$T = m.g.\cos\theta + m.\frac{2g\cancel{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_{max})}{\cancel{\ell}}$$

$$T = mg[\cos\theta + 2(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$\boxed{T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})}$$

عند المرور بالشاقول $\Leftarrow \theta = 0 \Leftarrow \cos\theta = 1$

$$\Rightarrow \boxed{T = m.g(3 - 2\cos\theta_{max})}$$



## حل مسائل الدرس

المسألة الأولى: (نواس ثقلي مركب)

سالفاً:

$M = \frac{1}{2}\,kg$

$L = 1.5\,m = \frac{3}{2}\,m$

$m' = \frac{1}{2}\,kg$ ، $r = 1\,m$

ط1) احسب دوره في حالة السعات الزاوية الصغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حيث:

$$\underset{\text{جملة}}{I_\Delta} = \underset{\text{ساق}}{I_{\Delta/c}} + \underset{\text{كتلة}}{I_\Delta}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{12}ML^2 + Md^2}_{\text{حسب هايغنز}} + m'r^2$$

$$= \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m'r^2 = \frac{1}{3}ML^2 + m'r^2$$

$$\Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(1)^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{9}{12.8} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{96} + \frac{1}{2}$$

$$I_\Delta = 875\times10^{-3}\,kg.m^2$$

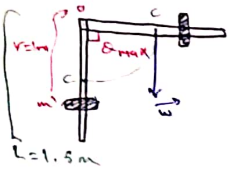
$$d = oc = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{M\left(+\frac{L}{2}\right) + m'(+r)}{M + m'}$$

$$d = 875\times10^{-3}\,m$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{875\times10^{-3}}{1\times10\times875\times10^{-3}}} = 2\,(sec)$$

ط2) $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}\,rad$ ، نتركها دون سرعة ابتدائية

1- احسب الطاقة الحركية للنواس لحظة مروره بالشاقول، ثم احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية $(m')$




نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: تصنع الساق مع الشاقول زاوية $\theta_{max}$

الثاني: عند مرور الساق بوضع التوازن.

$$\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1} = \sum \bar{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K_2} - 0 = \bar{W}_{\vec{w}} + \bar{W}_{\vec{R}}$$

$$E_{K_2} = mgh + 0$$

حيث: $\bar{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل.

واضح من الشكل: $h = oc = d$

$$\Rightarrow E_{K_2} = mgd = 1\times10\times875\times10^{-3} = 875\times10^{-2}\,J$$

حساب السرعة الخطية للكتلة $m'$:

$$E_{K_2} = \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$$

$$875\times10^{-2} = \frac{1}{2}.875\times10^{-3}.\omega^2$$

$$\omega^2 = 20 \Rightarrow \omega = 2\sqrt{5}\,rad.s^{-1}$$

$$v_{m'} = \omega.r \Rightarrow v = 2\sqrt{5}\times1 = 2\sqrt{5}\,m.s^{-1}$$

المسألة الثانية: (نواس ثقلي بسيط)

$\ell = 40\,cm = 40\times10^{-2}\,m = 4\times10^{-1}\,m$

$m = 100\,g = 100\times10^{-3}\,kg = 10^{-1}\,kg$

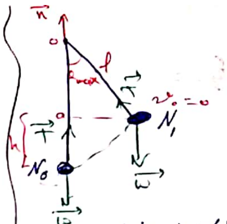
$\theta_{max}$ ، $v = 2\,m.s^{-1}$ ، استنتج قيمة

ط1

يتبع



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين :

الأول : يصنع الخيط مع الشاقول زاوية $\theta_{max}$

الثاني : عند المرور بالشاقول .

$$\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1} = \sum \overline{W}_{\vec F}\,(1\to 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - 0 = \overline{W}_{\vec w} + \overline{W}_{\vec T}$$

ولكن : $\overline{W}_{\vec T} = 0$ لأن $\vec T$ يعامد الانتقال في كل لحظة.

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh$$

واضح من الشكل :

$$h = aN_0 = oN_0 - oa = l - l\cos\theta_{max} = l(1-\cos\theta_{max})$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gl(1-\cos\theta_{max})$$

$$\Rightarrow (2)^2 = 2\times10\times4\times10^{-1}(1-\cos\theta_{max})$$

$$1-\cos\theta_{max} = \frac{4}{2\cdot10\times4\times10^{-1}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_{max} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad$$

ط2) استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بالشاقول ثم احسب قيمته ؟

القوى المؤثرة على كرة النواس : ثقلها $\vec w$

توتر الخيط $\vec T$

لنطبق العلاقة الأساسية في التحريك $\sum \vec F = m\vec a$

$$\Rightarrow \vec w + \vec T = m\vec a$$

بالإسقاط على المحور الناظم $\overrightarrow{N_0 n}$ الموجه نحو $\vec T$ نجد :

$$-w + T = m\,a_c \Rightarrow -w + T = m\frac{v^2}{r}$$

حيث $r = l$ ،

$$\boxed{T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)}$$

$$T = 10^{-1}\left(10 + \frac{(2)^2}{4\times10^{-1}}\right)$$

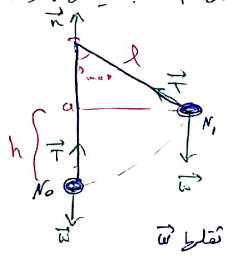
$$T = 10^{-1}(10+10) = 20\cdot10^{-1} = 2\ N$$

## المسألة الثالثة (ثقلي بسيط)

$m = \frac{1}{2}\ Kg$ ، $L = 16\times10^{-1}\ m$

$h = 0{,}8\ m = 8\times10^{-1}\ m$

ط1) استنتج بالرموز العلاقة المحددة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول ثم احسب قيمتها ، موضحًا بالرسم.



تخضع الكرة لقوة ثقلها $\vec w$

وتوتر الخيط $\vec T$

لنطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول : يصنع الخيط مع الشاقول زاوية $\theta_{max}$

الثاني : عند مرور النواس بوضع الشاقول .

$$\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1} = \sum \overline{W}_{\vec F}\,(1\to 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - 0 = \overline{W}_{\vec w} + \overline{W}_{\vec T}$$

حيث : $\overline{W}_{\vec T} = 0$ لأن $\vec T$ يعامد الانتقال العنصري في كل لحظة .



$$\frac{1}{2}\cancel{m} v^2 = \cancel{m} g h$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times8\times10^{-1}} = 4\ m\,s^{-1}$$

ط2) استنتج قيمة الزاوية ($\theta_{max}$) ثم احسب قيمتها.

واضح من الشكل أن :

$$h = aN_0 = oN_0 - oa = l - l\cos\theta_{max} = l(1-\cos\theta_{max})$$

$$\Rightarrow 8\times10^{-1} = 16\times10^{-1}(1-\cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2} = 1-\cos\theta_{max}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad$$

ط3) احسب دور هذا النواس :

للسعات الزاوية الصغيرة : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-1}}{10}} = 2\pi\times4\times10^{-1}$$

ولكن : $\theta_{max} > 0{,}24\ rad$

$$\Rightarrow T'_0 = T_0\left(1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right)$$

$$\Rightarrow T'_0 = 2.5\left(1 + \frac{(\frac{\pi}{3})^2}{16}\right)$$

$$T'_0 = 2{,}67\ (sec)$$

ط4) استنتج بالرموز العلاقة المحددة لشدة قوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول ، ثم احسب قيمتها.

القوى الخارجية المؤثرة على الكرة :

ثقلها $\vec w$ ، توتر الخيط $\vec T$

لنطبق العلاقة الأساسية في التحريك :

$$\sum \vec F = m\vec a$$

$$\vec w + \vec T = m\vec a$$

بالإسقاط على المحور الناظم $\overrightarrow{N_0 n}$ الشاقولي والموجه بجهة $\vec T$ نجد :

$$-W + T = m\,a_c$$

$$\Rightarrow -mg + T = m\frac{v^2}{r}$$

حيث $r = l$ ،

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$$

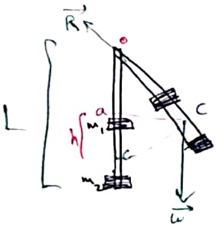
$$T = 5\times10^{-1}\left(10 + \frac{(4)^2}{16\times10^{-1}}\right) = 10\ N$$

## المسألة الرابعة (ثقلي مركب)

$L = 1m$ ، $m_1 = 4\times10^{-1}\ Kg$

$m_2 = 2\times10^{-1}\ Kg$

ط1) احسب دور نوسات الصغيرة السعة .



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حيث : ع.م. $I_\Delta = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} + I_{\Delta_{ساق}}$

$I_\Delta = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2(L^2) + 0$ مهملة

$$= 4\times10^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times10^{-1}(1)^2 = 3\times10^{-1}\ Kg.m^2$$

كلية $m = m_1 + m_2 + m_{ساق}$

$$= 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6\ Kg$$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$d = oc = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 (+\frac{L}{2}) + m_2 (+L)}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow d = oc = \frac{4\times10^{-1}\times\frac{1}{2} + 2\times10^{-1}\times 1}{4\times10^{-1} + 2\times10^{-1}}$$

$$d = \frac{2}{3}\, m$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3\times10^{-1}}{6\times10^{-1}\times10\times\frac{2}{3}}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}\,(sec)$$

2) $\theta_{max} > 0{,}24\ rad$

$\left(v_c = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\ m\cdot s^{-1}\right)$

a) احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية $m_2$

$$v_c = w\cdot r$$

حيث:

$$r = oc = d$$

$$\Rightarrow v_c = w\cdot d \quad \ldots (1)$$

$$v_{m_2} = w\cdot r'$$

حيث:

$$r' = L$$

$$\Rightarrow v_{m_2} = w\cdot L \quad \ldots (2)$$

نقسم (1) على (2)

$$\frac{v_c}{v_{m_2}} = \frac{d}{L}$$

$$v_{m_2} = \frac{v_c\cdot L}{d} = v_c\cdot\frac{L}{d}$$

$$v_{m_2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ m\cdot s^{-1}$$

b) استنتج قيمة $\theta_{max}$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: تصنع الساق مع خط الشاقول زاوية $\theta_{max}$.

الثاني: عند مرور الساق بوضع الشاقول -

$$\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1} = \sum \bar{W}_{\vec{F}}(1\to2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta w^2 - 0 = \bar{W}_{\vec{w}} + \bar{W}_{\vec{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_\Delta w^2 = mgh$$

حيث: ($\bar{W}_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل)

$$\Rightarrow w = \sqrt{\frac{2mgh}{I_\Delta}}$$

ومن الشكل:

$$h = ac = oc - oa = oc - oc\cos\theta_{max}$$

$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

$$w = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

وجدنا أن: $v_c = w\cdot d$

$$\Rightarrow w = \frac{v_c}{d} \Rightarrow w = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ rad\cdot s^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2\times6\times10^{-1}\times10\times\frac{2}{3}(1-\cos\theta_{max})}{3\times10^{-1}}}$$

نربع:

$$\frac{4\pi^2}{3} = \frac{8(1-\cos\theta_{max})}{3\times10^{-1}}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}\ rad$$



## المسألة الثانية: (ثقلي مركب)

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\ rad ,$$

$$T_0 = 2.5\,(sec)$$

1) استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي لحركة هذا النواس انطلاقاً من شكله العام:


بما أن $\theta_{max} = \frac{1}{2\pi} < 0{,}24\ rad$

فالحركة الاهتزازية للنواس الثقلي في هذه الحالة جيبية دورانية

التابع الزمني للمطال الزاوي

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(w_0 t + \bar{\varphi})$$

وبما أن: $\theta = \theta_{max} \Leftarrow w = 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\ rad$$

كذلك:

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = 0{,}8\pi\ rad\cdot s^{-1}$$

حساب $(\bar{\varphi})$ نحسب من شروط البدء بعد أن أصبحت ($t=0$ لما $\theta = \theta_{max}$) حيث:

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos(0 + \bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \cos\bar{\varphi} = 1 \Rightarrow \bar{\varphi} = 0\ rad$$

ويصبح التابع

$$\bar{\theta} = \frac{1}{2\pi}\cos(0{,}8\pi t + 0)$$

2) استنتج بالرموز العلاقة المحددة لطول الساق ثم احسب قيمته!

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

حيث

$$I_{\Delta\,(جملة)} = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} + I_{\Delta\,ساق}$$

$$= m'\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m'\left(\frac{3L}{4}\right)^2 + 0$$ الساق مهملة الكتلة

$$I_{\Delta\,جملة} = m'\left[\frac{L^2}{16} + 9\frac{L^2}{16}\right]$$

$$= m'\times10\frac{L^2}{16} = m'\cdot\frac{5L^2}{8}\ kg\cdot m^2$$

$$m_{(جملة)} = m' + m' + m_{ساق} = m' + m' + 0 = 2m\ kg$$

$$d = oc = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{m'(-\frac{L}{4}) + m'(+\frac{3L}{4})}{m' + m'}$$

$$d = \frac{m'\cdot\frac{L}{2}}{2m'} = \frac{1}{4}L\ m$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m'}\times\frac{5L^2}{8}}{2\cancel{m'}g\times\frac{1}{4}\cancel{L}}}$$

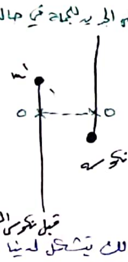
$$\Rightarrow L = \frac{T_0^2\times g}{5\pi^2} = \frac{(2.5)^2(10)}{5\times10} = 1{,}25\ m$$

3) احسب قيمة السرعة الزاوية العظمى للحركة (طويلة)

$$w_{max} = w_0\,\theta_{max} = \frac{2\pi}{T_0}\cdot\theta_{max}$$

$$= \frac{2\pi}{2.5}\cdot\frac{1}{2\pi} = 4\times10^{-1}\ rad\cdot s^{-1}$$

4) لنفرض أن في إحدى هذه النوسات انفصلت الكتلة السفلية عن الساق - استنتج الدور الخاص الجديد للجملة في حالة السعات الزاوية الصغيرة:




بعد انفصال الكتلة السفلية يصبح التوازن قلقاً فينعكس النواس وتصبح $m'$ تحت بعد تكون محور الدوران ويصبح التوازن مستقراً.

ولأن الساق مهملة الكتلة لذلك يتشكل لدينا نواساً بسيطاً طوله $\left(\ell = \frac{L}{4}\right)$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L}{4}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}}$$

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \pi\sqrt{\frac{1{,}25}{10}}$$

$$= 0{,}5\sqrt{5}\,(sec)$$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

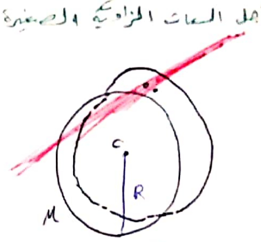
حل المسائل العامة

المسألة العامة (4) تقليد (مركب)

$R = 12.5\,cm = 12.5\times10^{-2}\,m$

$M = 5\times10^{-2}\,Kg$

(1/ط) احسب الدور الخاص لاهتزاز هذا النواس من أجل السعات الزاوية الصغيرة.




$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

حيث: $I_\Delta = MR^2 + M\cdot d'^2$

حسب هايغنز.

$I_\Delta = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$

$m = M \quad , d = oc = R$

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times12.5\times10^{-2}}{10}}$

$T_0 = 1\ (sec)$

(2/ط) احسب طول النواس البسيط المواقت

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

بواقته أي يساويه بالدور

$1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}$

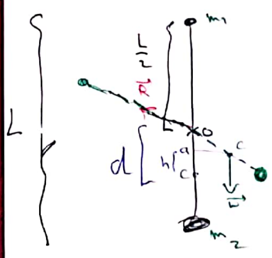
$\ell = \frac{1}{4}\,m$

المسألة الخامسة (عامة) تقليد (مركب + بسيط)

$L = 1\,m \quad , m_1 = 0,2\,Kg$

$m_2 = 0,6\,Kg$

(1/ط) احسب دور النواس في حالة السعات الصغيرة:




$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

حيث: $I_{\Delta(جملة)} = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} + I_{\Delta_{ساق}}$

$I_{\Delta(جملة)} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \underset{ساق}{0}$

$= m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2(m_1+m_2)$

$I_\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2(0,2+0,6)$

$I_\Delta = 0,2\ Kg.m^2$

كذلك: $m_{(جملة)} = m_1 + m_2 + m_{ساق}$

$m = 0,8\ Kg$

وكذلك: $d = oc = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$

$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\left(-\frac{L}{2}\right) + m_2\left(+\frac{L}{2}\right)}{m_1+m_2}$

$d = \frac{0,2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0,6\left(+\frac{1}{2}\right)}{0,2+0,6}$



$d = \frac{-0,1+0,3}{0,8}$

$d = \frac{1}{4}\,m$

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0,2}{0,8\times10\times\frac{1}{4}}} = 2\,(sec)$

(2/ط) احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

[يواقته أي يساويه بالدور]

$2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow 4 = 4\pi^2\cdot\frac{\ell}{g}$

$\ell = \frac{4.9}{4\pi^2} = \frac{10}{10} = 10\times10^{-1}$

$= 1\ m$

(3/ط) احسب دور النواس لو نا كى بسعة زاوية $\theta_{max} = 0,4\,rad$

$T_0' = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$

$\Rightarrow T_0' = 2\left(1 + \frac{(0,4)^2}{16}\right)$

$T_0' = 2(1+10^{-2})$

$T_0' = 2,02\ (sec)$

(4/ط) $\theta_{max} = 60°$

(a) استنتج بالرموز علاقة السرعة الزاوية لجملة النواس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق ثم احسب قيمتها عند ذلك

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الأول: تصنع فيه الساق مع الشاقول زاوية $\theta_{max}$

الثاني: عند مرور الساق بوضع الشاقول

$\Delta EK = EK_2 - EK_1 = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to2)}$

$\frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2 - 0 = \overline{W}_{\vec{w}} + \overline{W}_{\vec{R}}$

$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mgh$

$(\overline{W}_{\vec{R}} = 0)$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل.

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I_\Delta}}$

واضح من الشكل أن:

$h = ac = oc - oa$

$= oc - oc\cos\theta_{max}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$

$\omega = \sqrt{\frac{2\times8\times10^{-1}\times10\times\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2\times10^{-1}}}$

$\omega = \sqrt{10}\ rad.s^{-1}$

(b) احسب السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس لحظة المرور بالشاقول.

$v_c = \omega\cdot r$

حيث: $r = oc = d$

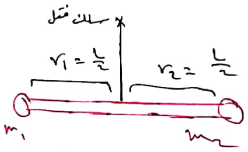
$\Rightarrow v_c = \sqrt{10}\times\frac{1}{4} \Rightarrow v_c = \frac{\sqrt{10}}{4}\ m.s^{-1}$

(5/ط) $m_1 = 0,2\,Kg \quad , T_0 = 2\pi\ s$

$K = ?$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$

حيث: $I_{\Delta(جملة)} = I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} + I_{\Delta_{ساق}}$






الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$I_o = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 0$

الساق مهملة الكتلة

$= 2m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m_1\frac{L^2}{2} = 0,2\,\frac{(1)^2}{2} = 0,1\ Kg.m^2$

ط2

$2\pi = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{K}} \Rightarrow \sqrt{\frac{0,1}{K}} = 1$

نربع .

$\frac{0,1}{K} = 1$

ط3

$\boxed{K = 0,1\ m.N.rad^{-1}}$

6) احسب قيمة التسارع الزاوي للنواس الفتل عند المرور بوضع $\alpha = 0,5\ rad$

$\bar{\alpha} = (\bar{\omega})'_t = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \cdot \bar{\theta}$

لكن:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ rad\,s^{-1}$

$\Rightarrow \bar{\alpha} = -0,5\,(1)^2$

$\bar{\alpha} = -0,5\ rad.s^{-2}$

المسألة الثالثة (عامة) (تعليمي مركب)

$r = \frac{2}{3}\,m$ 6

ط1

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

$I_\Delta = \underbrace{I_{\Delta/c} + m'd^2}_{\text{هايغنز}} \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2$

$I_\Delta = \frac{3}{2}mr^2$

كذلك

$d = oc = r$

ط4

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\cancel{m}r^2}{\cancel{m}gr}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3\times\frac{2}{3}}{2\times 10}}$

$T_0 = 2\,(sec)$

ط2

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

[موافقة أي يساويه بالدور]

$2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}} \Rightarrow l = 1\,m$

ط3

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

حيث:

$I_{\Delta\,جملة} = I_{\Delta\,للقرص} + I_{\Delta/m'} = \frac{1}{2}mr^2 + m'r^2$

$= \frac{3}{2}m.r^2$

بما أن كتلة القرص (m) تعتبر متوضعة في مركزه ولأن $m' = m$ لذلك مركز عطالة الجملة C يقع في منتصف نصف قطر القرص السفلي (منتصف ob) وبالتالي $d = oc = \frac{r}{2}$

وكذلك

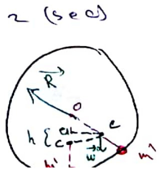
$m_{جملة} = m_{قرص} + m' = 2m$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{2m.g.\frac{r}{2}}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3\times\frac{2}{3}}{2\times 10}}$

$T_0 = 2\,(sec)$






ط4

$v_{m'} = \omega . r$

حيث: r : نصف قطر الدائرة التي ترسمها $m'$ = نصف قطر القرص

$\frac{2\pi}{3} = \omega \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \omega = \pi = \sqrt{10}\ rad.s^{-1}$

• لنطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: يصنع القرص فيه مع وضع توازنه زاوية $\theta_{max}$

الثاني: وضع الشاقول.

$\Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1} = \sum \bar{W}_{\vec{F}\,(1\to 2)}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}I_\Delta\,\omega^2 - 0 = \bar{W}_{\vec{w}} + \bar{W}_{\vec{R}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}I_\Delta . \omega^2 = mgh$

حيث: $(_{جملة})m = 2m$

$\omega = \sqrt{\frac{2.(2m)\,gh}{I_\Delta}}$

واضح من الشكل

$h = ac = oc - oa = oc - oc\cos\theta_{max}$

$= d\,(1-\cos\theta_{max})$

$h = \frac{r}{2}(1-\cos\theta_{max})$

$\omega = \sqrt{\frac{2mg.\frac{r}{2}(1-\cos\theta_{max})}{\frac{3}{2}mr^2}}$

$\omega = \sqrt{\frac{4g(1-\cos\theta_{max})}{3r}}$

$\pi = \sqrt{\frac{4\times 10\,(1-\cos\theta_{max})}{3\times\frac{2}{3}}}$

نربع:

$10 = 20\,(1-\cos\theta_{max})$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \cos\theta_{max}$

$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$

$\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\ rad = 60°$

انتهى الدرس الثالث

## (الورقة الذهبية)

(هام) - ادرس تجريبياً النواس الثقلي المركب وتوصل لمعادلته التفاضلية ثم برهن أن حركته (في حالة السعات الزاوية الصغيرة) جيبية دورانية واستنتج من هذه الحالة العلاقة العامة لدوره الخاص

(هام) عرف النواس الثقلي البسيط واستنتج العلاقة المحددة لدوره الخاص انطلاقاً من العلاقة العامة للدور الخاص لنواس ثقلي مركب (في حالة السعات الزاوية الصغيرة) ماذا تستنتج من هذه العلاقة

مسائل الدرس الهامة: 1 - 2 - 5

المسائل العامة: 5 - 6



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner